Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos

Resumen

En este trabajo se presenta una clasificación de problemas aditivos simples. El fundamento de esta clasificación es la distinción entre la **estructura funcional** y la **forma semántica**. La estructura funcional se refiere al tipo de situaciones numéricas (estados, variaciones y comparaciones) y la forma semántica al modo de expresar dichas situaciones numéricas.

Abstract. In this paper we present a classification of simple additive problems. This classification is based on the distinction between the **functional** structure and the **semantic form**. The functional structure refers to the type of numerical situations (states, variations and comparisons) and the semantic form is taken as a way of expressing the numerical situation.

1. Introducción

La resolución de problemas aditivos ocupa un lugar destacado en la investigación en educación matemática. Esta relevancia está justificada por el importante papel que los problemas aditivos pueden desempeñar en el logro de un aprendizaje numérico lleno de significados. Los distintos autores que se han ocupado de estos problemas han dado varias clasificaciones. En los trabajos de Nesher y otros (1983), Castro y otros (1992) y Fuson (1992) se da una panorámica de las distintas clasificaciones que han surgido.

En este trabajo ofrecemos una clasificación de problemas aditivos simples de enunciado verbal con números reales, aunque habitualmente se les proponen a los alumnos con números enteros, a lo sumo racionales, dados los niveles en los que estos problemas se trabajan en el aula. Con la expresión "aditivo simple" nos referimos a problemas

Alicia Bruno y Antonio Martinón
Universidad de La Laguna,
España

de "suma" o "resta" de dos números. En el estudio de este tipo de problemas los investigadores han tenido en cuenta, entre otros, los aspectos que ahora comentamos brevemente. Con el fin de ilustrar las ideas que exponemos consideramos el siguiente ejemplo de **situación numérica**: "Ernesto debía 2 dólares y le dan 3, luego tiene 1 dólar".

(1) **estructura**: en la situación numérica del ejemplo se produce una "variación" $v = 3$ en el número de dólares que tiene Ernesto, pasando de un "estado inicial" $e(i) = -2$ a un "estado final" $e(f) = 1$. La situación puede esquematizarse con la fórmula $e(i) + v = e(f)$.

(2) **posición de la incógnita**: cabe plantear tres problemas en relación con la situación numérica del ejemplo, según cuáles sean los datos conocidos y la incógnita. Así, por ejemplo, un tipo de problema se corresponde con los datos $e(i)$ y v, siendo la incógnita $e(f)$: "Ernesto debía 2 dólares y le dan 3. ¿Cuántos dólares tiene ahora?".

(3) **tipos de números**: los valores concretos que toman $e(i)$, $e(f)$ y v tienen influencia en la resolución de los correspondientes problemas. La situación descrita en el ejemplo ($e(i) = -2, v = 3, e(f) = 1$), es más difícil que la que se corresponde con el ejemplo «Ernesto tenía 2 dólares y le dan 3, luego tiene 5 dólares», en el que es $e(i) = 2, v = 3, e(f) = 5$.

(4) **contexto**: el problema «Ernesto debía 2 dólares y le dan 3. ¿Cuántos dólares tiene ahora?" es más sencillo que "Ernesto nació el año 2 antes de Cristo y vivió 3 años. ¿Cuándo murió?". Ambos tienen la misma estructura, la misma posición de la incógnita y los mismos números, pero el primero se plantea en el contexto deber-tener, mientras que el segundo se formula en el contexto tiempo, el cual suele presentar más dificultades que el primero.

(5) **forma semántica**: hay diversas formas, equivalentes desde el punto de vista semántico, para expresar una variación: "le dan 3 dólares a Ernesto", "Ernesto tenía 3 dólares menos por la mañana que por la noche", "Ernesto tiene 3 dólares más por la noche que por la mañana".

Nuestra clasificación atiende a los aspectos de la **estructura** y de la **forma semántica.** No tendremos en cuenta la **posición de la incógnita**, ni el tipo de números, ni el contexto, aunque como ya hemos dicho juegan un papel importante desde el punto de vista didáctico. Con el fin de enfatizar los dos aspectos a los que prestamos atención, todas las situaciones numéricas se refieren al contexto deber-tener y se corresponden con la suma $-2 + 5 = 3$. Sin duda, otros contextos exigirían expresiones verbales diferentes de las que usamos para el contexto deber-tener, pero tampoco prestaremos atención en este trabajo a esas variantes.

En este artículo describimos once clases de problemas atendiendo a la estructura funcional. Algunas de estas clases no las hemos encontrado descritas en la literatura sobre el tema: **variación de variaciones, variación de una comparación, combinación de variaciones, comparación de comparaciones** y **combinación de comparaciones**.

Por otro lado, resaltamos la conveniencia de distinguir con nitidez entre estructura funcional y forma semántica, diferencia que tampoco hemos hallado en los trabajos de otros autores y que en ocasiones aparecen confundidas.

Finalmente, debemos mencionar que el esbozo que presentamos aquí exigirá, para su plena utilidad, una investigación didáctica que por nuestra parte sólo está recientemente iniciada y cuya conclusión no es inmediata.

2. Estados, comparaciones y variaciones

En esta sección precisamos las ideas de **estado**, **comparación** y **variación**, las cuales resultan básicas en la clasificación que proponemos de los problemas aditivos.

2.1 Estados

Los números se usan para expresar **estados** (Ernesto tiene 2 dólares; la temperatura en Madrid es de 10.3° C, ...). Resulta conveniente para la clasificación funcional que discutimos en este trabajo formalizar un poco esta idea. En los ejemplos de estado siempre hay un sujeto (Ernesto, Madrid, ...), una magnitud (saldo dinerario, temperatura, ...) y una unidad de medida (1 dólar, 1° C, ...). También está presente el tiempo, aunque a veces sea de manera imprecisa. Hemos de suponer que Ernesto tiene 2 dólares, o que la temperatura en Madrid es 10.3° C, en este momento en el que escribimos.

Hablaremos de **función estado** o simplemente **estado**, y escribiremos $e(t)$ para referirnos al estado en el momento t. Precisemos algo más el significado de este simbolismo: e es la función estado y está asociada, como ya hemos dicho, a un sujeto, a una magnitud y a una unidad de medida; $e(t)$ es el estado en el instante t. Hay situaciones en las que la función estado se considera constante, independiente del tiempo (la altura de El Teide es de 3,717 metros sobre el nivel del mar).

2.2 Comparaciones

Los números también se usan para comparar estados. La **comparación absoluta** entre los estados $e(t)$ y $d(s)$, en este orden, es la diferencia

$$c_{ed}(t, s) = d(s) - e(t).$$

Claramente, las dos funciones estado e y d deben referirse a una misma magnitud para que la diferencia tenga sentido. Ejemplos: Ernesto tiene hoy 2 dólares más de los que Francisco tenía ayer; la temperatura en Madrid es 10.3°C más que en Londres.

Aunque en este trabajo sólo nos fijaremos en las comparaciones absolutas, que son las que aparecen en los problemas aditivos, mencionemos que la **comparación relativa** entre los estados $e(t)$ y $d(s)$, en este orden, es el cociente

$$r_{ed}(t, s) = d(s)/e(t).$$

Ejemplos: Ernesto tiene doble número de dólares que Andrés; la velocidad media del automóvil ha sido 50.4 kilómetros por hora.

Establecemos dos tipos de comparaciones absolutas, las cuales denominaremos **comparaciones** y **variaciones**.

Llamaremos **comparación** a la comparación absoluta de dos funciones estado **diferentes** e y d. Usaremos la siguiente notación para la comparación entre los estados $e(t)$ y $d(s)$:

$$c = c_{ed} = c_{ed}(t, s) = d(s) - e(t).$$

Escribiremos sólo c si se sobreentienden las funciones e y d, y c_{ed} si el tiempo no tiene un papel relevante, como es muy frecuente que ocurra en los problemas en los que aparece una comparación. En general, las comparaciones se refieren a una situación estática, incluso en el caso de ser t y s diferentes. Si $t = s$, entonces hablaremos de **comparación simultánea**. Ejemplo: Ernesto tiene 2 dólares más que Andrés.

2.3 Variaciones

Llamaremos **variación** a la comparación absoluta de dos estados de **una misma función** estado e, en dos momentos diferentes. Escribiremos

$$v = v_e = v(t, s) = v_e(t, s) = e(s) - e(t),$$

según el énfasis que deseemos poner en los instantes t y s o en la función e. Las variaciones necesariamente se refieren a una situación dinámica; es decir, transcurre el tiempo. **Ejemplo:** Ernesto tiene por la noche 2 dólares más que por la mañana.

Insistimos en que en las comparaciones hay dos funciones estados y el tiempo carece de importancia, mientras que en las variaciones hay una única función estado y el transcurso del tiempo juega un papel fundamental.

2.4 Otras variaciones y comparaciones

Podemos considerar, y así lo haremos más adelante, variación de comparaciones, comparación de variaciones, ...Ya que las ideas básicas son las ya expuestas, no entramos en más detalles ahora.

3. Formas semánticas equivalentes

Hay diferentes formas de expresar un estado, una comparación y una variación. Nos referimos a formas que resultan ser equivalentes desde un punto de vista semántico; es decir, son formas verbales que tienen el mismo significado. Desde luego, no todas tienen el mismo uso en el lenguaje ordinario, ya que algunas de ellas son muy artificiales y sólo tienen interés desde una perspectiva teórica, aunque las exponemos aquí para presentar una panorámica completa.

Estas distintas maneras de expresión tienen gran importancia didáctica pues no resultan indiferentes a la hora de la resolución de problemas por parte de los alumnos, y pueden utilizarse para justificar la identificación de la suma y de la resta en el aprendizaje de los números negativos: (Bruno y Martinón, 1994, 1996).

En los apartados de esta sección analizamos las diferentes maneras de expresar un estado, una variación y una comparación. Los ejemplos con los que ilustramos nuestras ideas se sitúan todos en el contexto deber-tener. Todas las cantidades se refieren a dólares; por ejemplo, si decimos "Ernesto tiene 2", se entenderá "Ernesto tiene 2 dólares".

3.1 Formas de expresar un estado

Hay una única forma básica de expresar un estado. Por ejemplo,

Ernesto **tiene** 2 ,

o bien

Ernesto **debe** 2.

Haciendo uso de los números negativos, los estados pueden expresarse de otra forma diferente, equivalente a la anterior desde el punto de vista semántico. Por ejemplo,

"Ernesto **tiene** 2" es equivalente a "Ernesto **debe** –2",

"Ernesto **debe** 2" es equivalente a "Ernesto **tiene** –2".

En el lenguaje ordinario, lo natural es expresar un estado con números positivos y no con números negativos. No obstante, este lenguaje doble tiene utilidad didáctica (Bruno y Martinón, 1996).

3.2 Formas de expresar una variación

Consideremos el ejemplo: Ernesto (E) **debe** 2 por la mañana (estado inicial) y **tiene** 3 por la noche (estado final). La variación que se produce puede expresarse de diversas formas, semánticamente equivalentes, que podemos agrupar en dos básicas. Las denominaremos **cambio** y **diferencia**.

3.2.1 Cambio

Se trata de decir lo que **gana** o **pierde** a lo largo del día, teniendo en cuenta que

"**ganar**" es equivalente a "**aumentar** lo que **tiene**",

"**ganar**" es equivalente a "**disminuir** lo que **debe**",

"**perder**" es equivalente a "**aumentar** lo que **debe**",

"**perder**" es equivalente a "**disminuir** lo que **tiene**".

Cambio simple. Se expresa directamente lo que se **gana** o **pierde**:

En el transcurso del día E **ganó** 5.

Cambio aumento. Se dice lo que **aumenta** (lo que **tiene** o lo que **debe**):

En el transcurso del día E **aumentó** lo que **tiene** en 5.

Cambio disminución: Se dice lo que **disminuye** (lo que **tiene** o lo que **debe**):

En el transcurso del día E **disminuyó** lo que **debe** en 5.

3.2.2 Diferencia

Se expresa la diferencia entre lo que tiene o debe por la noche y por la mañana.

Diferencia directa. Se emplea la expresión **más que:**

Por la noche E tiene 5 **más que** por la mañana,

Por la mañana E debe 5 **más que** por la noche.

Diferencia directa. Se usa la expresión **menos que.**

Por la noche E debe 5 **menos que** por la mañana.

Por la mañana E tiene 5 **menos que** por la noche.

3.2.3 Lenguaje natural

La expresión natural de una variación depende de la forma en la que se expresen los estados. Por ejemplo, en lugar de decir "E **tiene** 2 por la mañana y **disminuyó** lo que **debe** en 5", parece preferible decir "E **tiene** 2 por la mañana y **aumentó** lo que **tiene** en 5"; en lugar de decir "E **debe** 2 por la mañana y **aumentó** lo que **tiene** en 5", resulta más claro decir "E **debe** 2 por la mañana y **disminuyó** lo que **debe** en 5".

3.2.4 Con números negativos

Si se usan números negativos hay otras tantas formas de expresar la variación "En el transcurso del día E **ganó** 5":

En el transcurso del día E **perdió** –5,

En el transcurso del día E **aumentó** lo que **debe** en –5,

En el transcurso del día E **disminuyó** lo que **tiene** en –5,

Por la noche E **debe** –5 **más que** por la mañana,

Por la noche E **tiene** –5 **menos que** por la mañana,

Por la mañana E **tiene** –5 **más que** por la noche,

Por la mañana E **debe** –5 **menos que** por la noche.

Ninguna de ellas se usa en el lenguaje ordinario.

3.3 Formas de expresar una comparación

Distinguimos básicamente dos formas, semánticamente equivalentes, de expresar una comparación, a las cuales llamaremos **diferencia** y **cambio**. Consideremos el siguiente ejemplo: Ernesto (E) **debe** 2 y Daniel (D) **tiene** 3.

3.3.1 Diferencia

Se expresa cuánto **tiene** (o **debe**) uno **más que** (o **menos que**) el otro.

Diferencia directa. Se utiliza la expresión **más que**:

D **tiene** 5 **más que** E,

E **debe** 5 **más que** D.

Diferencia indirecta: Se emplea la expresión **menos que**:

D **debe** 5 **menos que** E,

E **tiene** 5 **menos que** D.

3.3.2 Cambio

Se expresa, en forma de cambio, la variación que debe experimentar uno (**ganar** o **perder**) para igualar al otro. Según la forma de cambio de expresar esa variación se obtienen diferentes formas de expresar la comparación:

Cambio progresivo:

Si E **gana** 5, iguala a D,

Si E **aumenta** lo que **tiene** en 5, iguala a D,

Si D **aumenta** lo que **debe** en 5, iguala a E.

Cambio regresivo:

Si D **pierde** 5, iguala a E.

Si D **disminuye** lo que **tiene** en 5, iguala a E.

Si E **disminuye** lo que **debe** en 5, iguala a D,

3.3.3 Lenguaje natural

La forma de expresión natural de una comparación depende de la forma en la que se expresen los estados. Por ejemplo, en vez de decir "E **debe** 2 y D **tiene 5 más que** E", es preferible decir "E **debe** 2 y D **debe** 5 **menos que** E".

3.3.4 Con números negativos

Usando números negativos hay otras tantas formas de expresar la comparación "D **tiene** 5 **más que** E":

D **debe** –5 **más que** E,

E **tiene** –5 **más que** D,

D **tiene** −5 **menos que** E ,

E **debe** −5 **menos que** D ,

Si E **pierde** −5, iguala a D ,

Si D **gana** −5, iguala a E ,

Si E **disminuye** lo que **tiene** en −5, iguala a D ,

Si D **disminuye** lo que **debe** en −5, iguala a E ,

Si E **aumenta** lo que **debe** en −5, iguala a D ,

Si D **aumenta** lo que **tiene** en −5, iguala a E .

Como ya hemos señalado para los estados y las variaciones, no se usan las expresiones con números negativos en el lenguaje ordinario, aunque sí tienen utilidad en ciertas situaciones didácticas durante el aprendizaje de dichos números.

4. Clasificación funcional y semántica de problemas aditivos

En esta sección analizamos los distintos tipos de problemas aditivos simples, que son aquellos que se corresponden con igualdades aritméticas del tipo $x + y = z$.

Consideraremos 11 **clases de problemas**, cada una de las cuales se corresponde con una **estructura funcional**. Los problemas de **estado** se corresponden con las siguientes 3 clases:

Combinación de estados: $a(t) + b(t) = e(t)$

Variación de un estado: $e(i) + v = e(f)$

Comparación de estados: $e + c = d$

Los problemas de **variaciones** son de las siguientes 4 clases:

Combinación de variaciones sucesivas: $v\,(i, m) + v\,(m,f) = v\,(i,f)$

Combinación de variaciones: $v_a\,(i,f) + v_b\,(i,f) = v_e\,(i,f)$

Comparación de variaciones: $v_e\,(i,f) + c = v_d\,(i',f')$

Variación de variaciones: $v\,(i,f) + v = v_e\,(i',f')$

Los **problemas de comparaciones** agrupan las siguientes 4 clases:

Combinación de comparaciones adyacentes: $c_{ed} + c_{dg} = c_{eg}$

Combinación de comparaciones: $c_{ag} + c_{bh} = c_{ed}$

Variación de una comparación: $c(i) + v = c(f)$

Comparación de comparaciones: $c_{ed} + c = c_{gh}$

Según la forma de expresar las variaciones y las comparaciones en un problema, hablamos de **forma semántica**. Teniendo en cuenta la **estructura funcional** y la **forma semántica** obtenemos el **tipo funcional-semántico** de un problema.

Iniciamos el estudio con los problemas en los que aparece una única función estado, luego continuamos con aquellos en los que hay dos, y así sucesivamente.

4.1 Problemas con una función estado

Consideramos ahora las distintas clases de problemas en los que aparece una única función estado e. En los ejemplos que ponemos, $e(t)$ significa el saldo (lo que **tiene** o lo que **debe**) Ernesto (E), medido en dólares, en el instante t.

4.1.1 Variación de un estado

Consideremos dos instantes distintos i (inicial) y f (final), siendo $i < f$. Asociados a esos instantes se tiene el estado inicial $e(i)$ y el estado final $e(f)$, además de la variación $v = e(f) - e(i)$. En esta clase de problemas se tiene la siguiente estructura funcional

$$e(i) + v = e(f).$$

Ejemplo: $e(i)$: Por la mañana E **debía** 2.

v : En el transcurso del día E **ganó** 5.

$e(f)$: Por la noche E **tenía** 3.

Estos problemas, expresados en su forma semántica de **cambio** han sido denominados problemas de **cambio** (Riley y otros, 1983), **unión y separación** (Carpenter y Moser, 1982), **una transformación que une dos medidas** (Vergnaud, 1982) y **dinámico** (Nesher, 1982).

4.1.2 Combinación de variaciones sucesivas

Ahora hay tres instantes diferentes: i (inicial), m (medio) y f (final). En esos instantes el estado toma otros tantos valores: inicial $e(i)$, medio $e(m)$ y final $e(f)$. Aparecen así diferentes variaciones:

$$v(i,m) = e(m) - e(i), \qquad v(m,f) = e(f) - e(m), \qquad v(i,f) = e(f) - e(i).$$

Los problemas de esta clase tienen la estructura funcional:

$$v(i,m) + v(m,f) = v(i,f).$$

Ejemplo: $v(i,m)$: En el transcurso de la mañana E **perdió** 2.

$v(m,f)$: En el transcurso de la tarde E **ganó** 5.

$v(i,f)$: En el transcurso del día E **ganó** 3

Esta clase de problemas ha sido considerada por Vergnaud (1982) en su forma semántica de cambio y la llamó **composición de dos transformaciones.**

4.1.3 Variación de variaciones

En esta clase de problemas hay cuatro instantes: $i < f\ 7\ i' < f'$. Podemos entonces considerar las variaciones del estado e:

$$v(i,f) = e(f) - e(i), \qquad v(i',f') = e(f') - e(i').$$

Lo habitual es que esas variaciones se refieran a periodos constantes de tiempo; es decir, $f - i = f' - i'$. Por ejemplo, esas variaciones pueden representar las ganancias o pérdidas que se producen en un día. Aparece así una nueva función estado $v(i,f)$ que se define en intervalos temporales (i,f). En la expresión de la estructura funcional de esta clase de problemas, v representa la variación de la función $v(i,f)$ y no de la función e:

$$v(i,f) + v = v(i',f')$$

Ejemplo: $v(i,f)$: Ayer E **perdió** 2.

v: Hoy E **perdió** 5 **menos que** ayer.

$v(i',f')$: Hoy E **ganó** 3

Esta estructura funcional tiene una gran similitud con la comparación de variaciones, con la diferencia de que en esta última se consideran dos funciones estados: $v_e(i,f) + c = v_d(i',f')$.

4.2 Dos funciones estado

Las dos funciones serán denotadas por e y d. Supondremos que $e(t)$ es el saldo de Ernesto (E) y $f(t)$ el saldo de Daniel (D), en un cierto momento t.

4.2.1 Comparación de estados:

La estructura funcional es:

$$e + c = d.$$

Ejemplo: e: E **debe** 2.

c: Si E **gana** 5, entonces iguala a D.

d: D **tiene** 3.

Esta clase de problemas, cuando la comparación se expresa en forma de diferencia, ha sido denominada en la literatura de las siguientes formas: **comparación** (Riley y otros, 1983; Carpenter y Moser, 1982; Nesher, 1982) y **una relación estática que une dos medidas** (Vergnaud, 1982). Si la comparación se expresa en la forma de cambio se han denominado **igualación-añadiendo** o **igualación-quitando** (Carpenter y Moser, 1982).

4.2.2 Comparación de variaciones

Consideramos la variación $v_e(i, f)$ entre dos instantes $i < f$ y también la variación $v_d(i', f')$ entre los instantes $i' < f'$ de la función estado d, aunque lo habitual es que sea $i = i'$ y $f = f'$. En esta clase de problemas se comparan ambas variaciones y tienen la siguiente estructura funcional:

$$v_e(i, f) + c = v_d(i', f').$$

Ejemplo: $v_e(i, f)$: En el transcurso del día E **perdió** 2.

c: D **perdió** 5 **menos que** E.

$v_d(i', f')$: En el transcurso del día D **ganó** 3.

4.2.3 Variación de una comparación

Al variar con el tiempo los dos estados e y d, también varía la comparación entre ellos:

$$c(t) = d(t) - e(t)$$

Entre los dos instantes $i < f$ se produce una variación v de la función comparación $c(t)$. La estructura funcional de esta clase de problemas es la siguiente:

$$c(i) + v = c(f).$$

Ejemplo: $c(i)$: Ayer D **tenía** 2 **más que** E.

v: Hoy E **ganó** 5 **más que** D.

$c(f)$: Hoy E **tiene** 3 **más que** D.

Esta estructura es muy similar a la anterior cuando $i = i'$ y $f = f'$:

$$v = c(f) - c(i) = d(f) - e(f) - d(i) + e(i) = v_d(i,f) - v_e(i,f) = c$$

4.3 Tres funciones estado

Consideramos en este apartado problemas en los que aparecen tres funciones estado.

4.3.1 Combinación de estados

En ciertas situaciones una función estado e es suma de dos **estados parciales** a y b y diremos que e es el **estado total**. Por ejemplo, a representa el saldo de Ernesto (E) (lo que tiene o debe) en el banco, b el saldo en casa y e el saldo total, suma de a y b. La estructura funcional de esta clase de problemas es:

$$a(t) + b(t) = e(t).$$

Ejemplo: $a(t)$: En el banco E **debe** 2.

$b(t)$: En casa E **tiene** 5.

$e(t)$: En total E **tiene** 3.

Esta clase de problemas ha recibido diferentes denominaciones en la literatura: **combinación** (Ryley y otros, 1983), **parte-parte-todo** (Carpenter y Moser, 1982), **una transformación que une dos medidas** (Vergnaud, 1982) y **estático** (Nesher, 1982).

4.3.2 Combinación de variaciones

Suponemos que a y b son estados parciales del estado total e:

$$e(t) = a(t) + b(t).$$

Con el transcurso del tiempo los tres estados varían:

$$v_a(i,f) = a(f) - (i) \qquad v_b(i,f) = b(f) - b(i) \qquad v_e(i,f) = e(f) - e(i)$$

De igual forma que en 4.3.1, podemos suponer que a y b representan los saldos de Ernesto (E) en el banco y en su casa y e es el saldo total. La estructura funcional es:

$$v_a(i,f) + v_b(i,f) = v_e(i,f)$$

Ejemplo: $v_a(i,f)$: En el transcurso del día E **perdió** 2 en el banco.

$v_b(i,f)$: En el transcurso del día E **ganó** 5 en su casa.

$v_e(i,f)$: En el transcurso del día E **ganó** 3 en total

4.3.3 Combinación de comparaciones adyacentes

A diferencia de las dos clases de problemas anteriores (4.3.1 y 4.3.2), ahora las tres funciones estado son "independientes". Por ejemplo, e representa el saldo de Ernesto (E), d el de Daniel (D) y g el de Gabriel (G). Podemos considerar las tres comparaciones

$$c_{ed} = d - e, \qquad c_{dg} = g - d, \qquad c_{eg} = g - e.$$

Decimos que las comparaciones c_{ed} y c_{dg} son adyacentes y que c_{eg} es la combinación de ambas. La estructura funcional de esta clase de problemas es la siguiente:

$$c_{ed} + c_{dg} = c_{eg}$$

Ejemplo: c_{ed}: D **tiene** 2 **menos que** E.

c_{dg}: G **tiene** 5 **más que** D.

c_{eg}: G **tiene** 3 **más que** E.

Estos problemas en su forma de expresión de diferencia han sido denominados **composición de dos relaciones estáticas** por Vergnaud (1982).

4.4 Problemas con cuatro funciones estado

4.4.1 Comparación de comparaciones

Supongamos que tenemos cuatro funciones estado e, d, g y h. Por ejemplo, representan los saldos de Ernesto (E), Daniel (D), Gabriel (G) y Héctor (H), respectivamente. Si consideramos las comparaciones

$$c_{ed} = d - e, \qquad c_{gh} = h - g,$$

obtenemos la comparación de comparaciones, cuya estructura funcional es la siguiente:

$$c_{ed} + c = c_{gh}.$$

Ejemplo: c_{ed}: D **tiene** 2 **menos que** E.

c: Lo que **H tiene más que** G es 5 **más** de lo que E **tiene más que** D.

c_{gh}: H **tiene** 3 **más que** G.

4.5 Problemas con seis funciones estado

4.5.1 Combinación de comparaciones

Consideramos el estado e que es combinación de los estados parciales a y b: $e = a + b$. Por ejemplo, e es el saldo total de Ernesto (E), mientras que a y b representan los saldos en el banco y en su casa, respectivamente. Consideramos también el estado $d = g + h$, combinación de los estados parciales g y h: saldo total de Daniel (D), saldos en el banco y en su casa, respectivamente. Las comparaciones de los estados parciales y totales son:

$c_{ag} = g - a$ (comparación de saldos en el banco)

$c_{bh} = h - b$ (comparación de saldos en su casa)

$c_{ed} = d - e$ (comparación de saldos totales)

Entonces resulta que c_{ed} es combinación de c_{ag} y c_{bh}, siendo la estructura funcional de esta clase de problemas la siguiente:

$$c_{ag} + c_{bh} = c_{ed}.$$

Ejemplo: c_{ag}: En el banco, D **tiene** 2 **menos que** E.

c_{bh}: En casa, D **tiene** 5 **más que** E.

c_{ed}: En total, D **tiene** 3 **más que** E.

Consideraciones finales

Hemos presentado una clasificación general de problemas aditivos verbales que permite considerar nuevas situaciones no contempladas en las investigaciones sobre este tema. Esta clasificación puede ser utilizada con todo tipo de números (positivos y negativos, enteros y no enteros).

No pensamos que todos estos tipos de problemas deban ser tratados en la educación primaria o secundaria, lo cual no sólo sería imposible sino innecesario. Aunque algunos de los problemas que citamos pueden introducirse, no tienen porqué ser tratados de forma sistemática. La clasificación que damos y la distinción entre los aspectos funcionales y semánticos puede servir de reflexión a parte del profesorado de estos niveles sobre el tipo de situaciones que pueden surgir en los problemas aditivos y los conceptos que están en juego (estados, comparaciones, variaciones y las relaciones entre ellos).

Por otro lado, la clasificación puede formar parte del soporte teórico en investigaciones sobre el tema, ya que a partir de ella surgen interesantes preguntas de investigación: ¿cuáles son los problemas que presentan mayor dificultad?, ¿influye la forma semántica de expresar las distintas situaciones?, ¿los alumnos comprenden de la misma forma las variaciones expresadas como diferencias, que las comparaciones expresadas como diferencias?, por lo tanto, ¿es relevante el tiempo? Otro tipo de cuestiones que cabe plantearse tienen que ver con las representaciones en distintos modelos, como puede ser la recta, de estas situaciones.

En la medida en que las respuestas a estas preguntas ayuden a conocer mejor la comprensión de los alumnos en este tema, la clasificación que presentamos cobrará más o menos utilidad.

Referencias

Bruno, A. y Martinón, A. (1994). La recta en el aprendizaje de los números negativos. ***Suma***, 18, 39-48.

Bruno, A. y Martinón, A. (1996). Números negativos: sumar = restar. ***UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*** (pendiente de publicación).

Castro, E.; Rico, L. y Gil, F. (1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. ***Enseñanza de las Ciencias,*** 10 (3), 243-253.

Carpenter, T. and Moser, J. (1982). ***The development of Addition and Subtraction Problem-Solving S kills.*** En Carpenter, T. Moser, J. y Romberg, T. (ed.). ***Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective,*** pp.9-24. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey.

Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grows, D. (de). ***Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning***, 243-275. MacMillan Publishing Company, Nueva York..

Nesher P. (1982). Levels of description in the analysis of addtion and subtraction word problems. En Carpenter, T. Moser, J. and Romberg, T. (ed.). ***Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective,*** pp. 25-38. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, Nueva Jersey.

Nesher, P.; Greeno, J.G. and Riley, M.S. (1983). The development of semantic categories for addition and subtraction. ***Educational Studies in Mathematics,*** 13, 373-394.

Riley, M.S.; Greeno, G.J. and Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En Ginsburg, H. P. (ed.). *The development of mathematical thinking*, pp. 153-196. Academic Press, Nueva York.

Vergnaud, G. (1982) A classification of cognitive tasks and operations of though involved in addition and subtraction problems. En Carpenter, T. Moser, J. y Romberg, T. (ed.). ***Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective,*** pp. 35-59. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, Nueva Jersey.