Educación Matemática

Vol. • 9 No. • 3 Diciembre 1997

ISSN 0187-8298

Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.

Educación Matemática

Vol. 9 • No. 3 • Diciembre 1997

Contenido

Contenido

EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Se publica en los meses de abril, agosto y diciembre

Vol. 9 • No. 3 • Diciembre, 1997 • Tiraje 2000 ejemplares

SUSCRIPCIÓN

anual, incluidos gastos de envío. En México: $ 75.00. Otros países: US$ 30.00

Envíe Cheque o giro postal o bancario a

Nebraska 199, Col. Nápoles, 03810 México, D. F. Tel. 5 23 09 94. Fax 5 43 11 73

Publicidad

Laura Morfín Chong

Envíe sus colaboraciones a la redacción, en la misma dirección.

Las opiniones expresadas en los artículos son responsabilidad de los autores.

ISNN 0187-82988. Impreso en México

Producción: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Franqueo pagado publicación periódica, permiso provisional autorizado por SEPAMEX. Certificado de licitud de título No. 4243, de contenido No. 3459.

Luis Ferrero,
Centro de Profesores y Recursos
Majadahonda
Madrid, España
Eugenio Filloy Yagüe,
Depto. de Matemática Educativa CINVESTAV
México, D. F.
Alfinio Flores Peñafiel,
Arizona State University
Tempe, USA
Jesús Roberto García Pérez,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo,
Departamento de Matemática Educativa
Morelia, Michoacán, México
Pedro Gómez,
Una Empresa Docente, Universidad de los Andes
Bogotá, Colombia
Silvia Gómez Calderón,
Universidad Autónoma de Baja California, Facultad de Ciencias
Ensenada, B.C., México
Fredy González,
Instituto Pedagógico de Maracay
Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Maracay, Venezuela
Sarah González de Lora,
Centro Latinoamericano de Investigación y Desarrollo
en Educación Matemática
Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra
Centro Latinoamericano de Investigación y Desarrollo
en Educación Matemática
Santiago de los Caballeros, República Dominicana
Ángel Gutiérrez,
Depto. de Didáctica de la Matemática E.U. de Magisterio
Universidad de Valencia
Valencia, España
Arturo Hernández Ramírez,
Instituto Tecnológico de Cd. Madero
Cd. Madero, Tamaulipas, México
José Ramón Jiménez,
Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas
Hermosillo, Sonora, México
Moisés Ledesma Ruíz,
Escuela Normal Superior de Jalisco
Guadalajara, México
Antonio Jose Lopes,
Centro de Educaçao Matematica
São Paulo, Brasil
Eduardo Luna,
Barry University, Department of Mathematics and Computer
Science, School of Arts and Sciences
Miami Shores, USA
Emilio Lluis Riera,
Instituto de Matemáticas, UNAM
México, D. F.
Armando Martínez Cruz,
Northern Arizona University
Flagstaff, EUA
Jorge Martínez S.,
Universidad CUDEC
Querétaro, México
Rodolfo Méndez Balderas,
Benemérita Escuela Nacional de Maestros
México, D. F.
Leonel Morales Aldana,
Universidad Gálvez
Guatemala, Guatemala
Luis Enrique Moreno Armella,
Depto. de Matemática Educativa CINVESTAV
México, D. F.
Julio Mosquera,
Universidad Nacional a Distancia
Caracas, Venezuela
Ma. del Rocío Nava Álvarez,
Escuela Normal Superior del Estado de México
Toluca, México
Sofía Josefina Ontiveros Quiroz,
Centro de Investigación en Ciencias Físico-Matemáticas
Fac. de Medicina, Universidad Autónoma de Querétaro
Querétaro, México
Fidel Oteiza,
Depto. de Matemática y Ciencias de la Computación
Universidad de Santiago de Chile
Santiago de Chile, Chile
François Pluvinage,
Rectorat de Strasburg-Service FORM
Strasburg, Francia
Luis Radford,
Université Laurentienne
École de sciences de l'education
School of Education
Sudbury, Canadá
Luisa Ruiz Higueras,
Departamento de Didáctica de las Ciencias
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Jaen
Jaen, España
Patrick Scott,
New Mexico State University
Las Cruces, EUA
Isabel Soto,
Centro de Investigación y Desarrollo de la Educación
Santiago de Chile, Chile
Guadalupe T. de Castillo,
Universidad de Panamá
Panamá, República de Panamá
Marco Antonio Valencia Arvizu,
Universidad Autónoma de Sonora
Hermosillo, México
Eduardo Zárate Salas,
Universidad Pedagógica Nacional
México, D. F.

Grupos Colaboradores

Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Comisión Nacional de Educación Matemática de Chile
Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de México
Colegio de Profesores de Educación Secundaria "Moisés Sáenz"

Editorial

Ha sido frecuente en los editoriales de *Educación Matemática,* la mención a que la *Revista* presenta y responde a la gran diversidad de enfoques e intereses de los miembros de la comunidad de educadores que la lee o la nutre con sus escritos. Asimismo se ha hecho referencia continua a la existencia de distintas metodologías y acercamientos a los asuntos que se abordan. Tal diversidad, se dice también en no pocas ocasiones, es reflejo de un estado de la cuestión en América Latina e incluso en Iberoamérica (en los últimos años investigadores de España han hecho valiosas contribuciones a la *Revista*). Y efectivamente, puede percibirse –analizando los índices de la publicación– que igual se presentan propuestas de enseñanza (con mayor o menor sustento en la investigación o la experimentación) que se incluyen documentos sobre historia de las matemáticas o se hacen análisis de tipo epistemológico referidos a conceptos matemáticos específicos; en los últimos años se comienza también a considerar a los actores de la educación matemática en tanto que profesores y alumnos, es decir, ubicados en la situación escolar. No es extraño, por otra parte, que los trabajos que no abordan directamente el problema de la enseñanza, mencionen como fin último la intención de contribuir a su mejoramiento aun cuando en su contenido no se refieran directamente a ella. Las contribuciones, pues, como se ha dicho, abordan perspectivas y niveles diversos de un mismo fenómeno: la enseñanza de las matemáticas. Y los editores de la *Revista* parecen asumir (como parte de una comunidad que se expresa ya por cerca de una década a través de ella) que la gran gama de intereses, enfoques y metodologías, en tanto que resultado de la complejidad, es inevitable.

Después de 20 años de producir explicaciones y reflexiones en el campo (y a casi 10 años ininterrumpidos de edición de la *Revista*) si bien es incuestionable que el fenómeno de la educación matemática es de suyo complejo (y de ahí en buena medida se justifica la diversidad) parecería pertinente, el reflexionar de manera detenida y compartida acerca de las identidades, las fronteras, las diferencias, y los núcleos de la educación matemática: ¿es ésta una práctica educativa?, ¿es un campo de reflexión?, ¿es un campo de reflexión sobre el sujeto cognoscente o sobre el sujeto alumno?, ¿es lo que podríamos llamar psicología de las matemáticas?, o esto último es apenas el insumo para alimentar lo que sería una didáctica, más cercana a la educación matemática? ¿O es que la educación matemática es todo esto?, Nos parece que estas preguntas no han sido lo suficientemente discutidas y no están aún resueltas.

Nos parece que es tiempo de comenzar la reflexión y el debate sobre el asunto. Habría que tratar de caracterizar los distintos enfoques, hacer un inventario de problemas, de métodos, de acercamientos, de paradigmas que aparecen como telones de fondo. Al igual que en este número se hace una interesante reseña de la evolución del significado de la matemática, parecería pertinente (a diez años de publicación de *Educación Matemática*) comenzar a hacer un balance de la producción en el campo, no sólo en términos de sus contenidos y problemas, sino también en términos de los paradigmas y metodologías que la sustentan. En otras palabras, valdría la pena apuntar hacia una revisión y caracterización de lo que, en la práctica, es la educación matemática en el mundo hispano, en su vertiente reflexión sistemática sobre el asunto.

Recursos Intuitivos que Favorecen la Adición de Fracciones: Estudio de Caso

Resumen

A través de una amplia investigación referida al *lenguaje de las fracciones* y al *vínculo de éste con los correspondientes conceptos*, en el cuarto grado de primaria de una escuela pública aplicamos un *cuestionario exploratorio* mediante el cual pudimos reconocer algunas modalidades frecuentes de desempeño de los niños. Uno de tales patrones es el que ahora estamos comunicando, atendiendo al esclarecimiento que puede promover a nivel de las propuestas y procesos didácticos comprometidos en el aula. Esa modalidad de desempeño (exhibida por varios miembros del grupo en estudio) se caracterizó por la facilidad con la que dichos alumnos podían resolver adecuadamente los problemas aditivos, cuando éstos eran expresados mediante un *pictograma* (en marcado contraste con las tareas en las que los mismos niños fracasaban ya que debían abordar las situaciones aditivas desde *tratamientos algorítmicos convencionales*). El seguimiento realizado al respecto asumió la forma de un *estudio de caso* cuyo *punto de partida* lo constituyeron los resultados obtenidos en algunas tareas del *cuestionario exploratorio*. El *instrumento primordial* del estudio de caso se desarrolló a partir de la selección de la alumna que en el cuestionario presentó de manera sistemática el perfil antedicho, quien fue *entrevistada de modo individual*. Complementariamente, tal estudio se enriqueció mediante la realización de algunas observaciones de clases (lo cual nos proporcionó información acerca de los modelos didácticos adoptados por la profesora a cargo del grupo escolar).

Abstract: During the development of a research referred to the language of fractions and its relantionship with the corresponding concepts, we applied a questionnaire in the fourth grade of a primary school. This report is centered on Fabiola case, who was interviewed by us because she exhibed an effective use of pictorial representations and the concrete aids linked with the sum of fractions (in contrast with her own wrong algorithmic handle). The case study was compound by some qualitative observations of classes and the Fabiola's results in the questionnaire and in the interview.

Marco Teórico

Laborde (1990) destaca la estrecha proximidad planteada entre el lenguaje «natural» y el lenguaje matemático, en todos los espacios en los que éste se expresa. Específicamente, la escritura matemática se estructura a partir de la amalgama de la escritura de la lengua

Martha Elena Valdemoros Álvarez
Departamento de Matemática Educativa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México, D. F.

y de un conjunto propio de signos (*«símbolos motivados»*, *«iconos geométricos»*, *«pictogramas»*) que resultan combinados con letras y con los significantes técnicos de los numerales. De conjunto, la *activa construcción* —por parte del estudiante— de todos estos instrumentos simbólicos se encuentra acompañada por múltiples dificultades cognitivas derivadas de la gran diversidad de aquéllos y de los obstáculos asociados a su correspondiente articulación.

Una de las aportaciones fundamentales de Behr, Lesh, Post y Silver (1983), Lesh, Post y Behr (1987) ha consistido en destacar la confluencia de modos diversos de representación que están involucrados en los procesos de simbolización adscritos a la enseñanza y el aprendizaje matemáticos (específicamente, dibujos o diagramas, símbolos escritos, representaciones asociadas al uso de materiales concretos fijos o manipulativos, entre los más relevantes). Asimismo, los investigadores citados han enfatizado la *complejidad* que asumen todos los *procesos de «traducción» desde un sistema de representación a otro*. Los primeros planteamientos retoman y enriquecen las formulaciones originales de Bruner (1966), quien en el aprendizaje reconoció la sucesión de *representaciones de la actuación* («enactive representations», según las propias designaciones del autor), *representaciones icónicas* y *representaciones simbólicas*, a través del desarrollo de procesos cognitivos en espiral crecientemente complejos. Con lo cual, las coincidencias básicas entre aquellos investigadores y Bruner están referidas a la naturaleza de dichas representaciones.

A partir de sus estudios centrados en los números naturales, Sastre y Moreno (1980) identifican algunos enlaces entre el *lenguaje verbal* (esto es, las expresiones de la *lengua* asociadas al aprendizaje y la enseñanza matemáticos), los *signos aritméticos* involucrados y los *dibujos* usados en tales situaciones didácticas. Sastre (1984) resalta la circunstancia de que —tanto en la línea histórica de desarrollo de esos *modos diversos de simbolización*, como en el terreno actual de su construcción por parte de cualquier sujeto— la confluencia de aquéllos concita *múltiples dificultades*. Con el propósito de trascender algunos de dichos obstáculos cognitivos y a modo de crear un puente hacia el *uso de los signos arit-méticos*, de *naturaleza convencional y arbitraria* (entendiendo como *«arbitraria»* aquella característica del signo que destaca la ausencia de rasgos perceptuales comunes entre este último y el objeto designado por dicho signo), Sastre propone el uso mediador de ciertos *dibujos* que permitan la asignación de sentido al plano gráfico, dada la similitud que dichas representaciones guardan con los objetos reales simbolizados. Esto último pudiera resumirse en los siguientes términos: **para presentar al niño los modos de simbolización arbitrarios asignados a determinadas entidades numéricas y sus respectivas operaciones, es conveniente comenzar con los modos no-arbitrarios de simbolización de contidades relacionadas con esas mismas entidades** (ya que los modos no-arbitrarios de simbolización son más accesibles al sujeto por las similitudes que guardan con los objetos reales designados en la experiencia del aula).

En el terreno de las *fracciones*, Kieren et al. (1985) optan por introducir a través de dibujos las tareas aritméticas de reparto propuestas al niño, ya que por esa vía éste puede llegar a expresar con más claridad su pensamiento matemático. De ese modo, los investigadores mencionados afirman que el niño desarrolla espontáneamente el *«algoritmo gráfico»* de la suma de fracciones (es decir, sustituye de hecho el algoritmo convencional por dibujos que representan dicha operación). Tal «algoritmo gráfico» facilita al escolar la resolución de la tarea, al tiempo que permite al investigador realizar una mejor exploración de sus elaboraciones mentales.

Por otra parte, Kieren (1983, 1984, 1988) reconoce que la *partición*, la *formación de una unidad divisible* y la *equivalencia cuantitativa* (a los que él identifica como *«mecanismos constructivos» de la fracción*) constituyen la raíz cognitiva primordial de los diversos *contenidos semánticos intuitivos* que cualquier escolar puede constituir, con respecto al mencionado conjunto numérico y mediante el respaldo de la enseñanza.

Streefland (1990a, 1990b) enfatiza que los estudiantes encuentran sus propios caminos (sus propias modalidades de representación, agregamos nosotros) para desarrollar operaciones en cierto terreno numérico; ése es un punto de partida óptimo para la correspondiente organización de la enseñanza. En particular, Streefland (1991) considera que la construcción de ***modelos visuales*** cumple el papel de brindar importantes canales para el desarrollo de los procesos de matematización de los alumnos.

En recientes reportes de investigación (Valdemoros, 1991, 1992a, 1993a, 1993b, 1994a) han sido descritas y analizadas con gran detalle algunas modalidades de desempeño infantil, tanto en el terreno de la identificación de fracciones como en el de la suma de dichos números. En el marco de presentación de diversas tareas aditivas, portadoras de la misma información cuantitativa expresada mediante distintos sistemas de representación, los niños (de 9 y 10 años de edad) pudieron tomar el dibujo como un canal idóneo para la explicitación de su pensamiento. Tal rasgo estuvo tan acentuado que los escolares apelaron espontáneamente a dicha forma de representación, aún en las situaciones en las que se requerían otras modalidades de respuesta. Esa tendencia se vio reflejada en el desarrollo de soluciones adecuadas y en los planteamientos inconclusos o incorrectos (las últimas circunstancias nos hacen advertir que, siendo el dibujo un poderoso canal de expresión para los niños, requiere ser tratado por la enseñanza, a fin de alcanzar su máxima eficacia).

El estudio de caso

Los señalamientos que efectuamos en la presente sección del artículo se encuentran fuertemente sustentados por otros reportes de investigación (Valdemoros, 1992b, 1994b). El estudio que estamos comunicando aquí está referido a un caso, cuyo punto de partida lo brindó un *cuestionario exploratorio* centrado an las *fracciones* y aplicado en *cuarto grado de una escuela primaria pública*. Tras el análisis del mencionado cuestionario pudimos identificar una importante tendencia en algunos estudiantes de ese grupo escolar, quienes podían resolver adecuadamente los problemas aditivos cuando éstos eran expresados a través de un pictograma (en contraste con el propio manejo inadecuado del algoritmo convencional); tal dominio intuitivo y pictórico de las situaciones aditivas constituye el problema del presente estudio de caso. A posteriori, desarrollamos *algunas observaciones directas del aula* y una *entrevista* con la niña que exhibió de modo sistemático la tendencia que acabamos de describir. Seguidamente presentamos los aspectos metodológicos fundamentales que sostienen este estudio de caso.

Combinando métodos

El estudio de caso estuvo inmerso en una amplia investigación, la cual se inició con un *cuestionario exploratorio* aplicado a 37 estudiantes de cuarto grado de primaria, antes de la Reforma Educativa de 1993. La meta fundamental del mismo fue indagar qué vínculos eran reconocibles entre la construcción del *lenguaje de las fracciones* y de los *conceptos* ligados a tales números. El cuestionario estuvo conformado por 29 problemas de distinta naturaleza; entre ellos, 15 tareas fueron referidas a la suma y resta de fracciones. El último constituyó el ámbito desde el cual comenzamos el estudio del caso que nos ocupa; con ello, el *cuestionario* se transformó en el *primer instrumento involucrado* en dicho estudio de caso ya que nos permitió abstraer el *perfil básico de éste*.

El segundo *instrumento metodológico* del presente estudio fue la *observación directa del aula*, en circunstancias en las que la maestra a cargo del grupo desarrolló algunas actividades de enseñanza centradas en las fracciones. La inclusión de este recurso estuvo motivada por la necesidad de conocer los *tratamientos didácticos* que recibieron los 37 estudiantes mencionados previamente. Este canal también nos permitió corroborar el tipo de desenvolvimiento detectado –a través del cuestionario– en los niños asociados al caso.

El *tercer instrumento metodológico* fue la *entrevista*, la que reunió la información primordial del estudio de caso. La misma adoptó una modalidad individual de desarrollo, apegándose a una meta inicial de exploración cuya subsiguiente ampliación nos condujo a designarla como «entrevista didáctica». Dicha identidad no fue adoptada porque dispusiéramos de algún «modelo de enseñanza» preestablecido a ser incluido en la entrevista, sino que tal distinción sirvió a los fines de caracterizar, de algún modo, su propia naturaleza. En contraste con las ya clásicas entrevistas desarrolladas en el ámbito de la Matemática Educativa (de carácter exploratorio, mayoritariamente), ésta fue proyectada para ser realizada en dos tiempos: originalmente se concretaría una labor de investigación netamente exploratoria, en tanto que –habiendo agotado los límites de la primera fase– la entrevistadora asumiría luego un papel más propositivo, procurando introducir tareas paralelas o problemas simplificados, cuando el sujeto entrevistado evidenciara algún obstáculo cognitivo momentáneamente infranqueable (sin que el protagonismo del último fuese abandonado, en esta nueva etapa). Así, organizamos una entrevista compuesta por 10 tareas ligadas a la suma y resta de fracciones ***(expresadas en distintos planos de representación y susceptibles de ser comparadas entre sí, por parejas de problemas)***, las que resultarían depuradas a posteriori de la elección del estudiante a ser entrevistado.

Validación del estudio

El contraste entre los tres métodos –en lo que al caso considerado se refiere– estuvo previsto como el recurso estabilizador de todo el seguimiento efectuado por distintas vías, en tanto permitió reconocer los modos más regulares de desenvolvimiento del sujeto.

Con dicha confrontación de métodos aplicamos ciertos *procedimientos para la validación de la investigación*. Específicamente, apelamos a una *triangulación* de todas las situaciones cuyos *contenidos cognitivos y didácticos* fueran *comunes* y constatamos por esa vía la permanencia de los rasgos fundamentales del caso.

El cuestionario y el perfil del caso

Las respuestas desarrolladas por los 37 estudiantes, a través del cuestionario, nos permitieron reconocer una gran diversidad de procesos cognitivos susceptibles de ser inferidos, desde las soluciones planteadas frente a las tareas de suma de fracciones. Sin embargo, muchas de las repuestas manifiestas requerían mayor profundización y una óptima reconstrucción de los procesos cognitivos a ellas ligados, en la dirección de poder constatar las hipótesis que llegamos a formular en cada una de tales situaciones. Esa fue la condición básica exhibida –entre otros– por el caso que aquí nos ocupa.

¿Cuáles fueron los *rasgos primordiales* de *este caso*? El *cuestionario* nos facilitó el reconocimiento de cierta *regularidad* manifiesta en algunos alumnos: **cuando la suma de fracciones era introducida mediante un problema verbal, estos niños (7/37) apelaban a tratamientos algorítmicos incorrectos, en contraste con las soluciones adecuadas que ellos desarrollaban en presencia de la misma suma de fracciones, a partir del uso de un dibujo** (una figura geométrica, una colección de objetos dados por la investigadora, o bien, una representación pictórica libremente seleccionada por los escolares). Es decir, los mencionados estudiantes podían superar sus propios errores algorítmicos, en las situaciones en las que abandonaban el ámbito de los signos convencionales y arbitrarios, desarrollando pictóricamente la suma de fracciones a través de un dibujo; con ello, los niños conformaban eficazmente sus «algoritmos gráficos» (según la designación de Kieren, 1985, destacada por nosotros con anterioridad).

Asimismo, llegamos a detectar *otro rasgo relevante* asociado al caso, el cual involucró el *reconocimiento de la unidad*. De conjunto, el grupo escolar incorporado a nuestro estudio evidenció una fuerte tendencia: en las tareas que requerían la elaboración personal de un problema asociado a cierta suma (nivel de «invención» de problemas, por parte del niño) los estudiantes escogieron situaciones de medición bastante convencionales, pero no pudieron reconocer una unidad de medida compatible con cada uno de tales planteamientos. Los escolares vinculados a este caso (7/37) también expresaron esa dificultad, en el nivel de formulación del problema verbal; sin embargo, ellos mismos podían trascender dicho obstáculo cuando escogían un dibujo y desarrollaban un «algoritmo gráfico». Ilustramos esto más adelante (en la Tabla 1 y en la sección a ella asociada).

Por todo lo anterior, caracterizamos el *caso* como ***expresión de un dominio intuitivo de las situaciones aditivas referidas a las fracciones***, el cual estuvo ***favorecido por el uso de representaciones pictóricas***.

Tal dominio intuitivo podría devenir de un ejercicio generalizado y eficiente de los "mecanismos constructivos" de la fracción ("partición", "equivalencia cuantitativa" y "formación de unidades divisibles", Kieren, 1983, 1984, 1988), aplicados luego en el ámbito de la adición, espacio de mayor complejidad cognitiva. En esos términos formulamos la ***hipótesis del caso***.

Para la realización de la entrevista y la consiguiente profundización del caso, entre todos los alumnos vinculados a éste (7/37) escogimos a Fabiola. El motivo de dicha decisión estuvo referido a su desempeño general eficiente, el cual nos permitiría abordar su manejo de la adición de fracciones, sin la interferencia de otros obstáculos cognitivos. En las 15 tareas del cuestionario ligadas a la suma y resta de fracciones, Fabiola frecuentemente evidenció ciertos errores sintácticos típicos (al desarrollar los algoritmos convencionales), en tanto que el dibujo le permitió acceder sistemáticamente a soluciones correctas, a nivel de la elaboración de «algoritmos gráficos» (dicho recurso fue espontáneo en las situaciones de resta de fracciones, bloque de tareas del cuestionario en el que nosotros no demandamos a los niños el uso de representaciones pictóricas, dadas las dificultades de su articulación con la sustracción).

El caso, a la luz de la observación del aula

La observación directa constituyó el canal por el cual llegamos a reconstruir algunas características primordiales de la enseñanza recibida por este grupo escolar. De ese modo, constatamos que el *modelo básico* usado para la identificación de la fracción y el subsiguiente establecimiento de comparaciones numéricas, fue el *geométrico*; en cuyo marco prevalecieron los *significados* de la *relación parte-todo* y la *medida*. En tanto que en el terreno de la *adición de fracciones*, los *tratamientos* fueron eminentemente *algorítmicos*. Esto último facilitó, en parte, el completamiento de la hipótesis ya formulada: si el ***dominio intuitivo de la adición*** previamente descrito no fue propiciado por la enseñanza, emergía entonces como un ejercicio espontáneo de los niños ligados al caso.

La observación directa del aula favoreció la elección de Fabiola, ya que la pudimos identificar como la alumna con mayor participación, durante el desarrollo de las actividades colectivas de la clase.

La entrevista y sus resultados

En esta sección exhibimos la Tabla 1, la que contiene los problemas presentados a Fabiola y las correspondientes ***respuestas finales*** planteadas por la niña. Ante la trascendencia de algunos pasajes de esta entrevista y de ciertos procesos de resolución intermedios (ausentes en dicha tabla), nos centraremos particularmente en ellos, a través del análisis.

En la Tarea 1, Fabiola elaboró un texto estático (es decir, un escrito en el que no se registraron cambios asociados a una secuencia temporal). Aunque el mismo involucró una situación de medición, la niña no identificó una unidad de medida que le resultara compatible. Por otra parte, ambas fracciones estuvieron referidas a distintas clases de objetos. Tales inconsistencias de su discurso imposibilitaron el planteamiento final de un enunciado interrogativo, dado que éste incorporaría un cierre de sentido (irrealizable bajo dicha modalidad de articulación). Asimismo, las inconsistencias del discurso recién aludidas, revelaron cuáles eran los principales obstáculos cognitivos enfrentados por la alumna.

Tabla 1. Tareas y soluciones desarrolladas en la entrevista de Fabiola.

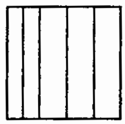
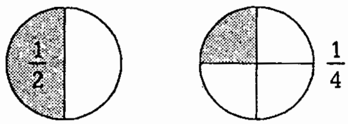
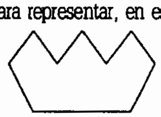
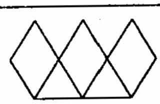
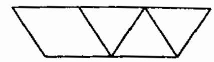
Tarea 1 Inventa un problema que contenga 2/8 + 2/4	"Benito tiene 2/8 de manzanas y 2/4 de ciruelas = 2/9 + 2/4 = 2/12"
Tarea 2 Inventa un problema que contenga 1/2 - 1/4	"Carlos tiene 1/2 de chocolares y le dio 1/4 a su hermano. ¿Ahora cuánto tiene de chocolates?" 1/2 - 1/4 = 1/4
Tarea 3 Escoge una figura en la que puedas representar: 2/8 + 2/4	 3/4
Tarea 4 ¿Cómo representarías 1/2 - 1/4, con lápiz y papel?	"Juan compró medio chocolate y solamente se comió la mitad de lo que tenía, o sea, un cuarto de chocolate." 
Tarea 5 Confrontación de las respuestas a las Tareas 1 y 3.	Fabiola evidenció gran conflicto ante ambas soluciones e intentó ratificarlas, diciendo que eran equivalentes. Con la ayuda de nuevos dibujos, ella reconoció su error sintáctico.
Tarea 6 Contraste entre las soluciones de las Tareas 2 y 4.	La estudiante realizó esta tarea sin conflicto alguno y confirmó que la fracción 1/4 era el resultado común de ambos problemas.
Tarea 7 Reconstrucción de dos soluciones contradictorias, frente a unos problemas del cuestionario exploratorio que incluían la misma información cuantitativa.	En la entrevista, Fabiola rectificó el error sintáctico que previamente manifestara en el cuestionario exploratorio, gracias al desarrollo de un nuevo 'algoritmo gráfico'. Este último (como el dibujo conformado en el cuestionario) brindó una representación correcta de la resta considerada.
Tarea 8 En este conjunto, representa: 1/2 + 2/6	Fabiola también escribió dos fracciones equivalentes.
Tarea 9 Usa los bloques para representar, en esta figura: 2/8 + 2/4 	 La niña combinó dos tipos diferentes de blo-ques y señaló a "6/8" como el correspondiente resultado.

Tabla 1. Tareas y soluciones desarrolladas en la entrevista de Fabiola. (continuación)

Tarea 10 En esta figura, utiliza los bloques para representar: 1 - 2/5 	 Ella dijo: "sacamos dos quintos... quedan tres quintos".

Con respecto al tratamiento algorítmico vinculado al texto de la Tarea 1, la entrevistada sumó entre sí los denominadores (como si fueran números naturales).

En presencia de la Tarea 2, la niña desarrolló dos intentos de solución. En el primero de los cuales, ella escribió: **"Carlos tiene 1/2 kilo de chocolates y 1/4 de frituras".** A pesar de que no llegó a finalizar la elaboración del mencionado texto, a través de él pudieron ser identificadas los dos obstáculos cognitivos señalados en el párrafo anterior: la ausencia de una unidad de medida ligada a la segunda fracción (en contraste con la primera fracción, la que resultó asociada a una unidad de medida convencional) y la referencia de ambos sumandos a clases distintas de objetos (o sea, a diversos referentes concretos). Finalmente, en el segundo intento escribió el texto contenido en la Tabla 1, el cual es portador de una reelaboración o reestructuración rectificadora de su interpretación inicial. Aquí, la resta le permitió a Fabiola referir la operación a una única clase de objetos (esto es, al mismo referente concreto) e iniciar el tránsito hacia la identificación de cierta unidad de medida idónea.

En cuanto al último manejo algorítmico de la estudiante (en la Tarea 2), su manifiesto dominio de la equivalencia podría ser atribuido a la familiaridad con la que pudo reconocer a las fracciones involucradas en la resta. Como consecuencia de ello, la solución planteada fue correcta.

Asimismo, la diversidad evidenciada en ambas actividades escritas (Tareas 1 y 2) pusieron de relieve una notoria inestabilidad en las soluciones propuestas, en presencia de los problemas verbales. En esto y en vinculación con los obstáculos cognitivos reconocidos previamente, Fabiola exhibió similares patrones de respuesta, tanto en el cuestionario exploratorio como en la entrevista.

En el marco de resolución de la Tarea 3, la entrevistada escogió consecutivamente distintos todos continuos, a los que subdividió conforme a estrategias de partición de diferente naturaleza. El salto de una figura a otra estuvo dado en términos de descarte del modelo precedente; con lo cual, su tercera figura emergió como la respuesta definitiva. Seguidamente, reproducimos las representaciones pictóricas desarrollados por Fabiola (véase la Figura 1).

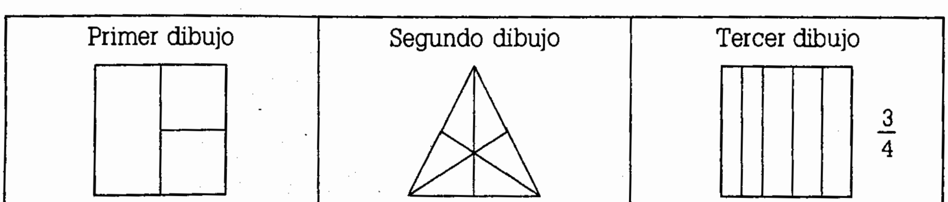
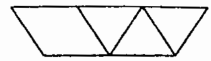


Figura 1. Diseños de Fabiola, asociadas a la Tarea 3

Tabla 1. Tareas y soluciones desarrolladas en la entrevista de Fabiola. (continuación)

Tarea 10 En esta figura, utiliza los bloques para representar: 1 - 2/5 	 Ella dijo: "sacamos dos quintos... quedan tres quintos".

Con respecto al tratamiento algorítmico vinculado al texto de la Tarea 1, la entrevistada sumó entre sí los denominadores (como si fueran números naturales).

En presencia de la Tarea 2, la niña desarrolló dos intentos de solución. En el primero de los cuales, ella escribió: **"Carlos tiene 1/2 kilo de chocolates y 1/4 de frituras".** A pesar de que no llegó a finalizar la elaboración del mencionado texto, a través de él pudieron ser identificadas los dos obstáculos cognitivos señalados en el párrafo anterior: la ausencia de una unidad de medida ligada a la segunda fracción (en contraste con la primera fracción, la que resultó asociada a una unidad de medida convencional) y la referencia de ambos sumandos a clases distintas de objetos (o sea, a diversos referentes concretos). Finalmente, en el segundo intento escribió el texto contenido en la Tabla 1, el cual es portador de una reelaboración o reestructuración rectificadora de su interpretación inicial. Aquí, la resta le permitió a Fabiola referir la operación a una única clase de objetos (esto es, al mismo referente concreto) e iniciar el tránsito hacia la identificación de cierta unidad de medida idónea.

En cuanto al último manejo algorítmico de la estudiante (en la Tarea 2), su manifiesto dominio de la equivalencia podría ser atribuido a la familiaridad con la que pudo reconocer a las fracciones involucradas en la resta. Como consecuencia de ello, la solución planteada fue correcta.

Asimismo, la diversidad evidenciada en ambas actividades escritas (Tareas 1 y 2) pusieron de relieve una notoria inestabilidad en las soluciones propuestas, en presencia de los problemas verbales. En esto y en vinculación con los obstáculos cognitivos reconocidos previamente, Fabiola exhibió similares patrones de respuesta, tanto en el cuestionario exploratorio como en la entrevista.

En el marco de resolución de la Tarea 3, la entrevistada escogió consecutivamente distintos todos continuos, a los que subdividió conforme a estrategias de partición de diferente naturaleza. El salto de una figura a otra estuvo dado en términos de descarte del modelo precedente; con lo cual, su tercera figura emergió como la respuesta definitiva. Seguidamente, reproducimos las representaciones pictóricas desarrollados por Fabiola (véase la Figura 1).

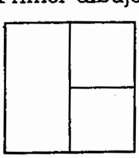
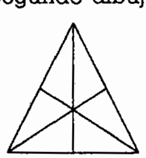
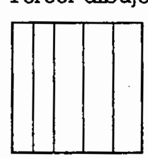
Primer dibujo	Segundo dibujo	Tercer dibujo
		 $\frac{3}{4}$

Figura 1. Diseños de Fabiola, asociadas a la Tarea 3

Se nos dificultó la reconstrucción del pensamiento ligado a dichas rectificaciones pictóricas, ya que nuestra entrevistada no mantuvo un diálogo fluido. Con gran esfuerzo y ante nuestras preguntas, la niña expresó (con respecto a los dibujos 1 y 2): ***"son dos cuartos y un cuarto (que significa dos octavos)... son tres... tres cuartos".*** Al reconocer a "tres cuartos" como el resultado, se centró en el numerador e intentó dividir el todo inicial en tres partes. No obstante, en la tercera figura pudo imaginar y localizar concretamente el complemento de tres cuartos, señalando la parte no pintada del cuadrado. A posteriori, reconstruyó mentalmente el proceso de identificación de la fracción, mientras decía: ***"un octavo, dos octavos ..."*** (en tanto, desplazaba su índice sobre las dos partes iluminadas junto al lado izquierdo de la última figura) ***"un cuarto y un cuarto"*** (indicando, luego, las partes pintadas del lado derecho de dicho cuadrado). Al concluir, escribió el numeral **«3/4»**. El sentido del sombreado fue reconocible a través de sus últimas verbalizaciones, a partir de las cuales se abrieron paso algunas fracciones unitarias; dichas explicitaciones y la existencia de cuatro patrones diferenciados de sombreado ratifican las afirmaciones de Kieren (1985), con respecto al papel generador que cumplen las fracciones unitarias. Muchos de los compañeros de Fabiola desarrollaron sombreados semejantes a éstos, en el cuestionario.

La Tarea 4 enfrentó a Fabiola con una demanda inexistente en el cuestionario exploratorio, donde evitamos la inclusión de actividades que -directa o indirectamente- propiciasen la representación pictórica de la sustracción, en virtud de la marcada ambigüedad que suelen detentar esos dibujos. Decidimos abrir tal espacio de exploración en la entrevista, atendiendo a la riqueza que ésta facilita, en el ámbito de confluencia y articulación de distintos tipos de representación. Por ello, la consigna de trabajo de la Tarea 4 fue expresada en términos tales que permitiese la propia elección de Fabiola, en el "plano gráfico" o "de lápiz y papel" (designación que genéricamente incluye la escritura, el dibujo o cualquier otra clase de marcas sobre el papel). En una primera aproximación, la estudiante escribió: **"Juan compró 1/2 de papel de lustre, pero solamente ocupó 1/4. ¿Cuánto papel le sobró?"** Frente a lo cual, nosotros le sugerimos que lo dibujase y la niña realizó los diseños exhibidos en la parte superior de la Figura 2. Para dotar de sentido a lo dibujado, espontáneamente Fabiola escribió un nuevo texto: **"Juan había comprado medio chocolate y sólo se comió la mitad de lo que tenía, o sea, un cuarto de chocolate."** Puede observarse que la alumna ha propuesto por ambas vías de representación, en este espacio de resolución de problemas, un modelo muy dinámico.

Nosotros le preguntamos a la niña si agregaría algo más a la ya realizada secuencia de dibujos o si así era suficientemente clara. Ante lo cual, Fabiola amplió la serie pictórica, agregándole dos diseños encadenados por el sentido (los mismos se encuentran reproducidos en la parte inferior de la Figura 2). Bajo la última modalidad de representación secuencial, ella reconstruyó el todo e identificó la unidad a la que la fracción estaba referida.

La Tarea 5 consistió en el contraste entre dos soluciones contradictorias, correspondientes a las Tareas 1 y 3 (en las que a la misma suma le asignó resultados diferentes). Al advertir dicha circunstancia, la entrevistada dio muestras de un profundo conflicto cognitivo. Luego, se esforzó por mantener como válidas ambas soluciones, por lo que llegó a afirmar que las fracciones (2/12 y 3/4) explicitadas por ella como resultado de la suma, eran "equivalentes". Para poner a prueba tal error, demandamos a la niña la

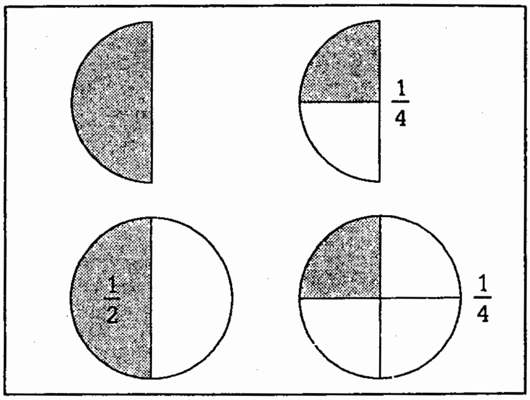


Figura 2. Secuencia pictórica asociada a la Tarea 4

realización de un dibujo que le permitiese confirmar lo que estaba planteando. Por dicha vía, Fabiola comprobó que la supuesta equivalencia entre 2/12 y 3/4 era falsa. Fue notoria -mediado este recorrido en torno a la Tarea 5- la prevalencia circunstancial del algoritmo sobre los recursos intuitivos de la representación pictórica, en virtud de que Fabiola parecía aferrarse a la pseudo-certeza provista por las entidades numéricas y su manejo sintáctico; este último constituyó la fuente del error, ya que la alumna estableció un algoritmo no convencional para la suma, en la Tarea 1, dando después por verdadera la equivalencia entre ambos resultados obtenidos en el plano de los procedimientos sintácticos.

Lo destacado en el párrafo anterior ofrece una velada advertencia acerca de los peligros que conlleva una enseñanza unidireccional, como la que -en este caso- nosotros pudimos reconocer (a través de la observación directa del aula). En dicho escenario advertimos que Fabiola y sus compañeros fueron orientados hacia el manejo predominantemente algorítmico de la fracción, quedando relegados los tratamientos intuitivos e informales, durante el desarrollo de las actividades grupales.

Las Tareas 9 y 10 de la entrevista introdujeron la manipulación de ciertos materiales concretos (los Bloques de Zullie, 1975), en asociación con la suma y resta de fracciones, por cuyo intermedio nos adentramos en la exploración de las «representaciones de la actuación" (en el sentido de lo designado por Bruner, 1966, como "enactive representations"). Fabiola realizó algunos breves ensayos previos, comparando entre sí dichos bloques (de diferentes formas, tamaños y colores) y sobreponiéndolos alternativamente a las figuras dadas. Con bastante rapidez, la escolar resolvió adecuadamente ambos problemas; las respectivas respuestas han sido incluidas en la Tabla 1. En particular, ante la Tarea 10 *la niña cubrió toda la figura* con los bloques triangulares, para retirar luego dos de éstos y expresar ***"tenemos cinco quintos ... sacamos dos quintos ... quedan tres quintos"*** (la Figura 3 contiene la reconstrucción del mencionado proceso); este pasaje de la entrevista esclareció el rol estructurante desempeñado por la unidad, la cual fue inicialmente representada, traducida y explicitada por la alumna ("tenenos ***cinco quintos***" en asociación con ***1***, en tanto cubría toda la figura), antes de centrarse en la resta indicada por el enunciado del problema (1 - 2/5) y dar solución a éste.

Usa los bloques para representar, en esta figura: 1 - 2/5

"Tenemos cinco quintos... sacamos dos quintos... quedan tres quintos"

Figura 3. Proceso de resolución vinculado a la Tarea 10

Su desenvolvimiento en estos dos últimos marcos de tarea, reveló que Fabiola había generalizado el dominio pictórico de la adición de fracciones a otros terrenos muy concretos de representación, los que permanecieron ligados al plano de la acción y la experiencia.

Las Tareas 6, 7 y 8 fueron realizadas con marcada facilidad, razón por la cual no nos detenemos en un análisis específico de las mismas.

Conclusiones

Fabiola pudo generalizar un reconocimiento primordialmente intuitivo de las relaciones entre fracciones y las operaciones de adición y sustracción, desde el plano pictórico hacia otras modalidades de representación concreta. Con lo cual, tales recursos conformaron los procesos más fluidos y accesibles que la entrevistada comprometió, en la resolución de los problemas propuestos.

En general, a través del uso de las representaciones concretas destacadas en el párrafo anterior, la niña evidenció adecuadas identificaciones de la unidad, en los diversos contextos de tarea, a la par que efectuó particiones correctas en la mayoría de los todos considerados y accedió a un manejo elemental de la equivalencia entre fracciones. Es decir, lo antedicho nos permitió constatar la hipótesis formulada previamente, ante este caso.

La entrevistada manifestó fluctuaciones en el dominio de dichos "mecanismos de construcción de la fracción", cuando tales recursos intuitivos entraron en competencia con los procedimientos sintácticos y algorítmicos, en los que llegó a depositar su mayor confianza (por influencia de una instrucción previa básicamente respaldada por estos últimos).

El Caso de Fabiola puede ser de gran interés para el maestro, ya que pone de relieve la necesidad de otros puntos de partida y nuevas orientaciones a plasmar en la enseñanza (distintas de la eminentemente algorítmica), habiendo reconocido algunas tendencias espontáneas de los niños, las que podrían alcanzar mayores niveles de eficacia en tanto fuesen fortalecidas desde el trabajo en el aula. Específicamente, Fabiola evidencia que la ***incorporación del dibujo a la enseñanza*** brindaría al estudiante una potente fuente de ***representaciones cargadas de sentido***, en tanto ***el dibujo fuese convenientemente vinculado con la propia experiencia del sujeto cognoscente, con los contenidos instruccionales a los que resulte referido y con otros modelos intuitivos de enseñanza*** (entre otros, aquéllos que se apoyan en el uso de materiales concretos).

Referencias

Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. (1983). Rational-Numbers Concepts. En: R. Lesh y M. Landau (Eds.) *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes* (91-126). Orlando: Academic Press.

Bruner, J. (1966). On Cognitive Growth. En: J. Bruner, R. Oliver y P. Greenfield (Eds.) *Studies in Cognitive Growth*. New York: Wiley.

Kieren, T. E. (1983). Partitioning, Equivalence and the Construction of Rational Number Ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*. 506-508.

Kieren, T. E. (1984). Mathematical Knowledge Building: The Mathematics Teacher as Consulting Architect. *35th International Congress on Mathematical Education*. 187-194.

Kieren, T. E., Nelson, D.y Smith, G. (1985). Graphical Algorithms in Partitioning Tasks. *The Journal of Mathematical Behavior,4*. 25-36.

Kieren, T. E. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. En: J. Hiebert y M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades, 2* (162-181). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Laborde, C. (1990). Language and Mathematics. En: P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics and Cognition* (53-69). New York: Cambridge University Press.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. En: C. Janvier (Ed.) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (33-40). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Sastre, G. (1984). *Aprendizaje de los Signos Aritméticos y su Generalización.* Barcelona: Instituto Municipal de Investigación en Psicología Aplicada a la Educación..

Sastre, G. y Moreno, M. (1980). *Descubrimiento y Construcción de Conocimientos.* Barcelona: Gedisa.

Streefland, L. (1990a). Realistic Mathematics Education. What does it mean? En K. Gravemeijer, M. van den Heuvel y L. Streefland (Eds.) *Contexts Free Productions Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education* (1-9). Utrecht: State University.

Streefland, L. (1990b). Free Productions in Teaching and Learning Mathematics. En K. Gravemeijer, M. van den Heuvel y L. Streefland (Eds.) *Contexts Free Productions Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education* (33-52). Utrecht: State University.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 22, 46-61.

Valdemoros, M. (1991). *Observaciones de Algunas Clases Centradas en las Fracciones.* Reporte Técnico. México: CINVESTAV-Matemática Educativa.

Valdemoros, M. (1992a). *Análisis de los Resultados Obtenidos a través de un Examen Exploratorio del «Lenguaje de las Fracciones». Segunda Parte.* Reporte Técnico. México: CIN-VESTAV-Matemática Educativa.

Valdemoros, M. (1992b). *Las Fracciones en Cuarto Grado: Estudio de Casos. Primera Parte.* Reporte Técnico. México: CINVESTAV-Matemática Educativa.

Valdemoros, M. (1993a). *La Construcción del Lenguaje de las Fracciones y de los Conceptos Involucrados en él.* Tesis Doctoral. México: CINVESTAV-Matemática Educativa.

Valdemoros, M. (1993b). The Language of Fractions as an Active Vehicle for Concepts. *Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of PME-NA, 1.* 233-239.

Valdemoros, M. (1994a). Fracciones, Referentes Concretos y Vínculos Referenciales. *Memorias de la VIII Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* 21-30.

Valdemoros, M. (1994b). Various Representations of the Fraction through a Case Study. *Proceedings of the Eighteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2.* 16-23.

Zullie, M. E. (1975). *Fractions with Pattern Bloocks.* Palo Alto: Creative Publications.

La Didáctica de las Matemáticas en la Perspectiva Sistémica*

Resumen

El objetivo de este trabajo es ofrecen una muestra de lo que la perspectiva sistémica aporta al debate de la construcción de una teoría de la educación matemática. Se parte de una reflexión sobre el programa de trabajo del grupo internacional Theory of Mathematics Education (TME), que plantea la necesidad de un nuevo paradigma para encarar el alto nivel de complejidad del fenómeno educativo en cuestión. Tal novedad la constituiría el enfoque de los sistemas complejos. Se exponen sintéticamente los aportes de dos autores europeos, quienes ofrecen diferentes bases para la eventual construcción de una teoría sistémica de la didáctica de las matemáticas. Finalmente, tomando en consideración la teoría luhmanniana de los sistemas autorreferentes y autopoiéticos, se ofrece una visión personal de lo que ésta aporta para replantear la problemática, destacando las inusitadas formas que toma a la luz de esta teoría.

Abstract. This article offers a sample of what systems approach contributes to the debate about the construction of a theory of mathematics education. The starting point is the working program of the International Group Theory of Mathematics Education (TME), that states the necessity of a new paradigm in order to cope with educational complexity at large. Such new paradigm is the complex systems approach. At first, we summarize the constributions of two European authors, then, in the framework of the Luhmannian theory, we show unusual forms to think some traditional problems of the didactical field.

¿Con qué finalidad queremos desarrollar la teoría de la educación matemática? Ciertamente porque se quiere tener la opción de considerar la educación matemática como una ciencia y no hay ciencia sin teoría.

Elfriede Wenzelburger **

* El contenido de este trabajo es un tratamiento específico a algunas de las ideas desarrolladas en la tesis doctoral "Didáctica y Teoría de Sistemas. Hacia una articulación teórica", realizada en la Facultad de Filosofía y Letras de la UNAM, la cual contó con el apoyo del Programa SUPERA por un año.

** "Teoría e investigación en educación matemática", Ponencia presentada en el TME-4, Oaxtepec, Mor., 1990.

Sofía Josefina Ontiveros Quiroz
Universidad Autónoma de Querétaro
México

La reflexión a nivel mundial sobre la construcción teórica de la didáctica de las matemáticas tiene, en cierta forma, un origen fechable. En el programa del V Congreso Internacional de Educación Matemática, celebrado en Australia en 1984, se propuso como área temática la «Teoría de la Educación Matemática». El objetivo fue proponer y discutir cuestiones referentes al desarrollo de tal teoría. La tarea logró convocar a gente de gran renombre en el campo, entre otros, H. G. Steiner y H. Steinbring de Alemania, N. Balacheff y G. Brousseau de Francia, L. P. Steffe y T. J. Cooney de Estados Unidos, Juan Díaz Godino de España y Elfriede Wenzelburger de México.

De aquí surgió un grupo internacional que se dió a conocer como "el TME", denominación derivada de sus siglas en inglés: Theory of Mathematics Education. Presidió este grupo el Dr. Steiner, entonces director del *Institut für Didaktik der Mathematik* de la universidad de Bielefeld en Alemania. Este equipo buscó concentrar los esfuerzos, las investigaciones y los eventos académicos que en la comunidad internacional trataran esa temática.

Con la expectativa de hacer avanzar la construcción de un corpus teórico que diera coherencia y unidad a la extensa y diversificada producción del campo, se iniciaron y continuaron -por lo menos durante una década- estos trabajos. El objetivo era ambicioso y la necesidad acuciante: disponer de una teoría legitimada como científica y, por ende, legitimizante del quehacer de la comunidad en educación matemática.

Al parecer los resultados fueron magros. Juan Díaz Godino, a propósito de éstos, escribía en 1991: «...no resulta fácil apreciar en ellos un avance en la configuración de una disciplina académica, esto es, una teoría de carácter fundamental que establezca los cimientos de una nueva ciencia por medio de la formulación de unos conceptos básicos y unos postulados elementales.» (p. 26). Sin embargo, sentida como una necesidad real, el esfuerzo ha persistido de diferentes maneras y con diferentes resultados.[1]

Ciertamente en México la reflexión en esta materia tampoco ha estado ausente, como puede constatarse en el informe del 2o. Congreso Nacional de Investigación Educativa.[2] Y los artículos que continúan publicándose al respecto hacen patente que el tema sigue vigente en las preocupaciones de los educadores matemáticos del país. Sin dejar de reconocer lo que estas aportaciones han siginificado, por una parte, y al margen del impacto nacional e internacional así como de la misma vida y desarrollo del grupo TME, por otra, a nosotros nos interesa rescatar lo que en su programa de trabajo planteó, a nuestro juicio, una de las posibilidades más ricas de teorización

1 En el ICME-7 (7th International Congress on Mathematical Education) el Dr. Jeremy Kilpatrick retomó la cuestión y de allí surgió una comisión formada por Kilpatrick, Balacheff, Howson, Sfard y Sierpinska que convocó a una tarea similar a la del TME. Aunque más enfocada a definir la investigación en educación matemática, planteaba como una cuestión previa la pregunta sobre la especificidad del objeto de estudio. CFr. "What is Research in Mathematics Education, and What Are Its Results?", Discussion Document for an ICMI Study, Boletin no. 33, **ICMI Secretary**, Dinamarca, 1992, p. 17.

2 A propósito, llama la atención en este informe que no se mencione nada sobre el TME, a pesar de que su 4a. Conferencia Internacional se celebrará en Oaxtepec, Mor., en 1990.

en el campo de la educación matemática. Nos referimos en concreto al enfoque sistémico. Específicamente, a la perspectiva de los sistemas complejos, autopoiéticos y autorreferentes.

La visión sistémica en educación matemática

Puede afirmarse que este enfoque había ya aparecido en los trabajos de la escuela francesa de didáctica de las matemáticas. Es común y conocido para los enterados que los desarrollos teóricos de esta escuela se basan en conceptos sistémicos, tales como «sistema didáctico», «noosfera», «entorno», «condiciones ecológicas», etc. Sin embargo, también es fácil reconocer que estas concepciones están bastante lejos de la moderna teoría de sistemas. Por esta razón, nosotros consideraremos la aparición de este enfoque en el debate de la didáctica de las matemáticas a partir de la constitución del TME, ya que fue en su programa de trabajo donde se formalizó su utilización para acometer los problemas de construcción de una teoría de la didáctica o la educación matemáticas.

A continuación presentaremos una síntesis de la propuesta del TME y dos de los aportes, a nuestro modo de ver, mejor centrados en sus lineamientos. Finalmente, haremos una exposición breve del planteamiento de Niklas Luhmann y algunas reflexiones personales sobre la cuestión.

Podría decirse que el acta constitutiva del TME fue su programa de trabajo. Este documento, redactado por el Dr. Steiner, recoge y condensa el debate sobre la identidad de la llamada educación matemática. Por supuesto, la discusión sobre el carácter científico de sus producciones también se hace presente. Steiner (1985), en el docu-mento revisado y enriquecido con diferentes aportaciones, finca todo el planteamiento del programa en una idea vertebral: «La educación matemática es un campo cuyos dominios de referencia y acción se caracterizan por una *extrema complejidad.*» (p. 11). El reconocimiento de esta complejidad lleva a la propuesta de asumir un marco teórico acorde: «Un enfoque sistémico con sus tareas autorreferentes puede ser entendido como un *meta-paradigma* organizador para la educación matemática. Esto parece ser una necesidad a fin no sólo de enfrentarnos con la complejidad en toda su extensión, sino también porque el carácter sistémico se manifiesta en cada problema particular del campo.» (p. 11).

El documento expresaba así una visión compartida por muchos: la educación matemática como un sistema complejo donde podían distinguirse múltiples subsistemas. Al respecto, Kilpatrick (1981) había ya señalado: «diseñar y conducir estudios que puedan manejar las complejidades de estos múltiples contextos es tal vez el mayor reto que enfrentamos.» (p. 24). Sin duda, empezaba en este campo a tomarse conciencia de que la complejidad del objeto no podía seguirse argumentando como excusa para el desorden teórico, sino que la propia complejidad debía ser teorizada. De aquí surgió la demanda-propuesta de un tratamiento sistémico del problema.

En opinión de Steiner este desafío dividía a la comunidad. Mientras que unos reaccionaban a la extrema complejidad de los problemas en educación matemática afirmando que era imposible atacar esos problemas de una manera científica y que, por lo tanto, la educación matemática *nunca podría llegar a ser una ciencia* o un campo con fundamentación científica, otros procedían a la *sistemática reducción de complejidad* por medio de seleccionar y favorecer un aspecto especial, haciendo de esta especificidad el centro determinante del campo total. Otro elemento que enrarecía más el panorama era el hecho de que, con frecuencia, se asignara un papel preferente y dominante a ciertas disciplinas, teorías o métodos para establecer las orientaciones básicas y los métodos de investigación de la educación matemática. Esto ponía en el tapete de la discusión el asunto de la interdisciplinariedad, donde muchos criticaban el fuerte préstamo de teorías de otras disciplinas ante la falta de teorías «domésticas». Entre otros, Sanders se quejaba de que «la investigación educativa que hunde sus raíces en las teorías y paradigmas de las disciplinas relacionadas puede hacer avanzar esas disciplinas, pero no necesariamente avanza el conocimiento científico del proceso educativo.» (citado por Kilpatrick, 1981, p. 23).

Agravando esta situación se tiene, por otra parte, que entre quienes piensan que la educación matemática como ciencia es posible, y que de hecho existe como tal, proliferan las más diversas definiciones; también su clasificación es motivo de desacuerdo. Hay quienes las clasifican como un campo especial de las matemáticas, como una rama de la epistemología, como una ciencia cognitiva, como un subdominio de la pedagogía o de la didáctica general, como una ciencia social, como una ciencia de frontera, como una ciencia aplicada, como una ciencia fundamental, etc., etc.

Frente a este alto nivel de complejidad del problema, Steiner (1985) concluye: «Aparentemente hay necesidad de una *base teorética* que nos permita un mejor entendimiento e identificación de las diversas posiciones, aspectos e intenciones que subyacen las diferentes definiciones de educación matemática en uso, para analizar las relaciones entre ellas e integrarlas en una *comprensión dialéctica* del campo total. Aunados a una perspectiva sistémica, una *filosofía complementaria* y una *teoría de la actividad* parecen proveer las herramientas conceptuales adecuadas para encarar este problema». (p. 12).

Si bien Steiner es, en cierta medida y en ese momento, el portavoz de la tendencia sistémica en educación matemática, él mismo no hace sino marcar ciertos lineamientos y recoger diversos puntos de vista para una eventual producción en esa línea. Por ejemplo, menciona que el debate a la fecha sobre el estatuto científico de la educación matemática se enfoca más a la cuestión de en qué grado ésta se aproxima a una ciencia normal en el sentido kuhnniano. Aquí se advierte que la inclinación es considerar el desarrollo de una teoría en sus tres fases: preparadigmática, multiparadigmática y monoparadigmática, habiendo cierto acuerdo en que el estadio que ha alcanzado la didáctica de las matemáticas es el intermedio, aún cuando ciertas áreas de la investigación tendrían características de ciencia normal, como es el caso de los estudios sobre adición y substracción.

Sin embargo, llama la atención sobre un señalamiento de Romberg (1983), quien dice que el paso crítico es ir de las macro aseveraciones al análisis micro. Es decir, se necesita más investigación y de mayor amplitud sobre el estatuto del desarrollo teórico, de la construcción de modelos, del uso de paradigmas, etc. Se necesitan estudios comparativos del desarrollo teórico de la educación matemática en otros países y de los instrumentos epistemológicos usados. Revisar lo que se hace en otros campos con similares problemas de construcción, por ejemplo, el caso de la física teórica donde algunos promueven el abandono del punto de vista que sostiene que una teoría es un conjunto de enunciados propios y exclusivos, en favor de una combinación que produzca un *núcleo teórico* y un conjunto asociado de aplicaciones acordes. Aparentemente hay razones para esperar que esto fuera más útil en la conceptualización del papel que juegan las teorías y sus aplicaciones a la educación matemática.

En el marco de la discusión macro vs. micro modelos, el documento de referencia plantea una posición intermedia. No se comparte la opinión de algunos en el sentido de que la educación matemática no necesita modelos globales sino una colección de modelos relativamente específicos para situaciones específicas, en cambio, se sostiene que el desarrollo de ambos es importante, porque sólo dentro de un macro modelo pueden los micro modelos eventualmente ser integrados. Por otra parte, se cuestiona la supuesta oposición radical entre éstas y otras dicotomías comunes en el campo, preguntándose si tales antagonismos o «contradicciones» no podrían ser mejor tratadas bajo el concepto de *complementariedad*.

La complementariedad refiere no a la simultaneidad de A y no-A sino a la paradoja: A porque no-A. En este sentido, el principio de complementariedad lo que reconoce es lo inevitable de la dualidad en todo conocimiento. En palabras de Pattee que Steiner cita, «La complementariedad puede ser vista como el reconocimiento de la paradoja. Esta tiene sus raíces en el dualismo sujeto-objeto y en la paradoja básica del determinismo y el libre albedrío... No es en modo alguno un concepto claro y bien distinguido, pero es rico y sugestivo. El principio de complementariedad no promueve la resolución de la oposición binaria central... Por el contrario,... el principio de complementariedad requiere simultáneamente el uso de modos descriptivos que son formalmente incompatibles. En lugar de tratar de resolver contradicciones aparentes, la estrategia es aceptarlas como un aspecto irreductible de la realidad.» (p. 15) El núcleo de todas las complementariedades sería la de *conocimiento* y *actividad*, la cual aparece en el debate académico como el problema de la relación entre *teoría* y *práctica*.

Surge de estas reflexiones la necesidad básica que plantea el TME: contar con un marco teórico o un metaparadigma que combine selectividad y unidad. Fundamentalmente se trata de disponer de una teoría que permita lidiar con la *complejidad* de lo educativo, con sus diversas manifestaciones, con sus paradojas, con sus múltiples contextos, con sus relaciones *inter, intra* y *trans* sistémicas. Ante ello Steiner (1985) concluye: «Puedo vislumbrar básicamente tres componentes del TME, que están, por supuesto, interrelacionados:

— *meta-investigación* y desarrollo de *meta-conocimiento* con respecto a la educación matemática como disciplina.

— desarrollo de una perspectiva comprehensiva de la educación matemática que comprenda investigación, desarrollo y práctica por medio de un *enfoque sistémico.*

— desarrollo de un papel regulador dinámico de la educación matemática como disciplina con respecto al *interjuego teoría-práctica* y a la *cooperación interdisciplinaria.*» (p. 16)

Sus metas explícitas y primarias fueron «darle a la educación matemática un mayor grado de *auto-asertividad* y *auto-reflexividad* para promover *otro modo de pensar y de mirar* los problemas y sus interrelaciones». (p. 16)

¿Cómo se concretó esa «nueva forma de pensar» entre quienes buscaban construir una teoría de la educación matemática? Una muestra de los primeros intentos son los trabajos de Seeger (1985) y Schológlmann (1985) que reseñamos en el siguiente apartado. Ellos muestran el nivel de la mira que el TME se impuso y, tal vez, ello mismo explique por qué tan pocos aceptaron el reto.[3]

Las primicias

Falk Seeger y Wolfgang Schológlmann iniciaron la búsqueda de respuestas al problema de la construcción teórica de la didáctica o educación matemáticas -tales como su autonomía, la relación teoría-práctica, su objeto de estudio, su cientificidad- formulándolas a la luz de la teoría de sistemas. Estos fueron sus primeros avances.

Seeger (1985) propone como conceptos claves para elaborar la noción de autonomía: *actividad, auto-organización* y *habitus.* Con el concepto de actividad busca esclarecer la relación teoría-práctica en términos de ***teoría*** de la educación matemática y ***práctica*** de la educación matemática, partiendo de la idea de «resistencia de la práctica al cambio» para una reconstrucción del concepto de práctica. Por lo que toca a su tratamiento de la actividad, su marco es psicológico, específicamente recurre a la teoría de la actividad de Leontiev, enfocándola a la actividad de enseñanza. Más aún, centrándose en la actividad del profesor, cuyo motivo es la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en el aula. En seguida, el modelo de actividad se aplica al problema del percatamiento o toma de conciencia que el maestro realiza sobre su propia actividad.

Seeger trabaja sobre la cuestión de la toma de conciencia de la actividad docente en el clásico sentido autorreferencial del sujeto que se autopercata de sí mismo. Para este autor, como para muchos otros, existen contenidos conscientes e inconscientes en la enseñanza matemática y la toma de conciencia «espontánea» sólo es lograda en los contenidos explícitos.[4] Apoyándose en el trabajo de G. H. Mead,

3 No deja de llamar la atención que, dada la amplia influencia y reconocimiento de la obra piagetiana en la educación, la teoría de sistemas, fundamento de dicha obra, no resulte atractiva para la mayoría de los estudiosos del campo de la educación matemática.

4 Sin duda la conceptualización más divulgada en este sentido es la de "curriculum oculto", referida a los contenidos escolares implícitos, que son aprendidos incluso con mayor eficacia que los contenidos explícitos.

formula como prerrequisito para el desarrollo del sí mismo, de la identidad, de la autoconciencia, el ser capaz de verse a sí mismo en el otro. Este otro es la comunidad en pleno, es, en términos de Mead, «el otro generalizado». Pero si la propia identidad depende de este percatamiento del otro generalizado, entonces tal identidad no puede ser producto de una introspección individual.[5]

Es en este proceso de significación y desarrollo de la autoconciencia que Seeger sitúa el corrimiento de la línea de demarcación entre conceptos explícitos e implícitos. Esta búsqueda de significado para sí se ajusta a lo que se concibe como procesos auto-organizados. Aquí el autor hace un primer intento por articular su exposición sobre la toma de conciencia con el enfoque de sistemas, tratando de explotar lo que él llama «el potencial heurístico del concepto para la teoría de la educación matemática». La noción es aplicada a los siguientes problemas: la actividad como un ***sistema***, el ***sistema*** social que conforman los maestros y la teoría y la práctica como ***sistemas***, todos ***auto-organizados.*** La tesis básica de los sistemas auto-organizados es que la estructura y función de un sistema cumple el propósito primario de una continua autorrenovación o autopoiesis, es decir, el sistema está ocupado primariamente con la renovación de sí mismo a través de sí mismo, todo lo demás es secundario. Esto significa, adicionalmente, que la cuestión está centrada en el proceso. La resistencia de la práctica docente al cambio se interpretaría, así, como una consecuencia del carácter auto-organizado de esa práctica.

En el contexto de la discusión que plantea Seeger, la actividad del maestro y en particular su autonomía, sería el punto de partida de una teoría sistémica de la educación. Si el mecanismo que hace de los sistemas unidades autónomas es la autopoiesis, esto implicaría que el auto-concepto de la práctica en términos de un modelo input-output iría en contra de la propia autonomía del sistema. Al parecer, para este autor, en la práctica de enseñanza se darían simultáneamente funciones que obedecen a una y otra concepción: «hay una función de la escolarización que cumple una relación input-output y hay una función de la escolarización que es autónoma y autorreferencial» (p. 16). Para Seeger la noción de autonomía del sistema con respecto a su entorno podría concebirse como el origen «de una cierta forma de 'conciencia' del sistema» (p. 11) la cual, obviamente, no puede ser implementada, dadas las características autopoiéticas del sistema. Al respecto, se señala: «Esto, sin embargo, no implica, que la investigación científica y la práctica educativa no puedan asociarse en el proceso de auto-organización. Pero la investigación tiene que tomar en cuenta que este proceso no puede ser determinado ni por los métodos científicos ni por sus resultados.» (p. 12). En la perspectiva del autor la investigación y la teoría científica sólo pueden establecer una relación cooperativa con la actividad docente. Entre teoría y práctica existiría una «interfase» caracterizada por un intercambio de temas de los científicos y teorías de los prácticos, aunque, en sus propias palabras, «no es este el punto de encuentro entre 'el pensar' como teoría, opuesto a la práctica como 'el hacer'. « (p. 12)

Apunta ya aquí la concepción de la ciencia como parte del entorno de lo educativo y, por lo tanto, como ***no determinante*** de éste: «el campo de la educación

---

5 Lo anterior implica un distanciamiento que permite resignificar la propia actividad en una dimensión social en el concepto de Luhmann, es decir, como sentido para uno que es también sentido para otros.

matemática reacciona a su entorno y al mismo tiempo cambia en menor o mayor medida los rasgos del entorno que son relevantes para la enseñanza de las matemáticas». (p. 17). Seeger señala aquí, algo que es un verdadero pilar de la concepción autopoiética de los sistemas, que la relación entre sistema y entorno (educación/ciencia) es una relación de coevolución. El impacto de este enfoque ha sido muy importante en la teorización de la relación teoría/práctica, un impacto que también se ha dejado sentir, en opinión de Seeger, sobre Bourdieu y su teoría de la práctica.

El concepto bourdieuano de *habitus*, clave en su teoría, contiene la noción de autorreferencia propia del enfoque de los sistemas autorreferenciales y autopoiéticos. Bourdieu define el *habitus* como disposiciones que simultáneamente son práctica estructurada y estructurante de la práctica, «principios de generación y estructuración de prácticas y representaciones que pueden ser objetivamente 'reguladas' y 'regular' sin ser en ningún sentido el producto de la obediencia de reglas» (Bourdieu, 1977, p. 85). El *habitus* trasciende las intenciones subjetivas y los proyectos conscientes tanto individuales como colectivos. Esto supone el abandono de la búsqueda de los principios generativos de la actividad práctica sólo *dentro* del sujeto (y en éste, sólo dentro de su cabeza) para cambiar la mirada hacia la práctica como sistema auto-organizado. Una consecuencia de este cambio de mira es también la necesidad de abandonar una perspectiva exclusivamente interaccionista como base para la reconstrucción conceptual de la práctica de enseñanza.[6]

Así pues, la actividad del maestro establece una práctica definida y es, a su vez, determinada por una práctica definida. Básicamente el concepto de *habitus* se centra en esta autorreferencialidad de la práctica. Desde el punto de vista del análisis científico esta teoría de la práctica obliga a replantear el problema de la práctica de la teoría. Como Seeger lo expone: «Obviamente, la clase de herramientas conceptuales, así como la actitud general hacia la propia práctica teorética determina el resultado de un análisis científico de la práctica. Esto implica que una teoría de la práctica tiene su reflejo sobre la práctica y simultáneamente sobre *su relación con la práctica*. En otras palabras, el sujeto que teoriza la práctica inflinge a la práctica una alteración fundamental, alteración que está condenada a pasar inadvertida pese a ser una condición constituyente de la operación cognoscitiva.» (p. 32)

En resumen, para Seeger, la autonomía de la actividad del maestro constituye un sistema auto-organizado de la práctica, como estructura estructurante de la propia práctica y de la propia teoría como práctica. Esta constituiría la idea básica para una teoría sistémica de la educación matemática.

Scholöglmann (1985), otro de los autores elegidos para esta muestra, parte de un reconocimiento común en la discusión sobre la construcción teórica de este corpus de conocimiento: «La principal dificultad ante nosotros radica en la extrema comple-

6 Respeto a la interacción, Bourdieu advierte: "Describir el proceso de objetivación y orquestación en el lenguaje de la *interacción* y la mutua adaptación es olvidar que la interacción misma debe su forma a las estructuras objetivas que han producido las disposiciones de los agentes interactuantes y que les confieren sus posiciones relativas en la interacción y en cualquier otra parte." Bourdieu, P. (1977) **Outline of a Theory of Practice**, translated by Richard Nice, Cambridge: University Press, p. 81.

jidad de la didáctica de las matemáticas como un sistema de referencias y acciones» (p. 59). Y se pregunta ¿cómo vamos a manejar esta complejidad?. Para responder acude a los aportes teóricos de tres autores: Niklas Luhmann, Jürgens Habermas y Jean Piaget.

Con referencia a Luhmann, señala cómo sólo con una reducción estructurada de complejidad el hombre puede ganar orientación para la percepción y la acción, pero como es incapaz de llevar a cabo tales procesos por sí mismo, los sistemas sociales tienen que adelantársele. De hecho la identidad de estos sistemas depende de los procesos reductivos que van especificándose para cada sistema y, por lo tanto, los caracterizan. Esta reducción es correlativa a la tendencia a fragmentar los problemas en unidades que faciliten atender a su solución, sin embargo, una consecuencia lógica es la dificultad de recomputar las soluciones al detalle en una solución integral. Para Scholöglmann la didáctica encara este problema al enfrentar su alto grado de complejidad mediante procesos reductivos y, en su opinión, una manera de salir del dilema es mediante la interdisciplinaridad. Aunque esta opción hacer surgir otros problemas. «No existe, por ejemplo, una metateoría orientadora en las disciplinas referenciales generalmente aceptada, que gobierne las relaciones entre la teoría y la práctica... Pero incluso si tuviéramos teorías generales aceptadas, aún careceríamos de líneas guía para integrar en un todo los conceptos al detalle .» (p. 61).

Dado que las diversas disciplinas académicas cifran su autonomía en su capacidad para distinguirse unas de otras, no es de sorprender que la tendencia haya sido evitar intersecciones entre ellas. Scholöglmann propone superar esta resistencia a través de una composición de teorías dentro de un marco comprehensivo con una suerte de «bandas de flotación» que permitan proteger la sustancia de la teoría individual.[7] Para evitar la arbitrariedad en la selección de teorías se propone, por un lado, atender a normas y, por otro, atender a la práctica y prueba empírica de los marcos imaginados. Las normas tendrían por base un «*Menschenbild*» (concepto de hombre). Con ello, la educación matemática rebasaría el ámbito del subsistema matemáticas y revelaría sus múltiples funciones sociales tanto como su condicionamiento societal.

Esta sociedad, comprendida como sistema, constituye a la vez el entorno del estudiante, forma el terreno de fondo de la existencia individual mediante una tradición de creencias compartidas por consenso en términos de Habermas. Este autor sostiene que en las sociedades altamente desarrolladas son necesarios mecanismos adicionales para enfrentar los problemas emergentes, uno de tales mecanismos es el actuar comunicativo. Este concepto designa el manejo de una situación a través del desarrollo de una definición común de ésta por sus actores y elaborando un plan común para enfrentar los problemas sobre la base de una argumentación racional. Es una búsqueda cooperativa de la verdad ligada a un proceso común de aprendizaje, donde sólo en virtud del consenso es posible el actuar orientado.

---

7 Algo parecido planteamos nosotros al proponer utilizar el concepto matemático de conjunto borroso para delimitar el campo de pertenencia de lo educativo, esto es, fronteras difusas en la definición de las disciplinas donde la especificidad fuera gradual y no abrupta. CFr. Ontiveros Quiroz, J. (1993) "*La educación, lo educativo y los problemas de su definición*" en Revista **Pistas Educativas**, no. 69, Instituto Tecnológico de Celaya.

En suma, el concepto de acción comunicativa significa una orientación por consenso, una argumentación racional y un proceso común de aprendizaje, que sirve como un procedimiento de resolución de problemas. Dado que las matemáticas son hoy día parte del entorno común de la sociedad, que atienden a la resolución de problemas y que existe una conexión muy estrecha entre método matemático y racionalidad, Scholöglmann considera adecuado el concepto habermasiano de sociedad para la construcción sistémica de la educación matemática. La conexión entre matemática y acción comunicativa se revela especialmente en la relación entre aplicación de las matemáticas y racionalidad. «Las ciencias naturales son el intento de la humanidad por entrar en contacto con la naturaleza de un modo racional. La importancia central de las matemáticas en este contexto radica en el hecho de que ellas posibilitan el registro de fenómenos naturales en un primer nivel lógico. Los hombres tienen así la oportunidad de resolver a distancia problemas de la naturaleza. Ellas introducen un nuevo nivel en el cual presentan y tratan los fenómenos y se comunican sobre ellos. En este sentido la aplicación de las matemáticas es conducida por el deseo de un procedimiento específicamente racional.» (p. 66).

En la acción comunicativa el proceso de aprendizaje es puramente un proceso social, pero para la búsqueda de una realización didáctica hace falta una descripción del proceso a nivel individual. Para esto se recurre a la epistemología genética de Piaget. La «abstracción reflexiva», que en la teoría piagetiana constituye la fuente de la inteligencia, es la precondición individual para el aprendizaje social, es decir, para la acción comunicativa.

El autor concluye que lo que se gana con este marco teórico para la didáctica de las matemáticas es una mayor claridad en la percepción de las interrelaciones entre matemáticas y sociedad. Advertir la importancia de una definición común del problema, sin lo cual la acción consensada es imposible. Por lo que toda al maestro, él debería también soportar propuestas con argumentos racionales, a fin de lograr la aceptación del grupo. Una consecuencia teórica es la diferenciación de modelos en modelos regulados por normas y modelos regulados por teorías. Finalmente, respecto a la metodología Scholöglmann concluye: «La acción comunicativa que es un proceso común de la resolución de problemas sobre la base de argumentos racionales y decisiones consensadas no requiere nuevas propuestas metodológicas.» (p. 68).

El nuevo paradigma

Dado el alto nivel de complejidad de la teoría luhmanniana, pretender una exposición simple parece una empresa imposible. Por otra parte, si nos atenemos a su densidad teórica corremos el riesgo de resultar tan obscuros que la importancia de su aportación al problema que nos ocupa podría pasar inadvertida. Vamos pues, en aras de la claridad, a tomarnos el atrevimiento de sacrificar un tanto las profundidades de la teoría.

En la perspectiva sistémica de Luhmann el punto de partida es la unidad de la diferencia ***sistema/entorno***. Uno no puede existir sin el otro, ya que, precisamente, el sistema se constituye trazando operativamente un límite que lo diferencia del entorno.

Lo característico de un sistema es que existe como unidad de operación, es decir, se produce y reproduce en virtud de una homogeneidad suficiente de operaciones que definen su unidad. No hay por tanto un sistema sin un *modo específico de operación propia*, ni operación alguna que no pertenezca a un sistema. La reproducción de esa diferencia es constante, ya que si dejara de producirse, el sistema se disolvería en el entorno.

Otro rasgo propio de los sistemas es que esa diferencia constitutiva aparece como gradiente de complejidad. El entorno es siempre más complejo que el sistema, esto es, el sistema es una reducción de complejidad, es una complejidad organizada. Aquí se hace necesario precisar qué entiende Luhmann por complejidad. Para este autor, la definición se basa en la distinción entre *elemento* y *relación*. El número de relaciones posibles aumenta exponencialmente al aumentar el número de elementos, de tal manera que un sistema se ve forzado a seleccionar los elementos que relaciona porque no puede hacerlo simultáneamente con todos. Eso conlleva a que sólo algunas relaciones, entre todas las posibles, se actualicen y, en consecuencia, siempre queden otras en calidad de posibilidades. Esta selectividad es lo propio de la complejidad e implica que para toda operación existe un ámbito de posibilidades alternativas.

La idea de generación y autogeneración recursiva del sistema la expresa Luhmann con el concepto de autopoiesis, que él importa de los trabajos de Maturana (1989) en biología. No es ciertamente la aplicación de un concepto biológico al campo de la sociología sino el reconocimiento, desde la teoría de sistemas, de que existen formas universales que se realizan en diversos órdenes: orgánico, psíquico y social. De éstos, sólo los dos últimos operan en el mundo del sentido. El que se circunscriban a este mundo es lo que permite deslindarlos radicalmente de todo tratamiento biológico. Operando ambos en el mundo del sentido se diferencian, no obstante, por su forma de procesamiento. Mientras que los sistemas psíquicos procesan pensamientos y su forma es la conciencia, los sistemas sociales procesan comunicaciones y su forma es precisamente la comunicación.

Resulta ahora claro porqué en esta perspectiva teórica los sistemas sociales son autorreferenciales y autopoiéticos: porque todas sus operaciones están referidas a sí mismos y su objetivo es producirse a sí mismos a partir de sí mismos. Para los sistemas sociales, repetimos, la forma de su autopoiesis es la comunicación. Por tanto, los límites de esta forma son límites de sentido. En la medida en que comunican, todos los sistemas sociales son iguales; en la medida en que se comunican de modo distinto, son diferentes. Ahora bien, ¿en razón de qué se produce esta diferenciación? Luhmann entiende la sociedad moderna como una sociedad funcionalmente diferenciada. Diferenciación funcional significa que los sistemas sociales se distinguen por las tareas que desempeñan en el sistema sociedad completo. La economía, la política, la ciencia, el arte, la intimidad, el derecho y la educación son sistemas sociales que se han especializado sobre la base de una diferenciación de funciones, en razón de que tienen como tarea resolver problemas específicos de la sociedad.

En este concepto de modernidad los sistemas renuncian a la multifuncionalidad. Precisamente porque cada sistema está diferenciado por su función respectiva sólo a éste le compete dicha función. Dada la confusión actual en el debate pedagógico sobre lo que pertenece al sistema educativo y lo que pertenece al sistema científico, este dispositivo teórico es especialmente útil para establecer distinciones. Tenemos entonces que un sistema monopoliza su función y que renuncia a extenderla a toda la sociedad. Bajo este monopolio el entorno se vuelve incompetente. Por ejemplo, para el sistema educativo, su entorno, que incluye entre otros al sistema científico, es educativamente incompetente. Con fundamento en esta exclusividad funcional los sistemas alcanzan una clausura de operación y establecen sus límites.

Ahora bien, si sociedad y comunicación es lo mismo, ¿cuál es el mecanismo mediante el cual un sistema social produce su especificidad funcional?. Necesariamente debe ser uno de naturaleza comunicativa. En efecto, Luhmann sostiene que la especificidad sistémica está dada por un código binario de la forma A/no-A. El código es un fenómeno específico de comunicación que tiene como último fundamento la disposición binaria del lenguaje: posibilidad de construcción total de la realidad bajo el aspecto de un sí o un no. Los códigos de los sistemas no son sino derivaciones lingüísticas de este hecho fundamental. Esto significa que cada sistema dispone en exclusiva de un código con el cual opera. Dado tal código, es posible distinguir con suficiente univocidad las operaciones que pertenecen al sistema y las que no. De este modo el sistema puede identificarse a sí mismo con un código. En nuestro caso nos interesa preguntarnos por aquéllos que especifican al sistema educativo y al científico. ¿Existen tales códigos? ¿Cuáles son?

Para Luhmann el sistema científico opera con el código *falso/verdadero*. Los valores de este código marcan las comunicaciones científicas diferenciándolas de las otras comunicaciones que acontecen en la sociedad. En el caso del sistema educativo se considera que no existe un código tan evolucionado como el del sistema científico, sin embargo, dado que el sistema existe, algún código debe tener. En efecto, éste es la diferencia *mejor/peor*. La educación tiene, así, la posibilidad de seleccionar, es decir, de atribuir algún valor del código, al comportamiento y los logros de los alumnos. El sistema opera mediante la construcción de largas y complejas secuencias de selección que constituyen las carreras (censuras, reconocimientos, recompensas, sanciones, diplomas, calificaciones, promociones, certificaciones, graduaciones, etc.).

Distanciándonos un tanto del autor, y de las interpretaciones que algunos de sus estudiosos hacen, nosotros derivamos de su teoría que el código del sistema educativo es, en realidad, *éxito/fracaso*. ¿Qué otra cosa es *mejor/peor* sino *más exitoso/menos exitoso*?. Ciertamente, el sistema educativo busca primariamente lograr cambios en el entorno psíquico de la sociedad, pero ese impacto sólo puede procesarlo como comunicación. De la competencia de sus estudiantes o egresados de participar en la comunicación, el sistema educativo atribuye el éxito o el fracaso. El hombre depende de la comunicación para sus contactos con otros hombres, ésta restringe y distribuye las posibilidades de tales contactos. La comunicación es una solución emergente de carácter evolutivo que precede a los sujetos y que les provee de estructuras de sentido. Toda forma de experiencia subjetiva humana tiene que partir de estas formas pre-estructuradas. Para alentar estos contactos la evolución social ha producido formas condensadas de motivaciones: el amor, el poder, el dinero, la verdad. Cada una de ellas sirve de base de operación a un sistema. Aparentemente el sistema educativo no dispone de un medio tal. La clase, el sistema de interacción escolar, fungiría como un equivalente funcional, ya que motivaría a los alumnos a aceptar la intención educativa del docente. Sin embargo, el *éxito escolar* como un medio de asegurar contactos comunicacionales improbables, sobre todo fuera del sistema educativo, puede condensar tantas motivaciones como lo hacen los medios de otros sistemas.[8]

Si no existiera este instrumento de codificación binaria en el sistema educativo, el hecho pedagógico se desintegraría en una red abierta de aprendizajes que se difundirían por todas partes y no constituirían una unidad discreta como sistema. Teóricamente es crucial percatarse de que la identidad de lo educativo, de la pedagogía y de la didáctica sólo pueden darse a partir de la explicitación de la unidad del sistema educativo.

Un par de consecuencias de este marco de teoría y nuestras propias interpretaciones para el problema que aquí tratamos son las siguientes:

1. Los planteamientos luhmannianos fuerzan a una reconsideración del concepto de autonomía. Los sistemas sociales, debido precisamente a la presión de la diferenciación, imponen a la fuerza su autonomía como un correlato de la elevada complejidad social. Lo que a la pedagogía le parece un espacio y un valor por el cual luchar, es a la vez, una presión estructuralmente impuesta, a saber, es condición necesaria de la diferenciación en sistemas específicos y la eliminación de tareas operativamente ya no continuables para otros sistemas funcionales. En consecuencia, la autonomía no es resultado del reconocimiento científico de un campo de acción para algo que alega saber o poder hacer la pedagogía o la didáctica. La autonomía es un presupuesto de la especialización, es una condición y un resultado *inevitable* de la diferenciación funcional de la sociedad moderna. Como reflexión del sistema educativo, la pedagogía (didáctica) es una descripción autorreferida del sistema y por ello es autónoma. En esta teoría, la *reflexión* es la referencia del sistema a sí mismo, como su referencia a otros sistemas es *prestación*.

¿Qué consecuencias tiene esto en el debate de la construcción teórica de la didáctica de las matemáticas? Un ejemplo es el siguiente. En las últimas décadas el concepto de teoría en el ámbito científico se presenta como un programa de investigación. Como tal sólo puede ser aplicado en el sistema científico y únicamente a procesos de investigación. La pedagogía (didáctica) no puede comprenderse a sí misma como producto de una teoría en ese sentido específico del sistema científico, esto es, no se trata de una teoría aplicada. Lo pedagógico-didáctico es una forma de comunicación que se produce cuando el sistema se refiere a sí mismo. Así como un sistema psíquico no puede pensarse a sí mismo desde otro sistema psíquico, el sistema educativo no puede ser reflexionado por otro sistema que no sea él mismo. Esto significa que el sistema científico no puede «decirle» al sistema educativo lo que él es. Sólo el sistema se define a sí mismo.

Para Luhmann esto tiene implicaciones fuertes en el debate educativo. Entre otras, la siguiente: siempre se atribuye una relación estrecha entre la metodología de inves-

8 En nuestra opinión, específicamente la clase, el espacio por excelencia de la didáctica, dispondría de un subcódigo de operación que no dejaría de ser selectivo, esto es, atribuyendo éxito o fracaso. Ese subcódigo sería *entender/no entender*.

tigación y la metodología de la enseñanza, como si la metodología de la investigación aplicada al sistema educativo fuera metodología de la enseñanza o como si el desarrollo de técnicas docentes pudiera ejecutarse como proceso de investigación generando resultados científicamente sostenibles, o también, como si mediante «actitudes constructivistas» se pudiera poner bajo control científico los fenómenos que aparecen en la enseñanza. En tales posturas se subestima la diferencia de las funciones y referencias sistémicas de ciencia y educación, respectivamente.

El déficit tecnológico del sistema educativo, como ausencia de un conocimiento causal asegurado que pueda dirigir la enseñanza, se convierte en el punto de partida para sobrecargar las expectativas respecto a la investigación de la enseñanza. Simplemente se presupone que con un comportamiento teórico científico y metodológicamente correcto ya se presentará el éxito. Pero eso está por verse. Las formas lingüísticas de la ciencia y la educación divergen; esto es un resultado inevitable de la diferenciación de los respectivos sistemas. En la etapa de evolución de los sistemas funcionalmente diferenciados de la sociedad actual, este límite se ha trazado de un modo relativamente nítido. Acaso quepa oscilar algo sobre él, pero no erigir complejas obras conceptuales con iguales posibilidades de éxito en ambos lados. Resulta por demás evidente, que el lenguaje del procesamiento de datos no es un lenguaje adaptado al sistema interactivo de la enseñanza. Ciertamente el sistema educativo, con base en la *prestación*, puede beneficiarse de los productos del sistema científico, pero no sin antes procesarlos a través de sus formas *propias y autónomas* de producción sistémica.

Actualmente la investigación genera la demanda de un análisis más profundo del sistema interactivo de enseñanza: la clase. Se quiere proceder de manera más adecuada a la complejidad del sistema. Pero, precisamente ante su complejidad, volviéndose modesta, la investigación se retira a la intención de ofrecerle al maestro meras posibilidades de análisis. En la investigación de la enseñanza, en la dependencia de su propia metodología, sus resultados y su carencia de resultados prácticos, el pedagogo se encuentra no tanto con deficiencias de la investigación, sino más bien, con el problema de la tecnología. Si la investigación de la enseñanza aprovecha una tecnología propia, poco le sirve si su objeto, el sistema interactivo de la enseñanza, no posee tecnología.[9]

De hecho, la sustitución de la tecnología de la educación por la metodología de la investigación es una forma de esquivar el problema de la tecnología de la enseñanza. El déficit tecnológico, sigue dejando pendiente cómo realizar la intervención en los procesos formativos a través de premisas, si es que acaso es posible. La decisión de la pedagogía de fundamentarse en la ciencia la obliga a adoptar la lógica de ésta y,

---

9 Por tecnología se entiende aquí la totalidad de reglas de un sistema según las cuales se lleva a cabo un proceso de modificación, por ejemplo, el que los alumnos aprendan lo que se les enseña. No tiene un sentido de ciencia aplicada. Se refiere estrictamente al nivel operativo del sistema. El concepto relacionado, *déficit tecnológico*, no significa acción equivocada, incorrecta o torpe en el proceso educativo, que en todo caso no pueda ser corregida con base en la competencia, la intuición o la experiencia del maestro. Déficit tecnológico se entiende como una situación estructural de inseguridad sobre si se actuó bien o mal en la realización factual de la enseñanza, expresa la falta de reglas tecnológicas para intervenir y controlar la modificación que se lleva a cabo. Es el no saber con certeza cuáles premisas tienen éxito y cuáles no. Básicamente es un problema de incertidumbre.

por lo tanto, responder por el control de los efectos. Pero la dualidad de enseñanza (formación cognoscitiva) y educación (disciplina) que producen efectos de conocimiento y carácter, respectivamente, hacen suponer categorías de causas desiguales, lo cual plantea la interrogante de cómo y bajo qué condiciones se puede establecer una relación entre causas tan distintas.

2. Una de las estrategias argumentativas en la discusión sobre la existencia o no de una teoría de la didáctica de las matemáticas, ha sido definir primero lo que se entiende por teoría, o más aún, lo que se entiende por teoría científica, proceder luego a una caracterización de lo que aparece en el campo de la educación matemática como teoría de sí misma, comparar ambas y emitir un juicio sobre la cientificidad de esta última. Por esta vía no ha sido muy difícil concluir que no se dispone de un tipo tal de teoría, o peor aún, que no se tiene siquiera una teoría. ¿Cómo se mira esta discusión a la luz de la perspectiva luhmanniana?

La reflexión crítica sobre la realidad y la posibilidad de la educación ha constituido lo que, de modo general, se ha entendido por pedagogía, mientras que lo propio de la enseñanza en el salón de clases ha constituido la didáctica. La reflexión se ha concebido así como un pensamiento centrado en la determinación del *verdadero contenido* de una tradición. Para Luhmann la reflexión tiene un sentido diferente. En la teoría de sistemas sólo puede hablarse con propiedad de reflexión cuando se trata de una operación autorreferencial que tiene como base la diferencia *sistema/entorno*. Esto significa que pensar y escribir sobre un sistema no constituye de suyo una reflexión.

Cuando el sistema genera comunicación sobre sí mismo va constituyendo, en un proceso de diferenciación evolutivo, temas propios del sistema. Algunos de estos temas se consolidan y forman una reserva temática que constituye una semántica particular de ese sistema. En general, la semántica es el patrimonio conceptual de la sociedad, por tanto, de los sistemas parciales; entre ellos el sistema educativo. Es una especie de provisión de posibles temas listos para una entrada súbita y rápidamente comprensible en procesos comunicacionales concretos que se ha almacenado especialmente con estos fines.

Este conjunto específico de temas, como tipificación del sentido, sensibiliza a la sociedad a ciertos contenidos de la comunicación antes que a otros, de este modo la orienta en dos niveles: uno familiar y otro más elaborado y abstracto donde aparecen las teorías. Las teorías surgen en este contexto como reducciones de complejidad. Esta reducción se da cuando la estructura de relaciones de una formación compleja puede reconstruirse mediante otra formación compleja con menos relaciones. Ciertamente este es un concepto de teoría sujeto a controversia, aunque para Luhmann hay en ella más acuerdos que diferencias ya que éstas se remontan principalmente a la cuestión de si se entiende la ciencia como búsqueda de las explicaciones más correctas. o bien como forma particular de aumento y reducción de complejidad.

Para este enfoque, la teoría es una forma de red de complejidad del sistema de comunicación que reintroduce la complejidad en el sistema en calidad de conceptos, pero advierte, no toda la complejidad puede ser procesada conceptualmente. De hecho los sistemas no comprenden cabalmente su propia complejidad, lo que hacen en cambio es problematizarla. El sistema, por un lado, produce, y por otro lado, reacciona ante una imagen borrosa de sí mismo. Se dice entonces que las teorías no se definen por su objeto sino por la delimitación de una problemática. De aquí que Luhmann afirme que las disciplinas normalmente no fundan su independencia en sus objetos, sino en sus perspectivas o en el planteamiento de problemas propios, lo cual permite tematizar todos los objetos, siempre y cuando sean relevantes en esa perspectiva.

En esta lógica de los sistemas sociales como sistemas de comunicación, la definición realiza lo definido. Lo anterior significa que la didáctica es exactamente lo que la didáctica diga que es. Ateniéndonos a la concepción luhmanniana, una teoría didáctica sería el resultado de poner en sintonía recíproca una multiplicidad de decisiones teóricas diferentes, «únicamente esta forma relativamente amplia del diseño de teoría -que permite reconocer qué tanto más es posible, qué decisiones han sido tomadas y cuáles hubieran sido las consecuencias si en este lugar se hubiera decidido de manera distinta, sólo esta forma nos parece adecuada como proposición de una autodescripción [del sistema educativo]». (Luhmann y De Georgi, 1993, p. 442).

Una aportación a la teoría didáctica en esta perspectiva dejaría de buscar la definición de su esencia, abandonaría la obsesión por atraparla y fijarla de manera inmutable al tiempo y al espacio. Al ser la contingencia la modalidad de los sistemas sociales, entonces, la tarea de la teoría sería realizar esa forma en sí misma. Ya no se trataría de que las afirmaciones teóricas «concordaran con su objeto». La teoría sería el esfuerzo permanente -siempre cambiante, siempre contingente- de dar cuenta de la autopoiesis de un sistema.

En conclusión, la pedagogía (didáctica) como reflexión del sistema educativo no precisa definir un objeto de estudio para existir como teoría. Esta es un forma de operar propia del sistema científico y, además, sujeta al cuestionamiento de las nuevas teorías del conocimiento. En todo caso, lo que precisa es explicitar la distinción o distinciones propias con que el sistema se observa y se describe a sí mismo. A la distinción *mejor/peor* se le atribuye aquí una posición central en la construcción de una teoría pedagógico-didáctica, pero sólo en el sentido de que a partir de ella organizamos la consistencia de la teoría, es decir, el contexto de una multiplicidad de distinciones.

Sin duda los planteamientos del enfoque sistémico de Niklas Luhmann despliegan una nueva forma de pensar los problemas de construcción teórica de la pedagogía y la didáctica que no podemos ignorar. Ciertamente se está en los primeros intentos y no sabemos aún si esta teoría tan sofisticada produzca más problemas de los que resuelva, sin embargo, parece que vale la pena explorar su potencial de ordenamiento teórico, cuyos rendimientos podrían ser altamente benéficos para el debate no sólo de la didáctica de las matemáticas sino de la educación, la pedagogía y la didáctica en general.

Particularmente, en el campo de la educación matemática queda pendiente el dar cuenta de la especificidad de una teoría en didáctica de las matemáticas. Por ahora, nosotros sólo hemos trabajado en dirección de la demanda de Díaz Godino:

establecer unos conceptos básicos y unos postulados elementales; y siguiendo las líneas del programa del TME: partir de una concepción sistémica para tal tarea. No dudamos que las aportaciones de otros interesados en esta problemática lograrán avanzar la construcción de una teoría de la didáctica de las matemáticas.

Bibliografía

Block, David et al. (1993): «La investigación educativa en los Ochentas. Perspectivas para los Noventas», **2o. Congreso Nacional de Investigación Educativa**, Estados de conocimiento, cuaderno no. 10, México.

Corsi, G., Esposito, E. y Baraldi, C. (1996): **Glosario sobre la teoría social de Niklas Luhmann**, Anthropos, UIA, ITESO, México.

Díaz Godino, Juan (1991): ***Hacia una teoría de la didáctica de la matemática,*** Depto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, mecanograma.

Izuzquiza, Ignacio (1990): **Niklas Luhmann. Sociedad y sistema: la ambición de la teoría**, Paidós, Barcelona.

Kilpatrick, J. (1981): «*Research on mathematical learning and thinking in the United States*», **PME-Proceedings**, Vol II, Grenoble.

Luhmann, N. (1985): **El amor como pasión. *La codificación de la intimidad***, Ed. Península, Barcelona.

___ (1991): **Sistemas Sociales. *Lineamientos para una teoría general***, UIA, Alianza Editorial, México.

___ (1996): **Introducción a la teoría de Sistemas.** *Lecciones publicadas por Javier Torres Nafarrate*, Anthropos, UIA, ITESO, México.

___ (1996): **La Ciencia de la Sociedad**, Anthropos, UIA, ITESO, México.

Luhmann, N. y Eberhard Schorr, K. (1993): **El sistema educativo. (Problemas de reflexión)**, UG, UIA, ITESO, México.

Luhmann, N. y De Georgi, R. (1993): **Teoría de la Sociedad**, UG, UIA, ITESO, México.

Maturana, H. y Varela, F. (1989): **El árbol del conocimiento. *Las bases biológicas del entendimiento humano***, De. Universitaria, Chile.

Seeger, F. (1985): «*Activity, Self-organization and Habitus: Theoretical Concepts in Mathematics Education*», **Proceedings 2nd TME-Conference,** Bielefeld.

Schöloglmann, W. (1985): «*Remarks on a Theoretical Concept for the Didactics of Applying Mathematics*», **Proceedings 2nd TME-Conference**, Bielefeld.

Steiner, H: G: (1985): «*Theory of Mathematics Education (TME): an Introduction*», en **For the Learning of Mathematics** 5, 2, FML Publishing Association, Québec.

Torres Nafarrate, J. (1992): «*El sistema educativo desde la perspectiva de Niklas Luhmann*», **Educar** Separata, Universidad de Guadalajara, México.

El Problema de la Evaluación en el Area de Matemáticas

Resumen

La evaluacion de los habilidades básicas culturales de los niños, juega un papel esencial en la eficiencia de la educación. De diferentes modelos de evaluación depende el proceso educativo y los resultados que se puedan obtener.
Si esto ocurre, en general con todos los sujetos curriculares, se vuelve un elemento decisivo en matemáticas. La pequeña tasa de éxito se encuentra casi siempre cerca de las matemáticas.
Este artículo es una reflexión sobre las dificultades en la evaluacion de las habilidades matemáticas, también proporciona información global sobre la respuesta de los niños y propone un modelo de evaluación más formativo y cualitativo, que puede contribuir en el mejoramiento permanente del proceso educativo.

Abstract. The assessment of the basic cultural skills of the children, plays a essential role in efficiency of education. From the different models of assessment depends the instructive process and the results it can obtain.
If this happens, in general with all the curricular subjects, this becomes a decisive element in Mathematics. The small ratio of success is found nearly always in Mathematics.
The article is a reflection about the difficulties in the assesment of Mathematic skills, it also gives a global information about the output of the children and proposes an assessment model more formative and qualitative, that can contribute in the permanent improvement of the instructive proccess.

La reflexión sobre los conceptos y funciones de la evaluación en el sistema educativo plantea una serie de interrogantes referentes a su problemática y a los condicionamientos que ejerce sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por lo tanto, el ánimo de los comentarios que siguen no es otro que el de compartir las dudas, las experiencias, las posibles soluciones, los caminos recorridos, las propuestas para continuar avanzando..., en definitiva, los pensamientos que provoca la evaluación, como tema complejo y comprometido en cuanto que se aplica a la valoración o enjuiciamiento de lo humano.

En función del modelo de sociedad que se plantea, predomina uno u otro modelo de evaluación en los sistemas educativos, pues su finalidad puede estribar en conse-

María Antonia Casanova Rodríguez
Subdirección General de Educación Especial y Atención a la Diversidad
Ministerio de Educación y Cultura
Madrid, España

guir alumnos «con cabezas bien llenas» (evaluación sumativa, puntual, normativa, memorística) o en que éstos lleguen a poseer «cabezas bien hechas» (evaluación continua, formativa, criterial); en definitiva, la educación de un país jugará un papel fundamental según sea instrumento para seleccionar a la población o para desarrollar sus capacidades -de todo tipo- al máximo. Y la selección -no nos engañemos- se realiza fundamentalmente a través de la evaluación.

Dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de cualquier etapa educativa, parece que la problemática de aprender y evaluar suele centrarse, con especial énfasis, en el área de Matemáticas.

Creo que el problema arranca, en su base, de la pretensión que tradicionalmente se ha mantenido de querer «medir» procesos de aprendizaje y formación, trasplantando, casi de modo automático, las técnicas para valorar los rendimientos o resultados de la producción de una empresa, al ámbito, absolutamente distinto y totalmente personal, de la educación.

Evaluación es un concepto relativamente reciente en el campo educativo; se incorpora a partir de 1916[1], cuando Fayol (1961) lo introduce en los ámbitos empresariales. Hasta entonces, cada vez que se intenta valorar la formación o instrucción de la persona se habla de «examen» o «medida». Tanto esta «medida» como la evaluación empresarial intentan plasmar el rendimiento obtenido en términos numéricos -costumbre difícil de desterrar y que llega hasta nuestros días-, lo que contribuye a que la valoración atribuida a una persona, además, la «califique» o, mejor aún, «clasifique» dentro de unos parámetros sociales establecidos (**Casanova, M.A.**: 1996, 10-11).

Lo que se puede «medir» fácilmente no es lo más interesante de la educación, no es la formación alcanzada por una persona. Podemos medir la memorización de contenidos conceptuales, la aplicación de determinadas técnicas de estudio, el uso correcto de fórmulas para la resolución de problemas, etc.; pero todo ello -la vertiente instructiva- no conforma a una persona *educada*, sino que es solamente un medio para que la persona llegue a su formación total. Los contenidos constituyen un material de trabajo sobre el cual poder conseguir los objetivos educativos planteados, que en el desarrollo humano se centran más en la asunción de unas actitudes determinadas (positivas, críticas, participativas, solidarias...) ante el mundo, que en el almacenamiento de gran cantidad de conocimientos. «Formar cabezas bien hechas en lugar de cabezas bien llenas» (Montaigne) es una frase -ya utilizada al principio- que resume claramente los comentarios anteriores.

No obstante, no le quito valor, en absoluto, al dominio de los contenidos culturales que ha venido acumulando la humanidad hasta nuestros días. Puedo asegurar, incluso, que lamento verdaderamente cómo, en muchos casos, se hace patente el bajo nivel cultural de gran cantidad de jóvenes, porque se les priva de la posibilidad de gozar con la cultura, de disfrutar con su creación y con su contemplación. Refiriéndonos a los campos de las ciencias físicas, químicas, matemáticas..., o de las múltiples

---

1 Esta es la fecha de la primera edición de la obra a la que se hace referencia. La que actualmente puede consultarse con mayor facilidad es la de 1961, que se cita en la bibliografía.

técnicas que ahora se desarrollan, también se les priva de poder progresar personal y socialmente en ellos, de colaborar en el avance y la comprensión del mundo.

Pero quiero marcar un fuerte contraste, que viene a reforzar la idea central del comienzo. Si fueran ciertos el lema de Francis Bacon: «Saber es poder», o el pensamiento socrático sobre el error, entendiéndolo como el resultado de un defecto en el saber, de modo que aumentando el saber pueden superarse los errores del pasado, los sistemas educativos basados fundamentalmente en la transmisión de conocimientos (como han sido y son los actuales) nos hubieran conducido a un mundo más justo para las personas, por una parte, y más equilibrado e inteligente con la naturaleza, por otra. No nos encontraríamos ante una humanidad responsable del nivel de deterioro del medio ambiente actual y de la carrera de armamentos llevada a cabo durante la segunda mitad de nuestro siglo; en definitiva, con una «civilización que cuanto más sabe más se amenaza a sí misma» (**Ramírez, J.L.**: 1991), y más es un riesgo para la supervivencia del planeta.

Por tanto, hay que insistir en la importancia de la creación de actitudes en la educación, que nos pone de manifiesto la mayor atención que es necesario prestar a los procesos formativos sobre la exclusiva constatación de los resultados de memorización de datos conseguidos por los alumnos (**Casanova, M.A.**: 1992, 41-43).

Se preguntan algunos profesores de Matemáticas, cómo pueden llevarse a cabo estos procesos, cómo cambiar el planteamiento de las juntas de evaluación que se limitan a constatar el número de reprobados y aprobados habidos, por qué se da esa gran cantidad de reprobados en Matemáticas, cómo se está evaluando para que esto suceda, qué posibilidades existen de generalizar un sistema con otro modelo de evaluación... Preguntas/problemas, todos ellos, que dibujan la situación de la enseñanza, en este caso de las Matemáticas (y no muy distinto, por desgracia, en otras materias), de la práctica habitual del aula, del qué y cómo aprenden los niños y los jóvenes, del qué y cómo se evalúan sus aprendizajes, de lo que la sociedad pide al sistema educativo (¿o solamente sistema selectivo?)... Las preguntas resultan elocuentes en cuanto que reflejan el día a día de nuestro quehacer como profesionales de la educación, condicionados por un sistema social que impregna la actuación de todos sus integrantes.

¿Por qué un profesor de Matemáticas tiene más dificultades que el de otra disciplina para fijarse en el proceso de razonamiento de sus alumnos? Creo que en la resolución de un problema, por ejemplo, es más importante conocer cómo se ha llegado a su resultado final que ese único resultado. Y, además, también creo que no es difícil. Pero claro, da más trabajo que limitarse a mirar el dato, cifra o cantidad final. Si se quiere que un alumno aprenda, es imprescindible saber en qué puntos falla, para ayudarle a superarlos. Sólo con la comprobación del resultado no se conoce dónde ha estado la dificultad en el proceso de resolución. Un ejemplo:

> «Supongamos una simple suma de ocho sumandos, todos ellos de más de cinco cifras. Supongamos que veinte alumnos han coincidido en el mismo error curiosamente: todos ellos han puesto en la tercera cifra de la suma/resultado, comenzando por la derecha, la cifra de las centenas, un 6 en vez de un 7. Probablemente (...) el profesor/corrector de turno, diagnosticará a todos los alumnos con un mismo

dictamen: una M (mal) (...) y propondrá a todos el mismo tratamiento: repetir la suma (o hacer otras tantas). Pues bien, no hace falta mucha imaginación para advertir que el error (...) puede ser debido a veinte procesos mentales diferentes (...), cada uno de los cuales, para ser destruido, requerirá intervenciones técnico-didácticas cualitativamente distintas. (...) Por ejemplo:

— Un alumno puso 6 en vez de 7, porque se olvidó de sumar las que se llevaba de la columna anterior;
— Otro alumno, porque padece una ligera miopía y confundió en la columna anterior un 3 con un 8;
— Otro alumno, porque tomó los sumandos al dictado de un compañero y oyó mal un número;
— Lo más grave de todo: un alumno de los veinte *«acertó» y fue calificado por su profesor/corrector disparatadamente con una B (bien), porque se equivocó dos veces, en vez de una* (...) El resultado observable era correcto, los procesos reales (= la calidad real) del trabajo del alumno eran doblemente incorrectos...» (**Fernández Pérez, M.**: 1988, 160-2).

La evaluación de los procesos es posible aplicando una metodología adecuada y teniendo una organización -en el centro y en el aula- que permitan llevar a cabo trabajos en grupo -grande o pequeño-, utilizar los espacios del Colegio o Instituto de forma que favorezca la flexibilidad de las actividades, manejar técnicas tales como la observación, el análisis de tareas, la entrevista, la encuesta..., y aplicar instrumentos como son las escalas, los cuestionarios, las listas de control..., para la recogida de datos que deriven en la evaluación, supliendo así el exclusivo recurso del «examen» tradicional para valorar la enorme complejidad que conlleva la formación de una persona para un mundo en permanente cambio. Piénsese, por otra parte, en la imposibilidad de evaluar la capacidad de comunicación oral -que afecta a todas las áreas, también a Matemáticas- si no es mediante las técnicas e instrumentos que estamos proponiendo (**Reyzábal, M.V.**: 1993).

El problema no consiste en que en las juntas de evaluación, cada dos meses, se constaten los reprobados y aprobados. El problema radica en cómo se ha llegado a esas calificaciones. Posiblemente, si modificásemos nuestras prácticas de evaluación habituales en el sentido en que vengo comentando, las juntas servirían no sólo para hacer recuento de «notas», sino para profundizar en el porqué de ese final, positivo o negativo, de un alumno determinado. Lógicamente hay que pensar que si un alumno plantea un conflicto, éste no sólo se refleja en una asignatura, sino que aparecerá en otras (posiblemente, muchos alumnos con problemas exclusivamente en Matemáticas pueden provenir de un deficiente profesor de Matemáticas). El intercambio de opiniones entre el profesorado, ayudará a comprender las dificultades en el proceso evolutivo-cognitivo del alumno y a tomar las medidas necesarias para que las supere, así como para orientarle, académica o profesionalmente, de cara a su futuro.

¿Por qué hay mayor número de reprobados en Matemáticas que en otras materias? ¿Son más difíciles de comprender estos contenidos que otros? ¿Son inadecuados los programas para las edades de los alumnos a quienes se dirigen? ¿Practican los profesores una metodología inadecuada, rígida, homogénea para todo el alumnado sin considerar las características o intereses individuales? ¿Tendrá falta de formación pedagógica este profesorado? ¿Se utiliza la evaluación para la mejora de los procesos o solamente para la comprobación de los resultados? Por tanto, ¿se evalúa correctamente esta disciplina?

Otra serie de preguntas que se traducen en una nueva serie de problemas. Problemas que, por otra parte, son generales, no se limitan a un país determinado. En España, concretamente, el último estudio realizado sobre las calificaciones que los alumnos obtienen en las diferentes áreas de aprendizaje (**MEC**: 1993) se refiere al curso 1991-1992, y pone de manifiesto los resultados que presento en la tabla anexa B1 (Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria) y en la tabla anexa E1 (tres últimos cursos de la Educación General Básica). En ambos puede comprobarse que, efectivamente, el nivel más bajo de superación corresponde a Matemáticas (salvo en el caso de 2º curso, donde, no obstante, aparece como la segunda en dificultad).

Información más reciente es la obtenida en la evaluación realizada por el Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (INCE: 1996), aplicada en la totalidad del Estado español, y referida -entre otros aspectos- a los resultados obtenidos por los alumnos y alumnas en Educación Primaria[2] (primer ciclo: 6-7 años de edad) y 6º curso de Educación General Básica (del sistema anterior todavía vigente, 11 años de edad). El área de Matemáticas, ya en estos primeros años escolares, resulta también la de peores resultados y, por lo tanto, la que presenta mayor dificultad (cuadro 1). En el primer ciclo de la Educación Primaria, los alumnos superaron el 61,22% de las cuestiones planteadas, y en 6º curso de EGB, el 50,1%. Por facilitar un elemento comparativo de estos datos, en el área de Lengua (que también suele presentar dificultad), los alumnos del primer ciclo superaron el 71,3% de las cuestiones, y en 6º curso, el 64,1%. Por tanto, las diferencias de éxito se cifran en un 10,08% en el primer ciclo, y en un 14% en 6º curso.

Cuadro 1: Niveles de superación en Lengua y Matemáticas

Nivel escolar	Lengua	Matemáticas
Primer ciclo de Educación Primaria	71.3 %	61.22 %
Sexto curso de EGB	64.1 %	50.10 %

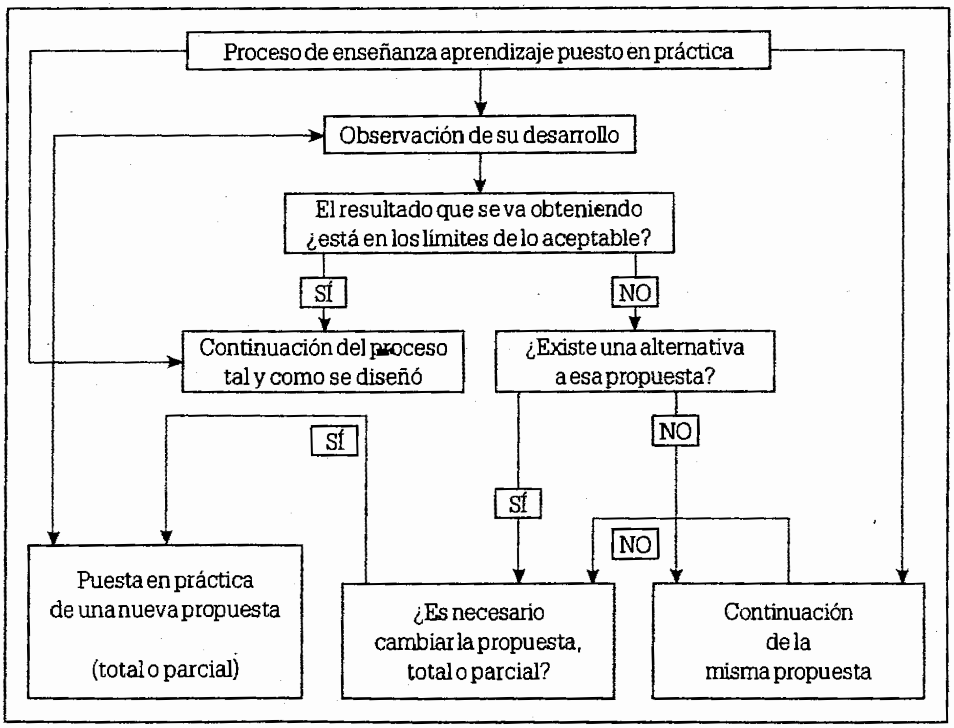
Habría que añadir una reflexión por lo que se refiere a los datos de Educación Primaria, y es que es el mismo maestro el que imparte Lengua, Matemáticas y Conocimiento del Medio, por lo cual no existe la posibilidad de diferencia de criterios en la aplicación del modelo evaluador elegido.

Son datos para pensar y plantearse seriamente si no vale la pena cambiar tanto el modelo de enseñanza de las Matemáticas como el modelo de evaluación del apren-

2 La estructura actual de la educación obligatoria española, a partir de 1990, abarca la Educación Primaria, de seis cursos de duración y la Educación Secundaria Obligatoria, de cuatro cursos. Organizativa y curricularmente, los seis años de Primaria se dividen en tres ciclos; por lo tanto, cada ciclo consta de dos cursos. La Secundaria Obligatoria se estructura en un primer ciclo, de dos años, más tercero y cuarto cursos, con la división tradicional en la que cada año académico se corresponde con un curso escolar. El ciclo constituye una unidad a efectos de programación, evaluación, asignación de profesorado y organización en general; es decir: es un curso que dura dos años.

dizaje en el sistema educativo y, si cabe, con prioridad en esta materia por las mayores dificultades que presenta. A las alturas del siglo en que vivimos, cuando los enormes conocimientos que posee la humanidad se multiplican diariamente, cabe considerar la necesidad de una rigurosa selección de los que resulten realmente imprescindibles para la generalidad del alumnado (**Casanova, M.A.**: 1995, 93-97), para su formación y su desenvolvimiento en la vida, dejando de lado otros que recargan los programas innecesariamente y que sólo serán útiles a un sector minoritario de la población que continuará sus estudios en áreas específicas en las que los necesita y que, por lo tanto, podrá adquirirlos y ampliarlos cuando avance en etapas superiores del sistema educativo.

¿Es posible y viable un modelo de evaluación que favorezca la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje? (cuadro 2) ¿Es posible utilizar la evaluación para elevar el nivel cultural y educativo de las generaciones jóvenes? Creo, sinceramente, que, desde un punto de vista profesional, hay que contestar que sí. Que no sólo es posible sino que es imprescindible. ¿A qué conduce lo contrario? A que la sociedad camine, cada vez más, hacia el distanciamiento entre las clases sociales/clases culturales, y, de esta forma, el mundo sea gobernado por una élite que económica y culturamente resulta no sólo inalcanzable sino hasta incomprensible para los demás. La tarea de la educación debería ser acortar esas distancias, ya existentes, y no aumentarlas. Pero la presión social es fuerte y el sistema educativo es parte integrante de la sociedad competitiva que tenemos, por lo que, evidentemente, no resulta fácil implantar un nuevo modelo de evaluación, ya que la educación institucional puede servir tanto para cambiar los modelos sociales como para perpetuar los existentes.



Cuadro 2. Aplicación de la evaluación formativa (tomado de Casanova, M.A.: 1995, 68)

Tabla B1
Calificaciones en BUP-COU, por cursos

	CALIFICACION POSITIVA Junio	Sept.	Total	NEGATIVA Sept.
Primero				
Matemáticas	59.4	9.9	69.3	30.7
Lengua Española y Literatura	66.3	9.5	75.8	24.2
Geografía e Historia	69.9	6.6	76.4	23.6
Ciencias Naturales	70.6	7.0	77.6	22.4
Inglés	69.7	9.0	78.8	21.2
Francés	74.7	7.2	81.9	18.1
Dibujo/Diseño	81.2	5.9	87.1	12.9
Música	81.3	5.8	87.1	12.9
Etica	91.5	1.0	92.5	7.5
Francés segundo idioma	87.8	5.6	93.5	6.5
Educación Física y Deportes	92.0	2.8	94.8	5.2
Formación Religiosa	93.6	2.8	96.4	3.6
Segundo				
Física y Química	62.3	9.9	72.2	27.8
Matemáticas	62.7	10.0	72.7	27.3
Latín	69.2	8.8	78.0	22.0
Inglés	69.9	9.7	79.6	20.4
Francés	74.0	6.3	80.3	19.7
Lengua Española y Literatura	75.7	7.4	83.2	16.8
Geografía e Historia	80.9	6.2	87.2	12.8
EATP-Diseño	87.8	3.5	91.3	8.7
Francés segundo idioma	89.6	5.3	94.9	5.1
Educación Física y Deportes	93.6	2.6	96.2	3.8
EATP-Otras	95.0	1.3	96.3	3.7
EATP-Hogar	96.4	0.2	96.5	3.5
Etica	96.1	1.2	97.3	2.7
Formación Religiosa	96.2	1.1	97.3	2.7
EATP-Informática	96.7	1.4	98.1	1.9
Tercero				
Matemáticas	62.7	11.6	74.4	25.6
Física y Química	67.2	10.6	77.8	22.2
Latín	68.0	12.4	80.4	19.6
Francés	74.1	7.5	81.6	18.4
Ciencias Naturales	75.3	6.6	81.8	18.2
Inglés	71.2	11.3	82.5	17.5
Geografía e Historia	76.9	6.9	83.8	16.2
Griego	79.6	6.1	85.7	14.3
Lengua Española y Lietartura	80.5	7.5	87.9	12.1
Filosofía	82.0	7.2	89.2	10.8
EATP-Diseño	88.7	4.1	92.7	7.3
Etica	94.7	1.5	96.2	3.8
EATP-Hogar	95.5	1.1	96.6	3.4
Educación Física y Deportes	94.0	2.6	96.6	3.4
Francés segundo idioma	94.0	3.0	97.0	3.0
EATP-Otras	96.5	0.8	97.4	2.6
Formación Religiosa	96.9	0.8	97.8	2.2
EATP-Informática	96.4	1.6	98.0	2.0
COU				
Física	66.5	9.7	76.3	23.7
Matemáticas I	66.3	10.0	76.3	23.7
Biología	70.8	6.9	77.7	22.3
Química	68.4	9.3	77.8	22.2
Geología	70.4	8.0	78.4	21.6
Francés	68.7	11.5	80.2	19.8
Historia del Arte	70.4	11.2	81.6	18.4
Historia Mundo Contemporáneo	70.0	12.1	82.1	17.9
Matemáticas II	70.3	12.6	82.9	17.1
Dibujo Técnico	77.9	5.9	83.8	16.2
Lengua Española	72.1	11.7	83.8	16.2
Filosofía	73.5	10.4	83.9	16.1
Latín	70.0	14.0	84.1	15.9
Inglés	73.1	11.5	84.6	15.4
Literatura	73.3	11.7	85.0	15.0
Griego	82.4	8.3	90.7	9.3

Todos los valores son porcentajes sobre el total de alumnos evaluados.
La ordenación es ascendente por cursos y descendente por dificultad de las asignaturas.

Tabla E1
Calificaciones en EGB, por cursos

	CALIFICACION			
	POSITIVA			NEGATIVA
	Junio	Sept.	Total	Sept.
Sexto				
Matemáticas	67.6	11.1	78.7	21.3
Inglés	69.4	10.7	80.1	19.9
Lengua	69.5	11.8	81.4	18.6
Francés	71.4	10.2	81.5	18.5
Ciencias Naturales	73.3	10.1	83.4	16.6
Ciencias Sociales	73.1	10.8	84.0	16.0
Artística y Pretec.	88.7	7.1	95.8	4.2
Educación Física	92.2	5.7	97.8	2.2
Séptimo				
Matemáticas	65.2	11.1	76.3	23.7
Inglés	67.3	10.1	77.4	22.6
Lengua	69.9	9.6	79.5	20.5
Francés	73.2	6.9	80.1	19.9
Ciencias Naturales	71.3	10.6	82.0	18.0
Ciencias Sociales	72.5	9.6	82.0	18.0
Artística y Pretec.	87.9	7.3	95.1	4.9
Educación Física	92.1	5.8	97.9	2.1
Octavo				
Matemáticas	68.8	14.5	83.3	16.7
Lengua	70.2	13.4	83.6	16.4
Francés	76.6	7.1	83.7	16.3
Inglés	69.9	14.6	84.4	15.6
Ciencias Naturales	72.7	12.2	84.9	15.1
Ciencias Sociales	73.6	11.9	85.5	14.5
Artística y Pretec.	88.7	6.5	95.2	4.8
Educación Física	92.7	5.5	98.2	1.8

Todos los valores son porcentajes sobre el total de alumnos evaluados.
La ordenación es ascendente por cursos y descendente por dificultad de las áreas.

Continuamos, así, al final de estas reflexiones, con ideas contradictorias y difíciles de superar, pero que sugieren nuevos caminos por donde avanzar y en los que hay que adentrarse para alcanzar las metas de mejora que nos propone la evaluación formativa.

Referencias bibliográficas

CASANOVA, M.A. (1992): *La evaluación, garantía de calidad para el centro educativo*. Zaragoza, Edelvives.

CASANOVA, M.A. (1995): *Manual de evaluación educativa*. Madrid, La Muralla.

CASANOVA, M.A. (1996): «La evaluación en el contexto de la educación permanente», en *Revista de Educación a Distancia*, nº 14. Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia, octubre-enero.

FAYOL, H. (1961): *Administración industrial general*. México, Trillas.

FERNANDEZ PEREZ, M. (1988): *Evaluación y cambio educativo: el fracaso escolar*. Madrid, Morata.

INCE (1996): *Evaluación de la Educación Primaria. Informe preliminar*. Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia.

MEC (Ministerio de Educación y Ciencia) (1993): *Calificaciones, por áreas o asignaturas, en EGB, FP y*

BUP-COU. Madrid, Servicio de Inspección Técnica de Educación.

RAMIREZ, J.L. (1991): «La retórica como lógica de la evaluación», en *Bordón*, 43(4). Madrid, Sociedad Española de Pedagogía.

REYZABAL, M.V. (1993): *La comunicación oral y su didáctica*. Madrid, La Muralla.

SOLER VAZQUEZ, E. y otros (1995): *Evaluación de aprendizajes*. Oviedo, Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad.

ARTÍCULOS

Una Relación Breve y Sumaria sobre el Origen y Evolución del Significado de la palabra Matemática

Resumen

Etimológicamente, la palabra *matemática* significa *estudiosa* o la *ciencia por excelencia*, según que sea traducida del adjetivo femenino *mathematiké* o del nombre neutro plural *mathémata*. En la época de Platón, las matemáticas incluían la aritmética, la geometría y la astronomía. Los pitagóricos incluyeron también a la música. San Isidoro de Sevilla definió la matemática como la ciencia que estudia la cantidad. El álgebra y el cálculo ampliaron el significado de la matemática, el cual se complicó con el resurgimiento del método axiomático y la creación de nuevas geometrías, situación que prevalece hasta nuestro tiempo. Sólo el trato constante con la matemática y el conocimiento de su desarrollo histórico, remontándose hasta el significado mismo de la palabra, puede hacer que tengamos una mejor idea sobre el significado de ella.

Abstract. Etymologically, the word mathematics means *studious* or *science par excellence* according to its translation from the femenine adjective *mathematiké* or from the plural neuter noun *mathémata*. At the time of Plato, mathematics included arithmetic, geometry and astronomy. The Pythagoreans also included music. Saint Isidore from Seville defined mathematics as the science which studies quantity. Algebra and calculus broaden up the meaning of mathematics, which became very complex because the axiomatic method rose up again and new geometries were created. Only the active experience in mathematics and the knowledge of its historic development, getting back to the meaning of the word itself, can give us a better idea about mathematics.

Para comprender cabalmente el significado de la *matemática* es necesario remontarse hasta el origen de dicha palabra. Ista nos llega de la lengua griega y su origen está en el verbo μανθανειν (manthanein) que significa *aprender*, especialmente por el estudio, aunque también por la práctica y la observación.[1] (μανθανειν es infinitivo y se enuncia μανθανω –primera persona del singular– que es como aparece en los diccionarios de griego clásico).

El infinitivo activo en aoristo de μανθανειν es μαθειν (mathein) que significa *haber aprendido* y, del vocablo μαθειν, se origina toda una familia de palabras entre las cuales se encuentra μαθημα (máthema), la cual es de género neutro y significa, *ciencia*. También significa *aprendizaje*, *estudio*, *enseñanza*, *conocimiento*, *talento*,

Héctor Federico Godínez Cabrera
Instituto Tecnológico de León
México

disciplina. Por ejemplo, en Platón nos encontramos con la expresión το μαθημα το πε ρι τας ταξε ις[2] (la ciencia de la estrategia). En muchos otros textos se encuentra la palabra μαθημα la cual, según el contexto, puede matizarse con alguno de sus significados que acabamos de mencionar.

μαθημα se usaba en el siglo V, a.C., para designar en general cualquier tipo de estudio o instrucción. En el siglo IV, -y esto será decisivo para la significación de matemática-, μαθηματα (mathémata), que es el plural de μαθημα, comienza a emplearse para designar a tres ciencias: la aritmética, la geometría y la astronomía. Esto se comprueba con la expresión τρια μαθηματα que utilizan Platón[3] y Arkytas de Tarento[4] para referirse a esas tres ciencias. A partir de entonces, la expresión τα μαθηματα será exclusiva para designar en conjunto a la aritmética, la geometría y la astronomía.

Como τα μαθηματα está en plural, la traducción que siempre se le ha dado es *las ciencias matemáticas* o, simplemente, *las matemáticas*. Aquí se encuentra la explicación del porqué se emplea el plural *matemáticas* más frecuentemente que el singular *matemática*.

Como la traducción literal de τα μαθηματα es *las ciencias*, podemos entonces afirmar que las matemáticas, desde el punto de vista etimológico y prístino, se pueden definir como *las ciencias de las ciencias* o, mejor dicho, *la ciencia por antonomasia* o *la ciencia por excelencia*.

De la palabra μαθημα deriva el adjetivo μαθηματικος (mathematikós) del cual, a su vez, deriva la palabra española *matemático*. De la frase de Platón[5]: τον δη μαθηματικον τινα αλλην σφοδρα με λετην διανοιαι κατε ργαζομε νον..., los traductores coinciden en que a ομαθηματικος se le puede asignar el significado siguiente: *el que trabaja fuertemente con su intelecto, el que se dedica a la ciencia o a algún trabajo intelectual.*

El texto de Platón recién citado, y otros que en su contexto tienen la palabra μαθηματικος, -así como el significado mismo del sufijo ικος, el cual es aptitud-, nos dan elementos para afirmar que, etimológicamente, la palabra española *matemático* significa *el que tiene gusto por aprender, estudioso, el que se dedica fuertemente a la ciencia o a algún trabajo intelectual, aficionado del aprendizaje*.

El femenino de μαθηματικος es μαθηματικη (mathematikJ) vocablo que, por lo tanto, significa etimológicamente *la que tiene gusto por aprender, estudiosa*. Llama la atención el hecho de que μαθηματικη, y no μαθημα, fue la palabra que se usó para designar a cada una de las μαθηματα (Recordar que μαθημα es el singular de μαθηματα).

¿Por qué se les llamo μαθηματικη a cada una de las μαθηματα? No hay certeza al respecto; sin embargo, hay una teoría la cual afirma que los aristotélicos llamaron μαθηματικη a aquélla ciencia que, para poder conocerla, es necesario primero instruirse en ella[6]. Para ellos, una μαθηματικη era la geometría; otra, la astronomía; otra, la aritmética. Consideraban que las demás ciencias podían comprenderse aun sin haberse estudiado.

El plural de η μαθηματικη es αι μαθηματικαι, y Aristóteles lo llega a usar en lugar de τα μαθηματα[7]. Él también emplea el singular μαθηματικη para referirse a las μαθηματα o μαθηματικαι como *una sola ciencia*. Por ejemplo, afirma que αλλε στι και η μαθηματικηθε ωρητικη, es decir: la (ciencia) matemática es también especulativa[8].

Al traducirse μαθηματικη como *matemática*, tenemos entonces que el significado etimológico de matemática es *estudiosa* o *gustosa por aprender*, aunque es claro que ya desde Aristóteles μαθηματικη tenía una acepción diferente: era una φιλοσοφια θεωρητικη, es decir, una filosofía teórica o ciencia especulativa. Hay otra expresión que Aristóteles empleó en lugar de τα μαθηματα y αι μαθηματικαι. Es el sustantivo neutro plural τα μαθηματικα[9] (ta mathematiká). Es muy posible que debido a esta expresión, la latinización se realizó con la palabra *mathematica* y, posteriormente, la castellanización con *matemática*.

De lo expuesto hasta aquí, tenemos que cuatro son las palabras griegas que han dado lugar a las españolas matemáticas y matemática:

— μαθηματα que es el plural de μαθημα, es traducida como las ciencias matemáticas o, simplemente, las matemáticas.
— μαθηματικαι, que es el plural de μαθηματικη, se traduce de igual manera que μαθηματα.
— μαθηματικα, palabra que sólo aparece en plural y que deriva de μαθημα se traduce igual que las dos anteriores.
— μαθηματικη, que deriva de μαθημα, se traduce como la ciencia matemática o, simplemente, la matemática.

Como hemos visto, desde Platón se llamó *matemáticas* a la agrupación de la geometría, la aritmética y la astronomía, aunque los pitagóricos habían incluido también a la música. Posteriormente, durante el tiempo de Arquímedes (siglo III, a.C.) se incluían también la mecánica, la óptica, la geodesia y la logística. (La logística, λογιστικη, era el arte de calcular, a diferencia de la aritmética, αριθμητικη, que era la ciencia o la teoría de los números de manera abstracta. La logística era, pues, como la aritmética práctica). Esta agrupación no prosperó y se siguió considerando posteriormente la agrupación pitagórica.

Al imponerse el latín en Europa, los vocablos griego μαθηματα, μαθηματικαι, μαθηματικα y μαθηματικη se latinizaron en *mathematica*, palabra en singular que se refería a las cuatro ciencias de la clasificación pitagórica. Así, en el siglo VIII, San Isidoro de Sevilla nos dice que *mathematica, latine dicitur doctrinalis scientia, quae abstractam considerat quantitatem... Cuius species sunt quattuor: id est Arithmetica, Musica, Geometria et Astronomia*[10]. (Llamamos en latín *matemática* a la ciencia doctrinal que tiene por objeto el estudio de la cantidad abstracta... Cuatro son las materias que la integran: la aritmética, la música, la geometría y la astronomía).

Además de indicar que la matemática está formada por cuatro ciencias, San Isidoro de Sevilla da una definición de ella: *ciencia que estudia la cantidad abstracta*. Durante la Edad Media se continuará con esta definición y agrupación de la matemática.

El *Diccionario de la Lengua Castellana* de Cobarruvias Orozco, de principios del siglo XVII, «definía» la matemática de la siguiente manera: *Dícese propiamente de la geometría, aritmética y astronomía, porque éstas, por excelencia, se llamaban ciencias matemáticas*. En el mismo siglo XVII el álgebra se incorpora a las disciplinas que conforman el cuerpo de las matemáticas y, con la aparición del cálculo diferencial e integral, las matemáticas no se reducirán ya a sólo tres o cuatro ciencias; esto hará que su significado vaya ampliándose.

Un intento por dar una definición general de matemáticas lo encontramos ya en la famosa *Histoire des Mathématiques* de J.F. Montucla, de los primeros años del siglo XIX: *Les Mathématiques, c'est la science des rapports de grandeur ou de nombre, que peuvent avoir entr'elles toutes les choses qui sont susceptibles d'augmentation ou de diminution*[11]. (Las matemáticas es la ciencia de las relaciones de tamaño o de número que pueden tener entre sí todas las cosas que son susceptibles de aumento o de disminución).

Hasta la segunda mitad del siglo XIX, la matemática (o las matemáticas) se siguió definiendo como *la ciencia que trata de la cantidad* o como *la ciencia del número, la magnitud y la forma*. Estas definiciones satisfacían a la mayoría. Sin embargo, empezó a tomarse en cuenta la afirmación que Leibniz había hecho a fines del siglo XVII: *La matemática es la lógica de la imaginación que se ocupa de todo aquello que, en el dominio de la imaginación, es susceptible de determinación exacta*[12]. Boole afirmaría más tarde (en 1854) que *no forma parte de la esencia de la matemática el ocuparse de las ideas de número y de cantidad*[13].

Hoy nos damos cuenta con claridad que la definición de Leibniz y la de Boole no hacen más que mostrar el nivel de abstracción al que habían llegado estos matemáticos y reflejan también la experiencia personal que sobre la matemática habían alcanzado.

La definición de Leibniz, anteriormente citada, empezó a tomarse más en cuenta con la aparición de las geometrías no euclidianas. La invención y el desarrollo de éstas propició que resurgiera el método axiomático y se formara la lógica matemática, la cual vino a desempeñar un papel importantísimo en la matemática y a dar un nuevo matiz al significado de ésta: *si tuviéramos que señalar una característica primordial de las ciencias matemáticas elegiríamos la insistencia en la demostración lógica de las cosas*[14]. *Es indudable que la vinculación de la lógica con la matemática es más estrecha o, si se quiere, más clara y evidente que con cualquiera de las otras ciencias*[15]. Durante los primeros sesenta años del siglo XX, la mayoría de los matemáticos insistieron en la demostración lógica de los conceptos matemáticos, llegando a identificar a la lógica con la matemática. Bertrand Russell afirmó: *la matemática y la lógica son idénticas*[16]. El mismo Russell sostuvo que *la lógica se ha vuelto más matemática y la matemática más lógica. Como consecuencia, ahora es imposible trazar una línea divisoria entre ambas; de hecho, las dos son una sola*[17]. La definición de matemática se dio, entonces, como sinónimo de lógica o en función de ésta.

Como la lógica matemática y el método axiomático caminaron de la mano, también se definió en función de éste a la matemática. Así, Luis Enrique Erro estableció el significado de la matemática de la siguiente manera: *Las matemáticas son la ciencia* *abstracta pura en la que se parte de un sistema de proposiciones abstractas exento de contradicciones y de toda implicación intuitiva, pero que contiene explícitamente todas las suposiciones que han de intervenir en el desarrollo ulterior, y que tiene por objeto encontrar proposiciones válidas mediante la operación de reglas lógicas preestablecidas*[18].

Estas definiciones están establecidas en el contexto de la corriente logicista, la cual, como lo hemos mencionado líneas arriba, tuvo una enorme influencia en la mayoría de los matemáticos. El mismo Jean Dieudonné reconoce que no pudo evitar en un determinado momento la influencia de esta corriente: *durante un año entero, yo me pasé el tiempo fabricando un sistema lógico que resultara satisfactorio porque estaba preocupado hasta el punto de necesitar demostrarme a mí mismo que era posible hacer matemáticas de manera totalmente coherente*[19]. Esta experiencia lo llevó al convencimiento de la separación entre la lógica y la matemática, al grado de afirmar que los matemáticos ya no se interesan por la lógica y que los lazos que unen a la lógica matemática con los problemas de las matemáticas de nuestro tiempo son cada vez más tenues[20].

El grupo Bourbaki, del cual Dieudonné fue miembro fundador, intenta explicar en qué consiste la matemática y en dicha explicación es notorio que se excluye intencionalmente la palabra lógica: *Las matemáticas es el estudio de las relaciones entre objetos que en forma deliberada no se conocen, y sólo se describen por algunas de sus propiedades, precisamente aquellas que se adoptan como axiomas básicos de partida de su teoría*[21].

Como su desarrollo ha llevado a la matemática (al menos hasta el momento) a convertirla en una disciplina de tipo deductivo, en la que su esencia radica en las *relaciones* que hay entre objetos de los cuales no importa su naturaleza, los esfuerzos que se hacen por definirla parecen que van encaminados a mejorar la definición de Bourbaki: *Las matemáticas es la ciencia que estudia por medio del razonamiento deductivo las propiedades de seres abstractos (números, figuras goemétricas, funciones, espacios, etc.) así como las relaciones que se establecen entre ellos*[22].

Así como los logicistas y los bourbaquistas tratan de explicar el significado de la matemática de acuerdo con su Apostura@, que no es más que la manifestación de sus experiencias y convicciones dentro del quehacer matemático, de igual manera los seguidores de la corriente o escuela intuicionista, los de la formalista y los de la conjuntista intentan explicar en qué consiste la matemática; lo cual hace que definirla sea muy complicado, aumentando esta situación conforme más se desarrolla. Morris Kline dijo que *el problema actual de las matemáticas es que no hay una sino muchas matemáticas*[23]. Sin embargo, desde los albores del siglo XX, Henri Poincaré manifestaba su unidad al afirmar que *la matemática es el arte de dar el mismo nombre a cosas diferentes*[24].

Dar el mismo nombre a cosas diferentes, no es más que el proceso de abstracción. Este proceso es un razgo esencial de las matemáticas ya que mediante él se obtiene generalidad. (Esto, los griegos lo comprendieron cabalmente). Así, las fórmulas matemáticas que se aplican a una circunferencia abstracta se aplican de igual manera a una circunferencia determinada por una rueda, o a una que presente esta forma en una estructura de ingeniería. Otro ejemplo de esta situación lo tenemos con la *suma*. Con este nombre nos referimos a suma de números reales, suma de funciones, suma de vectores, suma de matrices, etc. Estamos dando el mismo nombre a cosas diferentes. En este caso, a estas operaciones las representamos con el signo + por su parecido esquemático, aunque su contenido es diferente. Una definición de matemáticas que creo alude o contiene la característica expuesta en estas últimas líneas es la que proporciona Santiago Valiente: *Las matemáticas es la ciencia que estudia, analiza e interpreta las abstracciones numéricas, espaciales y funcionales de las leyes de la naturaleza, de la sociedad y del pensamiento*[25].

Al tratar de definir la matemática, algunos autores de nuestros días han retomado la definición antigua pero dándole un matiz logicista y formalista. Así, Jean Weber afirma que *la matemática es una rama de la lógica que posee una estructura sistemática dentro de la cual se pueden estudiar las relaciones cuantitativas*[26]. En esta definición se puede observar que, aunque la autora se muestra de la escuela logicista, su definición se puede simplificar en la expresión antigua: *la ciencia que estudia la cantidad.*

El pensamiento de Bertrand Russell sobre la esencia y significado de la matemática puede considerarse como un ejemplo que ilustra la postura, actitud y evolución del pensamiento de quizás la mayoría de los matemáticos y de los estudiosos de esa disciplina y, ejemplifica a la vez, la dificultad de explicar el significado de la matemática: En el año 1901 Russell dijo: *la matemática es la ciencia sobre la cual nunca sabemos lo que decimos, ni si lo que decimos es verdadero*[27]. En el mismo año afirmaba convencido que *uno de los triunfos más importantes de las matemáticas modernas consiste en haber descubierto lo que las matemáticas son realmente*[28]. Luego, en 1903, en su obra *Los principios de la matemática* parecía decir lo que ésta era realmente: *la matemática y lo lógica son idénticas*; aunque párrafos más adelante decía: *definir la lógica, o la matemática, no es fácil en absoluto*[29]. Y, en 1959, en su obra *Mi evolución filosófica* confesaba concluyente: *la espléndida certeza que siempre había esperado encontrar en las matemáticas se perdió en un desconcertante enredo... Verdaderamente, es un laberinto conceptual complicado*[30].

De todo lo expuesto hasta aquí, podemos damos cuenta que es muy difícil dar una definición de matemáticas que satisfaga a todos. A la vez, podemos afirmar que para comprender el significado de la matemática se requiere de un buen conocimiento general de ella y de su historia, es decir, de su evolución; porque como afirma Dieudonné: *No puede entenderse una ciencia si se ignora su evolución*[31]. Tenemos entonces que aceptar cabalmente la afirmación de Courant y Robbins: *únicamente la experiencia activa en matemáticas es la que puede responder a la pregunta:)qué es la matemática?*[32].

1. ARISTÓTELES. *Ética nicomaquea*, 1103a, 32. Instituto de Investigaciones Filológicas. UNAM. México, D.F. 1983.
2. PLATÓN. *Laques*, 182 b. Instituto de Investigaciones Filológicas. UNAM. México, D.F. 1983.
3. PLATÓN. *Leges*, 817 e. H. LIDDELL-R. SCOTT, A Greek-English Lexicon. University Press, Oxford. Great Britain. 1977. Página 1072.
4. ARKYTAS TARENTINO. *Titulus*, I.3. H. LIDDELL-R. SCOTT, A Greek-English Lexicon. University Press, Oxford. Great Britain. 1977. Página 1072.
5. PLATÓN. *Timeo*, 88 c. H. LIDDELL-R. SCOTT, A Greek-English Lexicon. University Press, Oxford. Great Britain. 1977. Página 1072.

THOMAS HEATH. *A History of Greek Mathematics*. Volume I. Editorial Dover, New York. 1981. Página 10.

7. ARISTÓTELES. *Metafísica*, 1026a, 25. Instituto de Investigaciones Filológicas. UNAM. México, D.F. 1985.
8. ARISTÓTELES. *Metafísica*, 1026a, 5. Instituto de Investigaciones Filológicas. UNAM. México, D.F. 1985.
9. ARISTÓTELES. *Ética nicomaquea*, 1151a. 17. Instituto de Investigaciones Filológicas. UNAM. México, D.F. 1983.
10. SAN ISIDORO DE SEVILLA. *Etymologiarum*. Liber III. De Mathematica. Editorial BAC. Madrid, 1982. Página 422.
11. J. F. MONTUCLA. *Histoire des Mathématiques*. Tome premier. Chez Henri Agasse, Libraire. An VII de la Révolution. Página 3. (La edición aquí citada es la obra en cuatro volúmenes completada por Lalande. La primera edición, en dos volúmenes, apareció en 1758).
12. G. W. LEIBNIZ. *Opuscules et Fragments Inédits*. L. Couturat, Paris, 1903.
13. G. BOOLE. *Collected Logical Works*. P Jourdain. Chicago-London. 1916.
14. MOSES RICHARDSON Y LEONARD RICHARDSON. *Fundamentos de matemáticas*. CECSA. México 1976. Página 29.
15. JOSI BABINI. *Historia de las ideas modernas en matemáticas*. Editado por la O.E.A. Monografía número 4. Washington, D.C. 1974. Página 39.
16. BERTRAND RUSSELL. *Los principios de la matemática*. Espasa-Calpe. Madrid. 1948. Página 7.
17. BERTRAND RUSSELL. *Introduction to Mathematical Philosophy*. George Allen and Unwin, LTD. London. Página 194.
18. LUIS ENRIQUE ERRO. *El pensamiento matemático contemporáneo*. Biblioteca Enciclopédica Popular de la SEP. Número 10. México, 1944. Página 72.
19. J. DIEUDONNI et al. *Pensar la matemática*. Tusquets Editores. Barcelona, España. 1988. Página 169.
20. J. DIEUDONNI et al. *Pensar la matemática*. Tusquets Editores. Barcelona, España. 1988. Página 192.
21. NICOLAS BOURBAKI. *Eléments d=Histoire des Mathématiques*. Hermann, Editeurs des sciences et des Arts. Paris. 1969. Página 34.
22. Petit Larousse en couleurs. Librairie Larousse. Paris. 1988.
23. MORRIS KLINE. Mathematics. *The Loss of Certainty*. Oxford University Press. New York. 1980. Página 6.
24. HENRI POINCARI. *L=Avenir des Mathématiques*, IV Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Roma en el año 1908. (Hacen alu-sión a esta frase: MAURICE FRICHET. *Las matemáticas y lo concreto*. Publi-cado en español por la UNAM. Se-gunda edición 1988. Página 53. W. SAWYER. *Prelude to Mathematics*. Dover Publications. New York. Página 13).

25 SANTIAGO VALIENTE B. *Diccionario de matemáticas*. Alhambra Mexicana. México. 1988.

26 JEAN E. WEBER. *Mathematical Analysis: Busines and Economic Applications*. Fourth Edition. Harper and Row. Publishers, Inc. New York. 1982. Introduction.

27 BERTRAND RUSSELL. *International Monthly*, vol 4, 1901. Página 84. Frase reproducida por Moses y Leonard Richardson en *Fundamentos de Matemáticas*, CECSA, México, D.F., 1976. Página 49.

28 Frase citada por MORRIS KLINE en su obra *Mathematics. The Loss of Certainty*. Oxford University Press. New York. 1980. Página 277.

29 BERTRAND RUSSELL. *Los principios de la matemática*. Espasa-Calpe. Madrid. 1948. Páginas 7 y 15.

30 BERTRAND RUSSELL. *Los principios de la matemática*. Espasa-Calpe. Madrid. 1948. Página 230.

31 J. DIEUDONNI et al. *Pensar la matemática*. Tusquets Editores. Barcelona, España. 1988. Página 167.

32 R. COURANT Y H. ROBBINS. *)Qué es la matemática?* Éd. Aguilar. Madrid. 1960. Página 7.

La Utilización del Humor para Facilitar la Comunicación entre Educadores Matemáticos

Resumen

En este artículo estudiamos las ventajas de que se utilicen chistes, relacionados con la educación y con las matemáticas, para facilitar que los educadores matemáticos reflexionen sobre sus concepciones. Para mostrar el alcance de esta reflexión se analizan dos chistes, tratando de obtener de ellos una amplia variedad de significados.

Abstract: *In this paper we show the advantages of using jokes related to Education and Mathematics as a resurce to facilitate the reflecting about the conceptions of the mathematics teachers, students, and mathematics education searchers. In order to illustrate this reflection we analyze two jokes, trying to take out the variety of meanings that can be obtained from them.*

1. Introducción

¿Qué pasa cuando x tiende a infinito?....

Que infinito ***se seca***

Este chiste pone de evidencia el uso particular que hacemos, en el colectivo que se ocupa de la educación matemática, de términos que son de uso común, como es el verbo *tender*. Cuando he contado este chiste a compañeros, profesores o investigadores en Didáctica de las Matemáticas, ha habido que repetirlo varias veces para que entendieran la lógica de la respuesta. Es frecuente que los profesores no entendamos por qué los alumnos exclamaban *¡¡tres!!*, *¡¡ene!!* cuando escribimos en la pizarra el factorial de 3 o de n. En mis clases con estudiantes de quinto curso de la licenciatura de Matemáticas, de la Universidad de Granada, observé con extrañeza que algunos estudiantes para profesor rechazaban que el alumno *aprendiera* Matemáticas; tras una entrevista comprendí que estos estudiantes estaban identificando *aprender* con *aprender de memoria*, y el aprendizaje memorístico estaba siendo criticado en esas clases (Flores, 1995).

Pablo Flores
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada
España

El proceso de comunicación entre los profesores, alumnos, padres, representantes sociales, investigadores, etc. que forman parte de la «comunidad educativa» se produce mediante una «jerga» de términos que hacen que este grupo social se distinga de otros grupos. El uso de una jerga puede caer en el ridículo, si suplanta una ausencia de significación, o si propone una proliferación de términos específicos que rellenen los discursos. Así, en los años 70, mientras se reglamentaba en España la Ley General de Educación (LGE, desde entonces), una revista presentara una viñeta en la que un gato maullaba (¡Miau, Miau!), un perro le contestaba ladrando (¡Guau, Guau!), y otros animales entonaban sonidos empleando las siglas ligadas a esa ley (¡COU, COU!, ¡BUP, BUP!, ¡EGB!, ¡LGE!, ..etc,[1]).

En los congresos de educadores matemáticos se reunen personas de diferentes intereses, que tienen una jerga matemática común, pero con referencias profesionales diferentes. Las jergas educativas presentan matices que dificultan la comunicación en tre diversos grupos, y no siempre somos conscientes de estas diferencias de matiz. Es preciso que aclaremos el significado que el emisor atribuye a sus reflexiones y argumentaciones para que el receptor pueda entenderlo (o pueda entender por qué no se produce la comunicación).

Un primer punto de referencia para la comunicación lo constituyen las concepciones y creencias de los comunicantes sobre el proceso de la educación matemática. Estas creencias tienen la particularidad de que se consideran que son compartidas por el grupo. Sin embargo, como se ha mostrado mediante la investigación epistemológica y didáctica (Thompson, 1992, Flores, 1995), no son unívocas. No han sido únicas a lo largo de la historia de las Matemáticas ni lo son en la situación presente. Estas concepciones influyen en la forma en que realizamos nuestro trabajo.

Se hacen precisos puentes para facilitar la comunicación entre los sujetos implicados en la enseñanza de las Matemáticas. La comunicación no puede estar basada en la dominación de los unos por los otros, sino en que cada grupo comprenda la postura que adoptan los demás, y puedan aprovechar las reflexiones de los otros grupos para su desempeño profesional particular.

Para que se produzca esta comunicación no podemos limitarnos a emplear la lógica del lenguaje, ya que, como hemos visto, esta lógica está repleta de interpretaciones contextuales que además se consideran unívocas. La naturaleza evocadora del lenguaje, sin embargo, nos puede ayudar a extraer imágenes variadas, no únicas, de cómo que se interpreta el lenguaje mediante los procesos de relación con la naturaleza.

Para Lakoff y Johnson (1980) esta cualidad metafórica es intrínseca al lenguaje, es decir, la idea de que el lenguaje es unívoco es una ilusión, ya que todo lenguaje pone en contacto la forma en que cada interlocutor interpreta el objeto de la comunicación. También para Postman y Weingartner, (1975) *«Todo lenguaje es metáfora en uno u otro grado. La única realidad no metafórica es la misma «realidad»»* (p. 102)

1 COU: Curso de Orientación Universitaria, BUP: Bachillerato Unificado y Polivalente, EGB: Enseñanza General Básica.

Sin embargo, la cualidad evocadora del lenguaje es a veces difícil de compartir, especialmente en el terreno de la educación matemática. Quizás colabore a ello el que en Matemáticas se aspire a formalizar y emplear un lenguaje preciso, mientras que en el terreno de la educación se intenta describir y actuar sobre relaciones humanas, con lo cual el lenguaje recoge su carácter evocador, tanto cuando se habla de enseñanza como cuando se emplea en la comunicación didáctica en el aula.

Al analizar estos hechos desde la Didáctica de las Matemáticas aparecen conflictos entre los siguientes elementos: un lenguaje -metafórico- como medio de comunicación entre los educadores matemáticos; la aspiración de los profesores a formalizar conceptos y relaciones matemáticas; y una actividad humana, la educación, que no es formalizable y que a su vez se realiza con un lenguaje metafórico.

Los profesores de Matemáticas, en el contexto de aula, y los formadores de profesores y didáctas, en los contextos correspondientes, caemos en la tentación de la «ilusión de transparencia», que consiste en creer que lo que se ha transmitido mediante una explicación lógica, bien estructurada, será captado y comprendido por el receptor. Una manera de romper esta tentación en el proceso de comunicación entre educadores matemáticos es hacer evidente la naturaleza metafórica del lenguaje, y mediante este lenguaje metafórico intercambiar experiencias, poner en común representaciones y ayudarnos de las experiencias ajenas para resolver los dilemas profesionales que aparecen en nuestro trabajo docente e investigador.

En este artículo trato de argumentar que una de las maneras de explicitar la naturaleza metafórica del lenguaje es emplear elementos metafóricos tan plásticos, estéticos (Freud, 1969), y sugerentes como son los **chistes**. Como además los chistes tienen una componente lúdica, permiten desdramatizar las diferencias existentes entre la comunidad de educadores matemáticos, empezando por aceptarlas, como aceptamos nuestra jerga.

La idea de emplear chistes en la comunicación es muy usual, especialmente para adornar y quitar seriedad al discurso. La propuesta que hago aquí va más en el sentido del matemático John Allen Paulos, que ha hecho del chiste un apoyo fundamental de sus argumentos. Paulos ha recogido en uno de sus libros las alusiones humorísticas a la matemáticas (*Matemátics and Humor*, 1980). En otro libro ha resaltado de manera humorística la cualidad evocadora de los argumentos lógicos (*Pienso, luego río*, 1994), y en el más reciente, ha empleado los chistes como refuerzo para interpretar matemáticamente la realidad cotidiana, tal como aparece en los periodicos (*Un matemático lee el periódico*, 1996).

En este artículo pretendo mostrar como los chistes ayudan a poner en comunicación diferentes interpretaciones de los fenómenos caricaturizados. Este contraste de interpretaciones es la esencia misma del humor (Freud, 1969), y permite que los interlocutores perciban de manera plástica la existencia de estas diferentes formas de representación. El chiste desdramatiza la comunicación, a la vez que nos puede suministrar un punto de reflexión sobre la lógica imperante en nuestras creencias y concepciones sobre la enseñanza de las Matemáticas. Una actitud crítica hacia esta lógica facilita la reflexión sobre la práctica y permite la comunicación con los otros miembros de la comunidad educativa. Y si logramos ser críticos con la lógica personal, podremos comprender un poco mejor la lógica de las otras personas implicadas en la tarea de la educación matemática. Como Watzlavick (1980) señala: *Precisamente porque el golpe de ingenio, el chiste, se alza soberanamente por encima del sentido y de la lógica de una determinada concepción del mundo, sacude el orden de cualquier mundo y puede por ende convertirse en instrumento del cambio* (p. 54-55).

2. Análisis del chiste

Uno de los análisis más completos del chiste es el que realiza Freud (1969). Recogiendo algunas caracterizaciones que realizan diversos autores, Freud señala que el chiste es: *a) Conducta activa del sujeto; b) Un juicio desinteresado; c) Apareamiento de lo heterogéneo; d) Contraste de representaciones; e) Sentido en lo desatinado; f) Sucesión de asombro y esclarecimiento; g) Peculiar brevedad.*

Las caracterizaciones c, d, e, f y g nos han hecho reconocer que para que se dé este contraste de representaciones, deben darse al menos dos representaciones en conflicto. Cada una de estas representaciones tiene una lógica interna que comparten el emisor y el receptor. En los chistes caracterizados por el contraste de representaciones, aparecerían al menos, los siguientes elementos:

Componentes de una situación cómica
1. Una lógica familiar (Planteamiento)
2. Unas expectativas que se siguen (Nudo)
3. Una lógica inesperada de salida (Desenlace inesperado)

Voy a emplear este esquema de componentes para estudiar el contenido de algunos chistes, pero sin un fin analítico que a su vez destruiría el humor (Paulos, 1994). Mi intención con este análisis es facilitar la comunicación, en el sentido que propone Watzlawick (1992), quien se sorprende de que Freud *«(..) lo considere [al chiste] solo como «calle de dirección única», es decir, del inconsciente a la conciencia, y que no haya sacado la conclusión obvia de que el lenguaje del chiste puede utilizarse también,* ***a la inversa****, como medio de comunicación con el inconsciente.* (p. 55).

Partiendo de esta idea de que el chiste permite la comunicación con el inconsciente, voy a tratar de analizar los posibles significados que se le atribuyen a algunos chistes, y con ello estaremos profundizando en la forma en que pueden interactuar los sujetos en la comunicación.

En el chiste de introducción, la pregunta «*qué pasa cuando x tiende a infinito*» tiene una lógica en el discurso de las Matemáticas. En esta lógica (que sería la lógica familiar de los educadores matemáticos) se emplea el verbo intransitivo «*tender*», con sentido dinámico, relacionado con la idea de límite («*tender hacia*»). Introducidos en esta lógica se espera que la respuesta a la pregunta esté relacionada con el álgebra de límites, y sea de naturaleza matemática. Sin embargo, hay otra lógica implícita (otra representación posible), en la que se utiliza el sentido transitivo del verbo «*tender*», en el que el complemento directo es «*infinito*», concebido como un objeto físico (lo que es una simplificación corriente en la enseñanza). Este efecto sorpresa se vería menguado mediante la viñeta de la figura 1, en la que apenas se pierde un poco de efectismo, pero no el sentido de la comunicación que encierra el chiste.

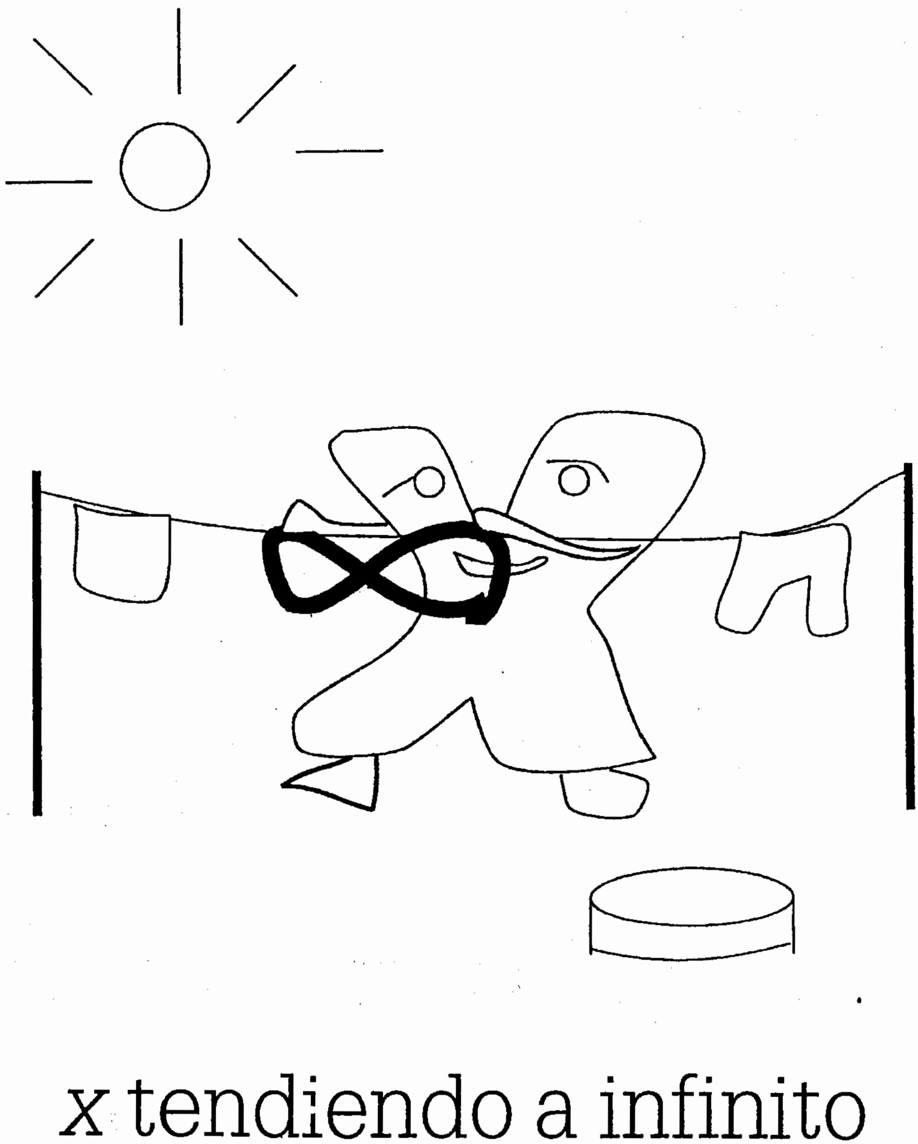


Figura 1: Escenificación de x tendiendo a infinito

3. Análisis de algunos chistes y su repercusión en la comunicación dentro de la comunidad de educación matemática

Para mostrar la cualidad comunicativa que se genera mediante los chistes, voy a analizar dos de ellos. El primero está contenido en una secuencia de viñetas. Posteriormente analizaré un chiste menos secuencial.

3.1 Análisis del contraste de representaciones que aparecen en EL GATO FILÓSOFO Y LAS CALCULADORAS, de Geluck.

Fijémonos en la tira cómica del Gato Filósofo, de Philippe Geluck, (figura 2), aparecida en la revista *«El Víbora»* de hace algunos años. Antes de analizarlo contextualicemos el proceso que se trata en el chiste, lo que nos permitirá contemplar de manera más explícita las lógicas implícitas en cada secuencia.

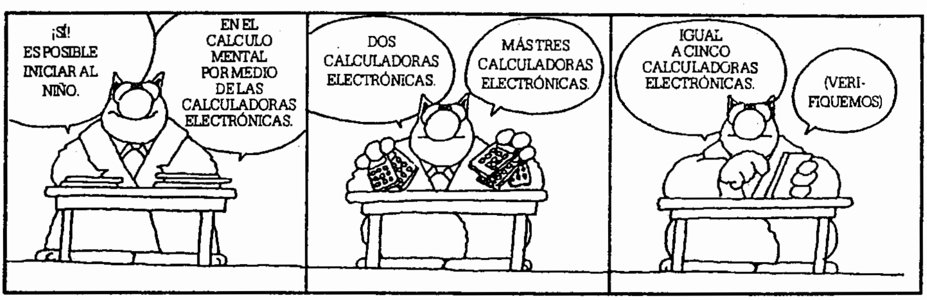


Figura 2. Tira cómica: El gato filósofo y las calculadoras

La tira cómica analizada se refiere a la suma de números naturales. Esta operación puede contemplarse desde tres puntos de vista complementarios. La visión **conceptual** se ocupa del concepto de suma, de sus significados, entendidos como el tipo de problemas que se resuelven mediante la suma en un contexto concreto (Godino y Batanero, 1994). La visión **algorítmica** o de cálculo atiende a las estrategias que se emplean para obtener el resultado de la suma de varias cantidades. La visión **algebraica** se ocupa de las propiedades de la suma.

Los significados de la suma pueden ser variados, aunque el más conocido está relacionado con la *unión* de conjuntos. (Ejemplo: si en el bolsillo derecho tengo 3 caramelos y en el izquierdo 2, en total tengo 2+3 caramelos). En esta forma de concebir la suma, el número se interpreta como la cantidad de objetos de un conjunto. Pero el número natural puede interpretarse también como un orden (por ejemplo, estamos en el segundo piso - piso 2-), y entonces la suma tendría un sentido de *avance* (estoy en el segundo piso y subo 3, ¿en qué piso me encuentro?). La investigación relativa a los problemas aditivos ha mostrado que los alumnos interpretan de manera diferente estos problemas y en general resuelven con distintos grados de éxito según el sentido de suma empleado. En Matemática formal también se ha definido la suma de diversas maneras, en particular se puede considerar que la definición conjuntista hace una consideración del número como **cantidad**, mientras que la definición axiomática de Peano, por ejemplo, parte de una consideración del número como **ordinal**, en la que cada número salvo el cero es el siguiente de otro número natural. Estas reflexiones pertenecen al dominio **conceptual** de la suma.

Una vez definida la operación, se plantea el problema de calcular el resultado de la misma. La realización práctica de operaciones aplicando la definición (por ejemplo, si queremos obtener el resultado de 2+3 basta con tomar un conjunto de 3 elementos y otro de 2, disjunto con el primero, y contar el número de elementos de la unión de ambos), se complica en caso de disponer de mas números o si queremos sumar cantidades más grandes. Para solventar este problema, en Matemáticas se utilizan ***algoritmos*** *de cálculo*, que se han hecho muy familiares. El algoritmo tradicional de la suma está basado en la escritura posicional de los números, y comienza con la colocación de las cantidades a sumar en una columna en la que coincidan los dígitos de cada número que ocupan la misma posición (unidades debajo de unidades, decenas debajo de decenas, etc.). Posteriormente se realiza la suma de los dígitos que ocupan cada posición, y se aplica la estrategia de *llevarse* según esta suma exceda la decena. La suma de los dígitos se suele aprender de memoria, con objeto de aumentar la rapidez de cálculo (tablas de la suma).

Por último, la consideración **algebraica** de la suma consiste en estudiar sus propiedades, con vistas a poder generalizar resultados, a la vez que reducir los cálculos.

Para estudiar el poder evocador de este chiste voy a identificar las componentes del mismo según el esquema anterior.

a) Contexto familiar: Calculadoras y cálculo.
La calculadora permite obtener el resultado de la operación. Su función es la de una «cámara oscura» en la que se introducen los datos y nos responde con la solución. En el contexto de enseñanza se suele emplear la calculadora para obtener el resultado de una operación, no para referirse a los aspectos conceptuales de la misma.

b) Expectativa:
El profesor va a argumentar sobre las ventajas de aprender a calcular mediante la calculadora. Los profesores de enseñanza primaria suelen rechazar el empleo de la calculadora en clase ya que su uso impide que los alumnos se aprendan las tablas de las operaciones, con lo que puede constituir un obstáculo para el cálculo mental, en contra de lo que dice el ***gato filósofo*** *en la primera viñeta.*

c) Lógica inesperada:
Las calculadoras son objetos. La suma corresponde a una agrupación y enumeración de objetos, también de calculadoras. Dirige la atención al aspecto conceptual de la suma.

En este análisis observamos un salto de una visión de la suma a otro.. De la perspectiva algorítmica a la visión conceptual. La calculadora es un instrumento que permite obtener el resultado de operaciones aritméticas, lo que es coherente con confrontarla con otra forma de obtener el resultado como es el cálculo mental. Estamos moviendonos pues en el plano algorítmico. Posteriormente, la calculadora es considerada como un objeto, con el que se puede realizar la agrupación que corresponde a una suma. En este momento se está utilizando una definición de suma como reunión, con lo que se rompe con la expectativa de discutir sobre los algoritmos de cálculo, y sobre todo con el sentido de *cámara oscura*, desplazándonos al plano conceptual.

Pero además, en la tercera viñeta de esta tira se produce otro salto entre planos. Una vez realizada la *reunión* de conjuntos, y con ello la suma, hemos obtenido el resultado de la operación aplicando la definición de suma. El resultado debe ser correcto si se ha realizado el conteo de objetos adecuadamente, todo ello en el plano conceptual. Sin embargo, *el gato filósofo* **verifica** el resultado mediante la calculadora. Hemos pasado del plano conceptual al plano algorítmico.

Analicemos estos saltos. La clásica dialéctica que se suscita en la comunidad educativa sobre el empleo de la calculadora en la enseñanza primaria y su efecto negativo sobre el cálculo mental se mantiene entre quienes enfatizan la importancia de «saber sumar» (de manejar algoritmos) respecto a quienes enfatizan la importancia de resolver problemas de sumas. En esta tesitura, los detractores de la calculadora llegan a confundir el aspecto calculista con el conceptual. Se confunde el concepto de suma con el algoritmo de la misma. Pero ¿cuál es la razón última de que 2 + 3 sea igual a 5, la calculadora, la tabla o el recuento de objetos?. ¿Porqué se discute el empleo de la calculadora en la enseñanza de la aritmética elemental si luego se asume que la calculadora establece la veracidad de los cálculos? Por su parte, los partidarios de la calculadora se mueven en la ilusión de que la comprensión del concepto de suma pueda llevar a obtener el resultado en las ocasiones en que las necesite el alumno. Con este análisis hemos podido profundizar un poco en el problema.

Como vemos la secuencia analizada sugiere preguntas muy interesantes y posibilitan una discusión en profundidad de la forma de acceso al conocimiento aritmético: ¿cómo se obtiene la suma?, la esencia de ese conocimiento: ¿qué significa sumar? y a la validación de los resultados: ¿cómo se establece la corrección de un cálculo aritmético? Pero también suscita reflexiones sobre la enseñanza: ¿cómo enseñar la suma?, el conocimiento del profesor: ¿es suficiente el aprendizaje de conceptos para manejar el cálculo? ¿qué papel tiene la calculadora en la enseñanza?, etc.

Pero lo que queremos destacar en este artículo es que esta tira da la oportunidad de mostrar una confrontación entre puntos de referencia de una manera lúdica. El lector de la viñeta puede a partir de ésta romper la ilusión de absolutismo de su visión particular, y empezar a sentir la existencia de otras formas de percibir problemas didácticos como los aquí planteados referentes a la utilización de la calculadora en clase.

3.2. Análisis del chiste «Lección Particular», de Decloseaux

Esta viñeta (figura 3) apareció en la edición francesa del libro de Glaeser, *Matemáticas para el alumno profesor*, de 1973. En esta época se vive el boum de la Matemática moderna en la enseñanza. El texto de Glaeser presenta una nociones de Matemática moderna, que debe dominar el profesor de Matemáticas. Las aportaciones didácticas que se hacen en este libro son breves, y tratan especialmente de mostrar al lector la importancia de esos conceptos, y de su formalización. Recordemos que en Matemática moderna se postula la relación de pertenencia, mediante la cual se puede identificar cuando un elemento forma parte de un conjunto. Además se introduce una notación muy precisa. En el campo de los conjuntos se utilizan las llaves -{ y }- para introducir entre ellas los elementos del conjunto; la relación de pertenencia se nota $\in$, y el conjunto vacío Φ.

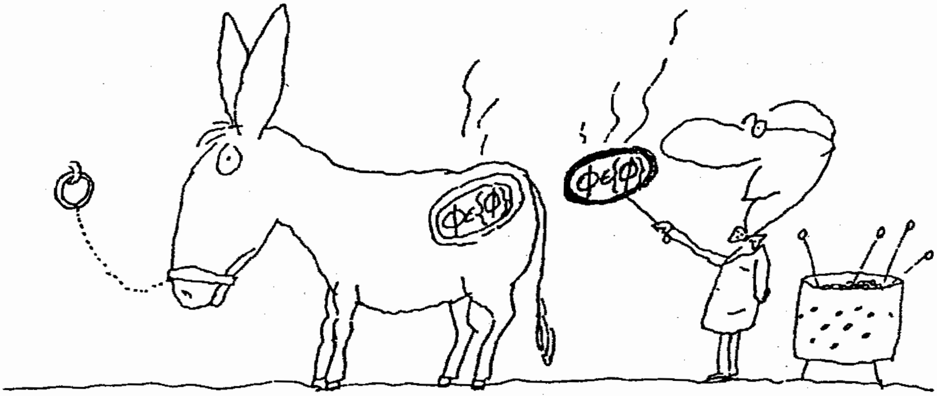


Figura 3. Lección particular

Es frecuente encontrar en los libros franceses viñetas y chistes que den un toque de humor a los conceptos matemáticos. Descloseaux es un autor muy empleado en estas circunstancias. En general los chistes que aparecen en este texto tratan de quitar aridez a los conceptos.

La propiedad «$\Phi \in \{\Phi\}$» hace una distinción entre el vacio como elemento y el vacio como conjunto, y a la vez presenta una propiedad de la relación de pertenencia que delimita su significado. Al introducir el símbolo del conjunto vacio entre llaves hemos definido un conjunto con un elemento (precisamente el vacío -es como si en una caja de madera encerramos una caja de cartón vacía, la caja de madera no está vacía, sino que tiene un objeto/elemento-). El vacío (la caja de cartón vacía) es un elemento (objeto) del conjunto que tiene como elemento al vacío (de la caja de madera). De esta forma se está formulando una propiedad que permite precisar el significado de la relación de pertenencia.

Aunque el chiste consta de una viñeta, podemos encontrar los componentes que hemos destacado.

a) Lógica familiar: Relación de pertenencia y conjunto vacío.

El profesor tiene que enseñar al alumno las Matemáticas conjuntistas, en la que se incluye la relación de pertenencia y el conjunto vacío. Una afirmación matemática interesante, que resume las caracterizaciones de la pertenencia y del vacío, es que el conjunto vacío es un elemento del conjunto cuyo elemento es el vacio, con lo que se establece la diferencia entre el conjunto vacío y el conjunto que tiene al vacío como elemento. El alumno debe saber esta propiedad.

b) Expectativas que se siguen: La enseñanza del profesor particular.

El profesor particular, que tiene que ayudar al alumno a «aprobarle» al profesor del colegio, utiliza estrategias para conseguir que el alumno conozca la afirmación citada. Lo importante es que el alumno repita esta afirmación cuando se la pregunten, con lo que se trata de que el alumno incruste en su mente el resultado (o el proceso).

c) Lógica inesperada: Ironía sobre la metáfora de enseñanza o sobre la propiedad.

El autor ironiza sobre la metáfora de enseñar como dejar grabado, y de la mente como receptáculo a llenar (o a grabar). ¿O quizás ironiza sobre la árdua tarea de enseñar, que lleva al profesor a pensar en grabar los conceptos en la mente del alumno? En cualquier caso, la aparición de un animal tan emblemático en la enseñanza como es el asno nos lleva a pensar en la facilidad de grabar (incluso a un asno) una propiedad tan complicada, o a sentir lo difícil que es hacer que determinados alumnos aprendan (retengan, almacenen, graben) propiedades. (Hemos de añadir que la «grabación» no se produce exactamente en «la cabeza» del asno).

La primera interpretación nos muestra un salto en la representaciones. El profesor se plantea enseñar al alumno una propiedad que puede caracterizar la relación de pertenencia, y recurre a su incrustación en la mente. Pero esta incrustación se puede hacer incluso con un animal tan poco inteligente como el asno. El asno (como el alumno) no es consciente de la marca que le incrustan en su piel (en su mente), con lo que puede inferirse la dificultad de que lo incrustado en la memoria sea reconocido como conocimiento matemático. La segunda sin embargo, nos hace sentirnos cómplices con nuestros compañeros cuando percibimos la dificultad de enseñar a determinados alumnos.

La lectura actual del chiste puede ser más llamativa. La Matemática moderna se ha considerado como un error didáctico, que ha llevado a situaciones ridículas. (Recuerdo una situación en la que, en clase de adultos, les pidieron a los alumnos que *pusieran tres ejemplos del ¡¡¡conjunto vacío!!!???).* En esta enseñanza de la Matemática moderna se llegó a confundir el intento de formalizar las Matemáticas y establecer un lenguaje preciso, con el contenido de lo que es hacer Matemáticas. Parte de los conceptos conjuntistas eran formalizaciones de acciones cotidianas, y estas formalizaciones se constituían en conceptos escolares. Era como si intentaramos enseñar a hablar a un niño hablándole de lingüística. Es decir, se introdujeron como contenidos matemáticos escolares reflexiones formales de Matemática superior, y algunas de las reflexiones didácticas y psicológicas. Desde la postura actual, la afirmación «$\Phi \in \{\Phi\}$», que se pretende que el alumno retenga es, pues, considerada excesivamente formal y sin interés hoy en día. El profesor particular que en su momento se preocupó de esta enseñanza vería ahora que su esfuerzo no ha tenido otro fin que el superar las exigencias obstrusas de otro profesor, sin que este aprendizaje colaborara a la comprensión del alumno (asno) de las Matemáticas.

4. Conclusiones

En las clases de Prácticas de Enseñanza de Matemáticas en institutos de bachillerato, que se imparte a alumnos de 5º curso de la Licenciatura de Matemáticas, me he planteado como primer objetivo el que los estudiantes perciban la dificultad del proceso de comunicación didáctica. Para ello he pedido que busquen formas de interpretar estos chistes. Para poner en común y profundizar en estas interpretaciones he empleado los análisis realizados en este artículo, con lo que, de una manera natural, hemos entrado en aspectos del conocimiento profesional del profesor de matemáticas (significados diferentes de las operaciones, niveles de análisis en el pensamiento numérico, etc.).

La importancia de las creencias y concepciones de los estudiantes (y de los profesores) para su formación ha sido destacada en la investigación en didáctica de las matemáticas (Thompson,1992). Para detectar estas creencias, que pertenecen al nivel sub-consciente se hacen precisos métodos indirectos. En diversas investigacions se han empleado viñetas para hacer que los sujetos expliciten sus creencias (Johnston, 1994). En otras se han empleado como reactivos paradojas (Movshovitz-Hadar y Hadass, 1990, Flores, 1996) para provocar que los estudiantes para profesor profundicen sobre los conceptos matemáticos. También se han utilizado las metáforas para favorecer la comunicación con los sujetos investigados (Johnston, 1994; Bullought y Stokes, 1994), o para caracterizar las representaciones que se hacen los profesores sobre las Matemáticas (Presmeg, 1992; Ponte, 1992, Dormolen, 1991). En este artículo he querido destacar el valor de los chistes como reactivos para explicitar representaciones, tal como recogía Freud (1969). Los chistes, además, tienen la ventaja de procurar un clima distendido pero con un amplio campo de significados posibles, con lo que permiten compartir interpretaciones sin sentirse juzgado en esta tarea.

Tal como he intentado mostrar aquí, considero que para poner significados en común se precisa una actitud abierta que nos permita aceptar que existen otras formas de interpretar los fenómenos y que encierran coherencia. De esa forma podríamos evitar que a partir de nuestras creencias se generen mitos de los cuales puedan derivarse rígidos juicios de valor.

Referencias bibliográficas

Bullough, R.V. y Stokes, D.K. (1994) Analyzing personal teaching metaphors in preservice teacher education as a means for encouraging professional development. *American Educational Research Journal.* Vol 31, no 1, pp. 197-224.

Dormolen, J. von (1991) Metaphors mediating the teaching and understanding of mathematics. En Bishop, A. et al. (Eds) *Mathematical Knowledge: Its Growts Through Teaching*, 89-106. Kluwer.

Flores, P. (1996) *Paradojas matemáticas para la formación de profesores.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Flores, P. (1995) *Creencias y concepciones de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Evolución durante las prácticas de enseñanza.* Tesis doctoral inédita. Universidad de Granada.

Freud, S. (1969). *El chiste y su relación con lo inconsciente.* Madrid, Alianza Editorial. 1969

Glaeser, G. (1973) *Mathematiques pour l'élève professeur.* Paris: Herman.

Godino, J.D. y Batanero, C. (1994) Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 14, nº 3, pp. 325-355.

Johnston, M. (1994). Contrast and similarities in case studies of teacher reflection and change. *Curriculum inquiry*, 24:1, pp. 9-26.

Lakoff, G. y Johnson, M. (1980) *Metáforas de la vida cotidiana*. Madrid: Cátedra.

Movshovitz-Hadar, N. y Hadass, R. (1990) Preservice education of math teachers using paradoxes. *Educational Studies in Mathematics* 21, 265-287.

Paulos, J.A. (1996) Un matemático lee el periódico. Barcelona: Tusquets.

Paulos, J.A. (1994) Pienso, luego río. Madrid: Cátedra.

Paulos, J.A. (1980). *Mathematics and Humor*. Chicago: University of Chicago Press.

Ponte, J.P. (1992). Concepçoes dos professores de matematicas e processos de formaçao. En Brown, M.; Fernandez, D; Matos, J; Ponte, JP, editores. *Educaçao Matematica*. Lisboa, Instituto de Innovaçao Educacional. (pp. 185-239)

Postman, N. y Weingartner, CH. (1975) *La enseñanza como actividad crítica*. Barcelona, Fontanella.

Presmeg, N.C. (1992) Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in High School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 23, 595-610.

Smyth, J. (1991) Una pedagogía crítica de la práctica en el aula. *Revista de Educación nº 294*, 275-300.

Thompson, A.G. «Teachers' Beliefs and Conceptions: A synthesis of the research». In Grouws, editor. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NCTM. MacMillan, New York. 1994. (pp. 127-146).

Watzlawick, P. (1980). *El lenguaje del cambio*. Barcelona: Herder.

ARTÍCULOS

¿Qué signo realmente tiene la "g"?: El Significado y la Enseñanza del Signo Negativo en la Física

Resumen

En este artículo se describen algunas concepciones erróneas que existen en la enseñanza de la física, especialmente en la cinemática. Esto está íntimamente relacionado con la enseñanza de las matemáticas ya que esta problemática es debida a la falta de entendimiento del signo apropiado en variables físicas.
El propósito principal de este escrito es aclarar este tipo de ideas, además de dar algunas sugerencias didácticas para la enseñanza de estos temas. En particular se recomienda poner más énfasis a representaciones gráficas y numéricas en el salón de clase.

Abstract. *We describe in this paper some misconceptions that exist in the teaching of physics, specially within kinematics. This is closely related to the teaching of mathematics since these conceptions are due to the lack of understanding of the proper sign in physical variables.*
The main purpose of this article is to clarify these ideas and to give some didactical suggestions for the teaching of these subjects. In particular it is recommended to give more emphasis to graphical and numerical representations within the classroom.

Introducción

En clases de física los alumnos preguntan frecuentemente ¿qué signo tiene la "g" (la aceleración de la gravedad)? De acuerdo a nuestra experiencia, en muchas ocasiones desafortunadamente la respuesta que se da es del tipo: "negativa hacia arriba y positiva hacia abajo". Ya es tiempo de que se aclaren estas concepciones erróneas que nacen en cierto sentido de una instrucción basada en fórmulas, haciendo a un lado la enseñanza de conceptos y principios físicos. Como se verá en este artículo la idea anterior de los dos signos, uno para arriba y otro para abajo, rompe artificialmente el movimiento en dos pedazos que no permite una resolución integrada del problema ni una representación gráfica adecuada.

La problemática anterior está relacionada con algunas ideas intuitivas sobre aceleración. ¿Es cierto que cuando un tren frena está desacelerando? La respuesta

Dr. Simón Mochón

Departamento de Matemática Educativa
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del I.P.N., México, D. F.

posiblemente sorprenderá a la mayoría de los lectores. Estas nociones están también conectadas con una falta de entendimiento sobre velocidades negativas (y tiempos negativos).

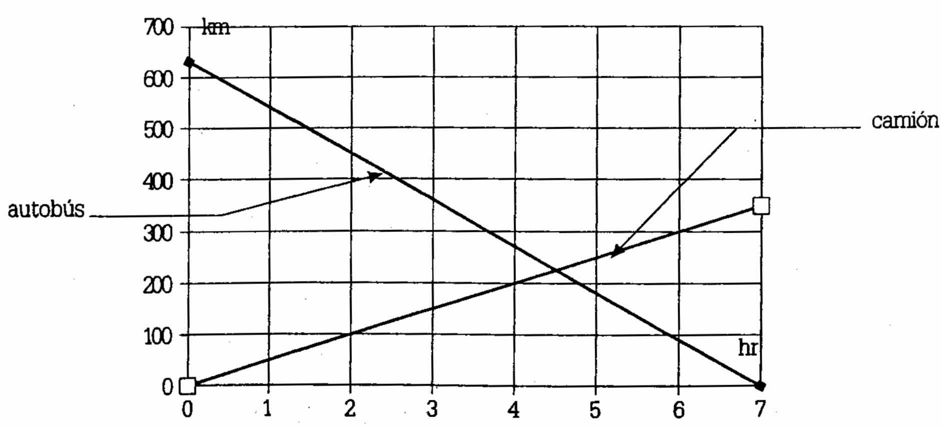
En las siguientes secciones trataremos de aclarar estas ideas, además de dar algunas sugerencias didácticas para la enseñanza de estos temas. En particular, se verá la necesidad de poner más atención a las representaciones gráficas y numéricas (reduciendo el énfasis en procedimientos puramente algebraicos) y de mantener siempre presente la conexión con la situación real, es decir, la interpretación de estas representaciones.

Velocidades y tiempos negativos.

Un problema típico de movimiento en el salón de clase es el siguiente: "Un camión de carga sale de una ciudad A, a una velocidad de 50 km/hr en dirección de una ciudad B. Simultáneamente, un autobús sale de la ciudad B en dirección contraria, a una velocidad de 90 km/hr. Si las ciudades están a una distancia de 630 km, ¿cuándo y en qué punto se encontrarán?

A nivel Secundaria, posiblemente los procedimientos para resolver problemas como éste, deben ser de preferencia aritméticos, poniendo énfasis en el entendimiento del problema y permitiendo estrategias propias de los alumnos. Un ejemplo de solución sería: "los dos vehículos recorrerán un total de 140 kilómetros en cada hora, así que les llevará un tiempo de 630/140 = 4.5 horas. En este tiempo el autobús recorrió 90 x 4.5 = 405 kilómetros y el camión 50 x 4.5 = 225 kilómetros."

A nivel Preparatoria sin embargo, ya deben aparecer más tipos de representaciones del problema, enfatizando la habilidad de interpretación de éstas dentro del contexto real. Por ejemplo, la representación gráfica de este problema estaría dada por la figura siguiente. Un estudiante debería poder reconocer que una recta en la gráfica de posición contra el tiempo representa un movimiento con velocidad constante cuyo valor está dado por la pendiente de la recta.



Se puede observar en la gráfica que el camión y el autobús se encuentran a las 4.5 horas y en el kilómetro 225 desde la ciudad A. Existe además, dentro de estas gráficas, una información muy variada que convendría rescatar en clase. Por ejemplo: ¿cuánto tardará el autobús en llegar a la ciudad A?, ¿dónde se encuentra el camión de carga en este momento?, ¿cuánto tiempo le llevará al camión llegar a la ciudad B? Pero para que los estudiantes puedan construir esta gráfica, es esencial que conozcan el significado de velocidades negativas (y tengan una buena base en la graficación de rectas).

Las velocidades negativas aparecen cuando se ha definido un sistema de coordenadas que indique la dirección positiva. En el ejemplo anterior, el sistema de coordenadas elegido para la gráfica está definido implícitamente por el kilometraje de la ciudad A a la B. Con éste, la velocidad del autobús es negativa e igual a -90 km/hr. El significado de este valor es que el autobús está *decreciendo* su posición a razón de 90 kilómetros por hora, es decir, va del kilómetro 630 al 540, al 450, . . .

Otro tipo de representaciones son también importantes. Por ejemplo, las ecuaciones de la posición de cada uno de los vehículos están dadas por:

$$p_{camión} = 50\ t \qquad \text{y} \qquad p_{autobús} = 630 - 90\ t$$

Éstas están en la forma de una recta $y = mx + b$. Se puede observar que el valor de la velocidad del vehículo aparece en cada una de las ecuaciones de arriba como el coeficiente de la t, que corresponde a la pendiente en la ecuación general de una recta. Así, la velocidad tiene el significado geométrico de ser la pendiente de la recta en la gráfica de posición contra el tiempo (para velocidad constante). El lograr que el estudiante se dé cuenta de esta equivalencia no es trivial, pero es un hecho tan importante y útil que debe ser tratado en clase trazando e interpretando este tipo de gráficas dentro de situaciones reales. Se observa en la figura anterior que la recta correspondiente al camión tiene una pendiente de 50 km/hr y que la del autobús decrece con una pendiente de -90 km/hr.

El concepto de velocidad negativa sugiere que se utilice con cuidado la bien conocida fórmula $d = v\,t$. Ésta no da la posibilidad de tener velocidades negativas, ya que la distancia d y el tiempo t se consideran siempre como positivos. Una fórmula más adecuada para estas situaciones sería la siguiente:

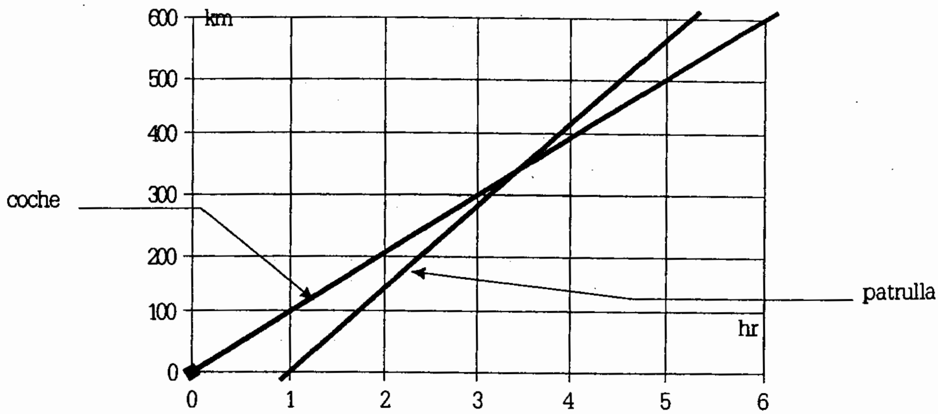
$$\Delta p = v\ \Delta t$$

"El cambio de posición es igual a la velocidad por el cambio del tiempo"

Esta fórmula es congruente con las ecuaciones que se dieron anteriormente del camión y el autobús tomando $\Delta p = p - p_C$ y $\Delta t = t - t_C$ para cualquier dato conocido (t_C, p_C).

La representación numérica, como por ejemplo una tabla de valores, resulta también muy útil para que el estudiante conecte las otras dos representaciones anteriores. Es importante que el estudiante pueda extraer de la gráfica o de la ecuación, valores específicos del movimiento, conectando estas tres representaciones.

Propongamos otro problema similar. "Un coche rojo pasa a 100 km/hr por donde se encuentra estacionada una patrulla en la carretera. Después de una hora, la patrulla recibe un aviso de que ese coche fue robado y va a su alcance a 140 km/hr. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzarlo?" La representación gráfica resulta muy útil para entender la situación presentada y resolver el problema. Debemos trazar una recta que pasa por el origen y con pendiente de 100 km/hr, representando el coche rojo y otra recta que salga del eje t en t = 1 y con una pendiente de 140 km/hr, correspondiente a la patrulla. Éstas se muestran en la figura siguiente:



Se observa claramente en ella que la patrulla alcanzará el coche a 350 km de distancia de donde estaba parada, después de 2.5 horas de que arrancó. Otra respuesta equivalente sería decir que la patrulla alcanzará el coche 3.5 horas después de que éste la rebasa. Aquí se puede notar la importancia de dar al tiempo un significado relativo y no absoluto, es decir, se debe especificar desde cuándo se está contando el tiempo.

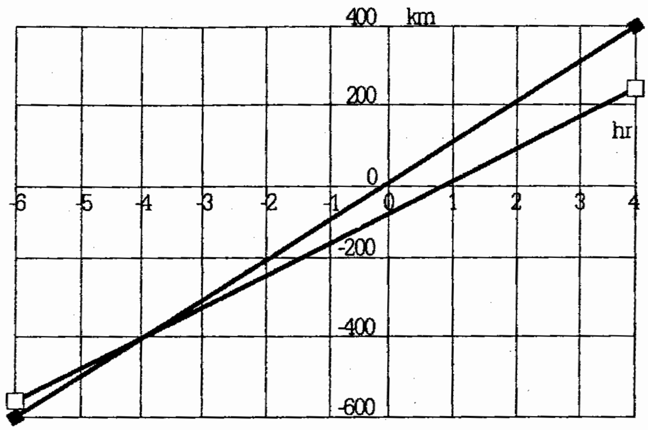
Las ecuaciones que representan el movimiento de estos dos vehículos, con las cuales se puede corroborar la solución gráfica, son las siguientes:

$p_{coche} = 100\,t$ y $p_{patrulla} = 140\,(t - 1)$

Si se cambian las condiciones del problema por otras, es fácil obtener una respuesta casi inmediata con el método gráfico. Por ejemplo, para la nueva situación: "¿cuánto tardaría en alcanzar el coche rojo si el aviso a la patrulla llegara dos horas después?", la gráfica de la patrulla sería ahora la recta paralela a la anterior, pero que corta el eje t en dos. Si la pregunta fuera: "¿cuál sería este tiempo de alcance si la velocidad de la patrulla fuera de 120 km/hr, 100 km/hr u 80 km/hr?", tendríamos que ir decreciendo la pendiente la recta que la representa de acuerdo con estos valores.

En el último caso de la velocidad de la patrulla de 80 km/hr, es obvio que nunca alcanzará el coche. Sin embargo, la solución algebraica de: $p_{coche} = 100\,t$ y $p_{patrulla} = 80\,(t - 1)$ existe y es: $t = -4$ horas. Conviene no descartar automáticamente soluciones negativas en el tiempo como "imposibles", ya que hay situaciones en las que pueden tener sentido. Por ejemplo, para el siguiente problema muy similar al anterior:

"Un coche rojo pasa a 100 km/hr por un restaurante en una carretera. Después de una hora, una patrulla pasa por el mismo lugar a 80 km/hr, ¿dónde y cuándo se encuentran?" La solución $t = -4$ hr, representa que cuatro horas antes de que el coche rojo cruzara por el restaurante, pasó a la patrulla 400 kilómetros atrás. La figura siguiente ilustra esta situación. Hay que hacer la aclaración de que los valores del tiempo dependen de cuál es el instante que se toma como t = 0.



Aceleraciones negativas.

Intuitivamente pensamos el frenado de un objeto en movimiento como una aceleración negativa. ¿Es esto correcto? Analicemos una situación concreta: "Un tren que viaja a 180 km/hr (50 m/s), frena 100 metros antes de llegar a su estación hasta detenerse. ¿Cuál fue su aceleración, si se supone uniforme?, ¿qué tiempo tardó en detenerse?" Veamos primero qué respuesta obtenemos aplicando la fórmula correspondiente. Los libros de física dan una lista de ecuaciones para el movimiento uniformemente acelerado*, entre las cuales se encuentra:

$$v_f^2 = v_o^2 + 2ad$$

Para el problema anterior, $v_o = 50$ m/s, $v_f = 0$ m/s y d = 100 m. Sustituyendo estos valores en la ecuación, obtenemos una aceleración de: $a = -12.5$ m/s^2. La fórmula coincide también con la intuición al dar un valor negativo para la aceleración.

Examinemos otra vez esta situación, pero desde el punto de vista de una persona que mide distancias desde la estación del tren. Cuando empieza el tren a frenar está a una distancia de 100 metros (posición = 100) y cuando llega a la estación su distancia es de cero (posición = 0). De acuerdo con este punto de referencia, su posición estuvo decreciendo con el tiempo y por lo tanto su velocidad es negativa. Para esta persona, la velocidad inicial del tren debe ser de −50 m/s y la final de 0 m/s. Pero ahora, su velocidad pasó de un valor negativo a cero y por lo tanto, ésta se incrementó (el cero

* En realidad, existen algunas variaciones en estas ecuaciones. Aquí usaremos una de ellas.

es mayor que -50). Cuando la velocidad aumenta como en este caso, la aceleración debe ser positiva !!!

¿Quién tiene razón, la intuición y la fórmula o la persona en la estación? La respuesta es que ambas formas de razonamiento son correctas. La diferencia entre ellas es simplemente el sistema de coordenadas empleado. En el primero, al escribir $v_0 = 50$ m/s, estamos definiendo el sentido positiva en la dirección del movimiento del tren. En el segundo análisis, al tomar a la estación como el origen, las coordenadas adquieren una dirección contraria al movimiento del tren.

Esto nos dice que en realidad no hay intrínsecamente velocidades y aceleraciones positivas o negativas, sino que dependen de la dirección de nuestro sistema de referencia, es decir, el eje de coordenadas que se emplee.

Desde luego que siempre que sea posible, debemos escoger un eje que esté en la dirección del movimiento (algo que hacemos intuitivamente), porque así las velocidades serán positivas. Sin embargo, en muchas situaciones esto no sería conveniente, como en el caso de dos objetos que se muevan en direcciones contrarias o el caso de caída libre, en el cual el objeto puede moverse en direcciones diferentes en tiempos diferentes. Esta última situación se analizará con detalle en la siguiente sección.

Caída libre.

Empecemos proponiendo un problema de caída libre: "Desde lo alto de un edificio de 30 metros se lanza una piedra. ¿Cuál debe ser su velocidad inicial para que tarde 10 segundos en llegar al suelo?" Inspeccionando las fórmulas de caída libre, podemos concluir que la más apropiada para resolver este problema es la siguiente:

$$d = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

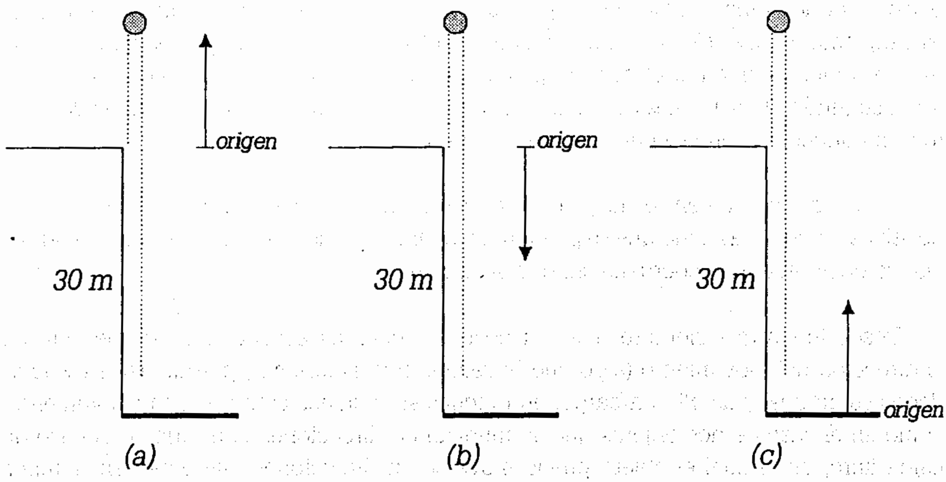
Tenemos d, a y t y queremos calcular v_0. Realmente parece un problema sencillo para un estudiante ("sustituir en la fórmula"), a menos que queramos que lo resuelva correctamente y que entienda lo que está haciendo.

Las primeras preguntas que habría que contestar para resolver este problema serían: ¿es el valor correcto para la variable d igual a 30 metros o -30 metros?, ¿se debe tomar la aceleración como $a = -g^{**} = -10$ m/s^2 o como $a = g = 10$ m/s^2?, ¿debo obtener un valor positivo o negativo para v_0? Puede parecer sorprendente, pero todas estas posibilidades son correctas como veremos a continuación.

La única manera de contestar sin ambigüedad las preguntas anteriores es escogiendo un eje de coordenadas (con su origen, dirección y escala). Como vimos en las secciones anteriores, esto nos permite asignar valores y signos a las variables.

** Tomaremos para la aceleración de la gravedad g el valor de 10 m/s^2, en vez de un valor más exacto. Sugerimos se haga esto también en clase para no perderse en cálculos numéricos y así dar prioridad a la resolución y entendimiento del problema.

En la figura siguiente damos tres maneras de escoger el eje de coordenadas para el problema anterior (existe una infinidad de posibilidades pero éstas tres son las más idóneas).



Examinemos las consecuencias de cada una de estas elecciones del eje, al cual le asociaremos la coordenada z. Para el caso (a), el origen está colocado donde se lanza la piedra, el eje apuntando hacia arriba. Esto implica que el valor de la aceleración de la gravedad debe tomarse como negativo ya que actúa en la dirección contraria al eje. Además, en $t = 0$, $z = 0$ y queremos que en $t = 10$, $z = -30$. La ecuación de movimiento sería:

$$z = v_o t + \frac{1}{2}(-10)t^2$$

En base a lo anterior, la solución del problema estaría dada por la ecuación:

$-30 = v_o(10) + \frac{1}{2}(-10)(10)^2$ lo cual da un valor de $v_o = 47$ m/s. La piedra debe aventarse hacia arriba (dirección positiva) con esta velocidad.

Para el caso (b) en la figura anterior, el eje apunta ahora hacia abajo. La aceleración de la gravedad debe tomarse ahora como positiva (actúa en la dirección del eje). Otra vez, en $t = 0$, $z = 0$ pero la condición se expresa como: $t = 10$, $z = 30$. La ecuación de movimiento sería entonces:

$$z = v_o t + \frac{1}{2}(10)t^2$$

En este caso, la solución del problema estaría dada por: $30 = v_o(10) + \frac{1}{2}(10)(10)^2$ lo cual da ahora un valor de $v_o = -47$ m/s. Esta velocidad negativa representa que la piedra debe aventarse hacia arriba (dirección negativa).

El caso (c) es igual que el primero en dirección, pero el suelo se ha escogido como el origen. Por lo tanto, la aceleración de la gravedad debe ser positiva, además en $t = 0$, $z = 30$ y se requiere que para $t = 10$, $z = 0$. La ecuación de movimiento sería ahora:

$$z = 30 + v_o t + \frac{1}{2}(-10)t^2$$

En este caso, la solución del problema estaría dada por: $0 = 30 + v_o (10) + \frac{1}{2}(-10)(10)^2$ que es la misma ecuación que para el primer caso.

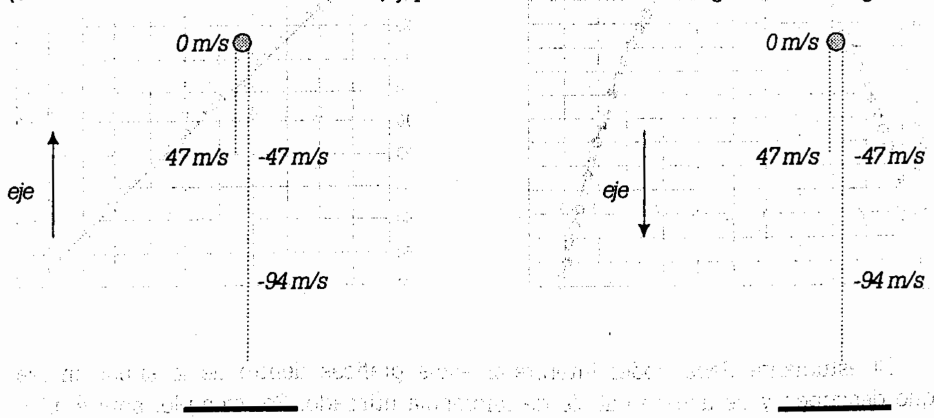
Como se puede notar, la ecuación generalmente usada de distancia: $d = v_o t + \frac{1}{2}at^2$ no es lo suficientemente general para describir correctamente el movimiento. Una forma más apropiada sería:

$$p = p_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2$$

donde p representa la posición del objeto en el tiempo t y p_o su posición inicial. Esta tiene dos diferencias fundamentales. Utiliza a la posición como variable en vez de la distancia y contiene además su valor inicial (la variable distancia no permite valores negativos, lo cual la hace que sea difícil de representar con una sola ecuación).

Pero la pregunta que todavía quedaría por aclarar sería: ¿tiene sentido usar un solo signo de la constante g en toda la trayectoria del objeto, cuando intuitivamente se ve que "desacelera" subiendo y "acelera" bajando? La fuerza gravitacional existe y tiene una dirección fija independientemente de que el objeto esté o no ahí, así que no tendría sentido que cambiara su signo al capricho del movimiento del objeto. Lo que en realidad está sucediendo es que la idea intuitiva "desacelera subiendo, acelera bajando" es errónea.

Reconstruyamos mentalmente el movimiento de la piedra para las dos direcciones posibles del eje. Cuando el eje apunta hacia arriba (diagrama izquierdo de la figura siguiente), la piedra sale hacia arriba con una velocidad de 47 m/s. En el punto máximo de su trayectoria, su velocidad llega a cero. Esto nos indica que la velocidad decrece en esta porción de su movimiento y por lo tanto la aceleración debe ser negativa. Al descender la piedra, su velocidad se vuelve negativa porque va en contra de la dirección del eje. La velocidad en esta segunda porción sigue decreciendo (0 m/s . . . –47 m/s . . . –94 m/s . . .) y por lo cual su aceleración sigue siendo negativa.



Aceleración negativa en todo el trayecto *Aceleración positiva en todo el trayecto*

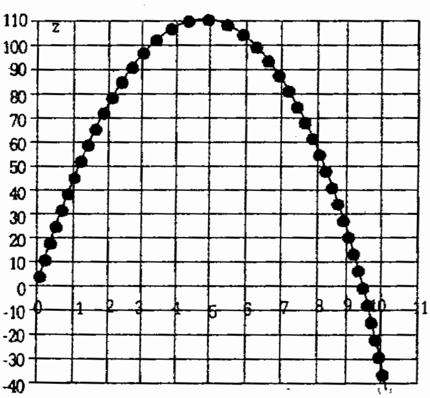
Como podemos ver, con el eje hacia arriba, la piedra al caer desacelera y no acelera como la intuición nos dicta. El problema es que nuestra intuición cuando la piedra cae, pone automáticamente un eje apuntando en la dirección del movimiento, hacia abajo. Este valor negativo de la aceleración en todo el trayecto es congruente con el valor negativo que se usó para el primer y tercer casos ((a) y (c)).

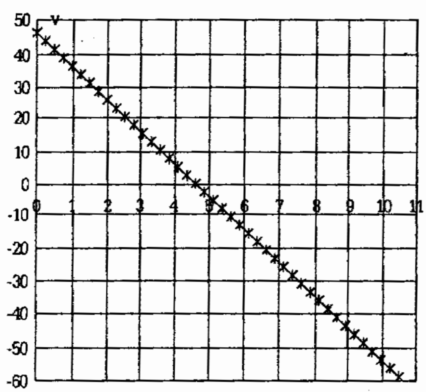
Cuando el eje apunta hacia abajo (diagrama derecho de la figura), la piedra sale hacia arriba con una velocidad de -47 m/s. En el punto máximo de su trayectoria, su velocidad llega a cero. La velocidad crece en esta porción y por lo tanto la aceleración debe ser positiva. Al descender la piedra, su velocidad se vuelve positiva porque va en la dirección del eje. La velocidad en esta segunda parte continua incrementándose y por lo cual su aceleración sigue siendo positiva.

Con el eje apuntando hacia abajo, la piedra al subir acelera contrario a la intuición (nuestra intuición tiende a poner implícitamente un eje en la dirección del movimiento, es decir, a observar el movimiento desde ésta perspectiva). Este valor positivo de la aceleración en todo el trayecto es congruente con el valor que se usó para el segundo caso (b).

La conclusión más importante entonces es que el signo de la aceleración depende solamente del eje de referencia usado y no de la dirección del movimiento. Desde luego que podemos utilizar siempre un eje en la dirección del movimiento, pero esto en problemas en los que el objeto se mueve en ambas direcciones, rompería artificialmente su movimiento en dos secciones. A nivel secundaria posiblemente sea recomendable estudiar sólo situaciones que impliquen una sola dirección de movimiento, pero a nivel preparatoria y superior, se deben estudiar situaciones completas sin romperlas en dos partes ficticias.

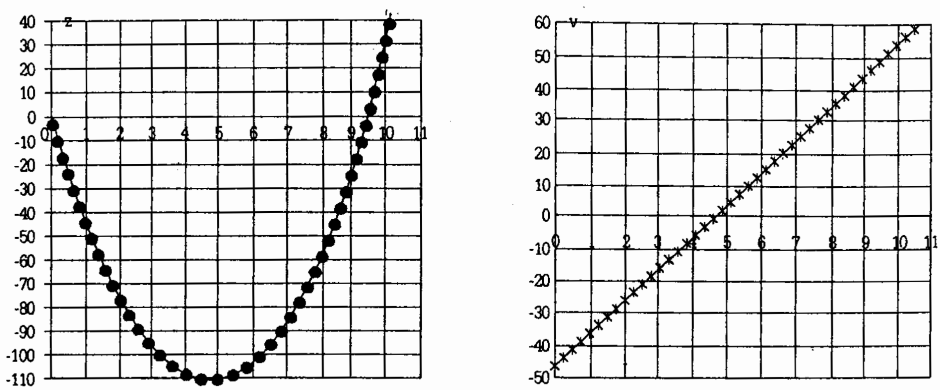
Es ilustrativo examinar las gráficas que corresponden a los tres ejes escogidos antes para resolver el problema. Para el primer caso (el eje hacia arriba con su origen en donde se lanza la piedra), la figura siguiente muestra las gráficas de posición (z) y velocidad (v) en función del tiempo (t).





El estudiante debe poder interpretar estas gráficas dentro de la situación real que describen y de acuerdo al eje de referencia utilizado. Por ejemplo, aquí el nivel cero en z representa el techo del edificio y el valor z = -30, el suelo. La altura máxima se alcanza aproximadamente 110 metros por arriba del techo del edificio (140 metros arriba del suelo). Se puede estimar de la gráfica que el tiempo en el que sucede esto es aproximadamente 4_ segundos después de que la piedra se lanza al aire. La gráfica de velocidad muestra que ésta decrece siempre y se hace negativa a partir de este tiempo, indicando que la piedra está cayendo. *La aceleración es siempre igual a -10 m/s²*.

Para el segundo caso (el eje hacia abajo con su origen en donde se lanza la piedra), la figura siguiente muestra las gráficas de posición y velocidad.



Nótese que el fenómeno físico es exactamente el mismo, lo único que hemos cambiado es su descripción matemática por medio de un eje de referencia diferente pero también válido. La velocidad ahora es creciente indicando una aceleración constante positiva. La posición debe interpretarse desde un punto de vista de alguien en el techo del edificio, mirando hacia abajo.

Sugerimos al lector que obtenga las gráficas del tercer caso y las interprete de acuerdo con el eje seleccionado. Conviene mencionar aquí que se debe tener cuidado con una confusión muy común de los estudiantes de pensar a la gráfica como la trayectoria misma del objeto.

Propongamos un último problema para mostrar cómo las tres representaciones descritas (la gráfica, la numérica y la simbólica) pueden entrar en juego y ser útiles para su solución. "Un globo aerostático se eleva verticalmente desde el suelo a una velocidad de 20 m/s. Después de 30 segundos, se deja caer un costal de arena. ¿Con qué velocidad y en cuánto tiempo llegará el costal al suelo?"

Como dijimos anteriormente lo primero que debemos elegir es el eje de referencia con el cual nos conviene describir el movimiento. Sin éste, no tenemos derecho ni siquiera de asignar los valores iniciales de la posición y la velocidad y por lo tanto no tendría sentido empezar a usar fórmulas. El eje más natural para este problema es el que tiene su origen en el suelo y apunta hacia arriba. Con éste el valor de la aceleración de la gravedad debe tomarse como negativo.

La primera etapa del movimiento ocurre a velocidad constante (debemos aclarar aquí que el movimiento del costal en este problema si está compuesto de dos secciones naturales. Una a velocidad constante y la otra como caída libre). La ecuación de esta parte está dada por:

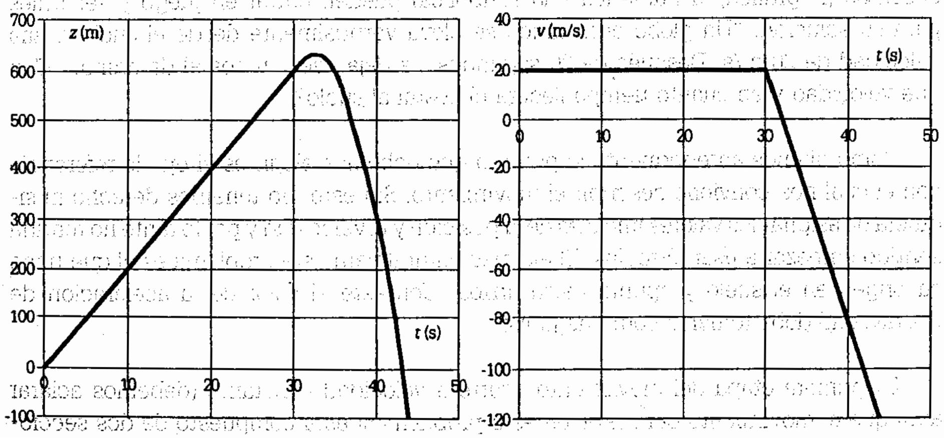
$z = 20\,t$ (z en metros y t en segundos)

Después de 30 segundos, el globo se encontrará a 600 metros de altura sobre el suelo. En este punto comienza la segunda etapa del movimiento del costal. ¿Cuáles son las condiciones iniciales del costal de arena? Obviamente para $t = 30$ segundos, z debe tener un valor de 600 metros, pero además, su velocidad debe ser igual a la del globo, es decir de 20 m/s. Con esto, la ecuación del costal estará dada por:

$$z = 600 + 20(t - 30) + \frac{1}{2}(-10)(t - 30)^2$$

Nótese que ésta tiene una translación de 30 segundos (t –30) para poder usar los valores iniciales en $t = 30$. Esta ecuación está referida al tiempo t que empieza a correr desde que el globo comienza a subir. Otra posible ecuación para el movimiento sería: $z = 600 + 20t - 5t^2$. Sin embargo, esta variable t y la que aparece en la primera etapa serían diferentes. La t de la ecuación anterior empieza a contar desde que se suelta el costal de arena y por lo tanto tiene otro eje de referencia que la primera ecuación. Esto demuestra nuevamente que los tiempos son relativos y debe uno especificar desde qué evento se está tomando el origen.

Las gráficas de la posición y la velocidad en función del tiempo pueden generarse usando una calculadora o una hoja de cálculo electrónica. De la tabla de valores construida para esto, podemos obtener algunos datos aproximados como por ejemplo que a los 32 segundos llegará el costal a su máxima altura de 620 metros y que aproximadamente a los 43 segundos llegará al suelo. En contraste, las gráficas, siempre y cuando estemos entrenados para ello, nos ayudan a observar el desarrollo global del movimiento y por lo tanto es importante que se incluyan en la didáctica de la física. Las gráficas correspondientes a este problema se muestran en la figura siguiente. Se puede comprobar en ambas que la velocidad es continua a los 30 segundos, es decir, no sufre un salto en su valor.



Los procedimientos algebraicos se pueden dejar al último para obtener los valores exactos y verificar las estimaciones hechas. Aquí, se debe señalar el valor del cálculo estimativo frente a resultados "exactos". Por ejemplo, resolviendo la ecuación correspondiente para el tiempo de contacto con el suelo, obtenemos un valor "exacto" con calculadora de 43.135528 segundos. Debemos enseñar que este valor no es realmente exacto y que 6 decimales en una respuesta en segundos es una precisión demasiado exagerada. Valores como 43 o 43.1 segundos serían más que suficientes para la mayoría de las aplicaciones prácticas.

Conclusiones

Existen muchas concepciones erróneas en la física que sería importante investigar (ver por ejemplo, Driver, R., 1993). En particular, en este artículo discutimos una de ellas: el signo de la aceleración. La intuición nos lleva a pensar que cuando el objeto aumenta su rapidez, la aceleración debe ser positiva y cuando frena su aceleración debe ser negativa. Esta forma de asignar el signo a la aceleración, define implícitamente un eje en la dirección del movimiento y como ya vimos, causa dificultades en el entendimiento y en la resolución de problemas en los que hay movimiento en ambas direcciones.

Como observamos también, lo anterior esta íntimamente relacionado con la falta de un tratamiento sistemático en el salón de clase de velocidades negativas y su necesidad para el planteamiento correcto de algunos problemas. Los conceptos de posición y distancia, aún cuando muy diferentes, son tratados como sinónimos. Esto debe evitarse. Una pelota, que sube y baja desde el suelo, ha recorrido dos veces su altura máxima, pero su cambio en posición es cero.

Otro obstáculo para un mejor entendimiento de este tipo de situaciones, es el acercamiento basado en fórmulas que se le da a la física en el salón de clase. Este enfoque debe complementarse con representaciones gráficas y numéricas que ayuden al alumno a hacer más fácil la conexión con la situación real. Un enfoque algebraico tiende a descontextualizar el problema, hundiendo al estudiante en un mar de símbolos sin significado. También notamos que hay una falta de precisión en la escritura de muchas fórmulas, lo cual puede causar varias dificultades.

En el año escolar de 1994-95 realizamos un estudio sobre las prácticas matemáticas a nivel preparatoria y el efecto que puede tener en ellas una hoja de cálculo electrónica (Rojano, T. et al, 1995). Durante ese año, los estudiantes desarrollaron varios modelos matemáticos de fenómenos en la física, la química y la biología, apoyados por la hoja de cálculo. En lo que se refiere a prácticas matemáticas, esta investigación reveló que los estudiantes mexicanos son enseñados por medio del pizarrón de la clase, casi siempre de lo general a lo particular y con un énfasis en algoritmos. En las clases inglesas, por el contrario, hay mayor interacción entre profesores y estudiantes, empezando los temas primero con ejemplos prácticos para llegar poco a poco a lo general y poniendo el énfasis en la lectura de tablas y gráficas. Se observó que estas diferencias se manifestaban en su comportamiento al resolver problemas. Por ejemplo, mientras que los estudiantes ingleses se sentían a gusto con respuestas aproximadas y estimaciones, los estudiantes mexicanos estaban casi obsesionados por encontrar la respuesta exacta y se centraban en las fórmulas del fenómeno. Esto sugiere que la enseñanza en nuestro país debe dirigirse hacia enfoques más numéricos y gráficos, dándole el valor que se merecen a las estimaciones y las aproximaciones.

Uno de los objetivos de la física es el modelaje de situaciones reales por medio de herramientas matemáticas. Sin embargo, no sólo debemos tener a nuestra disposición a las fórmulas como representaciones posibles. Podemos y debemos utilizar otras formas de representación, que hoy en día con el soporte de las computadoras pueden resultar ser más apropiadas.

En resumen, proponemos modificar la enseñanza de la física siguiendo las siguientes tres sugerencias como guías:

- El desarrollo conceptual del alumno debe ser un objetivo primordial.
- Se debe dar énfasis a otras representaciones como la gráfica y la numérica.
- En lo posible, se deben mantener presentes las conexiones con la situación real.

Referencias.

Driver, R., Guesne, E. y Tiberghien, A. (Eds.), "Children's Ideas in Science", Open University Press, Milton Keynes, Philadelphia, 1993.

Rojano, T., Sutherland, R., Jinich, E., Mochon, S. and Molyneux, S., (1996) Las Prácticas Matemáticas en las Materias Científicas de la Enseñanza Media: El Papel de la Modelación, Investigaciones en Matemática Educativa, XX Aniversario del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, 365 - 388.

Método de Newton y Caos

Resumen

En este trabajo se muestra cómo el método de Newton permite introducir informalmente en los primeros cursos de cálculo conceptos de la teoría de sistemas dinámicos como periodicidad, dependencia de la condición inicial y caos. Para ello se incluye el material que puede ser presentado a los alumnos una vez que se haya discutido brevemente el método de Newton.

Abstract. The purpose of this note is to show how Newton's method can be used early in the first Calculus courses to introduce informally some concepts of Dynamical Systems such as periodicity, dependence on the initial condition and chaos. We include the material of a lecture that can be presented to the students after a brief discussion of Newton's method.

1. Introducción

El método de Newton para aproximar raíces es una de las aplicaciones de la derivada que con frecuencia se presenta en los primeros cursos de cálculo diferencial e integral. Además, es quizás uno de los algoritmos iterativos más interesantes que pueden ser comprendidos con relativamente poca información matemática. El propósito de esta nota es mostrar cómo en los primeros cursos de cálculo el método de Newton permite presentar informalmente conceptos de la teoría de sistemas dinámicos tales como periodicidad, dependencia de la condición inicial y caos. La siguiente sección contiene el material que puede ser presentado a los alumnos una vez que se haya discutido brevemente el método de Newton. En la sección final se incluyen algunos comentarios acerca de cómo surgió el problema estudiado en la segunda sección y que pueden ser de utilidad para el maestro.

2. Un acercamiento al caos

El método de Newton es uno de los algoritmos más eficientes para aproximar raíces. Es fácil ver que cuando la aproximación inicial no es suficientemente cercana, el mé-

Guillermo Pastor
Instituto Tecnológico Autónomo de México
México, D. F.

todo puede producir un resultado distinto al deseado. La figura 1 muestra que aún cuando la función cuenta con una raíz, es posible obtener una sucesión divergente.

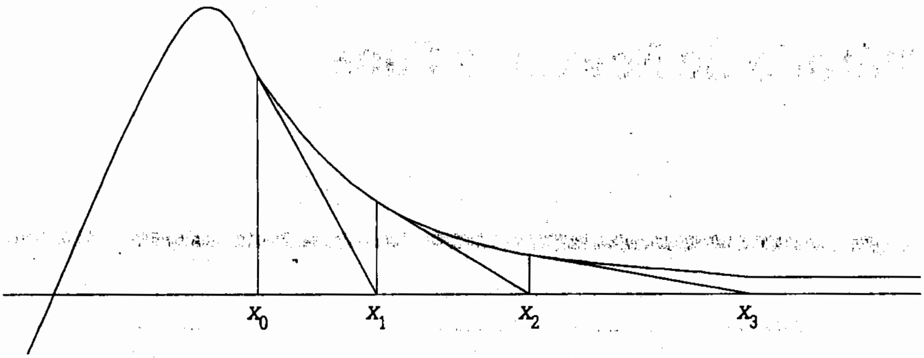


Figura 1

Otro problema que con frecuencia enfrentamos puede apreciarse en la figura 2, donde el método nos lleva a una raíz diferente de la que buscábamos.

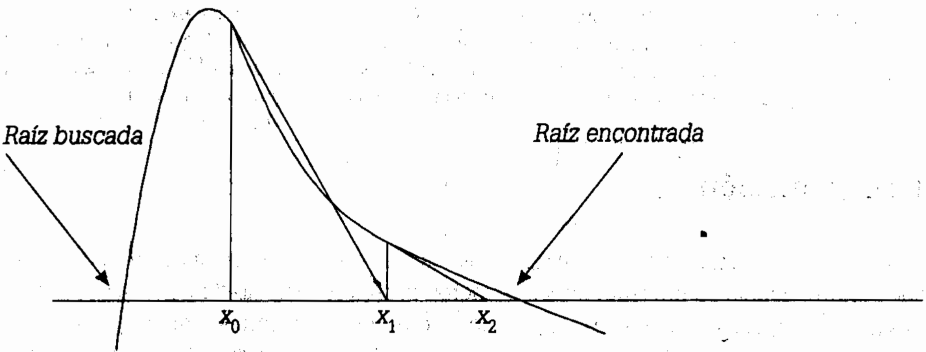


Figura 2

Consideremos ahora la función

$$f(x) = \frac{(4x-3)^{1/3}}{(4x)^{1/3}}$$

Es inmediato que la función no está definida para $x = 0$ y que su única raíz se encuentra en $x = 3/4$. Sin embargo, nuestro objetivo será estudiar qué tan sensible es el método de Newton a los valores de la aproximación inicial x_0. La derivada de f está dada por,

$$f'(x) = \frac{4}{(4x)^{1/3}(4x-3)^{2/3}}$$

de modo que

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{(4x-3)^{1/3}(4x)^{4/3}(4x-3)^{2/3}}{4(4x)^{1/3}}$$

$$
\begin{aligned}
&= x - (4x - 3)x \\
&= 4x(1 - x)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el método de Newton produce en este caso la fórmula recursiva

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$$

Denotaremos por $F(x)$ a $4x(1-x)$.

Veamos que sólo es posible converger a la raíz si $0 < x_0 < 1$. Observemos primero que si x_n es negativa, entonces $1 - x_n > 1$, de modo que $x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$ vuelve a ser negativa. Además,

$$|4x_n(1 - x_n)| = 4|x_n||1 - x_n|$$

Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ si x_0 es negativa. Además, si $x_n > 1$, entonces $1 - x_n < 0$, de modo que $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ es negativa. De aquí se sigue que si $x_0 > 1$, volvemos a obtener que $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Si $0 \le x_n \le 0$, entonces $4x_n(1 - x_n) \ge 0$. Como además la función F alcanza su valor máximo en $x = 1/2$ y este valor máximo es 1, tenemos que $0 \le x_{n+1} \le 1$ cuando $0 \le x_n \le 1$. Finalmente, si $x_n = 1$, entonces $x_{n+1} = 0$ y el método se detiene, ya que no podemos evaluar la función f en este punto.

A pesar de que la expresión $4x(1-x)$ es muy simple, al iterarla obtenemos polinomios cada vez más complicados. Por ejemplo,

$$
\begin{aligned}
x_2 &= F(F(x_0)) \\
&= F^2(x_0) \\
&= 16(x_0 - 5x_0^2 + 8x_0^3 - 4x_0^4)
\end{aligned}
$$

Procediendo de esta forma se puede verificar fácilmente que $F^3(x)$ es un polinomio de grado ocho, y en general, la k-ésima iteración de la función F es un polinomo de grado 2^k.

Existe afortunadamente una manera muy simple de estudiar las iteraciones de F cuando $0 \le x_0 \le 1$. Sea $\theta = \cos^{-1}(1 - 2x_0)$. Es fácil verificar entonces que $x_0 = (1/2)(1 - \cos(\theta))$, por lo que

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 4x_0(1 - x_0) \\
&= 4(1/2)(1 - \cos(\theta))(1 - (1/2)(1 - \cos(\theta))) \\
&= 4(1/2)(1 - \cos(\theta))(1/2)(1 + \cos(\theta)) \\
&= 1 - \cos^2(\theta) \\
&= \sin^2(\theta) \\
&= (1/2)(1 - \cos(20))
\end{aligned}
$$

De esta forma vemos que si $x_0 = (1/2)(1 - \cos(\theta))$, entonces $x_n = (1/2)(1 - \cos(2^n\theta))$. Veamos algunas consecuencias curiosas de este hecho.

Si $x_0 = (1/2)\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{2^n \cdot 3}\right)\right)$, entonces

$$x_n = (1/2)\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

Como este valor es 3/4, esto significa que para esta aproximación inicial, después de exactamente n pasos llegamos a la raíz.

Si escogemos $x_0 = (1/2)\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{2^n - 1}\right)\right)$, entonces

$$\begin{aligned} x_n &= (1/2)\left(1 - \cos\left(\frac{2^n 2k\pi}{2^n - 1}\right)\right) \\ &= (1/2)\left(1 - \cos\left(\frac{(2^n - 1)\,2k\pi + 2k\pi}{2^n - 1}\right)\right) \\ &= (1/2)\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{2^n - 1}\right)\right) \\ &= x_0 \end{aligned}$$

Así, si aplicamos el método de Newton con una aproximación inicial de la forma

$$(1/2)\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{2^n - 1}\right)\right)$$

cada n pasos regresamos a nuestra aproximación inicial. Decimos entonces que x_0 es un *punto periódico de periodo n*. Es claro que en este caso no convergemos a la raíz. A cada entero $n > 1$, le podemos asociar $2^{n-1}-1$ puntos periódicos de periodo n, uno por cada k que satisfaga $0 < k < 2^{n-1}$. Observemos además que variando convenientemente los valores de n y k podemos acercarnos arbitrariamente a cualquier valor inicial x_0 a través de puntos periódicos.

Pero si escogemos nuestra aproximación inicial de la forma $x_0 = (1/2)\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{2^n}\right)\right)$, entonces

$$\begin{aligned} x_n &= (1/2)\left(1 - \cos\left(\frac{2^n 2k\pi}{2^n}\right)\right) \\ &= (1/2)\left(1 - \cos(2k\pi)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y el método se detiene sin que hayamos alcanzado la raíz. Procediendo como en el caso de los puntos periódicos, deducimos que hay una infinidad de puntos x_0 para los cuáles el método de Newton se detiene sin haber alcanzado la raíz, y además, cualquier aproximación inicial x_0 puede ser aproximada por puntos donde el método se detiene sin haber alcanzado la raíz.

En resumen, hay una infinidad de aproximaciones iniciales para las cuales el método converge en un número finito de pasos, hay una infinidad de aproximaciones iniciales que son periódicas, y hay también una infinidad de aproximaciones iniciales donde el método de Newton se detiene sin alcanzar la raíz. Además, dada cualquier aproximación inicial x_0, con $0 < x_0 < 1$, ésta puede ser aproximada arbitrariamente por valores donde el método es periódico, o bien, donde el método se detiene. ¡Esto es el caos!

¿Es usual esperar un comportamiento caótico al aplicar el método de Newton? El ejemplo que analizamos es de hecho muy especial, ya que la función f no es derivable en $x = 3/4$, que es la raíz que buscamos. El siguiente resultado nos garantiza que el método de Newton converge a la raíz bajo condiciones poco restrictivas si la aproximación inicial x_0 es cercana a la raíz. En [**3**] aparece una demostración elemental de este teorema.

Teorema. *Sea* f *una función con segunda derivada continua en un intervalo* I *con centro en una raíz* r *de* f*. Supongamos existen números positivos* m *y* M *tales que* $|f'(x)| \geq m$ *y* $|f''(x)| \leq M$ *en* I*. Si la aproximación inicial* x_0 *satisface* $|x_0 - r| < 2m / M$*, entonces* x_n *converge a* r *cuando* n *tiende a infinito.*

3. Comentario final

Uno de los sistemas dinámicos caóticos más simples es el que se obtiene al iterar la función $F(x) = 4x(1 - x)$ en el intervalo $[0, 1]$. La descripción que aquí presentamos para analizar este sistema dinámico se debe a R. Devaney y aparece en [**1**]. De hecho, la familia de funciones cuadráticas $F\mu(x) = \mu x(1 - x)$, con $\mu > 2 + \sqrt{5}$ produce sistemas dinámicos caóticos. Podemos entonces producir funciones donde el método de Newton es caótico al resolver la ecuación diferencial

$$\mu x(1 - x) = x - \frac{y}{y'}$$

cuya solución general viene dada por

$$y = \frac{c\,(\mu x + 1 - \mu)^{1/\mu - 1}}{(\mu x)^{1/\mu - 1}}$$

Si además μ es es un entero par, obtenemos una función con dominio en todos los reales distintos de cero. Para obtener más información acerca de sistemas dinámicos caóticos y de la convergencia del método de Newton recomendamos además del texto de Devaney los de J. Sandefur [**4**] y P. Henrici [**2**].

Referencias

R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin Cummins Publishing Co. Inc., 1989.

P. Henrici, *Elementos de análisis numérico*, Editorial Trillas, México, 1972.

E. J. Purcell y D. Varberg, *Cálculo con Geometría Analítica*, Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., 1993.

J.T. Sandefur, *Discrete Dynamical Systems: Theory and Applications*, Oxford University Press, 1990.

Ilustración del Uso de la Historia de la Matemática en una Enseñanza Centrada en Problemas

Resumen

El objetivo de estas notas es comunicar nuestras reflexiones sobre una de las múltiples formas en que la Historia de la Matemática puede usarse, sin hacer referencia explícita a ella, para una enseñanza centrada en problemás. Ilustramos este propósito con tres problemas provenientes de la amplia y fértil historia de los triángulos rectángulos, donde se mezclan ideas simples y asequibles de teoría de los números, álgebra y geometría.
En los presupuestos didácticos y las consideraciones metodológicas que exponemos al comienzo, así como en las recomendaciones que expresamos al final, presentamos suscintamente alternativas para el profesor.

Abstract. The main purpose of this notes is to communicate our reflections about one of the variety of ways in which the history of mathematics may be used, without explicit reference to it, in the realm of problem centered teaching. We illustrate this proposal with three problems whose origin is in the ample and fertile history of the rectangle triangles, where there is a blend of simple ideas of the number theory, algebra and geometry.
In the didactic assumptions and methodological considerations initially made, as well as, in the recommendations presented at the end, we provide, briefly, some alternatives for the teacher.

Ex praeterito, spes in futurum
aforismo clásico

Introducción

Los autores han tenido la oportunidad de colaborar en varios países ibero-americanos, en diferentes actividades educativas, principalmente en formación de profesores. Hemos confrontado dificultades, hemos desarrollado experiencia y quisieramos compartir reflexiones y posibles soluciones.

¿Cuáles son las deficiencias detectadas? Son muchas y diversas, pero nuestra experiencia profesional nos conduce a significar cuatro tipos principales:

Carlos Sánchez Fernández
Concepción Valdés Castro
Universidad de la Habana
Cuba

- Deficiencias heurísticas.- Dificultades en la resolución de problemas. Encontramos profesores que cuando se les habla de problemas comienzan a tener «problemas».
- Deficiencias motivacionales.-Carencia de la suficiente motivación para resolver los problemas. En muchos casos el profesor se considera obligado a resolver todos los problemas en la pizarra, mecánica y fríamente, dejando a los alumnos con un sentimiento de frustración e inferioridad.
- Deficiencias culturales.-Relacionadas con la cultura matemática y general necesarias para comprender la esencia del planteamiento de los problemas y para expresar con precisión y claridad sus ideas sobre los problemas
- Deficiencias parroquiales.-Visión unilateral y estrecha sobre la Matemática, la cual se concibe como un conglomerado de cátedras (quizás sea mejor decir «catedrales») independientes, con una jurisdicción limitada a las mínimas parcelas del conocimiento matemático.

Consideramos que la Historia de la Matemática, en concordancia con otros muchos elementos pedagógicos, puede ejercer una influencia terapéutica en el remedio de estos tipos de dolencias, que se enfrentan mejor en una enseñanza centrada en problemas.

Presupuestos didácticos

Tomando en consideración los tipos de problemas fundamentales antes señalados, es que concebimos nuestra acción sustentada en los cinco presupuestos siguientes:

1.-.Alumnos y profesores deben considerarse inmersos en un contexto socio-cultural que condiciona ciertas ideas previas acerca de lo que es la matemática, cómo se desarrolló, cuál es el objetivo de su enseñanza, para qué se aprende la resolución de problemas, cual es el papel del profesor y del alumno en este aprendizaje. Estas preconcepciones condicionan la aparición de bloqueos de tipo afectivo, culturales y cognoscitivos que marcan fuertemente la actividad de aprendizaje.(Guzmán1991).

2.-La ensenanza de la resolución de problemas es como un arte, en el sentido dado por Stanic y Kilpatrick (1989), pero un arte que se desarrolla de forma colectiva, mediante las interrelaciones propias del grupo de alumnos con el profesor y de los alumnos entre si. Al igual que los aprendices de pintura que se ejercitan «copiando» las grandes obras del pasado, así podemos utilizar la historia del problema matemático para introducir a los alumnos en el arte de la resolución de problemas, pero siempre procurando apreciar ese arte desde un punto de vista crítico.

3.- La pregunta, el diálogo, la duda, el cuestionamiento crítico, son parte fundamental del método de trabajo en la sala de clase. Se debe enseñar al alumno no solo a resolver los problemas que propone el profesor, sino también a plantearse problemas. En el diálogo se detectan las preconcepciones y los obstáculos presentes en el alumno y se puede determinar mejor el trabajo en la zona de desarrollo potencial.(Vigotsky 1988).

4.- La actividad del alumno es un elemento fundamental en nuestro enfoque, pero no debe entenderse de forma mecanicista. Esta actividad puede ser desarrollada no solo individualmente, sino también en forma conjunta con otros alumnos organizados en pequeños grupos, o en interacción directa con el profesor. (Galperin 1984).

5.- La línea de metodología historicista que considera la matemática a través del estudio de los caminos de su desarrollo está mas cerca de la matemática «viva» que cualquier otro esquema ahistórico. El enorme valor heurístico del enfoque histórico en la enseñanza de la Matemática reside, ante todo, en que la desarticulación abstracta se hace activa, gozando de la potencia de la certeza historica. La Historia de la Matemática, revestida de una fuerza y expresion crítica, estimula y objetiviza el pensamiento creativo. (Sánchez Fernández 1995).

Nuestras consideraciones metodológicas parten del principio de que no existe un método universal, aplicable en cualesquiera condiciones. El profesor debe acercarse con espiritu pluralista, flexible, tendiendo puentes entre los diferentes enfoques metodológicos (Minujin Zmud 1995), así como nosotros hemos pretendido lograr en la conformación de nuestra alternativa.

Problemas ilustrativos

A continuación pretendemos ilustrar como se puede aplicar la historia sin necesidad de hacer referencia explícita a ella. La Historia sirve como fuente surtidora de problemas, contextualiza y guía en la realización de las actividades. El profesor en concordancia con las condicionantes del contrato didáctico, determina cómo, cuándo y dónde explicitar lo histórico. En el texto ilustrativo que sigue, señalamos con paréntesis, posibles momentos de referencia histórica, sin desarrollar la citación. El profesor interessado puede organizar a su gusto y necesidad, la exposición.

Problema 1. Encontrar triángulos rectángulos cuyos tres lados tengan longitud entera

La forma de desarrollo del problema dependerá del nivel y la formación previa de los alumnos. Supondremos que se tiene un grupo de alumnos de los ultimos años de enseñanza media o de los primeros años de enseñanza superior.

¿Qué significa encontrar triángulos rectángulos con lados de longitud entera?

Hay que hallar 3 números enteros a, b, c, tales que

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (1)$$

Puede experimentarse buscando algunos ejemplos particulares. En seguida se nota que si (a, b, c) satisface la ecuación (1), entonces (ma, mb, mc) también la satisface. Nótese que si cualesquiera 2 de los números a, b, c tienen un divisor común, entonces el tercero también lo tendrá.

Podemos así proponer el hallazgo de un método para generar tríos (a, b, c) con dos de ellos primos entre si y que satisfagan (1).

Sugerencia 1 Tratemos de reducir el problema a otro mas simple. Nuestra ecuación tiene 3 variables, ¿será posible reducir el número de variables? Por ejemplo,dando una relación entre dos de ellas. Sabemos que $c > a$ luego podríamos suponer $c = a + 1$. ¿Qué se tendría en ese caso?

Se observa que $a^2 + b^2 = (a + 1)^2 \Rightarrow b^2 = 2a + 1$, o sea, b debe ser impar. Sea $b = 2n + 1$, entonces $(2n + 1)^2 = 2a + 1$, de donde $a = 2n^2 + 2n$ y $c = 2n^2 + 2n + 1$, lo que produce los tríos:

$(2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$ $n \in$ **N (Solución de Pitágoras, Dixon 1952)**

¿Serán éstos todos los tríos posibles? Se observa que el trío (8, 15, 17) no está incluído. Podría proponerse hacer $c = a + 2$. De forma similar a la anterior se obtienen los tríos

$(n^2 - 1, 2n, n^2 + 1)$ $n \in$ **N (Solución de Platón, Dixon 1952)**

Este método, en principio, pudiera continuarse y encontrar otros tríos, pero es dudoso que se pueda obtener una fórmula generadora de todos los tríos.

Este momento es oportuno para reflexionar acerca de lo que se ha logrado y el camino seguido. Puede entonces proponerse enfocar el problema de otra forma, usar otra estrategia y tratar de ver si puede hallarse una fórmula generadora de todos los posibles tríos.

Sugerencia 2. Al hacer la reducción de 3 a 2 variables usamos una relación entre 2 de las variables. ¿No habrá otra forma de reducir a 2 las variables en la ecuación (1)? No es difícil obtener de los alumnos la idea de dividir por una de las variables y llegar a la ecuación equivalente

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \quad (2)$$

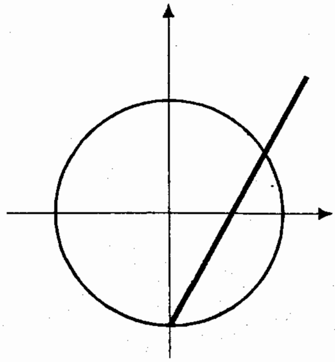
Así el problema se transformó en encontrar los pares de números racionales $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$, que satisfacen (2). Nótese que si se hallan dos números racionales $\frac{l}{k}, \frac{p}{q}$, que satisfacen (2), entonces $(lq)^2 + (kp)^2 = (kq)^2$ y se tiene una solución de (1). Por tanto, tenemos un problema equivalente:

«Hallar las soluciones racionales de la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (3)$$

¿Podemos interpretar el problema en otro lenguaje matemático? Por ejemplo ¿En lenguaje geométrico?

Con un poco de experiencia en geometría analítica, debe surgir rápidamente la idea de encontrar puntos de coordenadas racionales en la circunferencia de radio unidad (3). Hagamos una figura.



Los alumnos pueden observar rápidamente que existen puntos racionales triviales

$$(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)$$

El problema consiste en determinar otros puntos no triviales cuyas coordenadas sean racionales.

¿De qué manera podemos determinar puntos de la circunferencia?. Interceptándola con rectas. ¿Cuáles son las rectas mas simples?

La respuesta esperada es $y = mx$. Después de ensayar esa familia de rectas, se observa que el problema se transforma en encontrar m tal que $m^2 + 1$ sea el cuadrado de un racional, o sea, un problema semejante al original.

¿Qué otra familia de rectas , que sea relativamente simple, pudiera considerarse?

Tomemos una familia de rectas que pase por uno de los 4 puntos racionales triviales. Por ejemplo, $y = mx - 1$ pasa por el punto $(0, -1)$ y tiene pendiente real m.

El otro punto de intercepción con la circunferencia es $\left(\dfrac{2m}{m^2+1}, \dfrac{m^2-1}{m^2+1}\right)$

Evidentemente si $m \in Q$, también $x \in Q$, $y \in Q$. Luego, hemos encontrado un método para generar puntos racionales de la circunferencia. ¿Los generara todos? Es evidente que si m recorre todos los valores reales, entonces la recta $y = mx - 1$ interceptará sucesivamente todos los puntos de la circunferencia, por tanto, debemos analizar si se cumple la implicación

$$\frac{2m}{m^2+1} \in Q, \frac{m^2-1}{m^2+1} \in Q \Rightarrow \mathbf{m} \in Q$$

En efecto, sea $\dfrac{2m}{m^2+1} = \dfrac{a}{b} \in Q$. Entonces debe cumplirse $am^2 - 2mb + a = 0$ de ahí que

$$m = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4a^2}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - a^2}}{a}$$

Por otra parte,

$$\frac{m^2-1}{m^2+1} = \frac{\left(\dfrac{b \pm \sqrt{b^2-a^2}}{a}\right)^2 - 1}{\left(\dfrac{b \pm \sqrt{b^2-a^2}}{a}\right)^2 + 1} = \frac{b^2 \pm b\sqrt{b^2 - a^2 - a}}{b^2 \pm b\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{k}{l} \in Q$$

entonces:

$$b(l-k)\sqrt{b^2-a^2} = b^2(k-l) + la^2 \in Q \Rightarrow k = l, o, \sqrt{b^2-a^2} \in Q$$

pero $k = l$ es imposible, ya que $\left|\frac{k}{l}\right| < 1$, luego tiene que ser $\sqrt{b^2 - a^2} \in Q$ y de ahí que $m \in Q$.

Así que todas las soluciones racionales de (1) vienen expresadas por

$$x = \frac{2m}{m^2 + 1}, y = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}, m \in Q$$

Es decir, hemos resuelto totalmente el problema auxiliar. Debemos regresar al problema original.

Haciendo $m = \frac{p}{q}$ se tiene:

$$x = \frac{2pq}{p^2 + q^2}, y = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$$

y sustituyendo en (3) se ve que

$$a = p^2 - q^2, b = 2pq, c = p^2 + q^2, p \in N, q \in N \quad (4)$$

Basta considerar p, q primos entre si y de diferente paridad.

Hemos obtenido, entonces, una solución general al problema propuesto **(Solución de Diofanto, Dixon 1952)**

Ahora el profesor podría aprovechar para reflexionar sobre el método usado. Una posible vía de trabajo consistiría en analizar la posibilidad de extender el método para buscar puntos racionales en otras curvas, por ejemplo, en las curvas dadas por polinomios de segundo grado. En dependencia de la profundidad y el alcance que pretenda dársele a esta actividad, puede llegarse hasta problemas abiertos de la aritmética de las curvas y múltiples problemas de la geometría algebraica (ver p.e. **Sánchez F. 1996**, o **Stillwell 1994**).

También sería productivo un análisis comparativo de los dos métodos; la comparación entre los resultados y los métodos, así como sus posibilidades respectivas.

Sugerencia 3. Otra variante para atacar el problema propuesto, que exige mayores conocimientos y habilidades por parte de los alumnos, pero que permite la introducción general al trabajo con estructuras algebraicas como dominios de factorización única, se basa en ideas introducidas por Gauss. La idea consiste en «descomponer» en factores el primer miembro de la ecuación (1): $(a + ib)(a - ib) = c^2$ y trabajar en el dominio de los enteros gaussianos. Aquí es interesante dejar que los estudiantes den rienda suelta a su imaginación y con la sugerencia de que utilizen analogías (por generalización) entre el conjunto de los enteros y el conjunto de los enteros gaussianos, se pueden extender las propiedades de divisibilidad y obtener las fórmulas (4) de generación de los tríos. (ver **Kleiner 1986**)

Es importante, una vez sea realizado este trabajo «informal», hacer una reconsideración profunda del método seguido, establecer las «propiedades» usadas y encontradas por analogía, y con ello, construir el puente entre intuición, imaginación y los conceptos establecidos, o, en otras palabras, realizar la institucionalización del saber. (Brosseau 1983)

Estas tres estrategias para la resolución del problema propuesto, pueden dar lugar a una gran variedad de situaciones en la clase, en dependencia del grupo de estudiantes, su nivel de desarrollo matemático, sus conocimientos, intereses y el método sugerido por el profesor.

Destaquemos que es posible, e incluso altamente recomendable, desarrollar en forma paralela las tres estrategias, con tres grupos pequeños de estudiantes. Se recomienda que cada cierto tiempo (de acuerdo con el ritmo de trabajo de los estudiantes) se realicen una o varias actividades conclusivas de discusión, donde cada grupo tenga la oportunidad de exponer y defender la estrategia por el utilizada, colectivizando, de esta forma, los resultados y logros obtenidos por los grupos individuales.

Es importante proponer a los alumnos que piensen en las posibles aplicaciones de los resultados alcanzados.

Si los alumnos no proponen otras aplicaciones realmente significativas, puede sugerirse la construccion de triángulos con sus tres lados y la altura entera. (Dixon 1952)

En dependencia de las características de la actividad que se realiza, puede explotarse mas ampliamente la idea con otros problemas relacionados.

Problema II. «Dados dos triángulos rectángulos ¿existirá un tercer triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea el producto de las hipotenusas de los triángulos dados? (VIETA)

Ante todo se «algebriza» el problema, es decir, se traduce a un lenguaje apropiado, así se convierte en:

Si $c^2 = a^2 + b^2$, $l^2 = m^2 + n^2$ ¿existirán p, q tales que $(cl)^2 = p^2 + q^2$? o de forma equivalente, ¿tales que

$$(a^2 + b^2)(m^2 + n^2) = p^2 + q^2 \ ?$$

Si los alumnos se familiarizaron con la tercera estrategia sugerida antes, entonces es posible que mas o menos rápidamente piensen en la utilización de números complejos:

Es claro que

$$c^2 = |a + lb|^2, l^2 = |m + \mathrm{ln}|^2$$

luego

$$c^2 l^2 = |a + lb|^2 |m + in|^2 = |(m + in)|^2$$

lo que daría inmediatamente la respuesta

$$(a^2 + b^2)(m^2 + n^2) = (am - bn)^2 + (an + bm)^2 \quad (5)$$

o sea,

$$p = |am - bn|, q = an + bm \quad (6)$$

¿será este el único triángulo «producto»? Surge enseguida la posibilidad de considerar los complejos conjugados en cada caso, lo que, en principio, daría 4 soluciones. Puede comprobarse que realmente existe otra solución esencialmente distinta:

$$p = am + bn,\ q = |an - bm| \quad (7)$$

¿Existirá alguna otra relación entre los triángulos «factores» y el triángulo «producto»?

Ahora pudieran realizarse algunos experimentos, con casos particulares mas sencillos, por ejemplo cuando los triángulos factores son iguales.

Por simple observación puede notarse la relación entre los ángulos en cada caso y realizar la demostración utilizando los números complejos.

En este momento resulta interesante realizar comentarios que permita a los alumnos comparar las estrategias utilizadas y el desarrollo histórico. Vieta utilizó esta multiplicación de triángulos y sus propiedades sin usar los números complejos (que aun no eran aceptados), sino precisamente, como herramienta sustitutiva a los mismos.

Este problema puede desarrollarse mas extensamente proponiendo, por ejemplo, hallar las «potencias» sucesivas de los triángulos y de esa manera llegar a fórmulas donde se puedan reconocer las llamadas fórmulas de Moivre (halladas de esta forma por Vieta, mas de un siglo antes) que sirven para expresar sen nφ, cos nφ en funcion de senφ, cos φ. (ver p.e. **Bashmakova y Slavutin 1976** ó **Sánchez Fernandez 1995)**

PROBLEMA 3 ¿Cuándo un número entero n puede escribirse como suma de dos cuadrados?

Consideremos que todo cuadrado es suma de dos cuadrados.

La fórmula (5) indica que el producto de dos números que sean suma de dos cuadrados es a su vez suma de dos cuadrados. Esto sugiere que nos limitemos inicialmente a los números primos, simplificando el problema.

Después de alguna experimentación se observa que los primos que no se pueden descomponer en suma de cuadrados son 3,7,11,19, 23,... y, al buscar una regularidad, se observa que son de la forma 4n + 3. Se demuestra fácilmente que un primo de la forma 4n+3 no puede ser suma de cuadrados.

Por otra parte, todo número primo, excepto 2, es impar, luego quedan los números primos de la forma 4n + 1.

¿Será posible descomponerlos siempre en suma de dos cuadrados? (**Teorema de Fermat**). La respuesta a esta pregunta no es inmediata ni simple y es posible conducir a los alumnos, al menos, por dos caminos diferentes:

a) usando nuevamente las propiedades de los enteros gaussianos. (ver Herstein 1964)

b) mediante la aplicación de formas cuadráticas binarias. (ver Dixon 1952)

La respuesta definitiva para un entero arbitrario puede obtenerse a través del lema de Euler : «cada divisor de la suma de dos cuadrados de primos relativos es también una suma de dos cuadrados» (**Dixon 1952**)

Así que, resumiendo, los enteros que se descomponen en suma de dos cuadrados son de la forma $2^j a^2 b$ donde cada factor primo de b es de la forma 4n + 1.

Es claro que el desarrollo de cuestiones como esta última requieren de una orientación clara y precisa del profesor. Al introducir al alumno en campos que son nuevos para el, debe de mantenerse un balance adecuado entre autonomía y control, evitando que el alumno recorra todo el camino histórico, pero de tal forma , que se sienta partícipe del hallazgo de los nuevos conocimientos, que sienta la profunda necesidad de cada concepto nuevo introducido, tal y como lo sintieron aquellos que lo introdujeron por primera vez en la historia.

Estos problemas que tienen una larga e interesante historia, permiten su tratamiento en muchas formas. Por ejemplo, la escritura de un número como suma de tres o cuatro cuadrados seria una continuación fructífera que serviría para introducir a los alumnos en dominios numéricos no conmutativos .

El problema de la descomposición en cuatro cuadrados lleva de una forma bastante natural a la introducción de los cuaterniones (ver Herstein 1964), a su vez, el estudio de los cuaterniones es una excelente motivación para la introducción de estructuras algebraicas mas abstractas y para la vinculación con otras ramas de la Matemática como el análisis vectorial.(Sánchez Fernández 1990, 1991 y 1993)

Recomendaciones al profesor

Existen muchas formas de insertar nuestro método en el proceso de aprendizaje, señalemos algunas de las que nos parecen mas efectivas:

a) **seminarios de problemas** con relativa independencia de otras disciplinas tradicionales del curriculum, procurando, además, el objetivo de integración de conocimientos.
b) **cursos de nivelación** al comienzo de uno de los niveles de enseñanza secundario o universitario. Se puede usar también, para comprobar el nivel alcanzado y para familiarizar al grupo con el profesor.
c) **estudio de un tema determinado** dentro de una disciplina concreta. Puede ayudar a integrar conocimientos de la misma disciplina y de esa disciplina con otras.
d) **reciclaje** sobre una materia específica, en un momento apropiado del curso. De esta forma se retoman los temas, ya explicados en forma tradicional, buscando una sistematización de los conocimientos.
e) **clubes de matemática** o círculos de interés, con participación voluntaria. Un buen trabajo permitiría captar mas alumnos voluntarios. La complementación con boletines y otros documentos paradidácticos, pueden generalizar las mejores ideas.

El conocimiento mas profundo y amplio de la Historia de la temática donde esta inmerso un problema dado, permite tener una perspectiva a largo plazo del conjunto de problemas y situaciones problemáticas que serán presentadas y preveer algunas de las situaciones que podrían surgir de forma espontánea en la relación con los alumnos.

Tener presente que un rasgo característico, definitorio, de un problema, es que debe motivar a la persona que lo va a resolver y que el desempeño del individuo frente al mismo, estará fuertemente correlacionado con el interés por darle solución. La Historia es fuente inagotable de tales motivaciones.

A través del análisis histórico y epistemológico de las diferentes vías de resolución de un problema, el profesor puede situarse mejor para comprender los posibles obstáculos didácticos y epistemológicos que deberá enfrentar. En otras palabras, el profesor estará mejor preparado para comprender las causas de los errores de sus alumnos y el porque no entienden el problema.

Es conveniente la reflexión previa sobre cómo y cuáles habilidades de tipo metacognitivo puede desarrollar en el marco de un problema, como ubicar al alumno en la «practica de la matemática», como «introducirlo a la Reina». (**Lester 1988**)

Estar consciente que si bien una buena y concienzuda preparación de la actividad ayudará al éxito de la misma, jamás será posible realizar una planificación previa, una programación exacta de toda la actividad, como cuando la docencia se desarrolla de forma tradicional. En otras palabras, puede planificar y realizar un control, pero nunca de forma autoritaria debe limitar la iniciativa y la originalidad. Esta característica del contrato didáctico debe quedar bien clara desde el comienzo de la actividad y no debe ser violada en todo su desarrollo, porque es la única forma de conseguir una atmósfera propia de un «colectivo de investigadores noveles con un buen orientador científico»

Bibliografía

Bashmakova I ; Slavutin E. (1976) Cálculo de triángulos de F. Vieta e investigación en ecuaciones diofánticas Investigaciones histórico-metodológicas N 21 ed. Nauka. Moscou (en ruso)

Brousseau G.(1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques Recherches en didactique des Mathématiques Vol.4 N2, 165-198

Colectivo de autores (1995) :Aprender haciendo: los métodos participativos.de la enseñanza Min. Ed. Sup. Ciudad Habana

Dixon L.E. (1952) History of the theory of numbers Vol. II Chelsea.Publishing Company N.Y.

Dunham J. (1993) Viaje a través de los genios. Ed. Piramide S.A. Madrid

Galperin P. Y. (1983) La formación de la acción mental, en A.L. Segarte (ed.) Lecturas de Sicología Pedagógica Ed Min. Educ. Sup. Ciudad Habana

Gil Pérez D. (1993) Contribución de la historia y de la filosofía de las Ciencias al desarrollo de un modelo de enseñanza/aprendizaje como investigación Enseñanza de las Ciencias Vol 11 N 2, 197-212

Guzmán M de (1991) Para pensar mejor Ed. Labor. Barcelona

Herstein I.N.(1964) Topics in Algebra

Kleiner I.(1986) Famous problems in mathematics: an outline of a course For the Learning of math. Vol 6 N 1.

Lester F. K.(1994) Musing about research on mathematical problem-solving:1970-1994 Journal for Research in Math. Ed. Special 25 th anniversary issue

Lester F.K. (1989) Reflections about Mathematical Problem-Solving Research, in R.I. Charles and E.A. Silver (eds.) The Teaching and assesing of math. problem-solving Vol. 3 NTCM, 115-124

Minujin Zmud A. (1995) En los umbrales del siglo XXI: Un nuevo paradigma educativo antihegemónico Revista Siglo XXI. Perspectivas de la Educ. desde America Latina Año 1 N 2

Pozo J. I. (coordinador) (1994) La Solución de Problemas Ed. Santillana S.A. Madrid

Sánchez Fernández C. (1989) El recurso de la historia y metodología de la Matemática Boletín de la Soc. Cubana de Mat. y Computación (BSCMC) N 11, 11-16

___ (1990) La fascinante historia de los sistemas numéricos hipercomplejos BSCMC N 12, 16-26

___ (1991) La fascinante historia de los sistemas numéricos hipercomplejos (Segunda Parte) BSCMC N 13, 3-10

___ (1993) Crónicas históricas de enigmas y conjeturas del Análisis Diofántico BSCMC N 15, 32-41

___ (1995) Usos y abusos de la Historia de la Matemática en el proceso de aprendizaje. de los profesionales del tercer milenio, en Proceedings of Meeting of the Inter. Study Group HPM-1994 Blumenau, Brazil

___ (1996) Crónicas históricas acerca de la aritmética de las curvas BSCMC (por aparecer)

Schoenfeld A. (1982) Some thougts on Problem-Solving Research and Mathematics Education, in F.K. Lester and J. Garofalo (eds.) Mathematical Problem-Solving The Franklin Institute Press

Stanik G.M.A.,Kilpatrick J. (1989) Historical perspectives on problem solving in the math. curriculum, in R.I. Charles and E.A. Silver (eds.) The teaching and assesing of math. problem-solving Vol 3 NTCM, 1-22

Stillwell J. (1994) Mathematics and its History 3rd.ed.Springer Verlag

Vigotsky L. S. (1988) Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar, en Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem Ed.Univ. de Sao Paulo, 103-117.

Encuesta sobre los Métodos de Trabajo de los Matemáticos [1]

L'Enseignement Mathématique, Tomo IV (1902) y Tomo VI (1904)

1. En qué época, según sus recuerdos, y en qué circunstancias, le nació el gusto por las matemáticas? ¿El gusto por las ciencias matemáticas es hereditario en su caso? ¿hay entre sus antepasados o entre los miembros de su familia (hermanos, hermanas, tíos, primos, etc.) personas especialmente dotadas para las matemáticas? ¿Tiene algo que ver el ejemplo o la influencia de estas personas para la inclinación de usted hacia las matemáticas?

2. ¿Cuáles son las ramas de las ciencias matemáticas hacia las cuales se siente usted particularmente atraído?

3. ¿Se siente usted atraído sobretodo por el interés de las ciencias matemáticas en sí mismas, o por las aplicaciones de estas ciencias a los fenómenos de la naturaleza?

4. ¿Conserva usted un recuerdo preciso de su manera de trabajar cuando realizaba sus estudios y cuado su la meta principal era asimilar la riqueza de otros y no tanto realizar investigaciones personales? ¿tiene usted sobre este punto alguna información interesante que comentar?

1 Esta encuesta fue elaborada por varios matemáticos de principios del siglo con la ayuda del célebre psicólogo ginebrino Claparède y de su colega Flournoy, y se difundió a través de la revista L'Enseignement Mathématique. La revista publicó el cuestionario que presentamos aquí, consistente en algo más de 30 preguntas, con la súplica a los lectores de que enviaran sus respsutas a la redacción. Algunas preguntas se refieren a aspectos más o menos "objetivos" (en la medida en que lo pueda ser un cuestionario), como las referentes al ruido exterior o al clima en relación al trabajo matemático; pero muchas otras tienen un carácter introspectivo y pretenden penetrar en la naturaleza del tema a través de la reflexión de los propios actores. La encuesta tuvo, en su momento, una serie de críticas de orden técnico y de contenido (por ejemplo, se le reprochaba que no se incluyeran preguntas sobre los estados psicológicos o las emociones en el momento de la creación matemática, ni sobre situaciones de fracaso o de error) pero la principal crítica se centró en el público que respondió al llamado de L'Enseignement Mathématique. Salvo algunas excepciones notables como Boltzmann y Darboux, casi todos los lectores que contestaron la encuesta eran matemáticos desconocidos, sin trabajos que hubiesen marcado una línea de desarrollo dentro de esta ciencia. Por esta razón, el interés que despertó el análisis de las respuestas fue secundario. Años más tarde, Claparède organizó un coloquio sobre este mismo tema al que asistió gente tan notable como Poincaré, Louis de Broglie y Paul Valery. Jacques Hadamard, por su parte, aplicó partes de esta encuesta, de manera personal, a algunos científicos de la talla de A. Einstein. N. de la T.

5. Una vez que terminó las matemáticas básicas (que corresponden, por ejemplo, al programa de la licenciatura en matemáticas o equivalente), ¿en qué dirección consideró usted que debía orientar sus estudios? ¿buscó usted desde el principio adquirir una instrucción general más extensa sobre varios aspectos de la ciencia antes de producir o de publicar algo serio? ¿ buscó usted, por el contrario, profundizar en un punto particular estudiando casi sólo lo indispensable para este propósito, y no fue sino hasta después que se extendió poco a poco? Si usted empleó otros métodos, ¿puede indicarlos brevemente? ¿cuál es el que usted prefiere?

6. ¿Ha tratado usted de entender la génesis de las verdades, descubiertas por usted, que más aprecia?

7. ¿Cuál es, en su opinión, la parte de azar o de inspiración en los descubrimientos matemáticos? ¿esta parte es tan grande como parece?

8. ¿Alguna vez le ha sucedido que de pronto llega a descubrimientos o soluciones sobre un tema completamente extraño a sus investigaciones del momento, y que corresponden a búsquedas anteriores infructuosas? ¿ha llegado usted a calcular o a resolver problemas en sueños? ¿o a ver, al despertar en la mañana, soluciones o descubrimientos completamente inesperados o bien vehementemente perseguidos la víspera o los días anteriores?

9. ¿Considera usted que sus principales descubrimientos fueron el resultado de un trabajo voluntario, dirigido en un sentido preciso, o bien llegaron a su mente espontáneamente, por así decir?

10. Cuando ha obtenido usted un resultado sobre un tema del que se propone publicar sus investigaciones, ¿redacta usted inmediatamente la parte correspondiente de su trabajo o, por el contrario, acumula sus resultados en forma de simples notas y sólo inicia la redacción cuando tiene un conjunto importante de éstas?

11. De manera general, ¿qué importancia atribuye usted a las lecturas en materia de investigación matemática? ¿qué consejo daría usted sobre este punto a un joven matemático dada la instrucción clásica habitual?

12. Antes de emprender un trabajo, ¿trata usted, para empezar, de asimilar los trabajos que se han producido sobre el mismo tema?

13. ¿Prefiere usted, por el contrario, dejar su espíritu en entera libertad, a reserva de verificar después mediante lecturas sobre el tema, la parte que le es original en los resultados que obtuvo?

14. Cuando aborda un asunto, ¿trata usted de estudiar de una vez de la manera más general posible los problemas más o menos precisos que usted plantea? ¿habitualmente, prefiere usted tratar de entrada casos particulares, o bien aborda un caso extenso que generaliza progresivamente después?

15. ¿Hace usted alguna distinción, en cuanto al método, entre el trabajo de invención y el de redacción?

16. ¿Le parece que sus hábitos de trabajo son esencialmente los mismos desde que terminó sus estudios?

17. En sus principales investigaciones, ¿ha persistido en un objetivo, sin discontinuidad, o bien ha abandonado el tema en ciertos momentos para regresar a él más tarde? Si usted ha practicado los dos métodos, ¿cuál, en general, le ha parecido mejor?

18. ¿Cuál es, en su opinión, el tiempo mínimo que un matemático, que tiene otras ocupaciones cotidianas, debe dedicar al día, a la semana y al año, a las matemáticas para llegar a cultivar con resultados ciertas ramas de las mismas? ¿le parece que es mejor, cuando uno tiene la oportunidad de elegir, trabajar un poco todos los días (por ejemplo, una hora diaria como mínimo)?

19. (a) ¿Cuáles son sus distracciones u ocupaciones favoritas, o sus gustos dominantes, fuera de sus estudios de matemáticas o en sus momentos de asueto?
(b) Las ocupaciones o distracciones artísticas, literarias, la música y la poesía en particular, ¿le parece que distraen la invención matemática, o bien que la favorecen por el reposo momentáneo que proporcionan al espíritu?
(c) ¿Se siente usted atraído por asuntos de orden metafísico, ético o religioso o, por el contrario, estas cosas le repugnan?
20. Si usted tiene ocupaciones profesionales absorbentes, ¿cómo se las arregla para conciliarlas con sus trabajos personales?

21. ¿Qué consejos, en resumen, daría usted (a) a un joven estudiante de matemáticas? (b) ¿a un joven matemático que, habiendo concluido sus estudios ordinarios, desea dedicarse a la carrera científica?

Preguntas particulares relativas al modo de vida del matemático

22. ¿Cree usted que es útil para el matemático observar algunas reglas particulares de higiene: régimen, horas de comida, pausas necesarias?

23. ¿Cuál le parece a usted que debe ser la duración del sueño cotidiano?

24. El trabajo del matemático dentro de una jornada, en su opinión, ¿debe ser interrumpido por otras ocupaciones o por ejercicios físicos adecuados a la edad y a la fuerza de cada uno?

25. (a) ¿Es necesario, por el contrario, mantenerse dentro de una misma tarea la jornada entera, sin dejarse distraer por nada, para tomar después jornadas completas de descanso?

(b) ¿Tiene usted fases marcadas de excitación y vehemencia, y después de depresión e incapacidad de trabajo?
(c) ¿Ha usted notado si estas alternancias presentan alguna periodicidad regular y, en ese caso, cuál es aproximadamente el número de días de la fase de actividad y de la fase de inercia?
(d) Las circunstancias ambientales, físicas y meteorológicas (temperatura, luz u obscuridad, estaciones del año, etc.), tienen alguna influencia apreciable sobre su capacidad de trabajo?

26. ¿Qué ejercicios físicos practica usted o ha usted practicado como distracción del trabajo intelectual? ¿cuáles prefiere?

27. ¿Prefiere usted trabajar por la mañana o por la tarde?

28. Los periodos vacacionales, si es que los toma, ¿los dedica usted a trabajos matemáticos (y en qué medida) o bien los dedica enteramente a la distracción y al descanso?

Observaciones finales

Hay, naturalmente, muchos otros detalles que sería útil conocer por medio de esta encuesta:

29. a) Si se trabaja más fácilmente parado, sentado o acostado;
(b) en el pizarrón o sobre el papel;
(c) hasta que punto los ruidos exteriores son distracciones;
(d) si es posible resolver un problema cuando se toma un paseo o cuando se viaja en ferrocarril
(e) la influencia de excitantes y calmantes: tabaco, café alcohol, etc. sobre la cantidad y la calidad del trabajo

30. Desde el punto de vista psicológico, sería muy interesante saber de qué imágenes internas, de que forma de "palabra interior" se valen los matemáticos; si éstas son motrices, auditivas, visuales o mixtas, y si dependen del tema de que se ocupan.

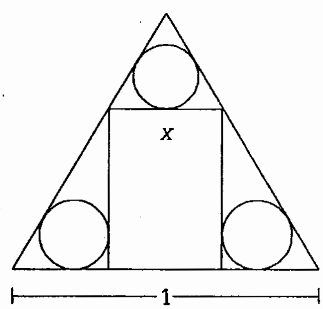
Si alguna persona conoció de cerca a algún matemático ya desaparecido y está en condiciones de proporcionar información sobre algunas de las preguntas anteriores, le suplicamos tenga a bien hacerlo. Esta será una aportación importante y útil para la historia de la ciencia matemática y de su desarrollo.

Traducción: Guillermina Waldegg

Problemas Propuestos por la Filial Pedagógica "Asamblea de Guaimaró", Cuba

Nivel superior

En un triángulo equilátero de lado 1 se inscribe un rectángulo de tal manera que el lado del rectángulo paralelo al lado del triángulo tiene longitud x. ¿Para qué valor de x las tres circunferencias inscritas son iguales, como se muestra en la figura?



Nivel medio

Dada la ecuación $x^2 + px + q = 0$ ...(1)

a) ¿Cuáles han de ser los valores de **p** y **q** para que las raíces de la ecuación (1) sean precisamente **p** y **q**?
b) Construir la ecuación cuadrática cuyas raíces sean los cuadrados de las raíces de la ecuación (1).
c) ¿Qué solución debe existir entre **p** y **q**, para que una de las raíces de la ecuación (1) sea el doble de la otra?
d) Si **p** = –2, ¿cuál ha de ser el valor de **q** para que una de las raíces de (1) sea el cuadrado de la otra?

Nivel elemental

Encuentre los números naturales de cuatro cifras $N = \overline{mcdu}$ tales que:

a) Los números estén entre 1 000 y 1 300.
b) Cada cifra sea el producto de dos números consecutivos.
c) $5mc + u = du$

Agradecemos toda correspondencia que se envíe a la dirección de Editorial Iberoamérica con las respuestas a esta sección. A los remitentes que envíen soluciones correctas se les enviará un juego de tres números de nuestra revista.

Reseñas de Libros

Claudi Alsina, Carme Burgués, Josep María Fortuny, Joaquim Giménez y Montserrat Torra

Enseñar Matemáticas

Editorial Graó, Series Pedagógicas, Barcelona, 1996.

Con este título los autores se dirigen al lector que tiene experiencias escolares variadas y que ha centrado su interés en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en alumnos de 3 a 16 años. La obra se nos ofrece como "un manual de reflexión y orientación, tanto para aquellas personas que se inician en el oficio de enseñar como para aquéllas que, compartiendo con nosotros años de experiencia, nos hagan el honor de constatar sus planteamientos con los que aquí se apuntan."[1]

Esta obra tiene como fundamento a una experiencia continua en la enseñanza de la matemática del nivel elemental de la escuela española. Está construido sobre cuatro capítulos claves, con la pretensión de hacer ver la importancia de una enseñanza especializada reforzada por una concepción sólida de la didáctica de la matemática.

El capítulo 1, Enseñar Matemáticas, está compuesto por tres apartados: 1.1 Elogio a las matemáticas, 1.2 Mirar atrás críticamente y 1.3 Retos de hoy. En el primero, los autores desarrollan una defensa a la matemática escolar como forma de acción y pensamiento a partir tres preguntas básicas:

- ¿Porqué es necesario aprender (y por lo tanto enseñar) matemáticas?
- ¿Cuándo hay que aprender matemáticas? y
- ¿Cómo se puede aprender y por tanto enseñar matemáticas?

Un párrafo, a mi modo de ver, dicho por los propios autores da respuesta a ellas:

> "Dicho apresuradamente hoy la educación podría basar su liberación en ser menos canónica e historicista y mucho más versátil y actual, buscar menos respuestas y fomentar más preguntas, planificarse menos horizontal y más verticalmente, evitar la monotonía y abrirse al enfoque imaginativo, apartar los mecanismos y desarrollar más las ideas, ser más breve y más profundo, menos analítica y más dinámica, menos ejercicios y más problemas, menos memoria y más conocimiento, menos abstracción y más experimentación previa, menos rigor absurdo y más conocimiento viable".[2]

---

1 Pág. 5.

2 Pág. 10.

En el segundo apartado, los autores nos hacen ver que los alumnos se enfrentan, en los primeros años de aprendizaje, a una matemática escolar en donde hay gran avance, impulso y participación generalizada y de buen nivel, pero una vez que las asignaturas se convierten en currículo, horarios, objetivos de actitudes, valores y normas, la comunicación educativa se hace conservadora con currículos acartonados, muy alejados de las necesidades inmediatas de los alumnos.

Mucho se ha escrito acerca de lo que debe enseñarse, aunque todo cambio curricular sin el apoyo real y comprometido de los maestros y de toda la sociedad corre el riesgo de no convertirse en una nueva forma de hacer. Pero en toda reforma curricular se distinguen dos tipos de maestros: los comprometidos, dinámicos y participadores y los despreocupados y conservadores y la idea es incorporar a todos al nuevo proceso cuando, se supone, hay participación de personas más profesionalizadas y en un mundo en el que la matemática es "un método objetivable de selección o promoción" y el mal desempeño en ésta puede orillar a adquirir miedo e inseguridad, llevar al bloqueo y, por ende, al fracaso.

Con estas ideas se desarrolla el apartado, hablando de la elección profesional cuando vence la educación obligatoria y se muestra como es que muchos de los que deciden seguir estudiando voltean sus tendencias vocacionales hacia estudios "sin matemáticas".

Hay que ir, pues, hacia una nueva matemática en la que "... deberíamos ser capaces de enseñar matemáticas arraigadas al lugar y a los contextos sociales, lingüísticos, culturales, etc. Provocar mil situaciones que nos lleven a problemas interesantes. Globalizar bloques de contenidos y ser tanto históricamente cultos como lúdicos en la dinámica, pero siendo conscientes de que, tal como ha comentado H. Sinclair: "<<Los niños aprenden en poco tiempo lo que la humanidad tardó miles de años en aprender>>". [3]

En la educación obligatoria es necesario atender a la diversidad en el grupo escolar, apoyando a los de mayores impedimentos, pero sin descuidar a la media del grupo, haciendo referencias constantes a otras asignaturas que permitan un planteamiento globalizado de la enseñanza; en donde campeen la historia y la motivación histórica, que provoque investigación y esté sazonada con problemas interesantes.

Sin embargo, la matemática que enseñamos está llena de bostezos, pues se prioriza la culminación del programa y ello entra en choque con los procedimientos y las actitudes. El alejamiento de las aspiraciones y necesidades de los alumnos es un factor más que aleja al maestro y a su materia del alumno, y, si se agrega a esto una enseñanza seria usada además con rigor, se provocan confusiones entre la estructura de la materia y la forma de evaluarla que se remiten, en la mayoría de las ocasiones, a la aplicación de un examen escrito, ofrecen un panorama deplorable en la enseñanza de esta asignatura en la educación básica.

El tercer apartado Retos de hoy, es muy rico en propuestas. A partir de los escritos más importantes en esta década, se tienen por objetivos en la enseñanza de la matemática en la educación básica:

---

3 Pág. 16.

"1. Ofrecer una educación matemática interesante para todo el mundo, a la luz de nuevos horizontes de vida que nos rodean, incorporando nuevas tecnologías y medios audiovisuales e intentando una actitud social nueva sobre la importancia de educarse matemáticamente bien.
2. Pasar de la simple transmisión de conocimientos, verdades o técnicas a crear una verdadera estimulación del aprendizaje donde primen los métodos, los modelos y las estrategias sobre los contenidos concretos, donde inducir, resolver, decidir, deducir, representar, verbalizar, explorar, investigar, etc., sean verbos que marquen la nueva dinámica y jubilen antiguas costumbres como la de calcular rutinariamente.
3. Considerar que el aprendizaje es una labor continua que forma parte de la vida de la persona y a la cual habrá que ayudar siempre a cualquier edad y en todas las situaciones, consiguiendo poner en cada caso los medios adecuados de todo tipo". [4]

Después de hacer un análisis somero desde la Revolución Industrial, a partir de la máquina de vapor, los autores pasan al estudio de las diversas energías usadas en el siglo XX y del campo de la cibernética al de la informática; hacen un paralelismo entre ellos en cuanto a los problemas de acumulación, transmisión y cuantificación y la importancia del mundo de la informática en el desarrollo acelerado del mundo actual, pues ese análisis "... era necesario para entender que la educación matemática tiene el reto ineludible de sintonizar con el mundo nuevo". [5]

En este análisis donde el maestro debe enseñar lo que conviene y por ello hay que:

- educar en un entorno concreto, recurriendo a lo inmediato, a la información a la mano y usando la infraestructura del entorno, sus noticias y sus formas de comunicación.
- globalizar e interdisciplinar, aglutinando conocimientos, contenidos, métodos y recursos con una idea común para lograr una visión de conjunto, relacionando la matemática con las demás asignaturas.
- obtener la culturización pendiente, a través del conocimiento de los orígenes, retomar sus problemas fundamentales, los conceptos que los originaron, el cómo y el por qué surgieron y quiénes los desarrollaron; esto es, usar del método histórico.
- evaluar como acción positiva.

Los autores tocan aspectos medulares referentes a cuestiones poco o nada consideradas en la acción docente, como la evaluación considerada como una actividad positiva y a la diversidad de formas evaluativas que se tienen a la mano; la necesidad de la experimentación diaria y la de futuro; desarrollar actividades de intercambio con colegas, participando en agrupaciones y asistiendo a eventos educativos; utilizar

4 Pág. 20-21.

5 Pág. 22.

a la educación matemática como una forma de investigación, misma que ya existe y hay que hacerla llegar al profesorado por medio de publicaciones; formar educadores a futuro con una nueva orientación, para los que sea muy importante y equilibrado saber mucha matemática, conocer mucha pedagogía y estar muy curtidos de experiencias; tener claro que hay que enseñar una matemática para todos y enseñada por todos; diversificar las formas de actuación en la clase; hacer del espacio de la clase un ambiente dinámico y de variados recursos; hacer que la matemática esté en todas partes; usar materiales y tecnología modernos como el uso de películas y videos; usar un lenguaje de comunicación del momento; llegar a la conciencia de participación de la familia y de toda la sociedad en el cumplimiento de las tareas educativas; y tener la conciencia y el ánimo de estarse poniendo al día, día con día.

Los tres siguientes capítulos tienen en lo general una estructura similar, la cual permite hacer generalizaciones y ampliaciones de un nivel a otro. En estos capítulos se habla de la enseñanza de las matemáticas en los ciclos: de 3 a 6 años (párvulos), de 6 a 12 años (primaria) y de12 a 16 años (secundaria), que son los espacios temporales en que se desarrolla la educación obligatoria en España.

En cada una de las introducciones a estos capítulos, los autores establecen lo que podemos llamar la caracterización de los educandos y los propósitos que se deben perseguir, el proceso educativo que le corresponde y cómo lograrlo. Además se definen las características de la matemática que se enseña en cada uno de estos niveles, el tipo de compromiso que se establece en las situaciones de aprendizaje, los procedimientos importantes de aprendizaje que hay que revalorar y, para cada nivel, el análisis de:

conceptos y hechos
actitudes, valores y normas
modelos de enseñanza
materiales más importantes
tipos de evaluación
actividades especiales, y el
enlace entre ciclos

Así, por ejemplo, para el caso de los procedimientos clave para cada nivel, los autores nos determinan que:

a) En párvulos son la observación, la relación y las estrategias de resolución de problemas.

b) En primaria son la observación, la manipulación, la experimentación, la relación, la estimación, el tanteo, el uso de lenguajes matemáticos, la resolución de problemas y el manejo de técnicas específicas.

c) En la secundaria son la mejora de habilidades generales, rutinas algorítmicas específicas, estrategias heurísticas genéricas o específicas, las competencias cognitivas y lógicas y la promoción de bases para un pensamiento avanzado.

En igual forma, el libro es interesante por cuanto van proponiendo y discutiendo, para cada nivel, cuáles son los:

conceptos y hechos
las actitudes, valores y normas
los modelos de enseñanza
los materiales más impcrtantes,
entre otras cosas más que.

Como se apreciará, una idea importante que se desarrolla a través de las páginas de este singular libro, está en el hecho de que los autores hablan de un modelo educativo equivalente con el que se presenta en nuestro país desde 1993, y de ahí el interés que puede tener el que maestros interesados en los enfoques actuales en la enseñanza de la matemática conozcan y se sumerjan en los conceptos que campean en esta obra.

Santiago Valiente Barderas

Reseñas de Libros

Yves Chevallard, Marianna Bosch y Josep Gascon:
Estudiar Matemáticas: El Eslabón Perdido entre Enseñanza y Aprendizaje
Institut de Ciènces de l'Educació de la Universitat de Barcelona y Editorial Horsori, 335 pp, Barcelona, 1997

La publicación de este libro es -desde mi punto de vista- un verdadero acontecimiento editorial para todas las personas interesadas por los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Sinceramente pienso que el libro ser de gran utilidad para los profesores de matemáticas, los padres y alumnos, pero también, y muy especialmente, para los formadores de profesores y los investigadores en Didáctica de las Matemáticas.

En un estilo y formato comprensibles el libro plantea delicadas e importantes cuestiones sobre la naturaleza de las matemáticas, su lugar en la sociedad y en la escuela, así como sobre el papel del estudio de problemas matemáticos, las técnicas de resolución de problemas y la teoría correspondiente en el aprendizaje de las matemáticas.

El libro aporta varias nociones de gran interés para comprender la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y los factores que influyen en estos procesos. Se da gran importancia al concepto de *estudio*, que abarca tanto el trabajo personal de un alumno enfrentado a un problema, o a un contenido escolar, como también el trabajo del experto matemático que se enfrenta a un nuevo problema. La enseñanza es una ayuda más en el proceso de estudio, que es reinterpretado y presentado como un aspecto clave para el logro del aprendizaje.

De este modo, lo *didáctico* -entendido como lo relativo a los procesos de estudio- se reconoce no sólo en el estudio cooperativo en la escuela dirigido por el profesor, sino en la propia actividad del matemático profesional, en el seno de la propia familia, el estudio individual, etc.

La incorporación al discurso de la Didáctica de las Matemáticas de la noción de estudio, permite un nuevo punto de vista para afrontar su problemática, resaltando que los principales protagonistas del aprendizaje matemático son los propios estudiantes. Los profesores dirigen el estudio y los padres ayudan a sus hijos a estudiar y a dar sentido al esfuerzo que se les pide. El fruto esperado de este esfuerzo conjunto es el aprendizaje de las matemáticas por parte de los alumnos.

El libro está organizado en cuatro capítulos o unidades con una estructura original. Las unidades comienzan presentando un «episodio» consistente en una entrevista de una periodista a profesores sobre una situación de estudio y enseñanza de las matemáticas en un instituto. Este episodio se usa como contexto para desarrollar el contenido de la unidad, usando los diálogos entre una supuesta profesora de Didáctica de las Matemáticas y uno de sus estudiantes. Las principales ideas que surgen en este análisis didáctico dialogado se sintetizan y completan con diversos comentarios, profundizaciones y anexos.

Como se ve la estructura de cada unidad es compleja pero está presentada de una manera comprensible, amena y eficaz para situar al lector ante la problemática tratada y comunicar las ideas de los autores.

Describimos, a continuación, sucintamente el contenido de cada unidad, utilizando parte de la información dada por los autores en los apartados de *síntesis* de las mismas.

Unidad 1: Hacer y estudiar matemáticas. Las matemáticas en la sociedad.

Se abordan cuestiones que están en la base del tema de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como las siguientes: ¿qué son las matemáticas, en qué consisten y para qué sirve hacer matemáticas en la sociedad?

Con frecuencia en el seno del sistema de enseñanza de las matemáticas se tiene la creencia que las únicas necesidades sociales matemáticas son las que se derivan de la escuela. Este reduccionismo -o "enfermedad didctica"- lleva a considerar que las matemáticas están hechas para ser enseñadas y aprendidas, que la «enseñanza formal» es imprescindible en todo aprendizaje matemático y que la única razón por la que se aprenden matemáticas es porque se enseñan en la escuela. Se reduce así el «valor social» de las matemáticas a un simple «valor escolar», convirtiendo la enseñanza escolar de las matemáticas en un fin en sí mismo.

«¿Qué hacer para que los alumnos se sitúen como matemáticos ante las cuestiones matemáticas que se les plantean en la escuela, y para que asuman ellos mismos la responsabilidad de sus respuestas?»

En esta primera unidad se describen los procesos de enseñanza y aprendizaje de l as matemáticas como aspectos particulares del proceso de estudio de las matemáticas, entendiendo la palabra «estudio» en un sentido amplio que engloba tanto el trabajo matemático del alumno, como el del matemático profesional que también «estudia» problemas de matemáticas. Lo didáctico se identifica así con todo lo que tiene relación con el estudio y con la ayuda al estudio de las matemáticas, identificándose entonces los fenómenos didácticos con los fenómenos que emergen de cualquier proceso de estudio de las matemáticas, independientemente de que dicho proceso esté dirigido a utilizar las matemáticas, a aprenderlas, a enseñarlas o a crear matemáticas nuevas. La Didáctica de las Matemáticas se define, por tanto, como la ciencia del estudio de las matemáticas.

Unidad 2: El currículo de matemáticas. Las matemáticas en la escuela

La visión antropológica que asumen los autores sobre las matemáticas les lleva a enfatizar su componente de actividad humana, y por tanto a presentar la idea de *obra matemática* como una noción importante para comprender los problemas de selección de los contenidos matemáticos a enseñar. Tanto la escuela como lo que en ella se enseña (el currículo) son obras abiertas, siempre inacabadas, que evolucionan con la sociedad, fruto de decisiones (o falta de decisiones) humanas. El currículo de matemáticas no es arbitrario, como tampoco lo es la manera en que se transforma la matemática en el seno de una institución escolar (transposición didáctica)

Para que un tema o contenido matemático (una obra en la terminología de los autores) forme parte del currículo obligatorio, además de que la sociedad considere su estudio interesante por sí mismo, debe ayudar a acceder a muchas otras obras de la sociedad. Pero existen dos peligros: que las matemáticas enseñadas sean en sí mismas inaccesibles para muchos jóvenes; que no conduzcan a ninguna parte, es decir, que se pierdan las cuestiones a las que dichas matemáticas responden y que, por tanto, aparezcan como una obra cerrada, muerta.

Unidad 3: Matemáticas, alumnos y profesores. Las matemáticas en el aula

Aquí se aborda el problema didáctico de encontrar o inventar situaciones que constituyan un buen «laboratorio» para que un grupo de alumnos pueda avanzar eficazmente en el estudio de un tema (una obra), en este caso, el álgebra elemental en 2 de ESO. De los Diálogos se desprende que una situación adaptada al estudio de una nueva cuestión debe cumplir dos condiciones inseparables:

(1) La situación se debe poder elaborar con materiales pertenecientes al medio matemático de los alumnos, es decir, al conjunto de objetos cuyas propiedades se dan más o menos por sentado y que se puedan manipular de forma bastante segura. Es preciso que los alumnos tengan una verdadera familiaridad matemática.

(2) La situación debe ser susceptible de generar algunas de las cuestiones que dan origen a la obra que se quiere estudiar. Esto significa que mediante una pequeña variación de ciertas tareas y cuestiones conocidas por los alumnos, ha de ser posible provocar la aparición de los principales tipos de problemas y técnicas que componen la obra en cuestión.

Puede darse el caso (y quizá sea esto lo más habitual) que, para una obra matemática concreta y un grupo determinado de alumnos, no se conozca ninguna situación que permita hacer avanzar de manera óptima a los alumnos en el estudio de la obra considerada, lo cual significará que el problema didáctico planteado no tiene una solución conocida.

Pero incluso si se dispone de una buena situación para avanzar en el estudio de la cuestión planteada, no todo queda en manos del saber hacer del profesor. El rendimiento de las técnicas didácticas depende ante todo del *contrato didáctico* en el que actúan conjuntamente profesor y alumnnos. Es éste el que define lo que ser posible o imposible hacer en clase, lo que tendrá sentido para los alumnos y el profesor de una manera compartida. Antes de ser eficaces, las técnicas didácticas tienen que ser aceptables y significativas para los actores del sistema didáctico.

Para entender los hechos didácticos que pueden observarse en una clase de matemáticas, es preciso interrogarse sobre la estudiabilidad de la cuestión matemática planteada y sobre las restricciones que emanan del contrato didáctico.

Unidad 4: La estructura del proceso de estudio. Las matemáticas en vivo

Una obra matemática surge siempre como respuesta a una cuestión o a un conjunto de cuestiones. Pero, ¿en qué se materializa dicha respuesta? En una primera aproximación podramos decir que la respuesta matemática a una cuestión cristaliza en un conjunto organizado de objetos ligados entre sí por diversas interrelaciones, esto es, en una organización matemática. Dicha organización es el resultado final de una actividad matemática que, como toda actividad humana, presenta dos aspectos inseparables: la *práctica matemática* o «praxis» que consta de *tareas y técnicas*, y el discurso razonado o «logos» sobre dicha práctica que está constituido por *tecnologías y teorías*.

No hay praxis sin logos, pero tampoco hay logos sin praxis. Al unir las dos caras de la actividad matemática se obtiene la noción de praxeología: para responder a un determinado tipo de cuestiones matemáticas hay que elaborar una *praxeología matemática* constituída por un tipo de problemas determinado, una o varias técnicas, su tecnología y la teoría correspondiente.

Elaborar una praxeología matemática supone para cualquier «estudiante», ya sea matemático investigador o alumno de matemáticas, entrar en un proceso de estudio que, como tal, no es un proceso homogéneo sino que está estructurado en diferentes momentos. Dichos momentos hacen referencia a una dimensión o aspecto de la actividad de estudio, más que a un período cronológico preciso.

Los autores distinguen los siguientes momentos puestos en relación con los diferentes elementos que constituyen la obra matemática y con las relaciones que se establecen entre ellos:

1) *Primer encuentro* con los objetos matemáticos que constituyen un tipo de problemas.

2) *Exploratorio.* Durante esta fase se explora el tipo de problemas intentando construir una técnica adecuada para abordarlo en su conjunto, o bien para un subtipo.

3) *Trabajo de la técnica.* Dominio, puesta a punto y nueva creación de técnicas matemáticas. Es un momento que desempeña un papel integrador, ya que supone el desarrollo natural del momento exploratorio y por ello creador de nuevos objetos matemáticos, y también como la fuente de las necesidades tecnológico-teóricas. De aquí se deduce que si no se presta suficiente atención a esta dimensión de la actividad matemática se crea un abismo entre la exploración puntual y rígida de problemas por un lado, y los discursos «teóricos» (justificativos e interpretativos) por otro.

4) *Tecnológico-teórico.* Este momento se refiere a los dos niveles de justificación de la práctica matemática: la tecnología de la técnica, que se mantiene más cerca de la técnica, y la teoría, un poco más alejada.

5) *Institucionalización.* En algún momento, el profesor -o el propio estudiante, sea matemático o alumno- deber fijar cuál será la «buena técnica» de resolución de una tarea, así como a la organización matemática en su conjunto y en toda su complejidad. Se institucionalizan elementos tecnológicos y teóricos, los subtipos de problemas, etc. Si el matemático no quiere perderse entre todo lo que está haciendo, con cierta regularidad, tendrá que institucionalizar el producto de su trabajo: precisar qué técnica utiliza, qué elementos forman parte del entorno tecnológico-teórico -y cuáles no-, a qué subtipos de problemas se puede aplicar la técnica y a cuáles no, etc. Si no realiza este proceso, su propia actividad se volverá ilegible para él mismo.

6) *Evaluación* de la obra matemática en su conjunto. Se trata aquí del momento en el que se pone a prueba el dominio de la obra. El estudiante debe ponerse a prueba, evaluarse, constatar si domina o no el nuevo objeto.

En cada unidad se incluyen, además, varias cuestiones y problemas matemáticos -presentados como *'pequeños estudios matemáticos'*- que se proponen al lector, para los que se ofrecen diversas vías y ayudas al estudio, que permiten superar posibles bloqueos y se agrupan al final del libro. Según los objetos matemáticos puestos en juego en cada caso, estas vías de estudio están clasificadas en cuatro niveles de dificultad, abarcando la secundaria obligatoria, bachillerato, primeros ciclos de carrera universitaria y licenciatura.

Los «pequeños estudios matemáticos», no son, por tanto, una simple colección de problemas resueltos, ya que cada cuestión abierta puede ser abordada de forma diversa, y las ayudas intermedias ofrecidas dejan un margen de iniciativa y esfuerzo personal al estudiante, acorde con la teoría didáctica desarrollada en los diálogos entre la profesora y el estudiante.

Como profesor de matemáticas e investigador en Didáctica de las Matemáticas sólo me resta agradeceder a los autores Yves Chevallard, Marianna Bosch y Josep Gascón, el excelente trabajo realizado y congratularme de que esta primera edición se haya escrito en castellano. Espero que el éxito editorial que les auguro contribuya en breve plazo a que sea traducido a otras lenguas, aumentando de este modo su influencia en la mejora del estudio de las matemáticas a nivel internacional.

Juan Díaz Godino
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Reseñas de Libros

John Allen Paulus:
Más Allá de los Números (meditaciones de un matemático)
Tusquets Editores, Serie Metateues No. 31, Barcelona, 1993

En un estilo tan personal como el que circunscriben a sus obras de divulgación, el autor, John Allen Paulus nos habla de lo matemático y no de la matemática.

Esta es una obra en donde el autor se sumerje en la realidad matematizable; en un lenguaje cotidiano comenta de la matemática del entorno sirviendo como un buen traductor entre la matemática, los matemáticos y lo que éstos quieren decir de aquélla.

Se tocan diversas ramas de la matemática, de los hombres que la construyen o la han construido, sus anécdotas significativas y de las connotaciones que dan a sus experiencias, pero siempre en un afán formador de juicios, si no claros, sin con plenitud.

Los temas clásicos afloran. Es el caso de los referentes a las secciones cónicas, la inducción matemática, los números primos y otras mucho más actuales como la teoría del caos, los fractales y la iteración, sin dejar de lado al humor matemático y la ética que acompaña a sus realizadores.

Resulta evidente que la principal preocupación de Paulus es la divulgación matemática basada en juicios de valor que, por sí mismos, deben por fuerza entusiasmar al lector y, con ello, ayudar a desterrar el analfabetismo matemático, como el propio autor lo define. Como el autor interviene en el contenido con compromiso y hace referencia constante a sus propias experiencias, podemos decir que en la obra se descubren -¿Por qué no habría de ser así?- posturas autobiográficas que resultan agradables porque le dan carácter más humano a las obras de los hombres y se evita la impersonalidad que en otros autores hace que sus escritos sean algo asépticos o faltos de compromiso.

En 70 capítulos breves, de no más de cuatro páginas cada uno, Paulus desarrolla la hazaña de divulgación, tocando todo lo que, supuestamente debe ser puesto en consideranción, para llevar de la mano a lectores de mente matemática, muchos de ellos sin saber que la tienen, para apreciar el inmenso poder de la matemática, a fin de comprender un mundo complejo, rico en interpretaciones, y dejar que la claridad vaya antes que la formalidad, cuando estas dos entran en choque.

En lo personal me han parecido interesantes y bien presentados los temitas referentes a El estilo matemático, La cinta de Möbius y orientalidad, La conciencia humana y naturaleza fractal, Etica y matemáticas, La filosofía de la matemática, Humor y matemática, La notación científica, La teoría del juego, La teoría del caos y Zenón y el movimiento, sólo por nombrar algunos que, en el repertorio amplio del contenido se destacan.

Es innecesario un listado de los 70 temitas para una reseña y el espacio que se cuenta para ella pero, sin lugar a dudas, en todos Paulus demuestra que los tiene bien pensados y que si no aporta nada nuevo en lo matemático, sí lo hace en la internación de las ideas que de ellos se derivan, en descubrir algo a partir de sus juicios de valor y en la manera en la que enfoca temas básicos, algunos controvertidos, otros no resueltos totalmente y, otros más que son de gran actualidad y de vigencia plena.

Y, pues como el autor manifiesta: «...Sin embargo, la matemática proporciona un modo de entender el mundo, y el hecho de desarrollar una conciencia o una perspectiva matemática puede ayudarnos en nuestro comportamiento matemático».

Santiago Valiente B.

La Adquisición del Concepto de Número Vinculado al Proceso Aditivo, en Niños de Primaria: El Uso del Cuadrito Vacío □.

Este trabajo, se aboca al análisis de la construcción del concepto de número en estudiantes de segundo año de primaria. Para realizar el estudio se examina un libro de texto de primero de primaria cuyos ejercicios interrelacionan los siguientes tópicos:

1) Diferentes representaciones simbólicas de la adición planteadas con la ayuda del cuadrito vacío (□):

Aquellas en las que sólo aparece un cuadrito: a + □ = c, a + b = □, □ + b = c.
O dos cuadritos: □ + □,   a + □   □,   □ + b   □
O tres: □ + □ + □,   □ + □
□
O cuatro: □ + □ + □ + □.

Incluso situaciones en las que se mezclan el cuadrito vacío con los lenguajes verbal y numérico: □ + □

8 ocho

2) Los conjuntos de objetos visualizados mediante una representación gráfica (imágenes).

3) Los enunciados verbales de los ejercicios contenidos en el texto.

El estudio se lleva a cabo con una serie de actividades, desde la elaboración de un examen diagnóstico para elegir a los candidatos a la entrevista clínica, la evaluación y selección de los estudiantes, hasta el análisis teórico de las respuestas a las preguntas planteadas.

Se eligieron 8 estudiantes, los cuales exhiben diversos niveles de avance en la construcción del concepto de número mediante el uso que le asignan al cuadrito vacío en las expresiones antes mencionadas. Se concluye, que algunos niños no llegan a identificar en dichas representaciones, a los sumandos (componente binaria de la adición

Alma Nora Arana Hernández
Departamento de Matemática Educativa
Centro de Investigación y Estudios Avanzados, IPN
México, D. F.

o suma) y por tanto a diferenciarlos del resultado o total. Son los cuadritos vacíos de la notación □ + □, los que ayudan a construir la idea de sumando.

A cierta construcción de sumando, le corresponde una Estrategia de Conteo. Y viceversa, cada Estrategia de Conteo, trae consigo una forma particular de percibir al sumando.

La percepción cada vez mas nítida de los sumandos, induce una evolución en las estrategias de conteo, así como del concepto de número.

En este estudio, a través de las diferentes notaciones, se identifican estrategias de transición entre Contar Todo y Seguir Contando.

Reseñas de Eventos

Reseña del XXI Congreso Internacional del Grupo Psicología para la Educación en Matemáticas

El asistir al congreso convocado por el International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) es una de las experiencias más afortunadas para todos aquellos que nos dedicamos a la investigación y/o enseñanza de las matemáticas. El PME es, sin duda alguna, el evento más importante en el ámbito internacional, para todos aquellos que están interesados en los procesos de la enseñanza de las matemáticas, prueba de ello es la diversidad de trabajos que se realizan y la afortunada reunión de los investigadores más connotados en esta área de investigación.

Este año el evento se desarrolló en la ciudad de Lahti, Finlandia y en una rápida revisión de las Memorias (Proccedings) de esta reunión encontrarán trabajos de: D. Tall, E. Dubinsky, S. Vinner, J. Kaput, N. Balacheff, C. Hoyles, R. Davis, P. Cobb, T. Rojano, E. Yackel, G. Goldin, P. Goldenberg, R. Noss, A. diSessa, R. Sutherland, A. Sfard, B. Schwarz, P. Boero, D. Reid, J. Mamona, y muchos más que por la brevedad de esta reseña me es imposible anotar.

La eficiencia con la que se desarrolló el programa muestra la experiencia de más de 20 años en desarrollar estos eventos en las diferentes latitudes de nuestro planeta. El congreso convocado desde el año anterior, con el tema: Educación Matemática, Tecnología y Cambio, inició sus trabajos el día 14 de julio, día dedicado al registro de participantes y ubicación de lugares de hospedaje, en esta ocasión se registraron más de 330 participantes de los siguientes paises: Australia, Austria, Brasil, Canadá, Colombia, Corea, Cyprus, Dinamarca, España, Estonia, Finlandia, Francia, Alemania, Grecia, Hong Kong, Inglaterra, Irán, Israel, Italia, Japón, Malasia, México, Holanda, Noruega, Nueva Zelanda, Portugal, Rusia, Sudáfrica, Suecia, Taiwan, USA. Este mismo día inician los trabajos con la asamblea de apertura y la primera sesión de lectura sugerida "Neuromagnetismo un acercamiento a la neurociencia cognitiva" a cargo de Sari Levänen.

Al día siguiente iniciaron los trabajos a las 8:30 a. m. con la primera de las 11 sesiones dedicadas a la presentación de los diversos trabajos de reportes de investigación. Cada sesión contenía 11 exposiciones simultáneas. Así en el congreso se presentaron

122 reportes de investigación en donde se expusieron diversos trabajos de los investigadores de los países arriba anotados y como muestra de ello anotamos: Una expresión de la idea de refinamiento sucesivo en ambientes de geometría dinámica, (O. Hazzan & P. Goldenberg -Israel); Usando la computadora para improvisar pensamiento conceptual en integración (H. Ye Yoon -Nueva Zelanda); Aprendizaje de teorías de distribución de la inteligencia (P. Cobb -USA); El significado de las pruebas (J. Galdino -España); Planeación del discurso matemático (A. Sfard -USA); Estudio de la aproximación constructiva en educación matemática (N. Tadao -Japón); Unidades cognitivas, conexiones y pruebas matemáticas (D. Tall y T. Banard -UK); Una nueva aproximación para sistemas tutoriales inteligentes: un ejemplo para actividades estadísticas (Bueno y Cuevas -México), etc., etc.

Se realizaron 5 conferencias plenarias entre las que podemos destacar a: "Caja de herramientas abierta: nuevos fines y nuevos medios en el aprendizaje de las matemáticas y ciencia con las computadoras", impartida por Andrea A. diSessa; "De la intuición a la inhibición -matemáticas, educación y otras especies en peligro" por Shlomo Vinner; etc.

Un panel plenario con el tema convocado y coordinado por K. Crawford con la participación de Janet Ainley con el tema: Roles para el profesor y para la computadora; Nicolás Balacheff exponiendo: "Algunas interrogantes de los ambientes de aprendizaje matemático" y James Kaput con: "Profundización del impacto de la tecnología más allá de la asistencia con formalismos tradicionales a fin de democratizar del acceso a la ideas que subyacen al cálculo".

También se constituyeron 3 foros de investigación que abordaron temas como: Pensamiento numérico elemental, con la participación de David Tall, Robert Davis y Dagmar Neuman; Investigación sobre el concepto de función con la participación de B. Schwarz, y Michal Yerushamy, etc.

Se formaron 9 grupos de trabajo para continuar el desarrollo de temas como: "Pensamiento matemático avanzado" coordinado por David A. Reid; "Geometría" coordinado por M. A. Mariotti & A. Mesquita; "Enseñanza y aprendizaje de la estadística" coordinado por Carmen Botanero y John Truran; " Estructura y procesos algebráicos" coordinado por Teresa Rojano y Luis Radford, etc.

Se integraron 5 grupos de discusión que abordaron temas como: "Teoría de números" coordinado por Stephen Campbell y Rina Zaskis; "Las tareas terminadas-abiertas y evaluando el pensamiento matemático" coordinado por Peter Sullivan; "Teoría simiótica", coordinado por Adam Vile y Luis Radford, etc.

Se tuvieron además 55 comunicaciones orales y 21 trabajos presentados en posters.

Cabe mencionar que de más de 170 propuestas de reportes de investigación sólo se aceptaron 122 y de 77 comunicaciones orales se aceptaron 57.

El viernes 18 por la tarde, se determinó que la próxima reunión del PME se llevará a cabo en Sudáfrica y se eligieron nuevos miembros del comité internacional. Con tristeza vimos que Tere Rojano vicepresidente de dicho comité y representante de México había terminado exitosamente su periodo.

El evento terminó el sábado 19 de julio dejando, para muchos de los que asistimos, un grato recuerdo de los investigadores que conocimos y algunos otros que tuvimos la oportunidad de saludar pero fundamentalmente un análisis de las ideas expuestas y un largo trabajo por hacer, y que para muchos de nosotros constituyen temas de investigación.

En lo personal agradezco la cortesía con la que me acogieron en Lahti y el don de su experiencia.

Carlos A. Cuevas
Departamento de Matemática Educativa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN

Reseñas de Eventos

Propuesta de artículo de difusión para "Educación 2001"

Seminario internacional sobre innovaciones educativas en Ciencias Naturales y Matemáticas

Los días 13 al 15 de octubre, en la ciudad de Cuernavaca, estado de Morelos, se realizó el *Seminario internacional sobre innovaciones educativas en Ciencias Naturales y Matemáticas*. Inicialmente la idea fue una propuesta de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE), a la cual México pertenece desde 1994.

Antecedentes

La OCDE inició en 1990 un proyecto de *Innovaciones educativas en Ciencias Naturales, Matemáticas y Tecnología* (SMTE -por sus siglas en inglés), que involucró a trece países con la realización de 23 estudios de caso alrededor de estas asignaturas, desde los niveles de educación básica hasta los de nivel superior. Cada país escogió su o sus estudios de caso; en algunos correspondieron a políticas educativas gubernamentales y en otros a iniciativas personales o de un pequeño grupo de investigadores o maestros. ¿Por qué una organización como la OCDE se interesó en la educación en estas asignaturas? Resulta que varios países al final de la década pasada ya habían detectado la importancia de mejorar la educación en éstas, como un factor clave para la prosperidad económica futura, además de que era muy evidente a nivel mundial la impopularidad de estas asignaturas entre los alumnos.

Cuando la OCDE sistematizó sus estudios de caso en el libro *Matemáticas, Ciencia y Tecnología. Innovaciones educativas*[1], destacaron las siguientes necesidades como los principales motivos de las reformas en la educación de estas asignaturas: mejorar la economía de los países, superar la insatisfacción en su estudio propiciando conexiones con el mundo y los intereses de los alumnos, contar con ciudadanos mejor preparados como parte de sus derechos e incluir la diversidad de los alumnos en la enseñanza

1 Editado por Paul Black y J. Myron Atkin, impreso en México por Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. y distribuido por la OCDE en México, durante el Seminario.

(el llamado derecho a la inclusividad en la educación, problema agudo en algunos países). Por otro lado, se identificaron tres grandes tendencias, mismas que países como México y Argentina han reconocido en sus propuestas curriculares. Estas tendencias son:

- Importancia de que los alumnos desarrollen **trabajo práctico** y actúen sobre los objetos de conocimiento para generar aprendizajes significativos.
- Explicitación de las **conexiones** que hay entre las ciencias y otros campos del conocimiento como objetivo fundamental del proceso de enseñanza.
- Reconocimiento, a través de los enfoques de enseñanza, de que tanto las ciencias naturales cuanto las matemáticas son **herramientas para conocer** y explicar el mundo que nos rodea.

A partir de que el libro antes referido apareció en su edición en inglés -*Changing the Subject. Innovations in Science, Mathematics and Technology Education*[2]-, en abril de 1996, la OCDE organizó ocho reuniones de diseminación en diferentes países de Europa, Estados Unidos de América, Japón, Australia y, finalmente, México. En particular en esta última se propuso involucrar a los países de América Latina. Con esta idea inicial se afinó dicho seminario entre la OCDE y la Secretaría de Educación Pública (SEP), quien introdujo el propósito explícito de profundizar en las acciones de la reforma educativa iniciada en México en 1993, a partir de la discusión de las experiencias de los países miembros de la OCDE que participaron en el proyecto SMTE, así como de las de los latinoamericanos.

Inauguración del Seminario

En el acto inaugural del seminario estuvieron presentes el Dr. Carlos Javier Martínez León, Secretario de Bienestar Social del Gobierno del estado de Morelos y el maestro Olac Fuentes Molinar, Subsecretario de Educación Básica y Normal de la SEP. A sus palabras de bienvenida y al discurso inicial respondió el Dr. Alejandro Tiana Ferrer, Presidente del Centro de Investigación e Innovación Educativa (CERI) de la OCDE durante 1996. Posteriormente el Dr. Edwyn James, consultor de la OCDE presentó los antecedentes del proyecto SMTE y el maestro Olac Fuentes Molinar dictó una conferencia sobre los retos centrales de la educación y en particular para la educación en ciencias, en México. Dos ponentes de la OCDE, Dr. Kurt Riquarts de Alemania y Dr. Edward Britton de los Estados Unidos de América, expusieron dos estudios de caso del proyecto SMTE, para completar un encuadre general.

Los temas analizados

Con este marco de referencia, que tuvo como antecedente un documento base que se repartió previamente a los asistentes, se discutieron tres grandes temas sobre las innovaciones educativas en ciencias naturales y matemáticas: "Aspectos curricula-

2 Publicado por Routledge -Londres y Nueva York- y la OCDE.

res", "Evaluación del aprendizaje" y "Formación inicial y actualización de maestros". Cada tema inició con una reunión plenaria en la que participaron ponentes de la OCDE, de América Latina y de México.

Myron Atkin (E.U.) y María Sáez (España) fueron los ponentes de la OCDE para la plenaria sobre "Aspectos Curriculares"; por parte de México y América Latina: Elisa Bonilla (México), Ana María Pessoa de Carvalho (Brasil) y Laura Fumagalli (Argentina).

Para la plenaria sobre "Evaluación del aprendizaje", por parte de la OCDE hablaron Paul Black (Inglaterra) y John Williamson (Australia). México y América Latina tuvieron a los siguientes ponentes: Sylvia Schmelkes, Hugo Balbuena (México) y Gilberto Alfaro (Costa Rica). Por último, para "Formación inicial y actualización de maestros" la OCDE presentó a John Olson (Canadá) y George Porter (Irlanda), México a Armando Sánchez, Argentina a Faustino Beltrán y Chile a Grecia Gálvez. Además de estas tres plenarias y sus respectivas sesiones de trabajo, se programó una exhibición de materiales educativos donde se expusieron los avances más significativos en estas áreas y dos ponencias magistrales, a cargo de la Dra. Teresa Rojano y del Dr. José Antonio Chamizo, sobre las innovaciones educativas en matemáticas y ciencias naturales en México.

Después de cada reunión plenaria, los asistentes se dividieron en sesiones de trabajo, para discutir, con base en las ponencias y en el documento base, en grupos pequeños. En estas sesiones, la participación fue muy nutrida y entusiasta, por lo que se considera que se cumplió el propósito planteado para el Seminario.

Algunas coincidencias que se reiteraron por parte de varios de los ponentes y en las sesiones de trabajo fueron:

- Mostrar a la ciencia y a las matemáticas como empresas humanas, excitantes, divertidas y con propósitos. Por lo mismo, la conexión entre diferentes disciplinas debe aproximarse más al trabajo actual de los científicos.
- Centrar la educación en los alumnos, lo que requiere modificar el paradigma actual de la enseñanza centrada en los profesores.
- Involucrar a los alumnos en la evaluación, lo que a su vez puede favorecer la responsabilidad por su propio aprendizaje.
- Inculcar en los maestros y en los alumnos procesos de aprendizaje para toda la vida y bien conectados con la sociedad.
- Favorecer el trabajo colaborativo entre los maestros desde la planeación inicial de sus clases hasta la reflexión de sus experiencias docentes cotidianas, como factores para desarrollar su profesionalización. Las reformas necesitan tiempo para que los maestros las hagan suyas y puedan incorporar las innovaciones educativas, además, como parte de su necesidad de formación permanente. Si en este trabajo colaborativo se involucran investigadores y especialistas, los resultados pueden mejorarse.
- Desarrollar en los maestros la competencia en su disciplina, situaciones de aprendizaje no tradicionales, habilidades pedagógicas y de evaluación

Aspectos organizativos

Con el objeto de preparar el programa y la invitación a los ponentes de América Latina se integró un comité científico con especialistas de México, de diferentes instituciones académicas con amplia trayectoria en desarrollo curricular, investigación educativa o formación de maestros. Por otro lado, con el apoyo de la Secretaría de Relaciones Exteriores se logró la asistencia de especialistas de los países de Centroamérica y de tres del Caribe.

La asistencia al Seminario fue de 230 especialistas de los siguientes países: Alemania, Argentina, Australia, Belize, Brasil, Canadá, Colombia, Costa Rica, Cuba, Chile, El Salvador, España, Estados Unidos de América, Francia, Guatemala, Honduras, Inglaterra, Irlanda, Jamaica, México, Nicaragua, Panamá, República Dominicana y Venezuela. Por parte de México participaron: equipos técnicos de las entidades federativas, del D.F. y de diferentes áreas de la SEP; autores de los libros de ciencias naturales y matemáticas, revisores, equipos técnicos externos y especialistas de otras instituciones educativas. Los trabajos de coordinación operativa, traducción, filmación y atención involucraron a 30 personas más de apoyo.

Productos en preparación

Durante el seminario se realizaron entrevistas con diferentes especialistas, con el objeto de elaborar programas para la red satelital de la Secretaría de Educación Pública -EDUSAT-, que reproduzcan algunos de los puntos centrales de las ponencias y de las discusiones. Por otro lado, existe el proyecto de elaborar un libro que desarrolle los temas centrales del Seminario, a partir de las sesiones plenarias y las de trabajo, pensado para el profesor en servicio.

Al finalizar el seminario se organizaron tres reuniones de expertos para analizar: los programas de formación inicial y de actualización de educación básica; el programa de actualización de educación media superior; y qué es lo básico de la educación en ciencias y matemáticas. En estas reuniones, los especialistas de México tuvieron la oportunidad de profundizar en los temas antes planteados, con los ponentes de la OCDE y algunos de América Latina.

Notas y Noticias

Congreso de Multimedia y Telecomunicaciones en Educación

La Asociación para el Avance de la Computación en la Educación (Association for the Advancement of Computing in Education AACE) organiza dos congresos mundiales que se llevarán a cabo en forma conjunta: el Congreso Mundial de Multimedia e Hipermedia Educativos y el Congreso Mundial en Telecomunicaciones Educativas. Ambos tendrán lugar del 20 al 25 de junio de 1998 en Friburgo, Alemania, teniendo como huésped la Albert-Ludwigs-Universitat Freiburg, de Alemania.

Estos congresos son foros interdisciplinarios para la discusión y diseminación de información sobre investigación, desarrollo y aplicaciones de los diferentes temas asociados con multimedia, hipermedia y educación a distancia. Los congresos cubren todas las disciplinas y todos los niveles educativos y atraen anualmente más de mil participantes de más de cincuenta países.

Los temas del próximo año incluyen:

- Para el congreso de media:
  Arquitecturas para sistemas tecnológicos educativos, Autoría, Desarrollos en países específicos, Evaluación de sistemas de multimedia e hipermedia, Interfase hombre-computadora (MCI), Mejora de la enseñanza en el aula, Ambientes de aprendizaje interactivo, Ambientes y medios inteligentes, Integración de la pedagogía, la didáctica y MCI, Herramientas de estructuración del conocimiento, Aprendizaje de idiomas, Aprendizaje a través de la acción, Los medios en la educación, Metodologías para el desarrollo de sistemas tecnológicos educativos, Multimedia e inteligencia artificial, Aplicaciones de los multimedia e hipermedia, Navegación, Software de red para bases grandes de datos, Aplicaciones, ideas y acercamientos novedosos, Asuntos pedagógicos, Simulaciones para el aprendizaje, Aplicaciones pequeñas, Software para investigación educativa, Ambientes específicos para áreas educacionales especiales, Realidad virtual.
- Los temas para el congreso de telecomunicación educativa incluyen:
  Inteligencia artificial y telecomunicaciones, Colaboración entre la escuela, la universidad y la industria, Comunicación mediada por

computadora, Trabajo colaborativo apoyado en la computadora, Estrategias de conectividad e implementación, Aprendizaje cooperativo y colaborativo, Diseño de sistemas para educación a distancia, Educación a distancia y teleaprendizaje, Evaluación, Fuentes de ingreso, costo y beneficio, Educación global, Modelos instruccionales en telecomunicaciones, Ambientes integrados de desarrollo, Multimedia y telecomunicaciones, Educación en línea y en red, Fundamentos pedagógicos, Asuntos de política, ética, estándares y legales, Areas rurales, en desarrollo y remotas en el mundo, Asuntos sociales y culturales, Estrategias de enseñanza y aprendizaje, Teleconferencias, Modelación del usuario/estudiante en la educación a distancia.

La Asociación para el Avance de la Computación en la Educación invita a proponer artículos, paneles, mesas redondas, tutoriales, talleres, demostraciones o carteles. Todas las propuestas serán revisadas para determinar su inclusión en el programa, en las memorias y en las memorias en CD-ROM. La fecha límite para la recepción de trabajos es el 23 de Octubre de 1997.

Para mayor información se puede conectar a la red en la dirección:

http:/www.aace.org/conf/edmedia

o enviar sus datos a:

ED-MEDIA 98/AACE
P.O. Box 2966
Charlottesville, VA 22902 USA
FAX 804-978-7449
Correo de voz: 804-973-3987
Correo electrónico: AACE@virgivia.edu

Congreso internacional sobre enseñanza de matemáticas

Con el objetivo de examinar nuevas formas de enseñanza de las matemáticas a nivel universitario se ha organizado el Congreso Internacional sobre la Enseñanza de Matemáticas en Samos, Grecia, del 3 al 6 de julio de 1998. Este congreso pretende dar oportunidades a profesores universitarios de todo el mundo que están involucrados en la introducción y el uso de formas innovadoras de enseñanza de discutir y compartir experiencias sobre la enseñanza de las matemáticas en la universidad.

Los temas del congreso son:

- Investigación educativa: Resultados de investigación en enseñanza de las matemáticas y en evaluación del aprendizaje de los estudiantes.
- Tecnología: Integración efectiva de la tecnología de todo tipo en el curriculum de enseñanza de las matemáticas en la universidad.
- Formatos innovadores de enseñanza
- Educación a distancia
- Cursos específicos: Reforma en cursos específicos y evaluación de los resultados

- Otras disciplinas: Efectos de los cambios en la enseñanza de las matemáticas en otras disciplinas, cuáles son las necesidades de las disciplinas atendidas por las matemáticas, cursos interdisciplinarios.

Entre los conferencistas invitados se encuentran:

- Andrew Gleason de la Universidad de Harvard, EU
- Colette Laborde de la Universidad Joseph Fourier de Francia
- Jan Persens de la Universidad de South Capa en Sudáfrica
- David Tall de la Universidad de Warwick en la Gran Bretaña
- Jerry Uhl de la Universidad de Illinois de EU
- Bert Waits de la Universidad Estatal de Ohio de EU
- Erich Ch. Wittmann de la Universidad de Dortmund en Alemania

Las secciones de presentación de trabajos consistirán de sesiones simultáneas de 20 minutos. Habrá también sesiones de carteles.

a) Identificación de la propuesta de trabajo o de cartel
b) Titulo de la propuesta
c) Nombre de los autores, así como direcciones postales y electrónicas de la persona con la que se desea se haga contacto
d) Un resumen de una y media páginas a doble espacio
e) Una identificación del tema de la conferencia bajo el cual puede incluirse el trabajo.

Deben enviarse TRES copias por correo a:

Profesor Williams Barker
Department of mathematics
Yale University
P.O. Box 208283
New Haven, CT 06520-8283
Teléfono: (203) 432-7316
Fax: (203) 432-7316
Correo electrónico: bbarker@math.yale.edu

La compañía John Wiley publicará las memorias y estarán disponibles durante la conferencia.

Las propuestas de trabajos deben enviarse antes del 27 de octubre de 1997. La notificación a los autores se hará el 24 de noviembre de 1997 y el envío del trabajo completo debe hacerse antes del 1 de febrero de 1998.

Los organizadores de la conferencia son:

- Ignatios Vakalis de la Universidad Capital,
- Deborah Hughes-Hallett de la Universidad de Harvard y
- Nikos Hadjisavvas de la Universidad del Egeo.

Los costos de registro a la conferencia son de $100.00 dólares sin memorias y $120.00 con memorias.

Para mayor información puede consultar la red en
http://icg.fas.harvard.edu/~samos98

Seminario nacional sobre calculadoras y microcomputadoras en educación matemática

La red universitaria y tecnológica del Sistema Nacional de Formación de Profesores de México, a través de la División de Ciencias Exactas y Naturales, del Departamento de Matemáticas y del Programa de Maestría en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora invita a la comunidad académica a participar en el

Seminario Nacional sobre Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática

Que se llevará a cabo en las instalaciones del Departamento de Matemáticas y del Programa de Maestría en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora los días 10, 11 y 12 de diciembre de 1997 conjuntamente con la semana regional de Investigación y Docencia en Matemáticas del 8 al 12 de diciembre de 1997.

El Seminario Nacional sobre Calculadoras y Microcomputadoras en el Aula e Investigación en Educación Matemática tiene como objetivo fundamental el difundir y promover la investigación en esta área del conocimiento. Las actividades académicas que se desarrollarán están dirigidas a mostrar aplicaciones de los resultados de investigación sobre el uso de las calculadoras y las microcomputadoras en el aula para enseñar un tema específico de matemáticas.

Se invita a participar en el seminario ya sea como ponente o como asistente. Para mayor información comunicarse, usando preferentemente los medios electrónicos a:

Seminario Nacional sobre Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática'97

Universidad de Sonora, Unidad Centro
Departamento de Matemáticas, Edificio 9-K
83000 Hermosillo, Sonora, México
Teléfono: (62) 59-21-55
Fax: (62) 13-41-29
Correo electrónico: semnal@gauss.mat.uson.mx

o bien a través de

Martha Cornejo
Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV
Dakota 379, Col. Nápoles
México D.F. 03810
Teléfono (5) 543-07-37 ó 70
Fax: (5) 543-07-13
Correo electrónico: mat_educ@mvax1.red.cinvestav.mx

También puede consultar la sección "eventos" de la página de Matemática Educativa en la red en:

http://dcen.uson.mx/mat_educ

Trabajos para un nuevo libro

El grupo de Pensamiento Matemático Avanzado que es parte del Grupo Internacional de Psicología y Enseñanza de las Matemáticas (PME) que es a su vez un subgrupo de la Comisión Internacional para la Instrucción en Educación Matemática (ICMI), ha centrado su actividad en todo tipo de pensamiento matemático, en particular en el desarrollo y en la extensión de las teorías de la psicología de la enseñanza de las matemáticas con la idea de cubrir no únicamente las matemáticas escolares sino también las matemáticas universitarias. Este interés incluye la recopilación de información sobre investigación reciente, discusión de los aspectos matemáticos y psicológicos del pensamiento matemático avanzado e investigación en el pensamiento en las áreas especificas de las matemáticas.

Un proyecto reciente de este grupo consiste en la escritura de un libro sobre la enseñanza de las matemáticas en la universidad. Este libro tendrá las siguientes características:

Accesibilidad: El lenguaje será tal que los profesores universitarios sin entrenamiento en psicología del aprendizaje podrán usar el libro. El precio no será muy alto.

Foco: El libro se organizará alrededor de temas comunes en los curricula universitarios. Tratará sobre temas que son centrales a muchos de los aspectos de la enseñanza de las matemáticas contemporáneas, tales como la demostración, el uso de tecnologías y la comunicación de la naturaleza y el estilo de las matemáticas.

Colaboración: entre los autores se incluirán matemáticos pertenecientes al grupo AMT y al PME pero también autores que no pertenecen a estos grupos.

Aplicabilidad: Los artículos serán directamente aplicables a la enseñanza, sin sobres implificación de los temas y asuntos involucrados.

Las personas que quieran colaborar en la escritura de este libro pueden enviar, antes del 1 de noviembre una notificación de su intención de contribuir junto con sus resúmenes de artículos a David Reid quien es el coordinador del libro. Estos resúmenes serán enviados a miembros de la comunidad para revisión y comentarios. El 15 de diciembre, con base en el material recibido y en los comentarios sobre el mismo, se anunciará la estructura del libro. Para el 30 de junio de 1998 se mandan los artículos al coordinador de libro y se discutirán en el congreso PME 22. Si está interesado en participar por favor envíe una notificación de intención y un resumen a:

Dr. David Reid
Faculty of Education

Memorial University
St John's NF
A1B 3X8 Canadá
Fax: 1-709-737-2345
Correo electrónico: dareid@morgan.ucs.mun.ca

Si tiene alguna pregunta o desea más información, favor de dirigirse a la misma persona.

Conferencia de la red

Del 1 al 5 de Noviembre de 1997, en el Royal York Hotel de Toronto, Canadá, se llevará a cabo la conferencia mundial de la WWW, Internet e Intranet. Si desea conocer el programa y si desea registrarse puede hacerlo a través de:

http:/www.aace.org/conf/webnet

En esta conferencia habrá seminarios corporativos y de desarrollo tales como:

- IBM: Educación y tecnología en el siglo XXI
- Microsoft: Seminario del Desarrollador de Active X
- Silicon Graphics: El efecto de la red: Aprendizaje a distancia vía la red
- Hyperware: Manejo de sitios grandes de Internet e Intranet: El acercamiento de Hyperware

Esta conferencia es organizada por la Asociación para el Avance de la Computación en la Educación (AACE) en colaboración con la industria WWW/Internet.

Además de los seminarios habrá conferencias invitadas, paneles, tutoriales, talleres, presentación de trabajos, grupos de discusión, exposiciones de equipo y un programa social.

Además de toda la actividad de la conferencia, Webnet97 anuncia que se establecerá una Librería Webnet que venderá libros de los conferencistas invitados así como una gran selección de libros recientemente publicados en relación a los temas de la conferencia.

Si desea mayor información puede obtenerla en la dirección antes mencionada de la red o poniéndose en contacto con:

Garret Paulin
Correo electrónico: gerret@aace.org
Teléfono: 804-973-3987
Fax: 804-978-7449

Nueva revista

El Journal of Interactive Learning Research recibe artículos relacionados con la teoría subyacente, el diseño, la implementación, la efectividad y el impacto de ambientes interactivos para el aprendizaje y en el entrenamiento. Esta es una revista con arbitraje serio que publica cuatro veces al año la Asociación para el Avance de la Computación en la Educación (AACE) que es una organización profesional.

Los tipos de ambientes que pueden presentarse como reportes de investigación en esta revista incluyen: sistemas de autoría, herramientas cognitivas para el aprendizaje, aprendizaje de idiomas asistido por computadora, sistemas de evaluación por computadora, entrenamiento por computadora, comunicaciones mediadas por computadora, aprendizaje colaborativo apoyado en computadora, ambientes de aprendizaje distribuidos, sistemas de soporte electrónico, ambientes interactivos de aprendizaje, sistemas multimedia interactivos, juegos y simulaciones interactivas, agentes inteligentes en Internet, sistemas de tutoría inteligente, micromundos, sistemas de aprendizaje basados en realidad virtual, descripciones de ambientes de aprendizaje, estudios teóricos, estudios experimentales, revisiones de literatura, estudios metodológicos y puntos de vista.

En términos de estructura los artículos deben identificar un problema de aprendizaje, aclarar los tipos de oportunidades de aprendizaje que un ambiente o sistema dado puede proporcionar, describir su implementación y, si es apropiado dar alguna evidencia de su efectividad e impacto.

La revista pretende publicar varios números especiales para esta al día y para presentar posiciones controvertidas y críticas responsables. A través de una sección de "Interpretaciones Alternativas" y de la página en la red del JILR, se espera animar un diálogo interactivo que influya el campo como un todo. Todo tipo de participación es bienvenida.

Si desea ver la guía para el autor puede referirse a la red en:

http:/www.aace.org/pubs/jilr

Otros congresos

El V Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Estadística tendrá lugar del 21 al 26 de junio de 1998 en Singapur. El tema del congreso será: Educación en estadística-Expandiendo la red. Mayor información en

http:/www.nie.ac.sg:8000/~wwwmath/icots.html

La reunión del PME 22 se llevará a cabo del 12 al 17 de julio de 1998 en la Universidad de Stellenbosch en la ciudad de Stellenbosch en Sudáfrica que se encuentra a 50 km. de Ciudad del Cabo. el contacto para información acerca de este congreso es:

Alwyn Olivier
Teléfono: +27 21 808 2299
Fax: +27 21 808 2498
Correo electrónico: aio@akad.sun.ac.za
Red: http://www.sun.ac.za/local/education/pme22

El Congreso Internacional de Psicología Aplicada tendrá lugar en la ciudad de San Francisco, Estados Unidos, del 9 al 14 de Agosto de 1998. Para mayor información se puede contactar a:

Congress Secretariat, APA Office of International Affairs
750 First Street NE
Washington, DC 20002-4242, USA
Fax: 1 202 336 5956
Correo electrónico: icap@apa.org
Red: http://www.unifr.ch/psycho/pme/forthconf.html

Publicaciones

El Proyecto Nacional Francés anuncia la aparición de los libros:

L'enseignement de l'algebre lineaire en question. Panorama de la Recherche en Didactique sur ce theme. Por J.L. Dorier (ed). Costo 250 Francos Franceses.

Regardes croissés sur la Didactique. C. Blanchard Laville, Y. Chevalard, M.L. Schubauer Leoni (eds). Costo 170 FF.

L'implication statistique. R. Gras (ed) Costo 170 FF

Se puede ordenar en
Editions Le Pensée Sauvage
BZP 141
38002 Grenoble Cedex
France
Correo electrónico: penseesauvage@dial.oleane.com
Correo electrónico: nicolas.balacheff@imag.fr

Notas y Noticias

III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática
III CIBEM

Caracas, Venezuela
Julio 1998

Programa científico

Incluye conferencias central por ponentes invitados, conferencias paralelas, paneles de expertos, comunicaciones breves, grupos de trabajo y posters.

Se hará énfasis en las áreas siguientes:

Rescate de la educación pública y de otros espacios públicos para una educación matemática de calidad para todos.

- Los aspectos políticos de la educación matemática como disciplina y como actividad que se realiza en la escuela.
- Avances en el desarrollo de una educación matemática que responda a los asuntos críticos de la enseñanza, el aprednizaje y la evaluación de las matemáticas en Iberoamérica.
- Análisis de las reformas educativas en la región y su impacto sobre la enseñanza de las matemáticas en la escuela.
- La formación de docentes a todos los niveles como un aspecto crucial para el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas en la región.

Información adicional

Los resumenes de los trabajos deben ser enviados al Comité Técnico antes del 30 de Enero de 1998. Todos los trabajos serán sometidos a un proceso de arbitraje. Las res-

Conferencias Paralelas (CP)

Las conferencias paralelas tendrán una duración de cuarenta y cinco minutos, seguida de un derecho de palabra de quince minutos. Se desarrollarán tres (3) sesiones de conferencias paralelas. Los ponentes serán escogidos por invitación.

Paneles de Expertos (PE)

Se realizarán cuatro (4) paneles de expertos durante los días ordinarios del congreso. Tendrán una duración total de dos (2) horas y se efectuarán en dos días consecutivos a razón de una (1) hora por día. Estarán formados por cuatro ponentes y un moderador. Cada experto expondrá durante quince minutos. Seguido de una hora de discusión entre los expertos. Entre los temas a ser tratados están los siguientes: reforma curricular, uso de tecnologías, evaluación y, problemas culturales y sociales.

Comunicaciones Breves (CB)

Habrá tres (3) sesiones dedicadas a comunicaciones breves. Las comunicaciones breves tendrán una duración de veinte minutos seguidas de diez minutos de preguntas. Los temas serán libres y de escogencia del proponente. Las comunicaciones breves estarán sujetas a un proceso de arbitraje. Se consideraran trabajos de investigación (cuantitativa o cualitativa), propuestas metodológicas, reflexiones teóricas y didácticas, propuestas curriculares, elaboración de materiales instruccionales y de evaluación. Para el caso de los trabajos de investigación, el resumen debe incluir: título, tema o problema, metodología, resultados y conclusiones. El comité técnico organizará las comunicaciones aceptadas por grupos temáticos.

Grupos de Trabajo (GT)

Los grupos de trabajo se reunirán durante cuatro (4) sesiones de dos horas cada una. Los temas a tratar se muestran en la lista tentativa anexa. Cada grupo de trabajo estará integrado por : un coordinador, un organizador local, un grupo de ponentes y por participantes del congreso los cuales hayan manifestado previamente su deseo de pertenecer al grupo. Los grupos de trabajo son propuestos por un investigador o grupo de investigación interesado en un tema particular y el proponente fungirá de coordinador. Dicho coordinador será el encargado de seleccionar los ponentes y servirá de contacto con el comité científico de programa. El resumen de la propuesta de grupo de trabajo debe incluir: nombre del coordinador (persona o grupo), la afiliación, tema del grupo, descripción y lista de ponentes (tentativa). Las propuestas de grupo de trabajo serán sometidas a la consideración del comité científico. Las sesiones estarán abiertas a la participación de todos los asistentes inscritos en el grupo. Se sugiere que el coordinador prepare unas memorias del grupo de su grupo trabajo que incluya las conclusiones de las discusiones realizadas. Todos los participantes (aunque no hagan presentaciones) están invitados a entregar trabajos al coordinador a ser considerados para su publicación en las memorias del grupo. (Más adelante se presenta una lista tentativa de grupos de trabajo).

Carteles (C)

Habrán tres (3) sesiones de carteles. Los carteles permiten la interacción entre el presentador y el participante. El presentador proveerá información detallada sobre el trabajo presentado. La propuesta del cartel deberá incluir el tema o problema presentado, el método usado, los resultados y las conclusiones. Debe también incluir el título, el nombre de el(los) autor(es) y la identificación institucional. El espacio para los carteles será de 1,5 m por 1 m. Sería deseable que el presentador tuviese a mano un cierto número de copias del resumen para ser entregadas a los participantes.

NOTA: Todo resumen de propuesta enviado al comité debe incluir:

- Título
- Nombre completo de el(los) presentador(es)
- Institución a la que pertenece el(los) proponente(s)
- Dirección postal completa, número de teléfono y fax, dirección electrónica.
- Resumen (tema o problema, muestra, metodología, resultados y conclusiones)
- Idioma en el cual hará la presentación
- Toda propuesta deberá venir en disquete escrito en WORD 6.0 o WORDPERFECT 6.0 y tres copias en papel, conteniendo un máximo de 200 palabras.

Lista Tentativa de Grupos de Trabajo

A continuación *se proporciona una lista tentativa de posibles Grupos de Trabajo.* **Se le dará mayor importancia a las actividades relacionadas con *los grupos de trabajo*.**

GT1: Cambios Curriculares en la Enseñanza Primaria
GT2: Cambios Curriculares en la Enseñanza Secundaria
GT3: Enseñanza Multicultural Bilingüe
GT4: Las Matemáticas en la Formación de Adultos
GT5: La Educación Matemática como Campo Profesional de Producción del Saber
GT6: La Tecnología y la Enseñanza de las Matemáticas
GT7: La Formación del Profesorado
GT8: La Evaluación de la Enseñanza
GT9: La Comunicación en el Aula
GT10: Resolución de Problemas
GT11: Psicología y Educación Matemática
GT12: Etnomatemáticas
GT13: La Enseñanza de las Matemáticas a Nivel Universitario
GT14: Actividades Extracurriculares en Matemática
GT15: Elaboración de Materiales Instruccionales

Fechas Importantes

Recepción de:	Hasta la fecha de:
Resúmenes de propuestas (comunicaciones breves y grupos de trabajo)	31 de enero de 1998
Comunicaciones breves in extenso (máximo 5 páginas)	30 de abril de 1998
Propuesta completa de los grupos de trabajo	31 de mayo de 1998
Solicitudes de reuniones de asociaciones profesionales y científicas	31 de mayo de 1998
Solicitudes de participación en la exposición comercial (editoriales, asociaciones, empresas de informática)	30 de abril de 1998

Arbitros en el periodo agosto/1996 - agosto/1997

La calidad de la revista *Educación Matemática* descansa en la valiosa participación de especialistas que amablemente acceden a realizar la labor de revisión de los trabajos que nos son enviados. En este número queremos hacer un reconocimiento público a los colegas que colaboraron como árbitros de los manuscritos recibidos entre agosto de 1996 y agosto de 1997. A todos ellos nuestro agradecimiento.

1. **Jesús Alarcón**
   Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
2. **Javier Alfaro, I.**
   Tecnológico Autónomo de México
3. **Alberto Alonso**
   U. Nacional Autónoma de México
4. **Mercedes Álvarez**
   Colegio God Win, México
5. **Carmen Azorín**
   Esc. Normal Superior de México
6. **Hugo Balbuena**
   Secretaría Educación Pública, México
7. **Ángel Balderas Puga**
   U. Autónoma de Querétaro
8. **Higinio Barrón**
   Secretaría de Educación Pública, México
9. **Arturo Bazán**
   U. Pedagógica Nacional, México
10. **Luis Briseño**
    U. Nacional Autónoma de México
11. **Patricia Camarena Y.**
    Politécnico Nacional, México
12. **José Campero**
    I. Tecnológico Autónomo de México
13. **Miguel Ángel Campos**
    Instituto de Investigación en Matemática Aplicada, México
14. **Ruth Carbajal**
    U. de Santiago de Chile
15. **Alicia Carvajal Juárez**
    Universidad Pedagógica Nacional, México
16. **Asela Carlón Monroy**
    U. Nacional Autónoma de México
17. **David Carraher**
    Technological Education Research Center, Cambridge, Mass.
18. **José Luis Córdova**
    U. Autónoma Metropolitana, México

19. **Francisco Cordero**
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
20. **Rosario Leticia Cortés Ríos**
Secretaría de Educación Pública, U. Nacional Autónoma de México
21. **José Luis Cortina**
U. Pedagógica Nacional, Centro Estudios Educativos, México
22. **Sergio Cruz Contreras**
U. Nacional Autónoma de México
23. **Antonio Chalini Herrera**
Universidad Pedagógica Nacional
24. **Iñaqui de Olaizola**
U. Autónoma Metropolitana / U. Nacional Autónoma de México
25. **J. del Río**
I. Tecnológico Autónomo de México
26. **Alejandro Díaz Barriga Casales**
U. Nacional Autónoma de México
27. **José Ángel Dorta**
U. de la Laguna, Canarias
28. **Rafael Durán**
Centro de Actualización del Magisterio, México
29. **Fortino Escareño**
Colegio de Profesores "Moisés Sáenz", México
30. **Hugo Espinosa**
Secretaría de Educación Pública, México.
31. **Olimpia Figueras**
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
32. **Eugenio Filloy**
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
33. **Darío Fiorentini**
Universidade Estadual de Campinas, Brasil
34. **Wolfgang Fritzler**
U. Nacional Autónoma de México
35. **Irma Fuenlabrada**
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
36. **Claudio Fuentealba**
U. de Santiago de Chile
37. **Grecia Gálvez**
Ministerio de Educación, Chile
38. **José María García**
Universidad Iberoamericana, México
39. **Marco Antonio García Juárez**
Centro de Actualización Magisterial del Edo. de México
40. **Sara Gaspar**
U. Nacional Autónoma de México
41. **Fredy González**
CIDIPMAR, Venezuela
42. **Marcela González,**
U. Nacional Autónoma de México

43. **Guillermo Grabinsky**
I. Tecnológico Autónomo de México
44. **Fiorella Hernández**
Colegio God Win, México
45. **Rubén Hernández**
I. Tecnológico Autónomo de México
46. **Abel Herrera Camacho**
U. Nacional Autónoma de México
47. **Fernando Hitt**
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
48. **Verónica Hoyos**
Universidad Pedagógica Nacional
49. **Carlos Imaz**
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
50. **José Ramón Jiménez Rodríguez**
U. Autónoma de Sonora, México
51. **Ema Lam Osnaya**
U. Nacional Autónoma de México.
52. **Gonzalo López Rueda**
Esc. Normal Superior de México, México
53. **Alejandro Márquez**
Universidad Iberoamericana, México
54. **Armando Martínez Cruz**
Northern Arizona University
55. **Jorge Martínez**
U. Autónoma de Querétaro
56. **Patricia Martínez**
U. Nacional Autónoma de México
57. **Pilar Martínez**
U. Nacional Autónoma de México
58. **Luz Ma. Marván**
Secretaría de Educación Pública, México
59. **Manuel Meda**
U. Autónoma Metropolitana, México
60. **Luciano Meira**
U. de Pernanbuco, Brasil
61. **Ignacio Méndez**
IIMAS-U. Nacional Autónoma de México
62. **Rodolfo Méndez Balderas**
Benemérita Escuela Nacional de Maestros
63. **Simón Mochón**
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
64. **Luis Moreno Armella**
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
65. **Víctor Neumann**
U. Nacional Autónoma de México
66. **Ana Ma. Ojeda**
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

67. **Guillermo Pastor**
I. Tecnológico Autónomo de México
68. **Esnel Pérez Hernández**
Esc. Normal Superior de México
69. **Luis Pichel Teijeiro**
Esc. Normal Superior de México, México
70. **Gustavo Preciado**
I. Tecnológico Autónomo de México
71. **Ricardo Quintero**
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
72. **Margarita Quiroz**
I. Politécnico Nacional, México
73. **Araceli Reyes**
I. Tecnológico Autónomo de México
74. **Juan José Rivaud**
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
75. **Santa Soledad Rodríguez de Ita**
U. Pedagógica Nacional, México
76. **Pedro Gerardo Rodríguez**
Centro de Estudios Educativos, México
77. **Rafael Ramos**
I. Tecnológico Autónomo de México
78. **Araceli Reyes**
I. Tecnológico Autónomo de México
79. **Luis Rico**
U. de Valencia
80. **Carlos Rondero**
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados,
I. Tecnológico Autónomo de México
81. **Guillermo Rubio**
Colegio de Ciencias y Humanidades, México
82. **Santiago Rubio Ramírez**
Centro de Actualización Magisterial del Edo. de México
83. **Concepción Ruiz**
U. Nacional Autónoma de México
84. **Ramón Salat**
Instituto Politécnico Nacional, México
85. **Marcela Santillán**
U. Pedagógica Nacional, México
86. **Manuel Santos**
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México
87. **Rüdiger Schäfer**
U. de Bremen, Alemania
88. **Candace Schau**
U. of New México
89. **Patrick Scott**
New México Southern University

90. Patricia Souza
I. Tecnológico Autónomo de México

91. Rosamund Sutherland
School of Education, U. Bristol

92. Martha Ma. Téllez
IIMAS-U. Nacional Autónoma de México

93. Pilar Téllez
U. Nacional Autónoma de México

94. Sonia Ursini
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

95. Marta Valdemoros
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

96. Enrique Vega Ramírez
U. Pedagógica Nacional, México

97. Enrique Vega Villanueva
U. Autónoma del Edo. de Morelos

98. Teresa Velázquez
U. Nacional Autónoma de México

99. Julieta Verdugo
U. Nacional Autónoma de México

100. Rodrigo Villaseñor Morales
SEMARNAP, México.

101. Eduardo Weiss
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

102. Eduardo Zárate
U. Pedagógica Nacional, México

103. Margarita Zorrilla
I. de Educación de Aguascalientes

104. Juan Fidel Zorrilla Alcalá
U. Nacional Autónoma de México

Directorio de Autores

Marta Elena Valdemoros
Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV
Nicolás San Juan 1421, Col. Del Valle, 3100 México, D. F., México

Josefina Ontiveros
Departamento de Matemáticas, Centro de Investigación en Ciencia Físico Matemática, Universidad Autónoma de Querétaro
Facultad de Ingeniería, Centro Universitario, CP. 76017 Queretaro, México

Ma. Antonia Casanova
Ministerio de Educación y Cultura, Subdirección General de Educación Especial y de Atención a la Diversidad
Los Madrazos, 17, 3ª. Madrid, 28014, España

Héctor Federico Godínez Cabrera
Instituto Tecnológico de León
Av. Tecnológico s/n CP. 37000, León, Gto. México

Pablo Flores Martínez
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada
Campus Universitario de Cartuja, 18071, Granada, España

Simón Mochón
Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV
Nicolás San Juan 1421, Col. Del Valle, 3100 México, D. F., México

Guillermo Pastor
Instituto Tecnológico Autónomo de México
Río Hondo No. 1. San Ángel, 01000 México, D.F. México

Carlos Sánchez Fernández y Concepción Valdés Castro
Universidad de la Habana, Facultad de Matemática y Computación
Colina Universitaria, San Lázaro y L. Municipio Plaza. CP.10400 Ciudad de la Habana, Cuba

Alma Nora Arana Hernández
Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV
Nicolás San Juan 1421, Col. Del Valle, 3100 México, D. F., México

Política Editorial

La *Revista Educación Matemática* es una publicación cuatrimestral dedicada a difundir estudios sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los distintos niveles escolares y dentro de un espectro amplio de corrientes, acercamientos, metodologías y escuelas de pensamiento. Considera para su publicación materiales originales, escritos en español, que den cuenta de resultados de investigación, experiencias y ensayos documentados sobre la educación matemática realizados, preferentemente, en los países o comunidades hispanohablantes. Más específicamente, la *Revista Educación Matemática* está interesada en publicar **Artículos** cuyo contenido sea:

- Reportes de investigación
- Análisis de experiencias didácticas
- Aplicación didáctica de los resultados de la investigación
- Metodologías de investigación
- Metodologías de la enseñanza de las matemáticas
- Estudios fundamentados sobre el uso de medios computacionales y otras tecnologías para la enseñanza de las matemáticas
- Análisis crítico de materiales y recursos didácticos
- Estudios fundamentados sobre nuevas presentaciones o acercamientos de enseñanza a temas específicos

Son también bienvenidos los artículos de matemáticas, física, historia, filosofía, epistemología, lingüística, psicología y otras disciplinas afines, siempre y cuando su contenido se relacione de manera significativa y explícita con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ofreciendo a los lectores nuevas perspectivas de apreciación de las problemáticas de este campo.

La *Revista Educación Matemática* recibe también contribuciones en las siguientes secciones fijas:

- **Problemas y soluciones**
  Problemas interesantes dirigidos a profesores o alumnos de matemáticas, así como soluciones ingeniosas y comentarios a problemas aparecidos en la Revista o en otras publicaciones.

- **Notas de clase**
  Propuestas originales de presentación de un tema, acercamientos novedosos que hayan sido probados en clase, lecciones, prácticas, ejercicios y, en general, cualquier producto de la experiencia que el profesor considere valioso compartir con sus colegas, siempre y cuando tengan el soporte bibliográfico correspondiente.

- **Reseñas**
  De libros y otras publicaciones
  a) Ensayos bibliográficos sobre materiales de interés para la comunidad de educadores de las matemáticas.

b) Descripciones breves y analíticas de libros y materiales relacionados con la matemática y su enseñanza.
c) Notas sobre novedades editoriales.

De trabajos de investigación
Descripción breve de investigaciones concluidas, resúmenes de tesis de posgrado, proyectos en marcha o con resultados parciales.

De eventos
Notas sobre eventos académicos de interés para la comunidad, realizados en cualquier parte del mundo.

- **Notas y noticias**
  Programas de actividades futuras y otras notas de interés para la comunidad.

- **Foro del lector**
  Cartas dirigidas al Comité Editorial que sean de interés para la comunidad, comentarios a artículos publicados, sugerencias y críticas de los lectores.

Para algunos temas especiales que requieran mayor espacio, el Comité Editorial considerará la publicación de números monográficos.

En casos excepcionales, el Comité Editorial considerará para su publicación la traducción al español de artículos originales cuya calidad así lo amerite.

Guía para el autor

Los artículos enviados a la *Revista Educación Matemática* deben ser trabajos originales que no hayan sido publicados anteriormente.

Los manuscritos deberán ser enviados en original y tres copias, con un resumen de diez líneas y las notas y referencias correspondientes, mecanografiados a doble espacio, por un solo lado de la hoja y con márgenes amplios. El nombre, institución y domicilio completo del autor (incluyendo código postal, teléfono, fax y dirección electrónica) deberán aparecer claramente escritos *sólo en el original*. Las copias deben contener el título del trabajo pero ninguna referencia al autor, para facilitar el proceso de revisión anónima. Las páginas del manuscrito deben estar numeradas de manera consecutiva; se sugiere, en la medida de lo posible, evitar las notas a pie de página y sustituirlas por notas al final del artículo. *Por favor, no envíe disquete en esta etapa.*

Cuando el artículo haya sido aceptado para su publicación, el autor deberá enviar la versión definitiva completa (incluyendo un resumen en español y, de ser posible, en inglés o francés de un máximo de diez líneas), *en impresión y disquete*; en caso de discrepancia entre la impresión y el disquete, se tomará como base la versión impresa. Es responsabilidad del autor el contenido y la mecanografía del artículo.

Sólo será posible procesar manuscritos capturados en computadoras IBM-compatibles, con sistema MS-DOS (versión 3.2 o más), y procesadores Word para DOS, Word para Windows o Word Perfect. Las figuras, gráficas e ilustraciones que así lo ameriten, deberán enviarse en hojas separadas; trazadas con tinta negra.

El autor recibirá gratuitamente cinco ejemplares del número de la revista que contenga su artículo. Cualquier publicación posterior del material requerirá la autorización por escrito de *Grupo Editorial Iberoamérica*.

Guía para los árbitros

Todos los manuscritos se someten a un proceso de revisión por pares, anónimo en las dos direcciones: el árbitro no recibe el nombre del autor y el autor no conoce los nombres de los revisores. Cada artículo es enviado a tres revisores cuya especialidad y trayectoria profesional garantice la calidad de los trabajos aceptados. Los comentarios y observaciones de los revisores se transcriben y envían al autor a fin de que éste los tome en cuenta para nuevas versiones. Se espera de los árbitros una revisión detallada y constructiva que ayude al autor a mejorar su manuscrito.

Para la revisión, los árbitros deberán tomar en cuenta los siguientes criterios generales:

- Que el tema sea de interés para investigadores en educación matemática y para profesores de matemáticas
- Que el contenido sea original
- Que el argumento matemático no tenga errores
- Que las tesis estén adecuadamente fundamentadas y documentadas
- Que las ideas estén correctamente organizadas
- Que las metodologías de investigación estén claramente descritas
- Que las referencias bibliográficas sean actuales
- Que la redacción sea clara
- Que no haya aparecido en otras revistas

Las evaluaciones de los revisores tienen las siguientes opciones:

- Aceptar
- Alentar revisión y nueva presentación
- Sugerir revisión a fondo
- Rechazar

Primavera 1996 Volumen 1 Número 1

TEXAS INSTRUMENTS

México TI-Cares(TM)

Notas, Preguntas, y Respuestas...

Estimados Educadores:

Bienvenidos a *SU* primera edición de México TI-Cares(TM).

TI-Cares contiene información acerca de los servicios de apoyo que Texas Instruments de México les provee. Incluyen Calculadoras Prestadas, similar a WOLOP, Workshop Loan Program, muy popular en EEUU y Europa. Esto les permite acceso a Calculadoras TI para su entrenamiento técnico y pedagógico, y en apoyo al proceso de adopción escolar de las calculadoras Texas Instruments.

Otros servicios incluyen materiales gratis para apoyar el uso en su aula, para cada modelo de calculadora Texas Instruments: Transparencias, Posters, Literatura, etc...

En Texas Instruments todos nosotros les escuchamos y les oímos, déjenos saber qué necesitan y con gusto les serviremos.:.

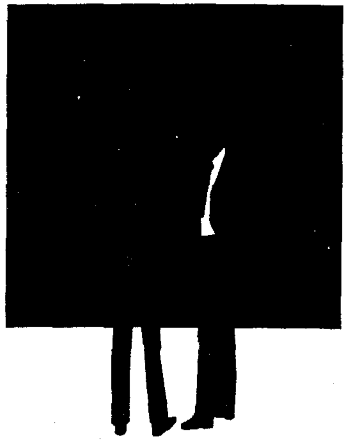
Por esta columna miembros de nuestro equipo en México, EEUU, y otros países les contestaremos sus preguntas.

Disfruten de estos informes y llamen, escriban, y visiten nuestras exposiciones en las conferencias de matemáticas y ciencias. ¡Estamos a su disposición !

Atentamente,

Ing. Julio [illegible]

Director Mercadotecnia,
Asia y América Latina



"Una** TI **en manos de cada alumno"

Calculadoras Texas Instruments México disfruta de agudo interés académico en tecnología práctica y probada en aulas de matemáticas, ciencias, e ingeniería.

Muchos profesores mexicanos han iniciado el uso de calculadoras Texas Instruments en sus aulas de secundarias y superiores y nos reportan gran éxito y entusiasmo. También nos piden apoyo local aquí en México para entrenamiento, materiales pedagógicos, y difusión de información a todos los niveles educativos.

Son ustedes quien nos dicen "deseamos una TI en manos de cada alumno aquí en México"

Bien. ¡Trabajando juntos lo lograremos! Julio

CONTACTO RAPIDO Y FACIL- ASI:

En Ciudad México (525) +

TEL 639-9740, 639-9732

FAX 639-9226

correo electrónico mundialmente:

ti-cares@ti.com

Visite Texas Instruments W.W.W:

http://www.ti.com

+ vea productos en detalle
+ esta y otras "TI-Cares"
+ descubra otros recursos

Si desea escríbanos a nuestras oficinas en Ciudad México:

Av. Xola 613 Módulo 1-2
Colonia Del Valle
México D.F. 03100

Contenido:

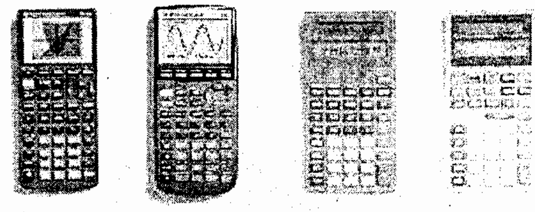
Productos y Noticias

"Una calculadora gráfica económica y propia para alumnos de aritmética y álgebra". Ese pedido a Texas Instruments por maestros de matemática que usan los modelos **TI-81** y **TI-82** en varios países inició el desarrollo y producción del nuevo modelo **TI-80**. Hoy a la venta en México y mundialmente.

TI-80 combina características superiores del modelo **TI-82** con la capacidad principal del modelo **Math Explorer** para fracciones. Fabricada para uso diario en aula como herramienta pedagógica, al igual que sus progenitores; el modelo **TI-80** es robusto y muy duradero, además es el modelo más económico en las calculadoras gráficas TI de herramientas pedagógicas.

La nueva TI-83 continua las tradiciones establecidas por la popular **TI-82**. En el aula los dos modelos trabajan juntos sin discrepancias o dificultad, cumpliendo los deseos de maestros y profesores usando la **TI-82**. La **TI-83** brinda mejores estadísticas, análisis de datos, siete estilos de gráficos para mayor diferenciación visual, y también funciones para finanzas y negocios. Utilidad pedida por pedagogos deseando aplicar la Tecnología Gráfica Texas Instruments en sus aulas de Matemáticas Aplicadas, Ciencias Sociales, Negocios, Finanzas, y muchos otros cursos.

Una tradición sólida continua avanzando. Facilidad de Uso, Funciones Requeridas, y Alta Calidad... TI-83 llega a México en Junio 1996!, pregúntele a su distribuidor.



"La venerable calculadora científica **TI-30X** sigue progresando y para 1996 establece nuevo alto nivel de Calidad, Funcionamiento y Valor.

Nuevos modelos **TI-30Xa**, **TI-30XaSolar**, y **TI-30XaSE** sirven a los alumnos en aulas, profesionales en sus trabajos, y pedagogos dando clases. Una calculadora práctica y duradera con todas las funciones requeridas en sus trabajos. La calculadora de bolsillo científica **TI** más popular mundialmente.

Esta nueva serie **TI-30Xa** da a profesores y maestros una calculadora que sus alumnos pueden comprar a bajo costo y utilizar por largo tiempo. Pronto a la venta en México.

TI EXPLORER PLUS(TM) como su nombre lo explica aumenta el funcionamiento del popular TI EXPLORER(TM). Es un modelo para doble servicio: una herramienta pedagógica de aula y también a la venta al público en México. Las escuelas ahora pueden utilizarlas en aulas y sugerirles a sus estudiantes y padres que las compren para uso individual y escolar. Varios profesores reportan que esa cooperación permite agregarlas en la escuela. Así se facilita el estudio y trabajo del alumno durante sus tareas y en sus aulas. Las dos el TI EXPLORER(TM), y el TI EXPLORER PLUS(TM) están a la venta en México.

Texas Instruments ofrece servicio completo y gratis de préstamo de calculadoras para entrenamiento técnico y pedagógico a los maestros y profesores de aula. *Préstamo Académico de Calculadoras TI... PAC-TI*.

Prioridad #1 es préstamos a Cursos y Talleres de Entrenamiento a MAESTROS y PROFESORES.

Otros préstamos en apoyo a la evaluación y adopción para aulas de las calculadoras Texas Instruments son posibles. Cada caso se considera individualmente y después de cumplir con la prioridad #1.

Todos los préstamos son a tiempo limitado y a previo acuerdo.

1 modelo por préstamo excepto CBL conjunto con TI-8X, TI-92

PETICION DE PRESTAMO: COMPLETE Y ENVIE AL **FAX (52-5) 6 39-92-26**

Nombre: ______________________ **y favor, Firme:**__________________

Razón Social:______________________ | **Por favor fotocopie aquí su**

Escuela/Univ:______________________ | **tarjeta de identificación como**

Teléfono: __________ **FAX**__________ | **profesor o maestro. Si usted**

RAZON: ______________________ | **desea facilitarnos esos datos.**

Curso:__ **Taller:**__ **Conferencia:**__________ |______________________

______________________ **Lugar del evento:**______________

¿Cuántos individuos participarán?________ **Fecha(s):**____/___/ 96, a ____/___/ 96

Recibo y Devolución del préstamo:

__ **Yo lo recibo a horas de oficina, y**

__ **Yo lo devuelvo y entrego en:**

** Texas Instruments Inc. de México
** **Avenida XOLA 613 módulo 1-2**
** **Colonia del Valle México D.F. 03100**

TI entrega y recoje (Gratis), atencion Sr(a): ______________________

horas entre ____ ***AM y*** ____ ***PM, Fecha*** ___/___ ***/96; en dirección:***______________

____

Modelo:	108	MathMate	Explorer	ExplrerPlus	TI-80	TI-82	TI-83	TI-85	TI-92	CBL
¿Cuántos?	____	____	____	____	____	____	(Agosto)	____	____	____
Proyectable	____	____	____	____	____	____	____	____	____	____

(Cada préstamo trae su Transparencia, Poster, Manual... completo y listo para usarse)

Comentarios y particulares:______________________________________

____

¿"Dónde podemos comprar calculadoras Texas Instruments"?, Distribuidores y Almacenes:

Es un privilegio para nuestros distribuidores y almacenes servirles calculadoras marca Texas Instruments y participar en *México* **TI-Cares(TM)**. Nos agrada saber cómo podemos servirles aún mejor. Les escuchamos. ¡Déjennos saber sus experiencias! No todos los almacenes tienen todos los modelos Texas Instruments, asi que les sugerimos comparen con varios de ellos.

Ciudad México

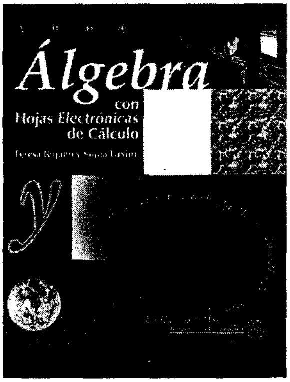
Grupo Comercial Pro-Ideas TEL 573-1703 FAX 573-7131 Almacen Todo Cómputo Av. Universidad 1911 TEL 661-0950	Toni Visa (Almacén) Av Alvaro Obregon # 243 Colonia Roma CP 06700 México D.F. 06700 TEL 207-8811 FAX 511-5504	Grupo Editorial Iberoamérica (varias Librerías) Nebraska 199 COL Nápoles México D.F. 03810 TEL 523-0640 FAX 543-1173
Electrónica SETA SACV Galeana # 114 La Loma, Tlalneplantla 54060 Estado de México TEL 390-7713 FAX 390-9468	Abastecedora LUMEN SACV Avenida Toluca # 481 COL Olivar De Los Padres México D.F. 01780 TEL 683-5211 FAX 683-5211	CCM Mayoristas SACV Bajío 234 COL. Roma Sur México D.F. 06760 TEL 264-1101 FAX 264-1101
CINAM cursos y Av Cafetales # 1506 COL CAFETALES, Coyoacán México D.F. 04930. TEL 673-4585 FAX 688-7129	Infotoreli General Juan Cano # 135-A COL San Miguel Chapultepc México D.F. 11950 TEL 272-9672 FAX 273-9215	Grandes Almacenes: WALMART de México SAM's CLUBS (varios) Office Depot Mexico (varios)
DISTRIBUIDORES en EEUU	QUE SIRVEN TODO EEUU Y	TAMBIEN MEXICO:
WHOLESALE ELECTRONICS TEL 95-800-880-9400 (2)Esp. D & H DISTRIBUTING TEL 95-800-877-1200	AFP SCHOOL SUPPLY TEL 95-800-962-4041 Esp. SCHOOLMART TEL 95-800-285-2662	Advantage Marketing TEL 95-800-937-9777 WEST (Internacional - Ingles) TEL 95-800-325-8641

Guadalajara

HERSYMAC SISTEMAS Enrique Díaz de León 829 Col. Moderna, 44100 Guadalajara, Jalisco México TEL 610-06-66 610-05-66	INGENIERIA EN SISTEMAS Av. M. Avila Camacho 1465 S.H. C.P. 44260 Guadalajara Jalisco, México TEL 823-1007 Fax 823-7908	ESTEC TOLOV 4866 COL MIRADOR GUADALAJARA, JALISCO TEL 628-65-82 FAX 6-28-65-82

Monterrey

CALCTEK Avenida Del Estado #215-A Col. Tecnológico Monterrey Monterrey, Nuevo León TEL	Intertec (Mayoristas) 64640 Monterrey, Nuevo León, México TEL (8)333-6622 FAX (8)333-0744	DESDE EEUU: W.E.S.T. International 91-800-325-8641 (Ingles) e-Mail west @ trib.com



Aprendiendo Álgebra con Hojas Electrónicas de Cálculo (Cuaderno para el alumno)

(Complemento del libro para el profesor Enseñando Álgebra con Hojas Electrónicas de Cálculo) Teresa Rojano, Sonia Ursini

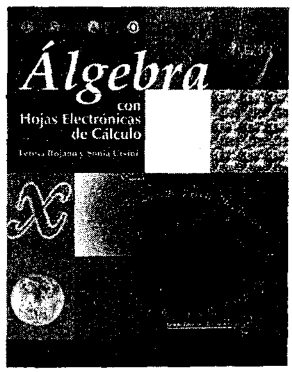
Este cuaderno de actividades para los estudiantes permitirá usar una computadora y el programa Excel como un instrumento para crear ambientes que propicien en los alumnos de secundaria y bachillerato el desarrollo y construcción de nociones y conceptos algebraicos que les sean útiles para comprender su entorno y resolver problemas de la vida cotidiana.

Esta obra es resultado de investigaciones y experiencias con alumnos de educación básica, media y media superior (10 a 18 años de edad). Todas las actividades se presentan a través de hojas de trabajo en las que se plantea un problema y están pensadas para desarrollarse con todo un grupo de estudiantes durante las horas normales de clase.

Este texto es una introducción amable y atractiva al Álgebra, y hace énfasis en los aspectos conceptuales y de uso de la matemática sin que implique experiencia previa en el uso de las hojas electrónicas.

Enseñando Álgebra con Hojas Electrónicas de Cálculo (Libro para el profesor)

(Complemento del cuaderno para el alumno Aprendiendo Álgebra con Hojas electrónicas de Cálculo) Teresa Rojano, Sonia Ursini



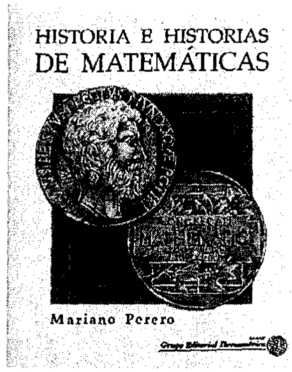
Este libro contiene la metodología necesaria para que el maestro utilice la computadora y el programa Excel para propiciar en el alumno la construcción de conceptos algebraicos. Proporciona las bases para que el profesor coordine las actividades, promueva la discusión y la cooperación entre los alumnos, aliente a la reflexión, aclare dudas, recuerde alguna pieza de información , haga sugerencias e involucre al alumno en el problema inicialmente planteado, ayudándolo a construir los conceptos. El texto inicia con un acercamiento a la Hoja Electrónica de Cálculo. Cada capítulo contiene una introducción con problemas comentados, actividades para la Hoja de Cálculo y hojas de trabajo del cuaderno del alumno con observaciones. Cada sección cuenta con ejemplos, anotaciones acerca de la Hoja de Cálculo, notas para el salón de clase, notas didácticas, notas técnicas y observaciones.

LIBROS EN PREPARACIÓN

- MANCERA/Errar es un placer
- MANCERA/La función con la Calculadora TI
- MANCERA/Matebloquemática, Parte I: Los Números y sus Operaciones
- MANCERA/Resolver Problemas es Saber Matemáticas
- FARFÁN/Ingeniería Didáctica y Matemática Educativa
- WALDEGG/Estudios en Didáctica

LOS LIBROS MÁS ACTUALIZADOS SOBRE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Historia e Historias de Matemáticas
Mariano Perero
Libro interesante y ameno que presenta una novedosa perspectiva de las matemáticas. Nos muestra a los hombres y mujeres que dedicaron su vida a esta disciplina como personajes reales, con angustias, alegrías y problemas propios, a través de historias y anécdotas que harán más activo, interesante e instructivo el conocimiento del mundo de las matemáticas. Una parte importante del texto son los problemas, sangre y vida de las matemáticas. Se eligieron problemas que tienen interés histórico, anecdótico o recreativo. Representan un reto y motivación para todo lector.



Visualizando la Función con la PC
Fernando Hitt, Arturo Torres
Libro novedoso que presenta un nuevo acercamiento didáctico para comprender el concepto de función. Discute las dificultades que tienen los alumnos para visualizar el concepto de función. Hace notar la falta de relación entre la definición (concepto) y la imagen (concepto). Se utiliza el programa de cómputo CALCULA como un laboratorio en el cual se pueden realizar experimentos con las funciones y sus gráficas.

Visualizando las Cónicas con la PC
Fernando Hitt, Eugenio Filloy
CÓNICAS es un programa para microcomputadoras cuyo objetivo es ayudar al estudio de las curvas cónicas en el plano, exhibiendo su comportamiento ante variaciones de los parámetros. Puede considerarse como un laboratorio en el que el usuario puede estudiar el comportamiento de elipses, parábolas e hipérbolas y relaciones, variando los parámetros. CÓNICAS gráfica todas las secciones cónicas a partir de varias de sus definiciones.