

Actividades para construir el concepto de elipse

Resumen

Impartir un curso de matemáticas en el nivel medio superior utilizando una metodología constructivista tiene algunas dificultades. Con el propósito de resolver algunas de esas dificultades se recurrió a elaborar material didáctico para ser utilizado en un aula de computación. El material abarca el curso de un año de duración. A continuación se presentan, como muestra, dos hojas de trabajo que se utilizaron con el propósito que los alumnos hicieran la construcción de la elipse y explorarán el concepto de excentricidad. Las hojas de trabajo se hicieron para trabajar con el programa de computadora *Geometer's Sketchpad*.

Abstract Teaching mathematics in High School (for 16-17 years old) is difficult. To solve some of these difficulties constructive methodology was used. The problem was tackled by designing activities with the computer. The computer activities were handled by the student's in a worksheet in the computer classroom that had to be solved, during a once a week session, in couples with the assistance of the instructor. The rest of the week the students had to work with activities that were complementary to the computer activity and was solved in teams. In this report we show an example of the activity for the ellipse using the Geometers's Sketchpad, version 1.0

Introducción

El problema era impartir un curso de matemáticas a nivel medio superior. La metodología general con la que se pretendió trabajar en el aula fue la constructivista; pero una de las mayores dificultades con las que se encontró la profesora fue la falta de interés de los alumnos por aprender la materia. En esta etapa los alumnos son inquietos y muestran más interés en aprender una forma de relacionarse con el medio y los problemas sociales, que por aprender temas abstractos como la geometría. Otro aspecto que tiene relevancia es que hasta ese momento, la metodología de aprendizaje a la que habían estado sujetos, la mayor parte de los alumnos, era la tradicional; en particular en matemáticas esto significa que aprendieron algoritmos sin saber de donde vienen ni para que les sirven, además de haber hecho mayor énfasis en la respuesta

Araceli Reyes

Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM)

México, D.F.

correcta que en la comprensión de lo que estaban haciendo. En este contexto se volvió muy complicado presentarles a los alumnos problemas o actividades para que trabajaran responsablemente dentro de la metodología constructivista, y que verdaderamente se provocara una desequilibración, una reflexión y como consecuencia una asimilación. En general, los alumnos esperaban que el maestro de matemáticas les presentara soluciones a ejercicios, sin importar de donde venían, y los hiciera ejercitar sobre ellos. Pocos alumnos querían descubrir el por qué y para qué de los conceptos.

Como una consecuencia a esta situación compleja, de cambio y motivación se pensó que la mejor manera de abordarlo era utilizando la computadora como una herramienta que permitiera al alumno realizar actividades sobre las que hiciera observaciones y que le permitieran reflexionar para descubrir relaciones y conceptualizar. Después de algunas experiencias negativas para que los alumnos realizaran actividades en equipo en el aula y abordaran los problemas, se decidió contar con una etapa de transición entre la enseñanza tradicional pasiva a la acción reflexiva, ésta transición consistió en proporcionar hojas de trabajo que se resolvían, por parejas, frente a la computadora, en las que se hacían preguntas con la intención de que los alumnos descubrieran algunas relaciones. La secuencia completa de actividades fue visualizar un problema real concreto, la relación con algunos conceptos de trigonometría, el dibujo a mano para culminar con el trazo en la computadora. Una ventaja de utilizar la computadora fue que los alumnos se interesaron en aprender a manejar la herramienta (programa más computadora) y que el diseño mismo del programa los obligó a trabajar de manera natural con las nociones básicas de la geometría euclidiana. Otra ventaja que tuvo esto es que la computadora se volvió una herramienta para aquellos con poca habilidad para el dibujo, evitando frustraciones innecesarias, y por otra parte les despertó la imaginación. Después de estas experiencias fue más sencillo llevar a los alumnos a descubrir el concepto dinámico de función y el de lugar geométrico.

Se desarrolló material para un curso anual completo de trigonometría y álgebra para cuarto de bachillerato. Durante el primer semestre se tuvieron cinco sesiones de cincuenta minutos, a la semana y solamente una de ellas era en el laboratorio de computación. Durante el segundo semestre se trabajaron cuatro horas a la semana, con una sesión en el laboratorio.

El programa Geometer's Sketchpad

El programa que se utilizó en el laboratorio de computación, *The Geometer's Sketchpad*, trabaja bajo el sistema operativo de Windows. La versión que se utilizó es la 1.0 que solamente requiere de aproximadamente 830 KB en disco y la versión 3.1 de Windows.

El programa es de los que se llaman abiertos en el ambiente de computación en la educación. Esto significa que el profesor puede diseñar sus secuencias didácticas y el alumno puede utilizarlo como laboratorio de exploración. En otras palabras, no tiene tutoriales ni ejercicios que hay que seguir siempre. La herramienta que si tiene es que el profesor puede grabar una construcción para los fines que él requiera, ya sea para que el alumno revise un material fijo o para una presentación.

Básicamente el programa consiste de una hoja en blanco para hacer construcciones geométricas con los utensilios propios de un geómetra: regla, compás y lápiz. La regla puede trazar segmentos, rectas o semirectas. Las líneas pueden hacerse de colores, de diferentes groesos y punteadas. Hay construcciones que se pueden hacer de forma automática si se marcan los elementos adecuados, por ejemplo para trazar una perpendicular a una recta que pase por un punto, hay que marcar la recta y el punto y, desde un menú se traza la perpendicular.

Una característica sobresaliente de éste programa es que una vez que se realiza una construcción, por ejemplo un punto sobre una recta, esta propiedad se mantiene y se pueden modificar las longitudes de la recta y los ángulos que forma con otra, pero la propiedad de tener ese punto sobre ella nunca lo pierde. Esta característica resulta muy poderosa para ilustrar conceptos que no dependen del tamaño de la figura ni de los ángulos. La parte dinámica de la geometría se vuelve accesible para la mayor parte de los alumnos.

Otro aspecto interesante es que una vez construida una figura se le puede dar animación de una forma por demás sencilla. Se marca el objeto que debe moverse y la línea (recta o circunferencia) sobre la que se va a mover y elegir la opción de animación y automáticamente la figura se anima.

Además de estas características que están relacionadas con la computadora y en particular con el sistema operativo, el programa respeta la nomenclatura tradicional de la geometría euclidiana, a los puntos los denota con letras mayúsculas, a las rectas y asociados con letras minúsculas y a las circunferencias con números. La denominación también puede ser modificada si uno lo requiere.

Actividades

Se desarrollaron actividades, en el aula y en el laboratorio de computación, para construir todas y cada una de las funciones trigonométricas. De la misma forma se trabajaron las identidades usuales y las leyes de los senos y cosenos. Como una aplicación de la ley de los cosenos se dedujo la función que relaciona el ángulo con la longitud del radio vector para obtener la trayectoria de un planeta. La siguiente actividad fue trazar con regla y compás una elipse a partir de circunferencias concéntricas. A continuación se presentan dos hojas de trabajo que se utilizaron en el laboratorio de computación para trazar la elipse y explorar el concepto de excentricidad.

Hojas de trabajo

I. Construcción de la elipse

1. Tracen dos circunferencias con el mismo centro, pero diferente radio. Para la circunferencia mayor tracen un diámetro horizontal.
2. Construyan un punto P sobre la circunferencia mayor.
3. Desde el centro de las circunferencias tracen un segmento de recta m que pase por el centro y el punto P sobre la circunferencia.

4. Construyan el punto Q de intersección del segmento m y la circunferencia menor.
5. Tracen una recta perpendicular n , punteada, desde P al diámetro horizontal.
Al punto de intersección de la recta n con el diámetro llámenlo S .
6. Tracen una recta perpendicular k , punteada, a la recta n que pase por Q .
7. Tracen la recta perpendicular al diámetro horizontal que pase por Q . Al punto de intersección de ésta perpendicular con el diámetro llámenla T .
8. Construyan el punto de intersección de las rectas k y n y llámenlo R .
9. Señalen el punto R y opriman simultáneamente las teclas CTRL y T.
10. Muevan el punto P . ¿Qué curva trazan?
11. En el triángulo CPS calculen la longitud del lado CS si conocen $\cos(\theta)$ y el radio $CP = a$ de la circunferencia mayor.
12. En el triángulo CQT calculen la longitud del lado QT si conocen el $\sin(\theta)$ y el radio $CQ = b$ de la circunferencia menor.

II. Excentricidad de la elipse. Variación de la elipse al variar a y b .

1. Abran una nueva hoja de trabajo (*New Sketch*). Tracen un triángulo rectángulo, arriba a la izquierda, como sigue:
 - a) Un segmento de recta horizontal, este será la longitud b del semieje menor de la elipse. Midan la longitud.
 - b) Un segmento perpendicular por uno de los extremos del segmento anterior. Este será la distancia c del centro de la elipse al foco. Midan su longitud.
 - c) Cierren el triángulo con la hipotenusa, esta será la longitud a del semieje mayor. Midan la distancia.
 - d) Calculen el cociente $e=c/a$

Escriban la relación entre a , b y c del triángulo rectángulo:

2. Tracen el dibujo de la hoja anterior con circunferencias como las siguientes:
 - a) Marquen el segmento de longitud a y un punto A cualquiera. Tracen con la opción *Construct* una circunferencia con la opción *Circle by Center and Radius*.
 - b) Ahora marquen el segmento de longitud b y el mismo punto A . Tracen la circunferencia con ese radio y A como centro.
3. Repitan los pasos del (1) al (7) del ejercicio anterior. Tracen una elipse de la siguiente manera: marquen la circunferencia grande y el punto P que mueven. Abran la opción *Display, Animate* y elijan en la ventana que se abre *Animate*. Para detener la animación opriman la tecla izquierda del ratón.

4. Sobre el triángulo rectángulo modifiquen las longitudes de los catetos hasta que el valor del cociente e sea casi 1.
5. Tracen otra elipse y compárenla con la anterior. ¿Qué observan?
6. Ahora modifiquen el triángulo rectángulo y hagan que se modifique el valor de e , que sea muy pequeño. ¿Cómo se ve ahora la elipse, más alargada o más redonda? ¿Cuál es la relación entre el valor de e y lo alargada o redonda que es la elipse?

Definición

Al cociente $e = c/a$ se le llama excentricidad de la elipse.

7. Escriban la conclusión sobre la elipse utilizando la excentricidad.
8. La excentricidad de la órbita de Plutón alrededor del Sol es 0.2481. Tracen su órbita. Investiguen las excentricidades del resto de los planetas.

Bibliografía

- Davidson, N. The small-group discovery method in secondary and college level mathematics. *Cooperative learning in mathematics: A handbook for teachers*. Menlo Park, California: Addison Wesley. 1989.
- Dubinsky, E. Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. *Advanced Mathematical Thinking*. David Tall, editor, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. 1991.