Método de Newton y Caos

Resumen

En este trabajo se muestra cómo el método de Newton permite introducir informalmente en los primeros cursos de cálculo conceptos de la teoría de sistemas dinámicos como periodicidad, dependencia de la condición inicial y caos. Para ello se incluye el material que puede ser presentado a los alumnos una vez que se haya discutido brevemente el método de Newton.

Abstract. The purpose of this note is to show how Newton's method can be used early in the first Calculus courses to introduce informally some concepts of Dynamical Systems such as periodicity, dependence on the initial condition and chaos. We include the material of a lecture that can be presented to the students after a brief discussion of Newton's method.

1. Introducción

El método de Newton para aproximar raíces es una de las aplicaciones de la derivada que con frecuencia se presenta en los primeros cursos de cálculo diferencial e integral. Además, es quizás uno de los algoritmos iterativos más interesantes que pueden ser comprendidos con relativamente poca información matemática. El propósito de esta nota es mostrar cómo en los primeros cursos de cálculo el método de Newton permite presentar informalmente conceptos de la teoría de sistemas dinámicos tales como periodicidad, dependencia de la condición inicial y caos. La siguiente sección contiene el material que puede ser presentado a los alumnos una vez que se haya discutido brevemente el método de Newton. En la sección final se incluyen algunos comentarios acerca de cómo surgió el problema estudiado en la segunda sección y que pueden ser de utilidad para el maestro.

2. Un acercamiento al caos

El método de Newton es uno de los algoritmos más eficientes para aproximar raíces. Es fácil ver que cuando la aproximación inicial no es suficientemente cercana, el mé-

Guillermo Pastor
Instituto Tecnológico Autónomo de México
México, D. F.

todo puede producir un resultado distinto al deseado. La figura 1 muestra que aún cuando la función cuenta con una raíz, es posible obtener una sucesión divergente.

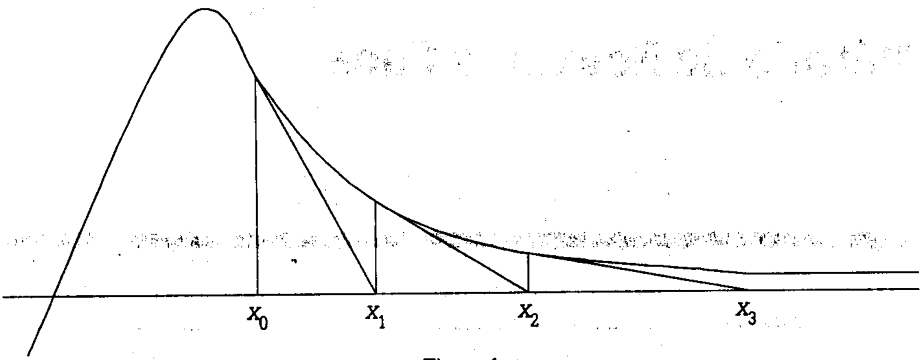

Figura 1

Otro problema que con frecuencia enfrentamos puede apreciarse en la figura 2, donde el método nos lleva a una raíz diferente de la que buscábamos.

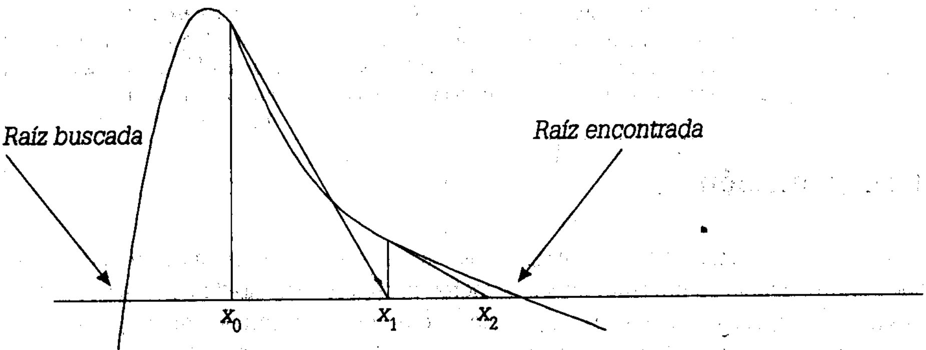

Figura 2

Consideremos ahora la función

$$f'(x) = \frac{(4x-3)^{1/3}}{(4x)^{1/3}}$$

Es inmediato que la función no está definida para $x = 0$ y que su única raíz se encuentra en $x = 3/4$. Sin embargo, nuestro objetivo será estudiar qué tan sensible es el método de Newton a los valores de la aproximación inicial x_0. La derivada de f está dada por,

$$f'(x) = \frac{4}{(4x)^{1/3}(4x-3)^{2/3}}$$

de modo que

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{(4x-3)^{1/3}(4x)^{4/3}(4x-3)^{2/3}}{4(4x)^{1/3}}$$

$$= x - (4x - 3)x$$
$$= 4x(1 - x)$$

Por lo tanto, el método de Newton produce en este caso la fórmula recursiva

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$$

Denotaremos por $F(x)$ a $4x(1 - x)$.

Veamos que sólo es posible converger a la raíz si $0 < x_0 < 1$. Observemos primero que si x_n es negativa, entonces $1 - x_n > 1$, de modo que $x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$ vuelve a ser negativa. Además,

$$|4x_n(1 - x_n)| = 4|x_n||1 - x_n|$$

Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ si x_0 es negativa. Además, si $x_n > 1$, entonces $1 - x_n < 0$, de modo que $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$ es negativa. De aquí se sigue que si $x_0 > 1$, volvemos a obtener que $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Si $0 \leq x_n \leq 0$, entonces $4x_n(1 - x_n) \geq 0$. Como además la función F alcanza su valor máximo en $x = 1/2$ y este valor máximo es 1, tenemos que $0 \leq x_{n+1} \leq 1$ cuando $0 \leq x_n \leq 1$. Finalmente, si $x_n = 1$, entonces $x_{n+1} = 0$ y el método se detiene, ya que no podemos evaluar la función f en este punto.

A pesar de que la expresión $4x(1 - x)$ es muy simple, al iterarla obtenemos polinomios cada vez más complicados. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} x_2 &= F(F(x_0)) \\ &= F^2(x_0) \\ &= 16(x_0 - 5x_0^2 + 8x_0^3 - 4x_0^4) \end{aligned}$$

Procediendo de esta forma se puede verificar fácilmente que $F^3(x)$ es un polinomio de grado ocho, y en general, la k-ésima iteración de la función F es un polinomo de grado 2^k.

Existe afortunadamente una manera muy simple de estudiar las iteraciones de F cuando $0 \leq x_0 \leq 1$. Sea $\theta = \cos^{-1}(1 - 2x_0)$. Es fácil verificar entonces que $x_0 = (1/2)(1 - \cos(\theta))$, por lo que

$$\begin{aligned} x_1 &= 4x_0(1 - x_0) \\ &= 4(1/2)(1 - \cos(\theta))(1 - (1/2)(1 - \cos(\theta))) \\ &= 4(1/2)(1 - \cos(\theta))(1/2)(1 + \cos(\theta)) \\ &= 1 - \cos^2(\theta) \\ &= \sin^2(\theta) \\ &= (1/2)(1 - \cos(20)) \end{aligned}$$

De esta forma vemos que si $x_0 = (1/2)(1 - \cos(\theta))$, entonces $x_n = (1/2)(1 - \cos(2^n\theta))$. Veamos algunas consecuencias curiosas de este hecho.

Si $x_0 = (1/2)\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{2^n \cdot 3}\right)\right)$, entonces

$$x_n = (1/2)\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

Como este valor es 3/4, esto significa que para esta aproximación inicial, después de exactamente n pasos llegamos a la raíz.

Si escogemos $x_0 = (1/2)\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{2^n - 1}\right)\right)$, entonces

$$\begin{aligned} x_n &= (1/2)\left(1 - \cos\left(\frac{2^n 2k\pi}{2^n - 1}\right)\right) \\ &= (1/2)\left(1 - \cos\left(\frac{(2^n - 1)\,2k\pi + 2k\pi}{2^n - 1}\right)\right) \\ &= (1/2)\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{2^n - 1}\right)\right) \\ &= x_0 \end{aligned}$$

Así, si aplicamos el método de Newton con una aproximación inicial de la forma

$$(1/2)\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{2^n - 1}\right)\right)$$

cada n pasos regresamos a nuestra aproximación inicial. Decimos entonces que x_0 es un *punto periódico de periodo n*. Es claro que en este caso no convergemos a la raíz. A cada entero $n > 1$, le podemos asociar $2^{n-1}-1$ puntos periódicos de periodo n, uno por cada k que satisfaga $0 < k < 2^{n-1}$. Observemos además que variando convenientemente los valores de n y k podemos acercarnos arbitrariamente a cualquier valor inicial x_0 a través de puntos periódicos.

Pero si escogemos nuestra aproximación inicial de la forma $x_0 = (1/2)\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{2^n}\right)\right)$, entonces

$$\begin{aligned} x_n &= (1/2)\left(1 - \cos\left(\frac{2^n 2k\pi}{2^n}\right)\right) \\ &= (1/2)(1 - \cos(2k\pi)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y el método se detiene sin que hayamos alcanzado la raíz. Procediendo como en el caso de los puntos periódicos, deducimos que hay una infinidad de puntos x_0 para los cuáles el método de Newton se detiene sin haber alcanzado la raíz, y además, cualquier aproximación inicial x_0 puede ser aproximada por puntos donde el método se detiene sin haber alcanzado la raíz.

En resumen, hay una infinidad de aproximaciones iniciales para las cuales el método converge en un número finito de pasos, hay una infinidad de aproximaciones iniciales que son periódicas, y hay también una infinidad de aproximaciones iniciales donde el método de Newton se detiene sin alcanzar la raíz. Además, dada cualquier aproximación inicial x_0, con $0 < x_0 < 1$, ésta puede ser aproximada arbitrariamente por valores donde el método es periódico, o bien, donde el método se detiene. ¡Esto es el caos!

¿Es usual esperar un comportamiento caótico al aplicar el método de Newton? El ejemplo que analizamos es de hecho muy especial, ya que la función f no es derivable en $x = 3/4$, que es la raíz que buscamos. El siguiente resultado nos garantiza que el método de Newton converge a la raíz bajo condiciones poco restrictivas si la aproximación inicial x_0 es cercana a la raíz. En [**3**] aparece una demostración elemental de este teorema.

Teorema. *Sea f una función con segunda derivada continua en un intervalo I con centro en una raíz r de f. Supongamos existen números positivos m y M tales que $|f'(x)| \geq m$ y $|f''(x)| \leq M$ en I. Si la aproximación inicial x_0 satisface $|x_0 - r| < 2m / M$, entonces x_n converge a r cuando n tiende a infinito.*

3. Comentario final

Uno de los sistemas dinámicos caóticos más simples es el que se obtiene al iterar la función $F(x) = 4x(1 - x)$ en el intervalo [0, 1]. La descripción que aquí presentamos para analizar este sistema dinámico se debe a R. Devaney y aparece en [**1**]. De hecho, la familia de funciones cuadráticas $F\mu(x) = \mu x(1 - x)$, con $\mu > 2 + \sqrt{5}$ produce sistemas dinámicos caóticos. Podemos entonces producir funciones donde el método de Newton es caótico al resolver la ecuación diferencial

$$\mu x(1 - x) = x - \frac{y}{y'}$$

cuya solución general viene dada por

$$y = \frac{c\left(\mu x + 1 - \mu\right)^{1/\mu - 1}}{\left(\mu x\right)^{1/\mu - 1}}$$

Si además μ es es un entero par, obtenemos una función con dominio en todos los reales distintos de cero. Para obtener más información acerca de sistemas dinámicos caóticos y de la convergencia del método de Newton recomendamos además del texto de Devaney los de J. Sandefur [**4**] y P. Henrici [**2**].

Referencias

R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Benjamin Cummins Publishing Co. Inc., 1989.

P. Henrici, *Elementos de análisis numérico*, Editorial Trillas, México, 1972.

E. J. Purcell y D. Varberg, *Cálculo con Geometría Analítica*, Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., 1993.

J.T. Sandefur, *Discrete Dynamical Systems: Theory and Applications*, Oxford University Press, 1990.