Recursos Intuitivos que Favorecen la Adición de Fracciones: Estudio de Caso

Resumen

A través de una amplia investigación referida al *lenguaje de las fracciones* y al *vínculo de éste con los correspondientes conceptos*, en el cuarto grado de primaria de una escuela pública aplicamos un *cuestionario exploratorio* mediante el cual pudimos reconocer algunas modalidades frecuentes de desempeño de los niños. Uno de tales patrones es el que ahora estamos comunicando, atendiendo al esclarecimiento que puede promover a nivel de las propuestas y procesos didácticos comprometidos en el aula. Esa modalidad de desempeño (exhibida por varios miembros del grupo en estudio) se caracterizó por la facilidad con la que dichos alumnos podían resolver adecuadamente los problemas aditivos, cuando éstos eran expresados mediante un *pictograma* (en marcado contraste con las tareas en las que los mismos niños fracasaban ya que debían abordar las situaciones aditivas desde *tratamientos algorítmicos convencionales*). El seguimiento realizado al respecto asumió la forma de un *estudio de caso* cuyo *punto de partida* lo constituyeron los resultados obtenidos en algunas tareas del *cuestionario exploratorio*. El *instrumento primordial* del estudio de caso se desarrolló a partir de la selección de la alumna que en el cuestionario presentó de manera sistemática el perfil antedicho, quien fue *entrevistada de modo individual*. Complementariamente, tal estudio se enriqueció mediante la realización de algunas observaciones de clases (lo cual nos proporcionó información acerca de los modelos didácticos adoptados por la profesora a cargo del grupo escolar).

Abstract: During the development of a research referred to the language of fractions and its relantionship with the corresponding concepts, we applied a questionnaire in the fourth grade of a primary school. This report is centered on Fabiola case, who was interviewed by us because she exhibed an effective use of pictorial representations and the concrete aids linked with the sum of fractions (in contrast with her own wrong algorithmic handle). The case study was compound by some qualitative observations of classes and the Fabiola's results in the questionnaire and in the interview.

Marco Teórico

Laborde (1990) destaca la estrecha proximidad planteada entre el lenguaje «natural» y el lenguaje matemático, en todos los espacios en los que éste se expresa. Específicamente, la escritura matemática se estructura a partir de la amalgama de la escritura de la lengua

Martha Elena Valdemoros Álvarez
Departamento de Matemática Educativa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
México, D. F.

y de un conjunto propio de signos (*«símbolos motivados»*, *«iconos geométricos»*, *«pictogramas»*) que resultan combinados con letras y con los significantes técnicos de los numerales. De conjunto, la *activa construcción* —por parte del estudiante— de todos estos instrumentos simbólicos se encuentra acompañada por múltiples dificultades cognitivas derivadas de la gran diversidad de aquéllos y de los obstáculos asociados a su correspondiente articulación.

Una de las aportaciones fundamentales de Behr, Lesh, Post y Silver (1983), Lesh, Post y Behr (1987) ha consistido en destacar la confluencia de modos diversos de representación que están involucrados en los procesos de simbolización adscritos a la enseñanza y el aprendizaje matemáticos (específicamente, dibujos o diagramas, símbolos escritos, representaciones asociadas al uso de materiales concretos fijos o manipulativos, entre los más relevantes). Asimismo, los investigadores citados han enfatizado la *complejidad* que asumen todos los *procesos de «traducción» desde un sistema de representación a otro*. Los primeros planteamientos retoman y enriquecen las formulaciones originales de Bruner (1966), quien en el aprendizaje reconoció la sucesión de *representaciones de la actuación* («enactive representations», según las propias designaciones del autor), *representaciones icónicas* y *representaciones simbólicas*, a través del desarrollo de procesos cognitivos en espiral crecientemente complejos. Con lo cual, las coincidencias básicas entre aquellos investigadores y Bruner están referidas a la naturaleza de dichas representaciones.

A partir de sus estudios centrados en los números naturales, Sastre y Moreno (1980) identifican algunos enlaces entre el *lenguaje verbal* (esto es, las expresiones de la *lengua* asociadas al aprendizaje y la enseñanza matemáticos), los *signos aritméticos* involucrados y los *dibujos* usados en tales situaciones didácticas. Sastre (1984) resalta la circunstancia de que —tanto en la línea histórica de desarrollo de esos *modos diversos de simbolización*, como en el terreno actual de su construcción por parte de cualquier sujeto— la confluencia de aquéllos concita *múltiples dificultades*. Con el propósito de trascender algunos de dichos obstáculos cognitivos y a modo de crear un puente hacia el *uso de los signos arit-méticos*, de *naturaleza convencional y arbitraria* (entendiendo como *«arbitraria»* aquella característica del signo que destaca la ausencia de rasgos perceptuales comunes entre este último y el objeto designado por dicho signo), Sastre propone el uso mediador de ciertos *dibujos* que permitan la asignación de sentido al plano gráfico, dada la similitud que dichas representaciones guardan con los objetos reales simbolizados. Esto último pudiera resumirse en los siguientes términos: **para presentar al niño los modos de simbolización arbitrarios asignados a determinadas entidades numéricas y sus respectivas operaciones, es conveniente comenzar con los modos no-arbitrarios de simbolización de contidades relacionadas con esas mismas entidades** (ya que los modos no-arbitrarios de simbolización son más accesibles al sujeto por las similitudes que guardan con los objetos reales designados en la experiencia del aula).

En el terreno de las *fracciones*, Kieren et al. (1985) optan por introducir a través de dibujos las tareas aritméticas de reparto propuestas al niño, ya que por esa vía éste puede llegar a expresar con más claridad su pensamiento matemático. De ese modo, los investigadores mencionados afirman que el niño desarrolla espontáneamente el *«algoritmo gráfico»* de la suma de fracciones (es decir, sustituye de hecho el algoritmo convencional por dibujos que representan dicha operación). Tal «algoritmo gráfico» facilita al escolar la resolución de la tarea, al tiempo que permite al investigador realizar una mejor exploración de sus elaboraciones mentales.

Por otra parte, Kieren (1983, 1984, 1988) reconoce que la *partición*, la *formación de una unidad divisible* y la *equivalencia cuantitativa* (a los que él identifica como *«mecanismos constructivos» de la fracción*) constituyen la raíz cognitiva primordial de los diversos *contenidos semánticos intuitivos* que cualquier escolar puede constituir, con respecto al mencionado conjunto numérico y mediante el respaldo de la enseñanza.

Streefland (1990a, 1990b) enfatiza que los estudiantes encuentran sus propios caminos (sus propias modalidades de representación, agregamos nosotros) para desarrollar operaciones en cierto terreno numérico; ése es un punto de partida óptimo para la correspondiente organización de la enseñanza. En particular, Streefland (1991) considera que la construcción de ***modelos visuales*** cumple el papel de brindar importantes canales para el desarrollo de los procesos de matematización de los alumnos.

En recientes reportes de investigación (Valdemoros, 1991, 1992a, 1993a, 1993b, 1994a) han sido descritas y analizadas con gran detalle algunas modalidades de desempeño infantil, tanto en el terreno de la identificación de fracciones como en el de la suma de dichos números. En el marco de presentación de diversas tareas aditivas, portadoras de la misma información cuantitativa expresada mediante distintos sistemas de representación, los niños (de 9 y 10 años de edad) pudieron tomar el dibujo como un canal idóneo para la explicitación de su pensamiento. Tal rasgo estuvo tan acentuado que los escolares apelaron espontáneamente a dicha forma de representación, aún en las situaciones en las que se requerían otras modalidades de respuesta. Esa tendencia se vio reflejada en el desarrollo de soluciones adecuadas y en los planteamientos inconclusos o incorrectos (las últimas circunstancias nos hacen advertir que, siendo el dibujo un poderoso canal de expresión para los niños, requiere ser tratado por la enseñanza, a fin de alcanzar su máxima eficacia).

El estudio de caso

Los señalamientos que efectuamos en la presente sección del artículo se encuentran fuertemente sustentados por otros reportes de investigación (Valdemoros, 1992b, 1994b). El estudio que estamos comunicando aquí está referido a un caso, cuyo punto de partida lo brindó un *cuestionario exploratorio* centrado an las *fracciones* y aplicado en *cuarto grado de una escuela primaria pública*. Tras el análisis del mencionado cuestionario pudimos identificar una importante tendencia en algunos estudiantes de ese grupo escolar, quienes podían resolver adecuadamente los problemas aditivos cuando éstos eran expresados a través de un pictograma (en contraste con el propio manejo inadecuado del algoritmo convencional); tal dominio intuitivo y pictórico de las situaciones aditivas constituye el problema del presente estudio de caso. A posteriori, desarrollamos *algunas observaciones directas del aula* y una *entrevista* con la niña que exhibió de modo sistemático la tendencia que acabamos de describir. Seguidamente presentamos los aspectos metodológicos fundamentales que sostienen este estudio de caso.

Combinando métodos

El estudio de caso estuvo inmerso en una amplia investigación, la cual se inició con un *cuestionario exploratorio* aplicado a 37 estudiantes de cuarto grado de primaria, antes de la Reforma Educativa de 1993. La meta fundamental del mismo fue indagar qué vínculos eran reconocibles entre la construcción del *lenguaje de las fracciones* y de los *conceptos* ligados a tales números. El cuestionario estuvo conformado por 29 problemas de distinta naturaleza; entre ellos, 15 tareas fueron referidas a la suma y resta de fracciones. El último constituyó el ámbito desde el cual comenzamos el estudio del caso que nos ocupa; con ello, el *cuestionario* se transformó en el *primer instrumento involucrado* en dicho estudio de caso ya que nos permitió abstraer el *perfil básico de éste.*

El segundo *instrumento metodológico* del presente estudio fue la *observación directa del aula,* en circunstancias en las que la maestra a cargo del grupo desarrolló algunas actividades de enseñanza centradas en las fracciones. La inclusión de este recurso estuvo motivada por la necesidad de conocer los *tratamientos didácticos* que recibieron los 37 estudiantes mencionados previamente. Este canal también nos permitió corroborar el tipo de desenvolvimiento detectado –a través del cuestionario– en los niños asociados al caso.

El *tercer instrumento metodológico* fue la *entrevista,* la que reunió la información primordial del estudio de caso. La misma adoptó una modalidad individual de desarrollo, apegándose a una meta inicial de exploración cuya subsiguiente ampliación nos condujo a designarla como «entrevista didáctica». Dicha identidad no fue adoptada porque dispusiéramos de algún «modelo de enseñanza» preestablecido a ser incluido en la entrevista, sino que tal distinción sirvió a los fines de caracterizar, de algún modo, su propia naturaleza. En contraste con las ya clásicas entrevistas desarrolladas en el ámbito de la Matemática Educativa (de carácter exploratorio, mayoritariamente), ésta fue proyectada para ser realizada en dos tiempos: originalmente se concretaría una labor de investigación netamente exploratoria, en tanto que –habiendo agotado los límites de la primera fase– la entrevistadora asumiría luego un papel más propositivo, procurando introducir tareas paralelas o problemas simplificados, cuando el sujeto entrevistado evidenciara algún obstáculo cognitivo momentáneamente infranqueable (sin que el protagonismo del último fuese abandonado, en esta nueva etapa). Así, organizamos una entrevista compuesta por 10 tareas ligadas a la suma y resta de fracciones ***(expresadas en distintos planos de representación y susceptibles de ser comparadas entre sí, por parejas de problemas)***, las que resultarían depuradas a posteriori de la elección del estudiante a ser entrevistado.

Validación del estudio

El contraste entre los tres métodos –en lo que al caso considerado se refiere– estuvo previsto como el recurso estabilizador de todo el seguimiento efectuado por distintas vías, en tanto permitió reconocer los modos más regulares de desenvolvimiento del sujeto.

Con dicha confrontación de métodos aplicamos ciertos *procedimientos para la validación de la investigación.* Específicamente, apelamos a una *triangulación* de todas las situaciones cuyos *contenidos cognitivos y didácticos* fueran *comunes* y constatamos por esa vía la permanencia de los rasgos fundamentales del caso.

El cuestionario y el perfil del caso

Las respuestas desarrolladas por los 37 estudiantes, a través del cuestionario, nos permitieron reconocer una gran diversidad de procesos cognitivos susceptibles de ser inferidos, desde las soluciones planteadas frente a las tareas de suma de fracciones. Sin embargo, muchas de las repuestas manifiestas requerían mayor profundización y una óptima reconstrucción de los procesos cognitivos a ellas ligados, en la dirección de poder constatar las hipótesis que llegamos a formular en cada una de tales situaciones. Esa fue la condición básica exhibida -entre otros- por el caso que aquí nos ocupa.

¿Cuáles fueron los *rasgos primordiales* de *este caso*? El *cuestionario* nos facilitó el reconocimiento de cierta *regularidad* manifiesta en algunos alumnos: **cuando la suma de fracciones era introducida mediante un problema verbal, estos niños (7/37) apelaban a tratamientos algorítmicos incorrectos, en contraste con las soluciones adecuadas que ellos desarrollaban en presencia de la misma suma de fracciones, a partir del uso de un dibujo** (una figura geométrica, una colección de objetos dados por la investigadora, o bien, una representación pictórica libremente seleccionada por los escolares). Es decir, los mencionados estudiantes podían superar sus propios errores algorítmicos, en las situaciones en las que abandonaban el ámbito de los signos convencionales y arbitrarios, desarrollando pictóricamente la suma de fracciones a través de un dibujo; con ello, los niños conformaban eficazmente sus «algoritmos gráficos» (según la designación de Kieren, 1985, destacada por nosotros con anterioridad).

Asimismo, llegamos a detectar *otro rasgo relevante* asociado al caso, el cual involucró el *reconocimiento de la unidad*. De conjunto, el grupo escolar incorporado a nuestro estudio evidenció una fuerte tendencia: en las tareas que requerían la elaboración personal de un problema asociado a cierta suma (nivel de «invención» de problemas, por parte del niño) los estudiantes escogieron situaciones de medición bastante convencionales, pero no pudieron reconocer una unidad de medida compatible con cada uno de tales planteamientos. Los escolares vinculados a este caso (7/37) también expresaron esa dificultad, en el nivel de formulación del problema verbal; sin embargo, ellos mismos podían trascender dicho obstáculo cuando escogían un dibujo y desarrollaban un «algoritmo gráfico». Ilustramos esto más adelante (en la Tabla 1 y en la sección a ella asociada).

Por todo lo anterior, caracterizamos el *caso* como ***expresión de un dominio intuitivo de las situaciones aditivas referidas a las fracciones***, el cual estuvo ***favorecido por el uso de representaciones pictóricas***.

Tal dominio intuitivo podría devenir de un ejercicio generalizado y eficiente de los "mecanismos constructivos" de la fracción ("partición", "equivalencia cuantitativa" y "formación de unidades divisibles", Kieren, 1983, 1984, 1988), aplicados luego en el ámbito de la adición, espacio de mayor complejidad cognitiva. En esos términos formulamos la ***hipótesis del caso***.

Para la realización de la entrevista y la consiguiente profundización del caso, entre todos los alumnos vinculados a éste (7/37) escogimos a Fabiola. El motivo de dicha decisión estuvo referido a su desempeño general eficiente, el cual nos permitiría abordar su manejo de la adición de fracciones, sin la interferencia de otros obstáculos cognitivos. En las 15 tareas del cuestionario ligadas a la suma y resta de fracciones, Fabiola frecuentemente evidenció ciertos errores sintácticos típicos (al desarrollar los algoritmos convencionales), en tanto que el dibujo le permitió acceder sistemáticamente a soluciones correctas, a nivel de la elaboración de «algoritmos gráficos» (dicho recurso fue espontáneo en las situaciones de resta de fracciones, bloque de tareas del cuestionario en el que nosotros no demandamos a los niños el uso de representaciones pictóricas, dadas las dificultades de su articulación con la sustracción).

El caso, a la luz de la observación del aula

La observación directa constituyó el canal por el cual llegamos a reconstruir algunas características primordiales de la enseñanza recibida por este grupo escolar. De ese modo, constatamos que el *modelo básico* usado para la identificación de la fracción y el subsiguiente establecimiento de comparaciones numéricas, fue el *geométrico*; en cuyo marco prevalecieron los *significados* de la *relación parte-todo* y la *medida*. En tanto que en el terreno de la *adición de fracciones*, los *tratamientos* fueron eminentemente *algorítmicos*. Esto último facilitó, en parte, el completamiento de la hipótesis ya formulada: si el ***dominio intuitivo de la adición*** previamente descrito no fue propiciado por la enseñanza, emergía entonces como un ejercicio espontáneo de los niños ligados al caso.

La observación directa del aula favoreció la elección de Fabiola, ya que la pudimos identificar como la alumna con mayor participación, durante el desarrollo de las actividades colectivas de la clase.

La entrevista y sus resultados

En esta sección exhibimos la Tabla 1, la que contiene los problemas presentados a Fabiola y las correspondientes ***respuestas finales*** planteadas por la niña. Ante la trascendencia de algunos pasajes de esta entrevista y de ciertos procesos de resolución intermedios (ausentes en dicha tabla), nos centraremos particularmente en ellos, a través del análisis.

En la Tarea 1, Fabiola elaboró un texto estático (es decir, un escrito en el que no se registraron cambios asociados a una secuencia temporal). Aunque el mismo involucró una situación de medición, la niña no identificó una unidad de medida que le resultara compatible. Por otra parte, ambas fracciones estuvieron referidas a distintas clases de objetos. Tales inconsistencias de su discurso imposibilitaron el planteamiento final de un enunciado interrogativo, dado que éste incorporaría un cierre de sentido (irrealizable bajo dicha modalidad de articulación). Asimismo, las inconsistencias del discurso recién aludidas, revelaron cuáles eran los principales obstáculos cognitivos enfrentados por la alumna.

Tabla 1. Tareas y soluciones desarrolladas en la entrevista de Fabiola.

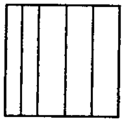
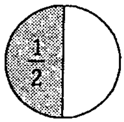
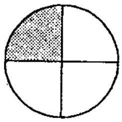
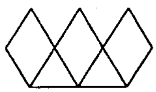
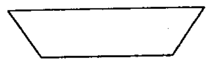
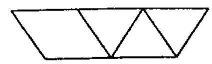
Tarea 1 Inventa un problema que contenga 2/8 + 2/4	"Benito tiene 2/8 de manzanas y 2/4 de ciruelas = 2/9 + 2/4 = 2/12"
Tarea 2 Inventa un problema que contenga 1/2 − 1/4	"Carlos tiene 1/2 de chocolares y le dio 1/4 a su hermano. ¿Ahora cuánto tiene de chocolates?" 1/2 − 1/4 = 1/4
Tarea 3 Escoge una figura en la que puedas representar: 2/8 + 2/4	 $\frac{3}{4}$
Tarea 4 ¿Cómo representarías 1/2 − 1/4, con lápiz y papel?	"Juan compró medio chocolate y solamente se comió la mitad de lo que tenía, o sea, un cuarto de chocolate."   $\frac{1}{4}$
Tarea 5 Confrontación de las respuestas a las Tareas 1 y 3.	Fabiola evidenció gran conflicto ante ambas soluciones e intentó ratificarlas, diciendo que eran equivalentes. Con la ayuda de nuevos dibujos, ella reconoció su error sintáctico.
Tarea 6 Contraste entre las soluciones de las Tareas 2 y 4.	La estudiante realizó esta tarea sin conflicto alguno y confirmó que la fracción 1/4 era el resultado común de ambos problemas.
Tarea 7 Reconstrucción de dos soluciones contradictorias, frente a unos problemas del cuestionario exploratorio que incluían la misma información cuantitativa.	En la entrevista, Fabiola rectificó el error sintáctico que previamente manifestara en el cuestionario exploratorio, gracias al desarrollo de un nuevo 'algoritmo gráfico'. Este último (como el dibujo conformado en el cuestionario) brindó una representación correcta de la resta considerada.
Tarea 8 En este conjunto, representa: 1/2 + 2/6	Fabiola también escribió dos fracciones equivalentes.
Tarea 9 Usa los bloques para representar, en esta figura: 2/8 + 2/4 	 La niña combinó dos tipos diferentes de blo-ques y señaló a "6/8" como el correspondiente resultado.

Tabla 1. Tareas y soluciones desarrolladas en la entrevista de Fabiola. (continuación)

Tarea 10 En esta figura, utiliza los bloques para representar: 1 - 2/5 	 Ella dijo: "sacamos dos quintos... quedan tres quintos".

Con respecto al tratamiento algorítmico vinculado al texto de la Tarea 1, la entrevistada sumó entre sí los denominadores (como si fueran números naturales).

En presencia de la Tarea 2, la niña desarrolló dos intentos de solución. En el primero de los cuales, ella escribió: **"Carlos tiene 1/2 kilo de chocolates y 1/4 de frituras".** A pesar de que no llegó a finalizar la elaboración del mencionado texto, a través de él pudieron ser identificadas los dos obstáculos cognitivos señalados en el párrafo anterior: la ausencia de una unidad de medida ligada a la segunda fracción (en contraste con la primera fracción, la que resultó asociada a una unidad de medida convencional) y la referencia de ambos sumandos a clases distintas de objetos (o sea, a diversos referentes concretos). Finalmente, en el segundo intento escribió el texto contenido en la Tabla 1, el cual es portador de una reelaboración o reestructuración rectificadora de su interpretación inicial. Aquí, la resta le permitió a Fabiola referir la operación a una única clase de objetos (esto es, al mismo referente concreto) e iniciar el tránsito hacia la identificación de cierta unidad de medida idónea.

En cuanto al último manejo algorítmico de la estudiante (en la Tarea 2), su manifiesto dominio de la equivalencia podría ser atribuido a la familiaridad con la que pudo reconocer a las fracciones involucradas en la resta. Como consecuencia de ello, la solución planteada fue correcta.

Asimismo, la diversidad evidenciada en ambas actividades escritas (Tareas 1 y 2) pusieron de relieve una notoria inestabilidad en las soluciones propuestas, en presencia de los problemas verbales. En esto y en vinculación con los obstáculos cognitivos reconocidos previamente, Fabiola exhibió similares patrones de respuesta, tanto en el cuestionario exploratorio como en la entrevista.

En el marco de resolución de la Tarea 3, la entrevistada escogió consecutivamente distintos todos continuos, a los que subdividió conforme a estrategias de partición de diferente naturaleza. El salto de una figura a otra estuvo dado en términos de descarte del modelo precedente; con lo cual, su tercera figura emergió como la respuesta definitiva. Seguidamente, reproducimos las representaciones pictóricas desarrollados por Fabiola (véase la Figura 1).

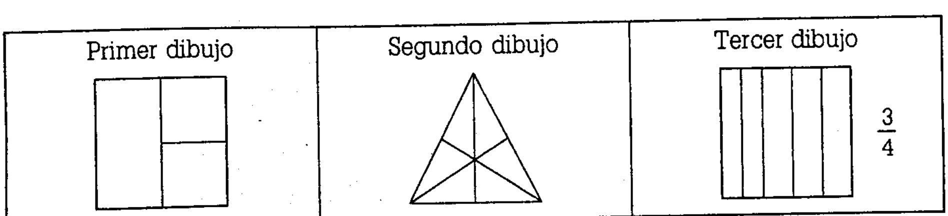
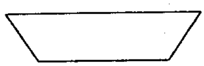
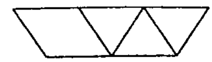


Figura 1. Diseños de Fabiola, asociadas a la Tarea 3

Tabla 1. Tareas y soluciones desarrolladas en la entrevista de Fabiola. (continuación)

Tarea 10 En esta figura, utiliza los bloques para representar: 1 - 2/5 	 Ella dijo: "sacamos dos quintos... quedan tres quintos".

Con respecto al tratamiento algorítmico vinculado al texto de la Tarea 1, la entrevistada sumó entre sí los denominadores (como si fueran números naturales).

En presencia de la Tarea 2, la niña desarrolló dos intentos de solución. En el primero de los cuales, ella escribió: **"Carlos tiene 1/2 kilo de chocolates y 1/4 de frituras".** A pesar de que no llegó a finalizar la elaboración del mencionado texto, a través de él pudieron ser identificadas los dos obstáculos cognitivos señalados en el párrafo anterior: la ausencia de una unidad de medida ligada a la segunda fracción (en contraste con la primera fracción, la que resultó asociada a una unidad de medida convencional) y la referencia de ambos sumandos a clases distintas de objetos (o sea, a diversos referentes concretos). Finalmente, en el segundo intento escribió el texto contenido en la Tabla 1, el cual es portador de una reelaboración o reestructuración rectificadora de su interpretación inicial. Aquí, la resta le permitió a Fabiola referir la operación a una única clase de objetos (esto es, al mismo referente concreto) e iniciar el tránsito hacia la identificación de cierta unidad de medida idónea.

En cuanto al último manejo algorítmico de la estudiante (en la Tarea 2), su manifiesto dominio de la equivalencia podría ser atribuido a la familiaridad con la que pudo reconocer a las fracciones involucradas en la resta. Como consecuencia de ello, la solución planteada fue correcta.

Asimismo, la diversidad evidenciada en ambas actividades escritas (Tareas 1 y 2) pusieron de relieve una notoria inestabilidad en las soluciones propuestas, en presencia de los problemas verbales. En esto y en vinculación con los obstáculos cognitivos reconocidos previamente, Fabiola exhibió similares patrones de respuesta, tanto en el cuestionario exploratorio como en la entrevista.

En el marco de resolución de la Tarea 3, la entrevistada escogió consecutivamente distintos todos continuos, a los que subdividió conforme a estrategias de partición de diferente naturaleza. El salto de una figura a otra estuvo dado en términos de descarte del modelo precedente; con lo cual, su tercera figura emergió como la respuesta definitiva. Seguidamente, reproducimos las representaciones pictóricas desarrollados por Fabiola (véase la Figura 1).

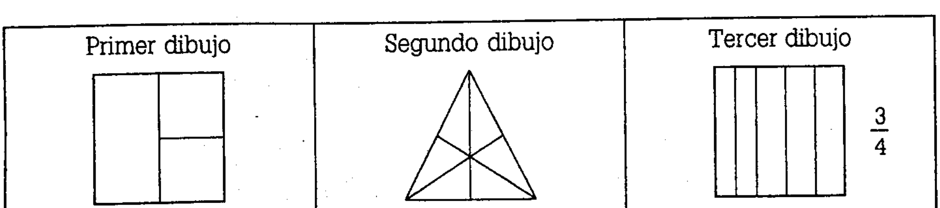


Figura 1. Diseños de Fabiola, asociadas a la Tarea 3

Se nos dificultó la reconstrucción del pensamiento ligado a dichas rectificaciones pictóricas, ya que nuestra entrevistada no mantuvo un diálogo fluido. Con gran esfuerzo y ante nuestras preguntas, la niña expresó (con respecto a los dibujos 1 y 2): ***"son dos cuartos y un cuarto (que significa dos octavos)... son tres... tres cuartos".*** Al reconocer a "tres cuartos" como el resultado, se centró en el numerador e intentó dividir el todo inicial en tres partes. No obstante, en la tercera figura pudo imaginar y localizar concretamente el complemento de tres cuartos, señalando la parte no pintada del cuadrado. A posteriori, reconstruyó mentalmente el proceso de identificación de la fracción, mientras decía: ***"un octavo, dos octavos ..."*** (en tanto, desplazaba su índice sobre las dos partes iluminadas junto al lado izquierdo de la última figura) ***"un cuarto y un cuarto"*** (indicando, luego, las partes pintadas del lado derecho de dicho cuadrado). Al concluir, escribió el numeral **«3/4»**. El sentido del sombreado fue reconocible a través de sus últimas verbalizaciones, a partir de las cuales se abrieron paso algunas fracciones unitarias; dichas explicitaciones y la existencia de cuatro patrones diferenciados de sombreado ratifican las afirmaciones de Kieren (1985), con respecto al papel generador que cumplen las fracciones unitarias. Muchos de los compañeros de Fabiola desarrollaron sombreados semejantes a éstos, en el cuestionario.

La Tarea 4 enfrentó a Fabiola con una demanda inexistente en el cuestionario exploratorio, donde evitamos la inclusión de actividades que -directa o indirectamente- propiciasen la representación pictórica de la sustracción, en virtud de la marcada ambigüedad que suelen detentar esos dibujos. Decidimos abrir tal espacio de exploración en la entrevista, atendiendo a la riqueza que ésta facilita, en el ámbito de confluencia y articulación de distintos tipos de representación. Por ello, la consigna de trabajo de la Tarea 4 fue expresada en términos tales que permitiese la propia elección de Fabiola, en el "plano gráfico" o "de lápiz y papel" (designación que genéricamente incluye la escritura, el dibujo o cualquier otra clase de marcas sobre el papel). En una primera aproximación, la estudiante escribió: **"Juan compró 1/2 de papel de lustre, pero solamente ocupó 1/4. ¿Cuánto papel le sobró?"** Frente a lo cual, nosotros le sugerimos que lo dibujase y la niña realizó los diseños exhibidos en la parte superior de la Figura 2. Para dotar de sentido a lo dibujado, espontáneamente Fabiola escribió un nuevo texto: **"Juan había comprado medio chocolate y sólo se comió la mitad de lo que tenía, o sea, un cuarto de chocolate."** Puede observarse que la alumna ha propuesto por ambas vías de representación, en este espacio de resolución de problemas, un modelo muy dinámico.

Nosotros le preguntamos a la niña si agregaría algo más a la ya realizada secuencia de dibujos o si así era suficientemente clara. Ante lo cual, Fabiola amplió la serie pictórica, agregándole dos diseños encadenados por el sentido (los mismos se encuentran reproducidos en la parte inferior de la Figura 2). Bajo la última modalidad de representación secuencial, ella reconstruyó el todo e identificó la unidad a la que la fracción estaba referida.

La Tarea 5 consistió en el contraste entre dos soluciones contradictorias, correspondientes a las Tareas 1 y 3 (en las que a la misma suma le asignó resultados diferentes). Al advertir dicha circunstancia, la entrevistada dio muestras de un profundo conflicto cognitivo. Luego, se esforzó por mantener como válidas ambas soluciones, por lo que llegó a afirmar que las fracciones (2/12 y 3/4) explicitadas por ella como resultado de la suma, eran "equivalentes". Para poner a prueba tal error, demandamos a la niña la

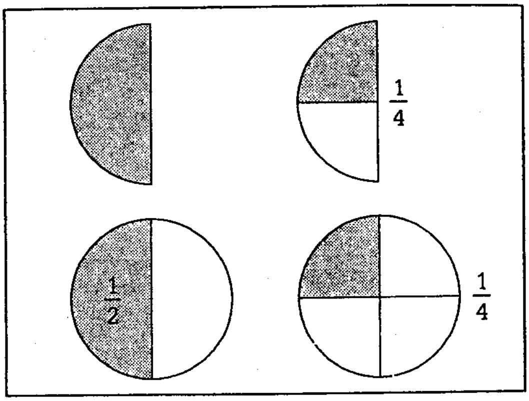


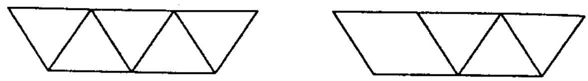
Figura 2. Secuencia pictórica asociada a la Tarea 4

realización de un dibujo que le permitiese confirmar lo que estaba planteando. Por dicha vía, Fabiola comprobó que la supuesta equivalencia entre 2/12 y 3/4 era falsa. Fue notoria -mediado este recorrido en torno a la Tarea 5- la prevalencia circunstancial del algoritmo sobre los recursos intuitivos de la representación pictórica, en virtud de que Fabiola parecía aferrarse a la pseudo-certeza provista por las entidades numéricas y su manejo sintáctico; este último constituyó la fuente del error, ya que la alumna estableció un algoritmo no convencional para la suma, en la Tarea 1, dando después por verdadera la equivalencia entre ambos resultados obtenidos en el plano de los procedimientos sintácticos.

Lo destacado en el párrafo anterior ofrece una velada advertencia acerca de los peligros que conlleva una enseñanza unidireccional, como la que -en este caso- nosotros pudimos reconocer (a través de la observación directa del aula). En dicho escenario advertimos que Fabiola y sus compañeros fueron orientados hacia el manejo predominantemente algorítmico de la fracción, quedando relegados los tratamientos intuitivos e informales, durante el desarrollo de las actividades grupales.

Las Tareas 9 y 10 de la entrevista introdujeron la manipulación de ciertos materiales concretos (los Bloques de Zullie, 1975), en asociación con la suma y resta de fracciones, por cuyo intermedio nos adentramos en la exploración de las «representaciones de la actuación" (en el sentido de lo designado por Bruner, 1966, como "enactive representations"). Fabiola realizó algunos breves ensayos previos, comparando entre sí dichos bloques (de diferentes formas, tamaños y colores) y sobreponiéndolos alternativamente a las figuras dadas. Con bastante rapidez, la escolar resolvió adecuadamente ambos problemas; las respectivas respuestas han sido incluidas en la Tabla 1. En particular, ante la Tarea 10 *la niña cubrió toda la figura* con los bloques triangulares, para retirar luego dos de éstos y expresar ***"tenemos cinco quintos ... sacamos dos quintos ... quedan tres quintos"*** (la Figura 3 contiene la reconstrucción del mencionado proceso); este pasaje de la entrevista esclareció el rol estructurante desempeñado por la unidad, la cual fue inicialmente representada, traducida y explicitada por la alumna ("tenenos ***cinco quintos***" en asociación con ***1***, en tanto cubría toda la figura), antes de centrarse en la resta indicada por el enunciado del problema (1 - 2/5) y dar solución a éste.

Usa los bloques para representar, en esta figura: 1 - 2/5



"Tenemos cinco quintos... sacamos dos quintos... quedan tres quintos"

Figura 3. Proceso de resolución vinculado a la Tarea 10

Su desenvolvimiento en estos dos últimos marcos de tarea, reveló que Fabiola había generalizado el dominio pictórico de la adición de fracciones a otros terrenos muy concretos de representación, los que permanecieron ligados al plano de la acción y la experiencia.

Las Tareas 6, 7 y 8 fueron realizadas con marcada facilidad, razón por la cual no nos detenemos en un análisis específico de las mismas.

Conclusiones

Fabiola pudo generalizar un reconocimiento primordialmente intuitivo de las relaciones entre fracciones y las operaciones de adición y sustracción, desde el plano pictórico hacia otras modalidades de representación concreta. Con lo cual, tales recursos conformaron los procesos más fluidos y accesibles que la entrevistada comprometió, en la resolución de los problemas propuestos.

En general, a través del uso de las representaciones concretas destacadas en el párrafo anterior, la niña evidenció adecuadas identificaciones de la unidad, en los diversos contextos de tarea, a la par que efectuó particiones correctas en la mayoría de los todos considerados y accedió a un manejo elemental de la equivalencia entre fracciones. Es decir, lo antedicho nos permitió constatar la hipótesis formulada previamente, ante este caso.

La entrevistada manifestó fluctuaciones en el dominio de dichos "mecanismos de construcción de la fracción", cuando tales recursos intuitivos entraron en competencia con los procedimientos sintácticos y algorítmicos, en los que llegó a depositar su mayor confianza (por influencia de una instrucción previa básicamente respaldada por estos últimos).

El Caso de Fabiola puede ser de gran interés para el maestro, ya que pone de relieve la necesidad de otros puntos de partida y nuevas orientaciones a plasmar en la enseñanza (distintas de la eminentemente algorítmica), habiendo reconocido algunas tendencias espontáneas de los niños, las que podrían alcanzar mayores niveles de eficacia en tanto fuesen fortalecidas desde el trabajo en el aula. Específicamente, Fabiola evidencia que la ***incorporación del dibujo a la enseñanza*** brindaría al estudiante una potente fuente de ***representaciones cargadas de sentido,*** en tanto ***el dibujo fuese convenientemente vinculado con la propia experiencia del sujeto cognoscente, con los contenidos instruccionales a los que resulte referido y con otros modelos intuitivos de enseñanza*** (entre otros, aquéllos que se apoyan en el uso de materiales concretos).

Referencias

Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. (1983). Rational-Numbers Concepts. En: R. Lesh y M. Landau (Eds.) *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes* (91-126). Orlando: Academic Press.

Bruner, J. (1966). On Cognitive Growth. En: J. Bruner, R. Oliver y P. Greenfield (Eds.) *Studies in Cognitive Growth.* New York: Wiley.

Kieren, T. E. (1983). Partitioning, Equivalence and the Construction of Rational Number Ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education.* 506-508.

Kieren, T. E. (1984). Mathematical Knowledge Building: The Mathematics Teacher as Consulting Architect. *35th International Congress on Mathematical Education.* 187-194.

Kieren, T. E., Nelson, D.y Smith, G. (1985). Graphical Algorithms in Partitioning Tasks. *The Journal of Mathematical Behavior,4.* 25-36.

Kieren, T. E. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. En: J. Hiebert y M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades, 2* (162-181). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Laborde, C. (1990). Language and Mathematics. En: P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics and Cognition* (53-69). New York: Cambridge University Press.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. En: C. Janvier (Ed.) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (33-40). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Sastre, G. (1984). *Aprendizaje de los Signos Aritméticos y su Generalización.* Barcelona: Instituto Municipal de Investigación en Psicología Aplicada a la Educación..

Sastre, G. y Moreno, M. (1980). *Descubrimiento y Construcción de Conocimientos.* Barcelona: Gedisa.

Streefland, L. (1990a). Realistic Mathematics Education. What does it mean? En K. Gravemeijer, M. van den Heuvel y L. Streefland (Eds.) *Contexts Free Productions Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education* (1-9). Utrecht: State University.

Streefland, L. (1990b). Free Productions in Teaching and Learning Mathematics. En K. Gravemeijer, M. van den Heuvel y L. Streefland (Eds.) *Contexts Free Productions Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education* (33-52). Utrecht: State University.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 22, 46-61.

Valdemoros, M. (1991). *Observaciones de Algunas Clases Centradas en las Fracciones.* Reporte Técnico. México: CINVESTAV-Matemática Educativa.

Valdemoros, M. (1992a). *Análisis de los Resultados Obtenidos a través de un Examen Exploratorio del «Lenguaje de las Fracciones». Segunda Parte.* Reporte Técnico. México: CIN-VESTAV-Matemática Educativa.

Valdemoros, M. (1992b). *Las Fracciones en Cuarto Grado: Estudio de Casos. Primera Parte.* Reporte Técnico. México: CINVESTAV-Matemática Educativa.

Valdemoros, M. (1993a). *La Construcción del Lenguaje de las Fracciones y de los Conceptos Involucrados en él.* Tesis Doctoral. México: CINVESTAV-Matemática Educativa.

Valdemoros, M. (1993b). The Language of Fractions as an Active Vehicle for Concepts. *Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of PME-NA, 1.* 233-239.

Valdemoros, M. (1994a). Fracciones, Referentes Concretos y Vínculos Referenciales. *Memorias de la VIII Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* 21-30.

Valdemoros, M. (1994b). Various Representations of the Fraction through a Case Study. *Proceedings of the Eighteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2.* 16-23.

Zullie, M. E. (1975). *Fractions with Pattern Bloocks.* Palo Alto: Creative Publications.