Ilustración del Uso de la Historia de la Matemática en una Enseñanza Centrada en Problemas

Resumen

El objetivo de estas notas es comunicar nuestras reflexiones sobre una de las múltiples formas en que la Historia de la Matemática puede usarse, sin hacer referencia explícita a ella, para una enseñanza centrada en problemás. Ilustramos este propósito con tres problemas provenientes de la amplia y fértil historia de los triángulos rectángulos, donde se mezclan ideas simples y asequibles de teoría de los números, álgebra y geometría.
En los presupuestos didácticos y las consideraciones metodológicas que exponemos al comienzo, así como en las recomendaciones que expresamos al final, presentamos suscintamente alternativas para el profesor.

Abstract. The main purpose of this notes is to communicate our reflections about one of the variety of ways in which the history of mathematics may be used, without explicit reference to it, in the realm of problem centered teaching. We illustrate this proposal with three problems whose origin is in the ample and fertile history of the rectangle triangles, where there is a blend of simple ideas of the number theory, algebra and geometry.
In the didactic assumptions and methodological considerations initially made, as well as, in the recommendations presented at the end, we provide, briefly, some alternatives for the teacher.

Ex praeterito, spes in futurum
aforismo clásico

Introducción

Los autores han tenido la oportunidad de colaborar en varios países ibero-americanos, en diferentes actividades educativas, principalmente en formación de profesores. Hemos confrontado dificultades, hemos desarrollado experiencia y quisieramos compartir reflexiones y posibles soluciones.

¿Cuáles son las deficiencias detectadas? Son muchas y diversas, pero nuestra experiencia profesional nos conduce a significar cuatro tipos principales:

Carlos Sánchez Fernández
Concepción Valdés Castro
Universidad de la Habana
Cuba

- Deficiencias heurísticas.- Dificultades en la resolución de problemas. Encontramos profesores que cuando se les habla de problemas comienzan a tener «problemas».
- Deficiencias motivacionales.-Carencia de la suficiente motivación para resolver los problemas. En muchos casos el profesor se considera obligado a resolver todos los problemas en la pizarra, mecánica y fríamente, dejando a los alumnos con un sentimiento de frustración e inferioridad.
- Deficiencias culturales.-Relacionadas con la cultura matemática y general necesarias para comprender la esencia del planteamiento de los problemas y para expresar con precisión y claridad sus ideas sobre los problemas
- Deficiencias parroquiales.-Visión unilateral y estrecha sobre la Matemática, la cual se concibe como un conglomerado de cátedras (quizás sea mejor decir «catedrales») independientes, con una jurisdicción limitada a las mínimas parcelas del conocimiento matemático.

Consideramos que la Historia de la Matemática, en concordancia con otros muchos elementos pedagógicos, puede ejercer una influencia terapéutica en el remedio de estos tipos de dolencias, que se enfrentan mejor en una enseñanza centrada en problemas.

Presupuestos didácticos

Tomando en consideración los tipos de problemas fundamentales antes señalados, es que concebimos nuestra acción sustentada en los cinco presupuestos siguientes:

1.-.Alumnos y profesores deben considerarse inmersos en un contexto socio-cultural que condiciona ciertas ideas previas acerca de lo que es la matemática, cómo se desarrolló, cuál es el objetivo de su enseñanza, para qué se aprende la resolución de problemas, cual es el papel del profesor y del alumno en este aprendizaje. Estas preconcepciones condicionan la aparición de bloqueos de tipo afectivo, culturales y cognoscitivos que marcan fuertemente la actividad de aprendizaje.(Guzmán1991).

2.-La ensenanza de la resolución de problemas es como un arte, en el sentido dado por Stanic y Kilpatrick (1989), pero un arte que se desarrolla de forma colectiva, mediante las interrelaciones propias del grupo de alumnos con el profesor y de los alumnos entre si. Al igual que los aprendices de pintura que se ejercitan «copiando» las grandes obras del pasado, así podemos utilizar la historia del problema matemático para introducir a los alumnos en el arte de la resolución de problemas, pero siempre procurando apreciar ese arte desde un punto de vista crítico.

3.- La pregunta, el diálogo, la duda, el cuestionamiento crítico, son parte fundamental del método de trabajo en la sala de clase. Se debe enseñar al alumno no solo a resolver los problemas que propone el profesor, sino también a plantearse problemas. En el diálogo se detectan las preconcepciones y los obstáculos presentes en el alumno y se puede determinar mejor el trabajo en la zona de desarrollo potencial.(Vigotsky 1988).

4.- La actividad del alumno es un elemento fundamental en nuestro enfoque, pero no debe entenderse de forma mecanicista. Esta actividad puede ser desarrollada no solo individualmente, sino también en forma conjunta con otros alumnos organizados en pequeños grupos, o en interacción directa con el profesor. (Galperin 1984).

5.- La línea de metodología historicista que considera la matemática a través del estudio de los caminos de su desarrollo está mas cerca de la matemática «viva» que cualquier otro esquema ahistórico. El enorme valor heurístico del enfoque histórico en la enseñanza de la Matemática reside, ante todo, en que la desarticulación abstracta se hace activa, gozando de la potencia de la certeza historica. La Historia de la Matemática, revestida de una fuerza y expresion crítica, estimula y objetiviza el pensamiento creativo. (Sánchez Fernández 1995).

Nuestras consideraciones metodológicas parten del principio de que no existe un método universal, aplicable en cualesquiera condiciones. El profesor debe acercarse con espiritu pluralista, flexible, tendiendo puentes entre los diferentes enfoques metodológicos (Minujin Zmud 1995), así como nosotros hemos pretendido lograr en la conformación de nuestra alternativa.

Problemas ilustrativos

A continuación pretendemos ilustrar como se puede aplicar la historia sin necesidad de hacer referencia explícita a ella. La Historia sirve como fuente surtidora de problemas, contextualiza y guía en la realización de las actividades. El profesor en concordancia con las condicionantes del contrato didáctico, determina cómo, cuándo y dónde explicitar lo histórico. En el texto ilustrativo que sigue, señalamos con paréntesis, posibles momentos de referencia histórica, sin desarrollar la citación. El profesor interessado puede organizar a su gusto y necesidad, la exposición.

Problema 1. Encontrar triángulos rectángulos cuyos tres lados tengan longitud entera

La forma de desarrollo del problema dependerá del nivel y la formación previa de los alumnos. Supondremos que se tiene un grupo de alumnos de los ultimos años de enseñanza media o de los primeros años de enseñanza superior.

¿Qué significa encontrar triángulos rectángulos con lados de longitud entera?

Hay que hallar 3 números enteros a, b, c, tales que

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (1)$$

Puede experimentarse buscando algunos ejemplos particulares. En seguida se nota que si (a, b, c) satisface la ecuación (1), entonces (ma, mb, mc) también la satisface. Nótese que si cualesquiera 2 de los números a, b, c tienen un divisor común, entonces el tercero también lo tendrá.

Podemos así proponer el hallazgo de un método para generar tríos (a, b, c) con dos de ellos primos entre si y que satisfagan (1).

Sugerencia 1 Tratemos de reducir el problema a otro mas simple. Nuestra ecuación tiene 3 variables, ¿será posible reducir el número de variables? Por ejemplo,dando una relación entre dos de ellas. Sabemos que $c > a$ luego podríamos suponer $c = a + 1$. ¿Qué se tendría en ese caso?

Se observa que $a^2 + b^2 = (a + 1)^2 \Rightarrow b^2 = 2a + 1$, o sea, b debe ser impar. Sea $b = 2n + 1$, entonces $(2n + 1)^2 = 2a + 1$, de donde $a = 2n^2 + 2n$ y $c = 2n^2 + 2n + 1$, lo que produce los tríos:

$(2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$ $n \in$ **N (Solución de Pitágoras, Dixon 1952)**

¿Serán éstos todos los tríos posibles? Se observa que el trío (8, 15, 17) no está incluído. Podría proponerse hacer $c = a + 2$. De forma similar a la anterior se obtienen los tríos

$(n^2 - 1, 2n, n^2 + 1)$ $n \in$ **N (Solución de Platón, Dixon 1952)**

Este método, en principio, pudiera continuarse y encontrar otros tríos, pero es dudoso que se pueda obtener una fórmula generadora de todos los tríos.

Este momento es oportuno para reflexionar acerca de lo que se ha logrado y el camino seguido. Puede entonces proponerse enfocar el problema de otra forma, usar otra estrategia y tratar de ver si puede hallarse una fórmula generadora de todos los posibles tríos.

Sugerencia 2. Al hacer la reducción de 3 a 2 variables usamos una relación entre 2 de las variables. ¿No habrá otra forma de reducir a 2 las variables en la ecuación (1)? No es difícil obtener de los alumnos la idea de dividir por una de las variables y llegar a la ecuación equivalente

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1 \quad (2)$$

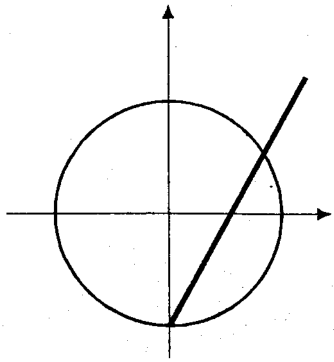
Así el problema se transformó en encontrar los pares de números racionales $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$, que satisfacen (2). Nótese que si se hallan dos números racionales $\frac{l}{k}, \frac{p}{q}$, que satisfacen (2), entonces $(lq)^2 + (kp)^2 = (kq)^2$ y se tiene una solución de (1). Por tanto, tenemos un problema equivalente:

«Hallar las soluciones racionales de la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (3)$$

¿Podemos interpretar el problema en otro lenguaje matemático? Por ejemplo ¿En lenguaje geométrico?

Con un poco de experiencia en geometría analítica, debe surgir rápidamente la idea de encontrar puntos de coordenadas racionales en la circunferencia de radio unidad (3). Hagamos una figura.



Los alumnos pueden observar rápidamente que existen puntos racionales triviales

$$(1\,,0),\ (-1,0),\ (0,1),\ (0,-1)$$

El problema consiste en determinar otros puntos no triviales cuyas coordenadas sean racionales.

¿De qué manera podemos determinar puntos de la circunferencia?. Interceptándola con rectas. ¿Cuáles son las rectas mas simples?

La respuesta esperada es $y = mx$. Después de ensayar esa familia de rectas, se observa que el problema se transforma en encontrar m tal que $m^2 + 1$ sea el cuadrado de un racional, o sea, un problema semejante al original.

¿Qué otra familia de rectas , que sea relativamente simple, pudiera considerarse?

Tomemos una familia de rectas que pase por uno de los 4 puntos racionales triviales. Por ejemplo, $y = mx - 1$ pasa por el punto $(0, -1)$ y tiene pendiente real m.

El otro punto de intercepción con la circunferencia es $\left(\dfrac{2m}{m^2+1}, \dfrac{m^2-1}{m^2+1}\right)$ Evidentemente si $m \in Q$, también $x \in Q$, $y \in Q$. Luego, hemos encontrado un método para generar puntos racionales de la circunferencia. ¿Los generara todos? Es evidente que si m recorre todos los valores reales, entonces la recta $y = mx - 1$ interceptará sucesivamente todos los puntos de la circunferencia, por tanto, debemos analizar si se cumple la implicación

$$\frac{2m}{m^2+1} \in Q, \frac{m^2-1}{m^2+1} \in Q \Rightarrow \mathbf{m} \in Q$$

En efecto, sea $\dfrac{2m}{m^2+1} = \dfrac{a}{b} \in Q$. Entonces debe cumplirse $am^2 - 2mb + a = 0$ de ahí que

$$m = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4a^2}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - a^2}}{a}$$

Por otra parte,

$$\frac{m^2-1}{m^2+1} = \frac{\left(\dfrac{b \pm \sqrt{b^2-a^2}}{a}\right)^2 - 1}{\left(\dfrac{b \pm \sqrt{b^2-a^2}}{a}\right)^2 + 1} = \frac{b^2 \pm b\sqrt{b^2 - a^2 - a}}{b^2 \pm b\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{k}{l} \in Q$$

entonces:

$$b(l-k)\sqrt{b^2-a^2} = b^2(k-l) + la^2 \in Q \Rightarrow k = l, o, \sqrt{b^2-a^2} \in Q$$

pero $k = l$ es imposible, ya que $\left|\frac{k}{l}\right| < 1$, luego tiene que ser $\sqrt{b^2 - a^2} \in Q$ y de ahí que $m \in Q$.

Así que todas las soluciones racionales de (1) vienen expresadas por

$$x = \frac{2m}{m^2 + 1}, y = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}, m \in Q$$

Es decir, hemos resuelto totalmente el problema auxiliar. Debemos regresar al problema original.

Haciendo $m = \frac{p}{q}$ se tiene:

$$x = \frac{2pq}{p^2 + q^2}, y = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$$

y sustituyendo en (3) se ve que

$$a = p^2 - q^2, b = 2pq, c = p^2 + q^2, p \in N, q \in N \quad (4)$$

Basta considerar p, q primos entre si y de diferente paridad.

Hemos obtenido, entonces, una solución general al problema propuesto **(Solución de Diofanto, Dixon 1952)**

Ahora el profesor podría aprovechar para reflexionar sobre el método usado. Una posible vía de trabajo consistiría en analizar la posibilidad de extender el método para buscar puntos racionales en otras curvas, por ejemplo, en las curvas dadas por polinomios de segundo grado. En dependencia de la profundidad y el alcance que pretenda dársele a esta actividad, puede llegarse hasta problemas abiertos de la aritmética de las curvas y múltiples problemas de la geometría algebraica (ver p.e. **Sánchez F. 1996**, o **Stillwell 1994**).

También sería productivo un análisis comparativo de los dos métodos; la comparación entre los resultados y los métodos, así como sus posibilidades respectivas.

Sugerencia 3. Otra variante para atacar el problema propuesto, que exige mayores conocimientos y habilidades por parte de los alumnos, pero que permite la introducción general al trabajo con estructuras algebraicas como dominios de factorización única, se basa en ideas introducidas por Gauss. La idea consiste en «descomponer» en factores el primer miembro de la ecuación (1): $(a + ib)(a - ib) = c^2$y trabajar en el dominio de los enteros gaussianos. Aquí es interesante dejar que los estudiantes den rienda suelta a su imaginación y con la sugerencia de que utilizen analogías (por generalización) entre el conjunto de los enteros y el conjunto de los enteros gaussianos, se pueden extender las propiedades de divisibilidad y obtener las fórmulas (4) de generación de los tríos. (ver **Kleiner 1986**)

Es importante, una vez sea realizado este trabajo «informal», hacer una reconsideración profunda del método seguido, establecer las «propiedades» usadas y encontradas por analogía, y con ello, construir el puente entre intuición, imaginación y los conceptos establecidos, o, en otras palabras, realizar la institucionalización del saber. (Brosseau 1983)

Estas tres estrategias para la resolución del problema propuesto, pueden dar lugar a una gran variedad de situaciones en la clase, en dependencia del grupo de estudiantes, su nivel de desarrollo matemático, sus conocimientos, intereses y el método sugerido por el profesor.

Destaquemos que es posible, e incluso altamente recomendable, desarrollar en forma paralela las tres estrategias, con tres grupos pequeños de estudiantes. Se recomienda que cada cierto tiempo (de acuerdo con el ritmo de trabajo de los estudiantes) se realicen una o varias actividades conclusivas de discusión, donde cada grupo tenga la oportunidad de exponer y defender la estrategia por el utilizada, colectivizando, de esta forma, los resultados y logros obtenidos por los grupos individuales.

Es importante proponer a los alumnos que piensen en las posibles aplicaciones de los resultados alcanzados.

Si los alumnos no proponen otras aplicaciones realmente significativas, puede sugerirse la construccion de triángulos con sus tres lados y la altura entera. (Dixon 1952)

En dependencia de las características de la actividad que se realiza, puede explotarse mas ampliamente la idea con otros problemas relacionados.

Problema II. «Dados dos triángulos rectángulos ¿existirá un tercer triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea el producto de las hipotenusas de los triángulos dados? (VIETA)

Ante todo se «algebriza» el problema, es decir, se traduce a un lenguaje apropiado, así se convierte en:

Si $c^2 = a^2 + b^2, l^2 = m^2 + n^2$ ¿existirán p, q tales que $(cl)^2 = p^2 + q^2$? o de forma equivalente, ¿tales que

$$(a^2 + b^2)(m^2 + n^2) = p^2 + q^2 \ ?$$

Si los alumnos se familiarizaron con la tercera estrategia sugerida antes, entonces es posible que mas o menos rápidamente piensen en la utilización de números complejos:

Es claro que

$$c^2 = |a + lb|^2, l^2 = |m + \mathrm{l}n|^2$$

luego

$$c^2 l^2 = |a + lb|^2 |m + in|^2 = |(m + in)|^2$$

lo que daría inmediatamente la respuesta

$$(a^2 + b^2)(m^2 + n^2) = (am - bn)^2 + (an + bm)^2 \quad (5)$$

o sea,

$$p = |am - bn|, q = an + bm \quad (6)$$

¿será este el único triángulo «producto»? Surge enseguida la posibilidad de considerar los complejos conjugados en cada caso, lo que, en principio, daría 4 soluciones. Puede comprobarse que realmente existe otra solución esencialmente distinta:

$$p = am + bn, q = |an - bm| \quad (7)$$

¿Existirá alguna otra relación entre los triángulos «factores» y el triángulo «producto»?

Ahora pudieran realizarse algunos experimentos, con casos particulares mas sencillos, por ejemplo cuando los triángulos factores son iguales.

Por simple observación puede notarse la relación entre los ángulos en cada caso y realizar la demostración utilizando los números complejos.

En este momento resulta interesante realizar comentarios que permita a los alumnos comparar las estrategias utilizadas y el desarrollo histórico. Vieta utilizó esta multiplicación de triángulos y sus propiedades sin usar los números complejos (que aun no eran aceptados), sino precisamente, como herramienta sustitutiva a los mismos.

Este problema puede desarrollarse mas extensamente proponiendo, por ejemplo, hallar las «potencias» sucesivas de los triángulos y de esa manera llegar a fórmulas donde se puedan reconocer las llamadas fórmulas de Moivre (halladas de esta forma por Vieta, mas de un siglo antes) que sirven para expresar sen $n\varphi$, cos $n\varphi$ en funcion de senφ, cos φ. (ver p.e. **Bashmakova y Slavutin 1976** ó **Sánchez Fernandez 1995)**

PROBLEMA 3 ¿Cuándo un número entero n puede escribirse como suma de dos cuadrados?

Consideremos que todo cuadrado es suma de dos cuadrados.

La fórmula (5) indica que el producto de dos números que sean suma de dos cuadrados es a su vez suma de dos cuadrados. Esto sugiere que nos limitemos inicialmente a los números primos, simplificando el problema.

Después de alguna experimentación se observa que los primos que no se pueden descomponer en suma de cuadrados son 3,7,11,19, 23,... y, al buscar una regularidad, se observa que son de la forma $4n + 3$. Se demuestra fácilmente que un primo de la forma $4n+3$ no puede ser suma de cuadrados.

Por otra parte, todo número primo, excepto 2, es impar, luego quedan los números primos de la forma $4n + 1$.

¿Será posible descomponerlos siempre en suma de dos cuadrados? (**Teorema de Fermat**). La respuesta a esta pregunta no es inmediata ni simple y es posible conducir a los alumnos, al menos, por dos caminos diferentes:

a) usando nuevamente las propiedades de los enteros gaussianos. (ver Herstein 1964)

b) mediante la aplicación de formas cuadráticas binarias. (ver Dixon 1952)

La respuesta definitiva para un entero arbitrario puede obtenerse a través del lema de Euler : «cada divisor de la suma de dos cuadrados de primos relativos es también una suma de dos cuadrados» (**Dixon 1952**)

Así que, resumiendo, los enteros que se descomponen en suma de dos cuadrados son de la forma $2^j a^2 b$ donde cada factor primo de b es de la forma 4n + 1.

Es claro que el desarrollo de cuestiones como esta última requieren de una orientación clara y precisa del profesor. Al introducir al alumno en campos que son nuevos para el, debe de mantenerse un balance adecuado entre autonomía y control, evitando que el alumno recorra todo el camino histórico, pero de tal forma , que se sienta partícipe del hallazgo de los nuevos conocimientos, que sienta la profunda necesidad de cada concepto nuevo introducido, tal y como lo sintieron aquellos que lo introdujeron por primera vez en la historia.

Estos problemas que tienen una larga e interesante historia, permiten su tratamiento en muchas formas. Por ejemplo, la escritura de un número como suma de tres o cuatro cuadrados seria una continuación fructífera que serviría para introducir a los alumnos en dominios numéricos no conmutativos .

El problema de la descomposición en cuatro cuadrados lleva de una forma bastante natural a la introducción de los cuaterniones (ver Herstein 1964), a su vez, el estudio de los cuaterniones es una excelente motivación para la introducción de estructuras algebraicas mas abstractas y para la vinculación con otras ramas de la Matemática como el análisis vectorial.(Sánchez Fernández 1990, 1991 y 1993)

Recomendaciones al profesor

Existen muchas formas de insertar nuestro método en el proceso de aprendizaje, señalemos algunas de las que nos parecen mas efectivas:

a) **seminarios de problemas** con relativa independencia de otras disciplinas tradicionales del curriculum, procurando, además, el objetivo de integración de conocimientos.
b) **cursos de nivelación** al comienzo de uno de los niveles de enseñanza secundario o universitario. Se puede usar también, para comprobar el nivel alcanzado y para familiarizar al grupo con el profesor.
c) **estudio de un tema determinado** dentro de una disciplina concreta. Puede ayudar a integrar conocimientos de la misma disciplina y de esa disciplina con otras.
d) **reciclaje** sobre una materia específica, en un momento apropiado del curso. De esta forma se retoman los temas, ya explicados en forma tradicional, buscando una sistematización de los conocimientos.
e) **clubes de matemática** o círculos de interés, con participación voluntaria. Un buen trabajo permitiría captar mas alumnos voluntarios. La complementación con boletines y otros documentos paradidácticos, pueden generalizar las mejores ideas.

El conocimiento mas profundo y amplio de la Historia de la temática donde esta inmerso un problema dado, permite tener una perspectiva a largo plazo del conjunto de problemas y situaciones problemáticas que serán presentadas y preveer algunas de las situaciones que podrían surgir de forma espontánea en la relación con los alumnos.

Tener presente que un rasgo característico, definitorio, de un problema, es que debe motivar a la persona que lo va a resolver y que el desempeño del individuo frente al mismo, estará fuertemente correlacionado con el interés por darle solución. La Historia es fuente inagotable de tales motivaciones.

A través del análisis histórico y epistemológico de las diferentes vías de resolución de un problema, el profesor puede situarse mejor para comprender los posibles obstáculos didácticos y epistemológicos que deberá enfrentar. En otras palabras, el profesor estará mejor preparado para comprender las causas de los errores de sus alumnos y el porque no entienden el problema.

Es conveniente la reflexión previa sobre cómo y cuáles habilidades de tipo metacognitivo puede desarrollar en el marco de un problema, como ubicar al alumno en la «practica de la matemática», como «introducirlo a la Reina». (**Lester 1988**)

Estar consciente que si bien una buena y concienzuda preparación de la actividad ayudará al éxito de la misma, jamás será posible realizar una planificación previa, una programación exacta de toda la actividad, como cuando la docencia se desarrolla de forma tradicional. En otras palabras, puede planificar y realizar un control, pero nunca de forma autoritaria debe limitar la iniciativa y la originalidad. Esta característica del contrato didáctico debe quedar bien clara desde el comienzo de la actividad y no debe ser violada en todo su desarrollo, porque es la única forma de conseguir una atmósfera propia de un «colectivo de investigadores noveles con un buen orientador científico»

Bibliografía

Bashmakova I ; Slavutin E. (1976) Cálculo de triángulos de F. Vieta e investigación en ecuaciones diofánticas Investigaciones histórico-metodológicas N 21 ed. Nauka. Moscou (en ruso)

Brousseau G.(1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques Recherches en didactique des Mathématiques Vol.4 N2, 165-198

Colectivo de autores (1995) :Aprender haciendo: los métodos participativos.de la enseñanza Min. Ed. Sup. Ciudad Habana

Dixon L.E. (1952) History of the theory of numbers Vol. II Chelsea.Publishing Company N.Y.

Dunham J. (1993) Viaje a través de los genios. Ed. Piramide S.A. Madrid

Galperin P. Y. (1983) La formación de la acción mental, en A.L. Segarte (ed.) Lecturas de Sicología Pedagógica Ed Min. Educ. Sup. Ciudad Habana

Gil Pérez D. (1993) Contribución de la historia y de la filosofía de las Ciencias al desarrollo de un modelo de enseñanza/aprendizaje como investigación Enseñanza de las Ciencias Vol 11 N 2, 197-212

Guzmán M de (1991) Para pensar mejor Ed. Labor. Barcelona

Herstein I.N.(1964) Topics in Algebra

Kleiner I.(1986) Famous problems in mathematics: an outline of a course For the Learning of math. Vol 6 N 1.

Lester F. K.(1994) Musing about research on mathematical problem-solving:1970-1994 Journal for Research in Math. Ed. Special 25 th anniversary issue

Lester F.K. (1989) Reflections about Mathematical Problem-Solving Research, in R.I. Charles and E.A. Silver (eds.) The Teaching and assesing of math. problem-solving Vol. 3 NTCM,115-124

Minujin Zmud A. (1995) En los umbrales del siglo XXI: Un nuevo paradigma educativo antihegemónico Revista Siglo XXI. Perspectivas de la Educ. desde America Latina Año 1 N 2

Pozo J. I. (coordinador) (1994) La Solución de Problemas Ed. Santillana S.A. Madrid

Sánchez Fernández C. (1989) El recurso de la historia y metodología de la Matemática Boletín de la Soc. Cubana de Mat. y Computación (BSCMC) N 11, 11-16

___ (1990) La fascinante historia de los sistemas numéricos hipercomplejos BSCMC N 12, 16-26

___ (1991) La fascinante historia de los sistemas numéricos hiperçomplejos (Segunda Parte) BSCMC N 13, 3-10

___ (1993) Crónicas históricas de enigmas y conjeturas del Análisis Diofántico BSCMC N 15, 32-41

___ (1995) Usos y abusos de la Historia de la Matemática en el proceso de aprendizaje. de los profesionales del tercer milenio, en Proceedings of Meeting of the Inter. Study Group HPM-1994 Blumenau, Brazil

___ (1996) Crónicas históricas acerca de la aritmética de las curvas BSCMC (por aparecer)

Schoenfeld A. (1982) Some thougts on Problem-Solving Research and Mathematics Education, in F.K. Lester and J. Garofalo (eds.) Mathematical Problem-Solving The Franklin Institute Press

Stanik G.M.A.,Kilpatrick J. (1989) Historical perspectives on problem solving in the math. curriculum, in R.I. Charles and E.A. Silver (eds.) The teaching and assesing of math. problem-solving Vol 3 NTCM, 1-22

Stillwell J. (1994) Mathematics and its History 3rd.ed.Springer Verlag

Vigotsky L. S. (1988) Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar, en Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem Ed.Univ. de Sao Paulo, 103-117.