Una aplicación de las ecuaciones diferenciales (o lo que se debe hacer para motivar a los alumnos)

Resumen

Mis alumnos son jóvenes estudiantes de distintas carreras de ingeniería a quienes –en muchos casos– sólo les interesa salir de la universidad con su certificado y así poder "controlar el mundo". Generalmente piensan que las matemáticas son un mal necesario con el que hay que cumplir y nada más. Sufrí algún tiempo tratando de obtener su interés hasta que encontré una manera de hacerlo. Empecé a buscar ejemplos "atractivos" que mostraran relación entre el mundo real y el temario que tengo que cumplir y que, principalmente, les interesaran. El ejemplo a continuación es uno de ellos (Un Sistema de Ecuaciones Diferenciales).

Abstract: My students are boys and girls trying to get a BA degree in some area in engineering and, in many cases they just want to be out from the university with a certificate and "get control of the world". They normally think that math is a necessary illness but nothing more. I suffered some time trying to get their interest untill I found a way to do it. I started to look for "atractive" examples that show a relation between the real world and the syllabus of the class and that, mainly, keep them intersted. The example below is one of them. (A Differential Equations System)

El siguiente ejercicio ha tenido mucho éxito entre mis estudiantes de Ecuaciones Diferenciales.

En la primera parte aparece una copia de la hoja que doy a los alumnos y en la segunda, una manera de resolver el problema. Doy una o dos semanas para que entreguen la solución.

Alejandro Montes y Gómez Daza
Tecnológico de Monterrey,
Campus Chihuahua, México

Parte 1

CONFIDENCIAL

BOLETÍN NÚMERO UNO.- REPORTE DE LA POLICÍA JUDICIAL FEDERAL

1) La mañana siguiente a la noche de San Silvestre se sublevaron unos miles de personas en el sureño estado de Chiapas.
2) Tomaron violentamente y por asalto cuarteles y retenes de la zona, principalmente alrededor de la ciudad de San Cristóbal de las Casas
3) Se autonombran 'Ejército Zapatista de Liberación Nacional (EZLN)'
4) Aparentemente el líder es un tal 'Subcomandante Marcos', quien,
5) Dice haber declarado la guerra al H. Ejército del País.

BOLETÍN NÚMERO DOS.- REPORTE DEL EJÉRCITO NACIONAL

(Único) Los rebeldes serán llamados 'Transgresores'

BOLETÍN NÚMERO TRES.- REPORTE DEL DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIONES

1) El EZLN ha dejado una estela de muerte en la zona; además entre sus rehenes tiene a un exgobernador del estado
2) Se sospecha que los transgresores saben del modelo matemático ideado por el inglés Lanchester cuando la Primera Guerra Mundial
3) En vista de la puntería de Lacandón de sus hombres y por la manera en que una guerrilla opera, se sabe que 100 hombres del EZLN matan en promedio 15 soldados por día. También se especula que 100 soldados matan –en promedio– 10 zapatistas por día. Así, las ecuaciones que gobiernan el conflicto son:

$$dx/dt = -0.15y \qquad dy/dt = -0.10x \qquad \text{donde}$$

$x(t)$ = cantidad de tropa viva (mejor dicho, no muerta) en el tiempo t y
$y(t)$ = cantidad de guerrilleros no muertos en el tiempo t; t en días

4) En este momento las condiciones son:
Tropa del ejército = x_0 = 10,000 soldados
EZLN = y_0 = 5,000 guerrilleros
5) El presidente Zedillo se comunicó con el subcomandante Marcos y acordaron que:
"Ambos ejércitos (tal y como se encuentran ahorita) se enfrentarían en cierto lugar hasta que no quede alguien vivo de cualquier lado, el cual, será el perdedor"
"En ningún momento de la batalla habrá refuerzo para cualquiera de los dos contendientes."

POR ORDEN DEL JEFE DEL EJECUTIVO SE LE ORDENA A USTED QUE, INMEDIATAMENTE CONTESTE LAS PREGUNTAS A CONTINUACIÓN.
SE LE RECUERDA QUE EL FUTURO DEL PAÍS ESTÁ EN SUS MATEMÁTICAS.

SUPONIENDO QUE SE SIGUE CON LO ACORDADO ARRIBA,
A) ¿QUIÉN GANARÁ?
B) ¿CUÁNTOS SOBREVIVIENTES TENDRÁ? (El ganador, por supuesto)
C) ¿CUÁNTO TIEMPO DURARÁ LA BATALLA?
D) ¿CON CUÁNTA GENTE MÁS PODRÍA HABER GANADO (O EMPATADO) EL PERDEDOR?

Parte 2

La nota anterior la reciben (vía INTERNET) mis alumnos de ecuaciones diferenciales la quinta o sexta semana de clase. Es una muestra de los ejemplos que he tenido que idear para tratar de tenerlos motivados e interesados.

En la parte 3 se responden las preguntas A a D y en la parte 4 se proporciona otra demostración de la pregunta C usando la Transformada de Laplace. Además se agrega una breve bibliografía.

Parte 3

A) ¿Quién ganará?

Las ecuaciones son $dx/dt = -0.15\, y\,(t)$, $dy/dt = -0.10\, x(t)$, con condiciones iniciales $x(0) = 10$, $y\,(0) = 5$ (Miles).

Usando la regla de la cadena en la igualdad $y = y(x(t))$ obtenemos

$$dy/dt = (dy/dx)(dx/dt) \qquad \text{que implica}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{0.10}{0.15}\frac{x}{y} = \frac{2x}{3y}$$

Separando variables e integrando:

$$3y\,dy = 2x\,dx \quad \Rightarrow$$

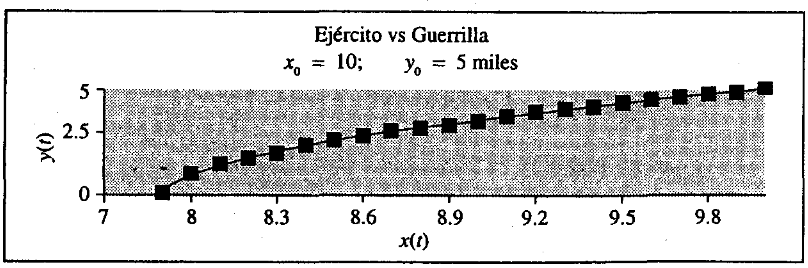
$$3\,y^2 = 2x^2 + c \tag{0}$$

Usando las condiciones iniciales:

$$3(25) = 2(100) + c \quad \Rightarrow \quad c = -125$$

Así, la solución es $3y^2 = 2x^2 - 125$ (1)

Observamos que x no puede ser cero, así que x, o sea el ejército, ganará la batalla. (Gráfica 1)



Gráfica 1. Evolución de los sobrevivientes a través del tiempo.

B) ¿Cuántos sobrevivientes tendrá el ganador?

Haciendo $y = 0$ en la ecuación (1) se tiene $x^2 = 125/2 \Rightarrow x = 7.906$

Esto es, con las condiciones anteriores, ganará el ejército y tendrá 7,906 sobrevivientes.

C) ¿Cuánto durará la batalla?

Para responder la pregunta, buscaremos explícitamente las funciones $x(t)$ y $y(t)$ que aparecen en nuestras hipótesis:

$$dx/dt = -0.15y, dy/dt = -0.10\,x$$

Derivando con respecto a t la primera ecuación:

$$d^2x/dt^2 = -0.15\,dy/dt = (-0.15)(-0.10)\,x = 0.015\,x = k^2\,x$$

donde k = raíz cuadrada de 0.015.

La solución general de esta ecuación de orden dos es

$x(t) = a\,\mathrm{Exp}\,(kt) + b\,\mathrm{Exp}\,(-kt)$ donde a y b son constantes por determinar y Exp es la Función Exponencial.

Para encontrar las constantes, evaluamos en cero tanto $x(t)$ como $dx/dt = -0.15\,y(t)$ y usamos las condiciones iniciales. Así,

$$x(\mathrm{o}) = a + b = 10\,(\mathrm{Mil})$$

$$dx/dt = ka\,\mathrm{Exp}\,(kt) - kb\,\mathrm{Exp}\,(-kt) = k(a - b) = -.015\,\mathrm{y}\,(\mathrm{o}) = (-0.15)\,5 = -0.75$$

o

$$a + b = 10$$
$$k(a - \mathrm{b}) = -0.75$$

Resolviendo simultáneamente y usando el hecho que k es la raíz de 0.015, obtenemos (aproximadamente)

$$a = 1.938, \quad b = 8.062$$

Por tanto,

$$x(t) = 1.938\,\mathrm{Exp}\,(kt) + 8.062\,\mathrm{Exp}\,(-kt) \qquad (2)$$

Usando un proceso similar al anterior, se encuentra que

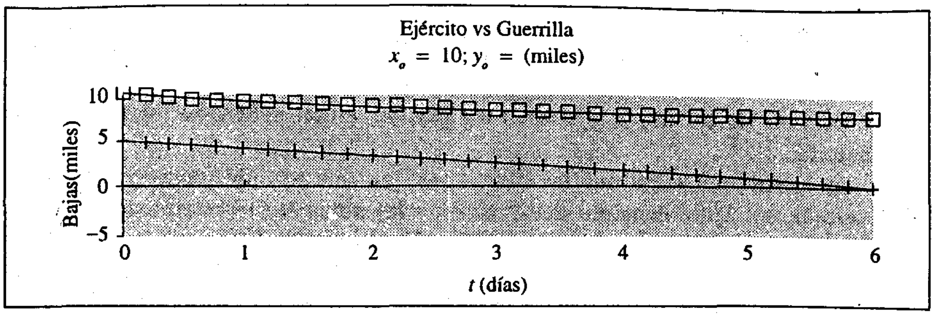
$$y(t) = -1.582\,\mathrm{Exp}\,(kt) + 6.582\,\mathrm{Exp}\,(-kt) \qquad (3)$$

(k = raíz cuadrada de 0.015)

La batalla terminará cuando $y(t)$ sea cero. Despejando t: $0 = -1.582\,\mathrm{Exp}\,(kt) + 6.582\,\mathrm{Exp}\,(-kt)$

$$\Rightarrow \mathrm{Exp}\,(2kt) = 6.582/1.582 \quad \Rightarrow \quad t = \mathrm{LN}\,(6.582/1.582)/(2k) = 5.82 \text{ días;}$$
(LN = Logaritmo Natural)

Así, la batalla durará 5 días y 20 horas, aproximadamente.



Gráfica 2. Sobrevivientes de cada bando a través del tiempo

D) ¿Cuánta gente debió tener inicialmente el perdedor para empatar o ganar?

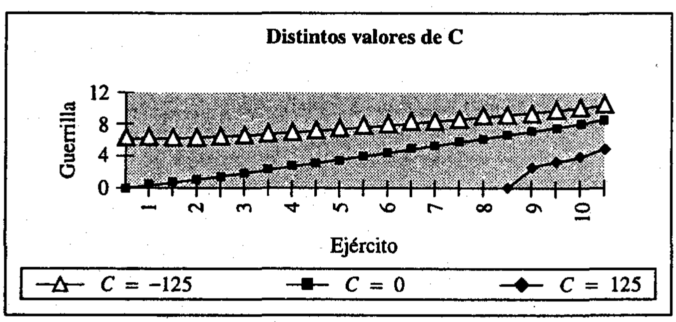
La solución general de la ecuación diferencial es la ecuación (0), que es una hipérbola:

$$3y^2 = 2x^2 + c \qquad x(o) = 10\ (\text{Mil})$$

Aquí notamos que si la constante c es:

- Menor que cero, el Ejército Nacional ganará (Hipérbola horizontal)
- Igual a cero, todos muertos (Hipérbola, degenerada: dos rectas)
- Se obtiene la línea recta que pasa por el origen y = Raíz(2/3) x
- (Así, habría empate si los zapatistas hubieran tenido originalmente 8,164.9 personas. Curiosamente, si se admite épsilon de combatiente vivo, la guerra duraría eternamente)
- Mayor que cero, la guerrilla gana. (Hipérbola vertical)

La siguiente gráfica muestra las tres posibilidades tomando c como −125, 0 y +125.



Gráfica 3. Las tres posibilidades tomando c como −125, 0 y +125

Parte 4

4.1) El inciso C puede resolverse usando la transformada de Laplace aplicada al sistema de ecuaciones

$$dx/dt = -0.15\,y, \qquad dy/dt = -0.10\,x$$

con condiciones

$$x(o) = 10, y\,(o) = 5 \text{ (miles)}.$$

En vista de lo simple, y sobre todo potente, de tal aplicación, se presenta a continuación.

Es interesante notar que las soluciones que este método proporciona (funciones hiperbólicas), aparentemente son distintas a las obtenidas anteriormente (exponenciales). Se le invita a comparar las soluciones (2), (3), con las (4), (5).

Así, usando Laplace:

$$s\,L(x) - 10 = -0.15\,L(y)$$
$$s\,L(y) - 5 = -0.10\,L(x)$$

Arreglando:

$$s\,L(x) + 0.15\,L(y) = 10$$
$$0.10\,L(x) + s\,L(y) = 5$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$L(x) = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 0.15 \\ 5 & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s & 0.15 \\ 0.10 & s \end{vmatrix}} = \frac{10s - 0.75}{s^2 - 0.015} = 10\frac{s}{s^2 - 0.015} - \frac{0.75}{k}\;\frac{k}{s^2 - 0.015}$$

$$= 10\,L(\text{Cos}\,h(kt)) - 0.75\,L(\text{Sen}\,h(kt))/k, \qquad (k = \text{raíz cuadrada de } 0.015\,)$$

por lo tanto

$$x(t) = 10\,\text{Cos}\,h(kt) - 0.75\,\text{Sen}\,h(kt)/k \qquad (4)$$

Análogamente

$$y(t) = 5\,\text{Cos}\,h(kt) - \text{Sen}\,h(kt)/k$$

Escribiendo

$$y(t) = 0 = 5\,\text{Cos}\,h(kt) - \text{Sen}\,h(kt)/k$$

y resolviendo:

$$t = LN((1 + 5k)/(1 - 5k))/2k = 5.819 \text{ días}$$

Así, obtenemos la misma respuesta: la batalla durará 5 días y 20 horas, aproximadamente.

4.2) Esta nota está basada en el modelo CONVENCIONAL de combate, (ideado por el inglés F.W. Lanchester) y NO ES, realmente, un modelo de guerrilla.

Referencias

Braun, Coleman, Drew., (Editors), *Differential Equation Models*, Springer-Verlag, 1978
Braun, M., *Differential Equations and Their Applications*, Springer-Verlag, 1992 (TAM 12)
Newman, J.R., *The World of Mathematics*, Vol. 4, Simon and Schuster, 1956