Versión electrónica ISSN: 2448-8089

Contenido

Dirección editorial: Antonio Moreno Paniagua
Editora responsable: Guillermina Waldegg Casanova
Cuidado editorial: Susana Moreno Parada
Corrección de estilo: Ofelia Arruti Hernández
Diagramación: Moisés Arroyo Hernández
Fotomecánica electrónica: Gabriel Miranda Barrón

Certificado de reserva de derechos al uso exclusivo: 04-2002-111517075100-102
Certificado de licitud de contenido: en trámite
Certificado de licitud de título: en trámite

Fecha de edición: abril de 2003.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana.

Impreso en México/Printed in Mexico.

Dirección editorial: Antonio Moreno Paniagua
Editora responsable: Guillermina Waldegg Casanova
Cuidado editorial: Susana Moreno Parada
Corrección de estilo: Ofelia Arruti Hernández
Diagramación: Moisés Arroyo Hernández
Fotomecánica electrónica: Gabriel Miranda Barrón

Certificado de reserva de derechos al uso exclusivo: 04-2002-111517075100-102
Certificado de licitud de contenido: en trámite
Certificado de licitud de título: en trámite

Fecha de edición: abril de 2003.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana.

Impreso en México/Printed in Mexico.

Editorial

La revista Educación Matemática nació del esfuerzo y la integración de un grupo de académicos interesados en difundir los avances en la investigación, y las propuestas de desarrollo e intervención en educación matemática. La convergencia de objetivos y la unión de voluntades han permitido que, por casi tres lustros, Educación Matemática se mantenga como una fuente de consulta ampliamente utilizada y conocida entre quienes se dedican profesionalmente a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Desde su creación en 1989, la revista tuvo el apoyo de Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V., quien la publicó y distribuyó ampliamente. Sin embargo, durante los últimos años, el cuidado de la edición y el envío oportuno de los ejemplares enfrentaron dificultades tan severas que nos vimos obligados a buscar otras alternativas editoriales. Como resultado de ello, en el segundo semestre de 2002, dimos por terminada la relación entre Grupo Editorial Iberoamérica y el Comité Editorial de Educación Matemática. Agradecemos a esta empresa su interés y apoyo durante todos estos años.

En la búsqueda de las condiciones que nos permitan cumplir cabalmente con los compromisos que implican la edición de una publicación periódica al servicio de maestros e investigadores, y después de varias conversaciones y negociaciones para establecer compromisos factibles, hemos firmado un convenio de colaboración con Editorial Santillana, S.A. de C.V., para que esta empresa se haga cargo de la edición, difusión y distribución de Educación Matemática a partir del primer número de 2003.

El cambio de casa editorial nos ha brindado la oportunidad de construir una nueva propuesta editorial para Educación Matemática, aunque sin modificar los objetivos iniciales, aún vigentes. Hemos revisado diversos aspectos relativos a la imagen y presencia de la revista en la comunidad y, más internamente, a la política editorial y a los procesos de arbitraje y revisión de los manuscritos.

Esperamos que el nuevo formato, mucho más moderno y ligero, ayude al lector a localizar y revisar el material de su interés, y que su lectura resulte más ágil y agradable. Una página Web, que muy pronto estará lista, agilizará la comunicación con lectores, autores, revisores, colaboradores y Comité Editorial. La experiencia y profesionalismo de Editorial Santillana serán la garantía para que la publicación y distribución se haga oportunamente.

La nueva política editorial pretende ser más precisa, para que EDUCACIÓN MATEMÁTICA quede mejor caracterizada dentro del espectro de revistas de investigación educativa, tanto en términos de las temáticas incluidas, como de los abordajes y acercamientos teóricos.

Asimismo, la redefinición del proceso de revisión y arbitraje busca que éste sea, a la vez que más claro y expedito, la garantía de la alta calidad académica de los materiales incluidos. Nuestro propósito es acortar los tiempos de arbitraje de manera significativa para que, por un lado, los autores tengan respuesta sobre sus manuscritos en tiempos mucho más breves y, por el otro, los artículos aparezcan oportunamente, de modo que su contenido sea vigente y pertinente.

En esta nueva época, esperamos tener mayores posibilidades de contacto entre quienes consultan la publicación y le brindan su confianza y apoyo, y quienes realizamos los trabajos académico, y de diseño y producción. Invitamos a los lectores a utilizar los recursos que pronto estarán disponibles, para mejorar la comunicación directa.

Este cambio, sin embargo, ha tenido un costo en términos de la continuidad de la revista. En el proceso de negociación con ambas editoriales, nos hemos visto obligados a interrumpir la secuencia y, por primera vez en los 15 años que tiene de vida la revista, no aparecerán los números 2 y 3 del volumen 14.

Los lectores interesados en adquirir números atrasados podrán dirigirse a Grupo Editorial Iberoamérica, quien atenderá las solicitudes de números publicados hasta abril de 2002 (es decir, del volumen 1 al 14). A partir del volumen 15, número 1, las suscripciones y compras directas deberán hacerse en Editorial Santillana.

Agradecemos a autores y lectores su paciencia y comprensión en este proceso y esperamos seguir consolidándonos como la revista de educación matemática en español con más aceptación y prestigio entre la comunidad de educadores de las matemáticas.

El Comité Editorial

Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría

Susana Moriena y Sara Scaglia

Resumen: En este artículo describimos un estudio realizado para detectar la influencia de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos geométricos. Se trata de estudiar la dificultad para identificar una figura geométrica cuando su representación gráfica difiere (por ejemplo, en su posición) de la que se presenta comúnmente en los libros de texto.

En el marco teórico describimos distintos enfoques que proporcionan argumentos para explicar estas dificultades. En el trabajo de campo incluimos las respuestas de alumnos de 8º año de EGB (13 años) en tareas propuestas para estudiar sus interpretaciones de representaciones gráficas de figuras geométricas que responden o no a estereotipos determinados.

Abstract: In this paper we describe a study to detect the influence of stereotyped graphical representations in the teaching and learning of geometrical concepts. We study the difficulties to identify a geometrical figure, when its graphical representation differs (for example, in the position) from that we usually observe in textbooks.

In the theoretical study, we describe different approaches which provide argument to explain these difficulties. In the empirical study, we include the student's answers (13 years old) in tasks proposed to study their interpretations of graphical representations of geometrical figures, corresponding to determined stereotypes.

INTRODUCCIÓN

En este artículo describimos un estudio realizado para detectar la influencia de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos geométricos.

Fecha de recepción: noviembre de 2001.

Utilizamos la expresión *representación gráfica estereotipada* para hacer referencia a representaciones gráficas de figuras geométricas utilizadas con mucha frecuencia en los libros de texto. Estas representaciones gráficas poseen ciertas características visuales (fundamentalmente relacionadas con la posición) irrelevantes para el concepto, pero que influyen en la apreciación de los alumnos. Por ejemplo, la representación gráfica estereotipada del cuadrado y del rectángulo se caracteriza porque los lados son paralelos a las líneas horizontal y vertical, respectivamente; la de la pirámide se caracteriza porque la base se apoya sobre el plano horizontal.

Durante el tratamiento de algunos conceptos geométricos en los niveles de escolaridad obligatorios, es muy común observar que los alumnos tienen dificultad para reconocer una figura geométrica cuando la representación gráfica que se presenta no es la estereotipada.

Diversas investigaciones han puesto de manifiesto estas dificultades (Hershkowitz, Bruckeimer y Vinner, 1987; Hershkowitz, 1989; Parzysz, 1991; Gutiérrez y Jaime, 1996). Schwarz y Hershkowitz (1999) sostienen que el aprendizaje de conceptos en geometría está gobernado por el uso de ejemplos especiales que denominan prototipos.

Gutiérrez y Jaime (1996) afirman que "en la formación de la imagen de un concepto que tiene una persona juega un papel básico la propia experiencia y los ejemplos que se han visto o utilizado tanto en el contexto escolar como extraescolarmente. Con frecuencia estos ejemplos son pocos y con alguna característica visual peculiar, convirtiéndose en prototipos y en los únicos casos de referencia con los que el estudiante puede comparar casos nuevos". Estos autores sostienen que es errónea la creencia acerca de que los estudiantes basan sus razonamientos en definiciones verbales (formales) de los conceptos y de que sus imágenes del concepto tienen un papel secundario. En cambio, encontraron que los estudiantes de magisterio tienen unas imágenes conceptuales muy próximas a las de los estudiantes de primaria, y abundan las imágenes basadas en las figuras prototípicas más frecuentes en los libros de texto (por ejemplo, los triángulos apoyados en la base horizontal y con la altura interior).

La geometría que enseñamos consiste en objetos teóricos, pero pone en juego también representaciones gráficas. Se establece entonces una distinción entre figura (referente teórico, objeto de una teoría) y dibujo (representación gráfica de una figura). El dibujo remite al objeto de una teoría en una lectura hecha con objetos de una teoría. "En la medida en que la geometría enseñada no puede vivir sin el dibujo, es importante que los alumnos aprendan a controlar a través de conocimientos teóricos los aspectos perceptivos ligados al dibujo" (Laborde y Capponi, 1994).

En la siguiente sección describimos algunos enfoques teóricos que podrían explicar la influencia de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos geométricos. Posteriormente, incluimos las respuestas obtenidas en dos tareas propuestas a alumnos de 8º de EGB (13 años) para indagar sobre esta problemática a la luz de las reflexiones teóricas.

MARCO TEÓRICO

En esta sección haremos referencia a diversos enfoques teóricos que permiten explicar las dificultades observadas en los alumnos como consecuencia de la utilización de representaciones gráficas estereotipadas.

La teoría de los conceptos figurales

En primer lugar consideramos las ideas sostenidas por Fischbein (1993). Este autor afirma que las figuras geométricas constituyen una clase especial de conceptos a los que denomina "conceptos figurales", porque poseen una doble naturaleza, conceptual y figural.

Desde el punto de vista conceptual, una figura geométrica (por ejemplo, una circunferencia) constituye un concepto genuino, una entidad ideal abstracta, que se define formalmente (la circunferencia es el conjunto de puntos de un plano que equidistan de un punto fijo denominado centro). Desde el punto de vista figural, una figura geométrica "refleja propiedades espaciales (forma, posición y magnitud)" (Fischbein, 1993). La componente figural de la figura geométrica debería permanecer enteramente sujeta a las limitaciones formales impuestas por la definición.

Esta idea no siempre es comprendida y, a menudo, es olvidada por el estudiante. Aunque conozca la definición de paralelogramo (cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos), puede ser difícil para él ver entre diversas formas la misma categoría de figuras. Desde el punto de vista figural, un paralelogramo propiamente dicho,[1] un rectángulo o un cuadrado son tan diferentes que el efecto unificador del concepto desaparece.

[1] Llamamos "paralelogramo propiamente dicho"al cuadrilátero que posee los lados opuestos paralelos, pero no es cuadrado ni rectángulo.

Según Fischbein, la tendencia a rechazar la definición bajo la presión de limitaciones figurales representa un obstáculo principal en el razonamiento geométrico. En ese sentido, el proceso de construir en la mente del estudiante un concepto figural no debería considerarse un efecto espontáneo de los cursos usuales de geometría. La integración de propiedades figurales y conceptuales con el predominio de las segundas no es un proceso natural y debería constituir una preocupación sistemática del docente.

La teoría del prototipo

En general, se consideran dos aproximaciones diferentes para explicar los mecanismos que gobiernan el aprendizaje de conceptos: la clásica y la probabilística. La aproximación clásica argumenta que "las definiciones juegan un papel central, porque un concepto o una categoría [...] tiene un sistema de reglas que claramente define los límites de la categoría, como también todos sus atributos críticos (los atributos que cada ejemplo debería tener para pertenecer a la categoría)" (Bruner *et al.*, citado en Schwarz y Hershkowitz, 1999).

La aproximación probabilística, en cambio, considera que algunos ejemplos del concepto son más centrales para el aprendizaje que otros. Estos ejemplos de más peso se llaman prototipos y "son los ejemplos que comparten un mayor número de atributos con otros miembros de la categoría, los que tienen un mayor 'parecido familiar'" (Pozo, 1993).

En el caso del aprendizaje de conceptos geométricos, Schwarz y Hershkowitz (1999) afirman que cada concepto tiene uno o varios ejemplos prototípicos, que son los que primero se adquieren. Estos ejemplos prototípicos son usualmente los que poseen una mayor lista de atributos: todos los atributos críticos, así como también otros atributos propios. Por ejemplo, el ejemplo prototípico del concepto de cuadrilátero es el cuadrado. Los investigadores encontraron que las imágenes conceptuales de los niños a menudo incluyen sólo los prototipos. Los ejemplos prototípicos son usados como un marco de referencia tal que otros ejemplos son juzgados por referencia al prototipo como un todo o por referencia a los atributos propios del prototipo en lugar de la referencia a la definición matemática del concepto.

La inteligencia de la percepción visual

En tercer lugar, consideramos la teoría propuesta por Arnheim (1985) para explicar la influencia de las representaciones gráficas estereotipadas en el aprendizaje de los conceptos geométricos. Este autor afirma que, en psicología, ha sido muy común distinguir entre la información que se recibe a través del ojo, por un lado, y el tratamiento al que se somete esa información, por el otro. Sostiene, en cambio, que la percepción visual es una operación mental que interviene (junto con otras, como la memoria o el pensamiento) en la recepción, almacenaje y procesamiento de información. Por esa razón afirma que "la percepción visual es pensamiento visual" (Arnheim, 1985, p. 13). Incluso considera que "en la percepción visual de la forma se dan los comienzos de la formación de conceptos" (Arnheim, 1985, p. 26).

Desde nuestro punto de vista, la importancia de la percepción visual señalada por Arnheim remite a la distinción realizada por Fischbein entre componente conceptual y componente figural de un concepto geométrico. Las dificultades de los alumnos podrían explicarse, tal como sostiene este último, por el predominio de la componente figural sobre la conceptual. Este predominio estaría justificado por la influencia de la percepción visual en la formación de los conceptos.

En cuanto a la teoría del prototipo, es preciso reconocer que la explicación que propone respecto de la adquisición de conceptos está siendo cuestionada. En Pozo (1993) se describen algunas de sus limitaciones, como por ejemplo el hecho de que la adquisición de determinados conceptos (especialmente los científicos) se adecua mejor a la aproximación clásica que a la probabilística. Los resultados de las investigaciones realizadas según este enfoque están siendo interpretados desde otros puntos de vista y, en algunos casos, se ha llegado a conclusiones diferentes.

Por esta razón, el estudio de las respuestas de los alumnos a las tareas propuestas se realiza siguiendo los enfoques de Fischbein y de Arnheim. Desde nuestro punto de vista, estos enfoques proporcionan argumentos útiles para el estudio de las realizaciones de los alumnos. En otro trabajo realizaremos un estudio más detallado de las características de estos enfoques.

ESTUDIO DE CAMPO

Este estudio es de tipo descriptivo, ya que se trata de observar las realizaciones de un grupo de alumnos en torno a una serie de tareas geométricas, a fin de describir, analizar e interpretar sus producciones. Desde el punto de vista de la temporalización, es un estudio transversal. El muestreo es de conveniencia (Cohen y Manion, 1990).

Las tareas fueron propuestas durante el mes de noviembre de 2000 en dos cursos de 8º de EGB, pertenecientes a dos escuelas de la ciudad de Santa Fe (Argentina). En total las resolvieron 53 alumnos, tres de los cuales entregaron sus hojas completamente en blanco.

El objetivo de las tareas propuestas es detectar errores en los alumnos, causados por el uso de representaciones gráficas de las figuras que responden o no a estereotipos determinados.

El estudio de las respuestas de los alumnos se realiza teniendo en cuenta dos aspectos: el porcentaje de alumnos que seleccionan las distintas opciones propuestas en cada tarea y la organización de los argumentos usados por los alumnos en categorías.

Resultados obtenidos en la representación gráfica de poliedros

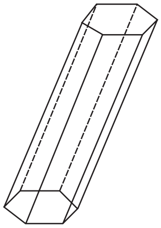
En el cuadro 1 incluimos la tarea presentada a los alumnos.

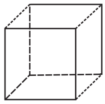
Antes de describir los resultados, incluimos algunas conjeturas de partida que justifican la elección de las figuras incluidas en esta tarea. Los alumnos:

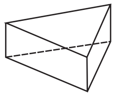
- no tendrán dificultades en reconocer el prisma oblicuo 1 y la pirámide oblicua 7, ya que en cada caso corresponden a las representaciones gráficas estereotipadas.
- tendrán dificultad en reconocer que el cubo 2 constituye un prisma recto.
- no tendrán dificultad en reconocer el prisma 3.
- confundirán el prisma 5 con una pirámide.
- tendrán dificultad para incluir el poliedro 4 en la categoría “ni prisma ni pirámide”.
- confundirán la pirámide 6 con una pirámide oblicua, porque su base no es paralela al plano horizontal.

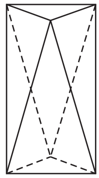
Cuadro 1 Tarea sobre poliedros

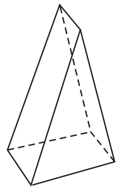
1. Dados los siguientes poliedros, marca una cruz en los casilleros que corresponda

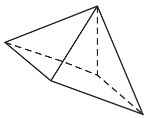

1

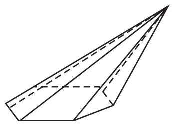

2


3


4


5


6


7

	Prisma		**Pirámide**		**Ni prisma ni pirámide**
	Recto	Oblicuo	Recto	Oblicuo	
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					

Explica en qué se diferencia un prisma de una pirámide. ____________________________________

En el cuadro 2 incluimos los porcentajes de respuestas correctas y de errores observados.

Cuadro 2 Porcentaje de respuestas correctas y errores observados

Poliedro	Respuestas correctas	Errores: Recto/ oblicuo	Errores: Ni prisma ni pirámide	Errores: Pirámide	Errores: Prisma	No resuelve	No válidos
Prisma 1	84%	4%	6%	–	–	4%	2%
Prisma 2	56%	–	38%	–	–	6%	–
Prisma 3	26%	12%	16%	42%	–	4%	–
Prisma 5	8%	–	14%	72%	–	2%	4%
Pirámide 6	44%	54%	–	–	–	2%	–
Pirámide 7	90%	–	–	–	8%	2%	–
Poliedro 4	48%	–	–	10%	32%	8%	2%

Nuestras suposiciones con respecto a que los alumnos no tendrán dificultades para identificar el prisma 1 y la pirámide 7 han sido acertadas (puesto que se presenta el 84% y el 90% de respuestas correctas, respectivamente). Las dos figuras se presentan mediante las representaciones gráficas estereotipadas, caracterizadas porque las bases del prisma y la base de la pirámide están apoyadas en el plano horizontal.

El 38% de los alumnos afirma que el prisma 2 (cubo) no es prisma ni pirámide. Esta respuesta era esperada, ya que en los libros de texto es bastante habitual clasificar a los poliedros (injustificadamente) en tres categorías: prisma, cubo y pirámide. No obstante, más de la mitad de los alumnos reconoce correctamente esta figura.

Los prismas de base triangular 3 y 5 cosecharon el mayor porcentaje de errores.

Tal como esperábamos, 72% confunde el prisma 5 con una pirámide. La arista lateral situada en la parte superior de la figura es interpretada como vértice de una pirámide. Desde el punto de vista de la percepción visual, el punto cuspidal o vértice es un referente muy fuerte en la identificación de las pirámides. En este caso, la influencia de la percepción visual (Arnheim, 1985) conduce a la confusión de los alumnos que, en lugar de observar detalladamente la figura, se quedan con la primera impresión visual. La confusión se agudiza por la posición del prisma 5 (apoyado sobre una cara lateral y no sobre una base) que no responde a la posición de la representación gráfica estereotipada.

No encontramos razones para explicar el error (observado en 42% de los alumnos) de confundir el prisma 3 con una pirámide. Posiblemente, la presencia de caras triangulares haya sugerido a los alumnos la idea de una pirámide. En este caso, se observa la mayor influencia de la componente figural (presencia de caras triangulares) sobre la conceptual.

Con respecto a la pirámide 6, el hecho de que su base no esté apoyada en el plano horizontal dio lugar a que 54% de los alumnos la confunda con una pirámide oblicua.

El antiprisma (poliedro 4) no es utilizado frecuentemente en la enseñanza de los poliedros y rara vez se incluye en los libros de textos. Sin embargo, casi la mitad de los alumnos lo identifica correctamente.

La pregunta planteada: "¿en qué se diferencia un prisma de una pirámide?" ha resultado difícil para los alumnos. No nos sorprende este resultado, porque consideramos que es una pregunta fuera de lo común, que exige una elaboración por parte de los alumnos.

Una diferencia entre estos poliedros es la presencia de dos bases en el prisma y de una base en la pirámide. Sin embargo, el antiprisma cumple con la condición de tener dos bases y no constituye un prisma, pues sus caras laterales son triángulos.

Otra diferencia es el hecho de que las caras laterales de la pirámide son triángulos y las del prisma son paralelogramos. Sin embargo, las caras laterales del antiprisma también son triángulos y no es una pirámide porque posee dos bases.

Los argumentos de los alumnos fueron clasificados en distintas categorías. En el cuadro 3 incluimos las categorías, el número de sujetos que utiliza cada una y un ejemplo de respuesta.

La dificultad que ha generado la pregunta en los alumnos se manifiesta en el porcentaje (30%) que no la contesta.

Las diferencias indicadas anteriormente entre prisma y pirámide han sido mencionadas por algunos alumnos de manera aislada, especialmente la relacionada con las caras laterales de estos cuerpos.

La respuesta más frecuente es la referencia al vértice de la pirámide (categoría 1). Esto se explica nuevamente por la influencia del punto cuspidal sobre la percepción visual.

Cuadro 3 Categorías y ejemplos de respuestas para la tarea sobre poliedros

Categoría	Frecuencia	Ejemplo de respuestas
1. Referencia a la presencia del vértice.	11	"La diferencia es que la pirámide termina con un vértice" (sujeto 8).
2. Descripción de caras.	9	"Las caras de la pirámide son triángulos isósceles iguales. Las caras laterales del prisma forman un rectángulo" (sujeto 12).
3. Clasificación de los prismas y/o las pirámides.	5	"Los prismas son rectos y oblicuos y paralelepípedos y las pirámides son irregulares, regulares y tronco de pirámide" (sujeto 28).
4. Presencia de dos bases en el prisma y de una base en la pirámide.	3	"Pirámide: tiene una sola base. Prisma: tiene dos bases" (sujeto 24).
5. Descripción del tipo de polígono de la base de uno u otro.	2	"Se diferencian en que los prismas tienen una base cuadrada y las pirámides tienen una base triangular" (sujeto 27).
6. Descripción de lados.	1	"La pirámide tiene 4 lados" (sujeto 38).
7. Referencia a las dimensiones de cada uno.	2	"Una pirámide es una figura y un prisma es un cuerpo" (sujeto 42).
8. Respuestas imprecisas.	2	"El prisma tiene partes inclinadas y la pirámide también, pero sus partes de los costados son iguales" (sujeto 41).
9. Sin respuesta.	15	

Resultados obtenidos en la representación gráfica de rombos

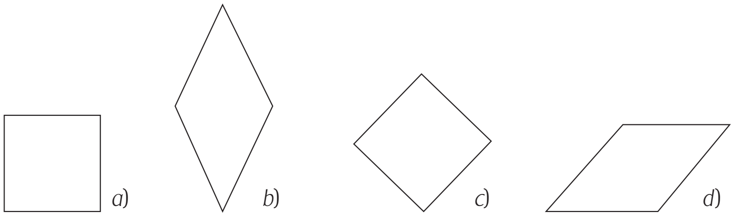
En el cuadro 4 incluimos la tarea presentada a los alumnos.

La representación gráfica estereotipada del rombo se caracteriza por presentar las diagonales paralelas a las líneas horizontal y vertical, respectivamente (es decir, la figura "parada en una punta", como suele expresarse en lenguaje coloquial).

En la tarea presentada incluimos dos rombos en la posición estereotipada (incisos *b* y *c*, respectivamente) y otros dos con lados paralelos a la línea horizontal. Uno de ellos (inciso *a*) es un cuadrado. Conjeturamos que los alumnos reconoce-

Cuadro 4 Tarea sobre rombos

2. ¿Cuáles de los siguientes cuadriláteros son rombos?



a) Sí ☐ No ☐ Por qué ______________________

b) Sí ☐ No ☐ Por qué ______________________

c) Sí ☐ No ☐ Por qué ______________________

d) Sí ☐ No ☐ Por qué ______________________

rían sin dificultad los primeros y que, en cambio, podrían presentarse errores en los segundos.

Las figuras *a* y *c* son congruentes, ya que la figura *a* ha sido rotada para obtener la figura *c*. Lo mismo ocurre con las figuras *b* y *d*.

En el cuadro 5 incluimos los porcentajes de respuestas correctas e incorrectas. En todos los casos, la mayoría de los alumnos identifica correctamente las figuras. Sin embargo, tal como esperábamos, el porcentaje de respuestas correctas disminuye en las figuras *a* y *d*.

Desde el punto de vista conceptual se pueden presentar las siguientes definiciones de rombo:

- Cuadrilátero que tiene cuatro lados congruentes.[2]
- Cuadrilátero cuyas diagonales determinan dos triángulos isósceles congruentes.
- Cuadrilátero cuyas diagonales determinan cuatro triángulos rectángulos congruentes.

[2] En este trabajo, la definición de rombo adoptada es la siguiente: cuadrilátero que posee cuatro lados congruentes.

Cuadro 5 Porcentaje de respuestas correctas e incorrectas en la tarea sobre rombos

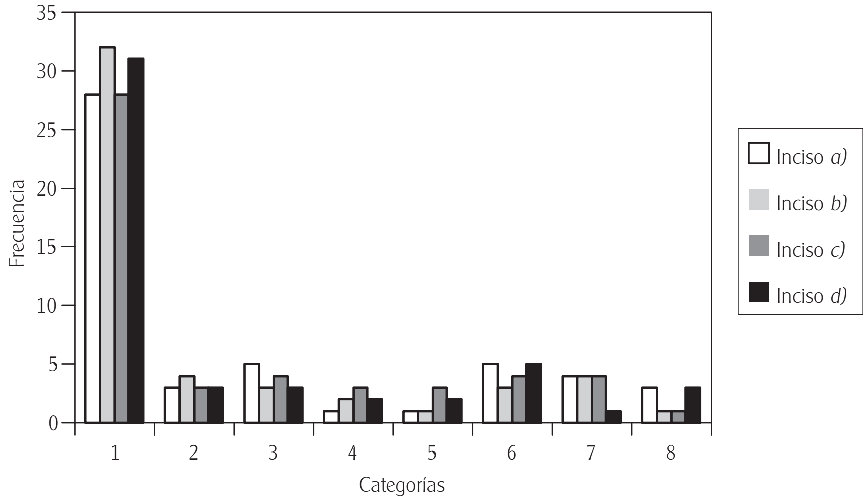
Inciso	Respuesta correcta	Respuesta incorrecta	No responde
a)	66%	28%	6%
b)	98%	2%	–
c)	94%	6%	–
d)	70%	24%	4%

Cuadro 6 Categorías de respuestas en la tarea sobre rombos

Categorías	Ejemplo de respuesta
1. Igualdad de los lados.	"Tiene los cuatro lados iguales" (sujeto 9).
2. Descomposición de la figura en triángulos.	"Al trazar una recta por el medio nacen dos triángulos" (sujeto 18).
3. Comparación con un cuadrado.	"Es un cuadrado parado en una punta" (sujeto 39).
4. Posición con respecto a la horizontal.	"Si le damos vuelta queda con forma de rombo" (sujeto 35).
5. Compara la amplitud de los ángulos.	"Sí, porque dos de sus ángulos son menores de 90 y dos son mayores de 90" (sujeto 48).
6. Respuestas imprecisas. de los rombos" (sujeto 42).	"Sí, porque se cumplen las proporciones medidas
7. No justifica.	
8. No responde.	

La justificación más utilizada por los alumnos para afirmar que cada figura constituye un rombo es la primera, aunque se utilizaron también otras justificaciones incompletas o erróneas. La segunda definición no se presentó de modo completo. Se ha observado la idea de descomponer la figura en triángulos, pero en ningún caso se especifican las características que deben cumplir estos triángulos. En el cuadro 6 incluimos todas las categorías observadas y un ejemplo de respuesta para cada una.

En la gráfica 1 observamos la frecuencia de uso de cada categoría.



Gráfica 1 Frecuencia de uso de cada categoría en la tarea sobre rombos

En todos los incisos, la respuesta más frecuente es la alusión a los cuatro lados iguales. Las categorías restantes son escasamente utilizadas.

La categoría 4 (posición respecto a la horizontal) recoge las respuestas de aquellos alumnos que, en general, reconocen que las figuras son rombos, aunque en sus explicaciones se manifiesta que están pensando en la representación gráfica estereotipada. Dos alumnos, cuyas respuestas transcribimos a continuación, ponen de manifiesto que el dibujo estereotipado del rombo desempaña un papel en la valoración de las figuras:

> Sujeto 26 Afirma que *a* es rombo, porque "si lo vemos de costado podremos observar que es un rombo con todos sus lados iguales".

> Sujeto 37 Afirma que *a* es rombo, porque "si le damos vuelta queda con forma de rombo y además tiene los cuatro lados iguales".

En ambos ejemplos se manifiesta que las características figurales de la representación gráfica son consideradas por los alumnos antes que la característica conceptual de poseer los cuatro lados iguales.

CONCLUSIONES

En este estudio nos propusimos detectar respuestas de alumnos de 13 años relacionadas con el uso de representaciones gráficas estereotipadas de algunas figuras geométricas (rombo, prisma y pirámide).

En general, en las descripciones de los alumnos observamos que la componente conceptual de las figuras está bien delimitada. Sin embargo, encontramos indicios de que los dibujos estereotipados de estas figuras influyen en la valoración realizada por los jóvenes durante su reconocimiento.

Coincidimos con Fischbein (1993) en que, muy a menudo, la componente figural no permanece enteramente acotada por la conceptual. En la tarea de identificar rombos a partir de diversas representaciones gráficas, algunos alumnos hacen referencia a la posición de la figura (una característica de la componente figural) para justificar sus respuestas: "pueden ser cuadrados estirados y vistos de otras formas" (sujeto 43). La atención prestada a la posición podría explicarse, siguiendo a Arnheim (1985), en la influencia de la percepción visual en la formación de conceptos.

Una recomendación básica que se deriva de estos resultados, para el tratamiento escolar de estos conceptos, es la siguiente: es necesario que los alumnos apliquen sus conocimientos conceptuales de las figuras geométricas sobre dibujos no estereotipados de éstas. Aparentemente, no está fallando el conocimiento de la componente conceptual de la figura. Lo que observamos es una mayor influencia (durante la valoración de representaciones gráficas) de la componente figural.

A partir de los resultados obtenidos, planteamos varias líneas de trabajo a fin de continuar nuestra investigación. En primer lugar, nos proponemos analizar el tratamiento que reciben las figuras geométricas en libros de texto del nivel primario para observar el tipo de representaciones gráficas utilizadas y el hincapié realizado en la componente conceptual. En segundo lugar, diseñaremos secuencias didácticas que permitan la superación de este tipo de dificultades. Investigaremos si el uso de un *software* de geometría como medio interactivo evita la formación de estereotipos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnheim, R. (1985), *El pensamiento visual,* Buenos Aires, Editorial Universitaria.

Cohen, L. y L. Manion (1990), *Métodos de investigación educativa,* Madrid, La Muralla.

Fischbein, E. (1993), "The Theory of figural concepts", *Educational Studies in Mathematics,* 24, pp. 139-162.

Gutiérrez, A. y A. Jaime (1996), "Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio", en J. Giménez, S. Llinares y V. Sánchez (eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática,* Granada, Comares, pp. 143-170.

Hershkowitz, R. (1989), "Visualizations in geometry. Two sides of the coin", *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 11 (1), pp. 61-76.

Hershkowitz, R., M. Bruckeimer y S. Winner (1987). "Activities with teachers based on cognitive research", en M. Lindquist y A. Shulte (eds.), *Learning and Teaching Geometry. K-12. 1987 Yearbook,* Reston, NCTM, pp. 222-235.

Laborde, C. y B. Capponi (1994), "Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'appprentissage de la notion de figure géométrique", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14, 12.

Parzysz, B. (1991), "Representation of Space and Students' Conceptions at High School Level", *Educational Studies in Mathematics,* 22, pp. 575-593.

Pozo, J.I. (1993), *Teorías cognitivas del aprendizaje,* Madrid, Ediciones Morata.

Schwarz, B. y R. Hershkowitz (1999), "Prototypes: Brakes or Levers in Learning the Function Concept? The Role of Computer Tools", *Journal for Research Mathematics Education,* 30(4), pp. 362-389.

DATOS DE LAS AUTORAS

Susana Moriena

Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina

smoriena@fafodoc.unl.edu.ar

Sara Scaglia

Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina

scaglia@fafodoc.unl.edu.ar

El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX[1]

Modesto Sierra Vázquez, María Teresa González Astudillo
y Carmen López Esteban

Resumen: En este artículo, estudiamos el desarrollo histórico del concepto de continuidad en los manuales escolares de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria de los últimos cincuenta años. Analizamos treinta y un libros en tres fases, la última de las cuales recoge los resultados de las anteriores. Consideramos tres dimensiones de análisis: conceptual, didáctico-cognitivo y fenomenológico, que nos proporcionan una amplia perspectiva de los cambios experimentados en este desarrollo.

Abstract: In this paper, we study the historical development of the concept of continuity in the textbooks of Bachillerato and COU during the last fifty years. We analyse thirty one books in three stages. In the last one, which gathers the results from the others, we consider three dimensions: conceptual, didactic-cognitive and fenomenologic, that show us a wide perspective of the changes experimented in this development.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha puesto de manifiesto la importancia del análisis de los manuales escolares como reflejo de la actividad que se realiza en el aula, ya que son los manuales los que determinan en gran medida la práctica educativa más que las disposiciones ministeriales. Los historiadores de la educación han tomado conciencia de ello, como lo prueba el hecho de que están llevando a cabo proyectos en este sentido, entre los que destaca el Proyecto Manes, dirigido desde la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), en el que se pretende la ca-

Fecha de recepción: julio de 2001.

[1] Este trabajo es parte de proyectos de investigación financiados por la Junta de Castilla y León, por la Unión Europea (FSE) y por la Dirección General de Educación Superior (DGES-BXX 2000-0069).

talogación documental, análisis bibliométrico y estudio de las características pedagógicas y político-ideológicas de los manuales escolares en la España contemporánea (1808-1990); también hay que hacer referencia a la reciente publicación de la *Historia ilustrada del libro escolar en España,* dirigida por el profesor Agustín Escolano.

Sin embargo, son escasos los trabajos relacionados con la educación matemática, lo que puede deberse tanto a la falta de formación matemática de los historiadores como al escaso interés de los matemáticos por este tema (Choppin, 1993). Entre los trabajos existentes destacan los de Schubring, en particular los que se refieren a la evolución de la enseñanza de los números negativos en los manuales alemanes y franceses de matemáticas entre 1795 y 1845 (Schubring, 1986, 1988) o el estudio de los manuales de Lacroix (Schubring, 1987; los de Pimm 1987, 1994) en los aspectos relativos al lenguaje y la legibilidad; Dormolen (1986) con la clasificación de los elementos que son imprescindibles en un libro de texto de matemáticas, y Howson (1995), que compara manuales escolares de ocho países diferentes para niños de trece años. Asimismo, los trabajos de Chevallard y colaboradores (Chevallard, 1985; Chevallard y Johsua, 1982) en los que aparece el concepto de *transposición didáctica,* es decir, la transformación del saber de los matemáticos al saber escolar, el cual se refleja fundamentalmente en los manuales escolares.

En un trabajo anterior (Sierra, González y López, 1999), analizamos la evolución del concepto de límite funcional en manuales escolares en España en los últimos cincuenta años; siguiendo la misma metodología, en este artículo realizamos el análisis de la evolución del concepto de continuidad en dichos manuales.

METODOLOGÍA

Hemos analizado libros publicados desde la terminación de la Guerra Civil (1939) hasta finales del siglo XX. El análisis se ha llevado a cabo en tres etapas, cada una de las cuales profundiza el trabajo realizado en la etapa anterior.

En la primera etapa, se han elaborado fichas con los datos fundamentales del libro: título, autor/es, editorial, año de edición, plan de estudios y un resumen del contenido de los capítulos relacionados con la continuidad.

En la segunda etapa se agruparon los libros por periodos que, en líneas generales, corresponden a los sucesivos planes de estudios:

1. Periodo comprendido entre 1940 y 1967. Este periodo abarca desde el final de la Guerra Civil (1939) hasta 1967. Tiene un punto de inflexión en 1953, año en el que se publica un nuevo plan de estudios (modificado parcialmente en 1957). En 1962 se crea la Comisión para el Ensayo Didáctico sobre la Matemática Moderna en los Institutos de Enseñanza Media, cuyos trabajos marcan el inicio de un nuevo periodo. Se han analizado cinco libros de este periodo.
2. Periodo comprendido entre 1967 y 1975. Abarca desde la introducción de la matemática moderna hasta la implantación del Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP), en 1975, consecuencia de la nueva Ley General de Educación (LGE) de 1970. Se han analizado nueve libros de diversos autores y editoriales, entre ellos los textos piloto publicados por la Comisión.
3. Periodo comprendido entre 1975 y 1995. Comprende desde la implantación del BUP hasta el inicio de los nuevos Bachilleratos derivados de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE). Se han analizado trece libros.
4. Periodo comprendido entre 1995 y 2000. Abarca desde la publicación en 1995 de los decretos curriculares derivados de la LOGSE hasta nuestros días. Se han analizado cuatro libros de los bachilleratos de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y de Tecnología.

En esta segunda etapa se han elaborado cuadros comparativos de los libros correspondientes a cada periodo que incluyen:

a) Modo de introducción del concepto: formal, heurístico o constructivo.
b) Tipo de definición: topológica, métrica, geométrica o por sucesiones.
c) Secuencia de contenidos: se ha hecho un listado de las definiciones y propiedades relacionadas con la continuidad, numerándolas según su orden de aparición.
d) Tipos de ejercicios y problemas.

En la tercera etapa se han considerado tres dimensiones del análisis (véase el cuadro 1).

Análisis conceptual, que se refiere a cómo se define y organiza el concepto a lo largo del texto, representaciones gráficas y simbólicas utilizadas, problemas y ejercicios resueltos o propuestos, así como ciertos aspectos materiales de los libros de texto que determinan la presentación del concepto.

Cuadro 1

Análisis conceptual	Análisis didáctico-cognitivo	Análisis fenomenológico
• Secuenciación de contenidos. • Definiciones: tipo y papel que desempeñan en el texto. • Ejemplos y ejercicios. • Representaciones gráficas y simbólicas. • Aspectos materiales.	• Objetivos e intenciones del autor (expresadas habitualmente en el prólogo). • Teorías de enseñanza-aprendizaje subyacentes. • Capacidades que se quieren desarrollar.	• En torno a las propias matemáticas. • En torno a otras ciencias. • Fenómenos de la vida diaria.

Análisis didáctico-cognitivo, que se refiere tanto a la explicitación de los objetivos que los autores pretenden conseguir como al modo en el que se intenta que el alumno desarrolle ciertas capacidades cognitivas (Duval, 1995).

Análisis fenomenológico, que se caracteriza por los fenómenos que se toman en consideración con respecto al concepto en cuestión, en nuestro caso el de continuidad. Aquí se considera el análisis fenomenológico didáctico, en el que intervienen los fenómenos que se proponen en las secuencias de enseñanza que aparecen en los libros analizados (Puig, 1997).

Sin lugar a dudas, las concepciones epistemológicas de los autores acerca del conocimiento matemático están relacionadas con el modo de transmisión de dicho conocimiento y van a determinar qué tipo de capacidades se pretenden desarrollar en los alumnos, por lo que, a veces, es inevitable mezclar componentes epistemológicos y cognitivos en este análisis. Esto mismo sucederá con el análisis cognitivo y fenomenológico.

RESULTADOS

Vamos a presentar los resultados de cada uno de los periodos considerados de acuerdo con el análisis conceptual, cognitivo y fenomenológico que hemos llevado a cabo según el esquema anterior. No obstante, en lo que se refiere al conceptual, aunque en la investigación original (Sierra, González y López, 1997) se cubrieron ampliamente los cinco aspectos considerados, aquí, por razones de extensión, nos limitaremos a las definiciones y a las representaciones gráficas y simbólicas.

1. Desde la terminación de la Guerra Civil hasta la introducción de la matemática moderna en los institutos de bachillerato (1940-1967)

Durante este periodo estuvieron vigentes dos planes de estudio: el de 1938 que se promulga durante la Guerra Civil y el de 1953. En el cuadro 2 se presentan las características más destacadas de estos planes de estudio. El concepto de continuidad aparece en los programas de 6º curso de bachillerato.

Los cinco libros se han dividido en dos bloques (véase el cuadro 3).

Cuadro 2

Plan	Edad de acceso	Etapas	Orientación general	Asignaturas de matemáticas
1938	10 años	Bachillerato (7 años)	Científico humanístico	7 cursos de carácter cíclico
		Examen de acceso a la universidad		
1953	10 años	Bachillerato elemental (4 años)	General	4 cursos
		Bachillerato superior (2 años)	Ciencias o letras	2 cursos
		Curso preuniversitario. Prueba de acceso a la universidad		1 curso

Cuadro 3

Bloque A	Bloque B
• Fernández de Castro, M. y Jiménez Jiménez, J. L., *Matemáticas. Preparación del examen de estado*, Escelicer, Cádiz-Madrid. (sin fecha, anterior a 1955).	• Ríos, S. y Rodríguez San Juan, A., *Matemáticas. 6º curso de bachillerato*, Los autores, Madrid, 1950.
• Bruño, *Matemáticas 6º curso*, Ediciones Bruño, Madrid, 1968.	• Ríos, S. y Rodríguez San Juan, A., *Matemáticas. 5º curso de bachillerato*, Los autores, Madrid, 1968a.
	• Ríos, S. y Rodríguez San Juan, A., *Matemáticas. 6º curso de bachillerato*, Los autores, Madrid, 1968b.

Hay una clara evolución en la secuencia de los contenidos desde el libro de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez, donde se utiliza un lenguaje de variables, hasta los libros de Rodríguez San Juan y Sixto Ríos, donde el lenguaje de funciones aparece explícito. En los libros del bloque B, hay un cambio sustancial en la presentación; el concepto de continuidad se encuentra, junto con el de límite, en una lección dedicada a funciones, ambos conceptos se desarrollan desligados del concepto de variable. Se trata primero el concepto de límite; la definición se da por sucesiones y, a partir de este concepto, se define la continuidad.

A continuación se presentan los resultados más destacados en cada una de las tres dimensiones.

1.1. *Análisis conceptual*

a) Definiciones

En el libro de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez aparece la definición de límite de variable aplicada al caso de sucesiones, por lo que se mezclan los conceptos de variable y de sucesión (Sierra, González y López, 1999). Para definir la continuidad, como no se ha dado explícitamente la definición de límite de una función en un punto, hay que utilizar otro lenguaje, en este caso, el lenguaje de los incrementos. La definición es la siguiente:

> Se dice que una función es continua en el punto a (es decir, cuando $x = a$) si al tender x a a los dos incrementos tienden a cero. Si esto no se verifica la función se dice discontinua.

En Bruño (1968) se da la definición de límite utilizando el lenguaje de sucesiones y, a partir de ahí, la definición de función continua en un punto, aunque retoma el lenguaje de los incrementos y llega a la siguiente conclusión:

> La condición necesaria y suficiente para que una función sea continua en un punto, es que al tender a 0 el incremento de la variable tomado a partir de ese punto tienda también a cero el incremento de la función.

Se observa en este autor una tendencia hacia un nuevo lenguaje en las definiciones, pero sin perder el lenguaje anterior.

Por su parte, Rodríguez San Juan y Sixto Ríos presentan la noción de continuidad de modo intuitivo y, a continuación, dan la definición clásica mediante el límite, que traducen inmediatamente a la forma métrica y posteriormente al lenguaje de incrementos.

b) Representaciones gráficas y simbólicas

Representaciones gráficas. En los libros del bloque A las representaciones gráficas son muy escasas, se limitan a representar el caso de una función continua y diferentes casos de discontinuidades.

En los libros del bloque B hay un aumento notable de representaciones gráficas, para ejemplificar las propiedades de las funciones continuas y la discontinuidad. Las representaciones gráficas empleadas son cartesianas.

Representaciones simbólicas. Las notaciones que se utilizan en los libros del bloque A están asociadas con la idea de variable. Las variables se representan con las letras minúsculas del abecedario y los infinitésimos con las letras griegas correspondientes a las utilizadas para las variables. Se utiliza el símbolo ∞ para representar el infinito y esto ocurrirá de aquí en adelante en todos los libros analizados. También se tratan órdenes de infinitésimos e infinitésimos equivalentes.

En los libros del bloque B aparece la simbolización moderna del límite y, por lo tanto, de la continuidad.

En todos los libros, excepto en el de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez, aparece la notación clásica de continuidad que utiliza el límite. Se usa la letra griega Δ para simbolizar los incrementos.

1.2. *Análisis didáctico-cognitivo*

En el libro de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez los conceptos tienen un carácter esencialmente instrumental declarado por los autores al comienzo de las lecciones correspondientes al límite. Este carácter instrumental está presente en los otros libros estudiados. Además, hay que resaltar el carácter cíclico de los contenidos. La idea que subyace en todos estos libros es la de una matemática ya elaborada que el alumno debe memorizar y practicar resolviendo ejercicios.

Las capacidades que se pretenden desarrollar en el alumno son: memorización de definiciones y propiedades mediante alguna práctica algorítmica, con cierta excepción en los ejercicios planteados.

1.3. *Análisis fenomenológico*

En general, los libros analizados sólo hacen referencia a aspectos matemáticos cuando presentan los conceptos de límite y continuidad. Sin embargo, en el libro de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez (s.f.), cuando se trata el concepto de variable, se hace alguna referencia a fenómenos naturales como: hora del día, estación del año y situación meteorológica. Se puede asegurar que los conceptos de límite y continuidad son concebidos como una preparación para la derivada.

2. Introducción de la matemática moderna: 1967-1975

Como es bien conocido, a comienzos de los años sesenta triunfó en casi todo el mundo occidental la enseñanza de las llamadas "matemáticas modernas". En el caso español, en 1962 se constituyó la Comisión para el Ensayo Didáctico sobre la Matemática Moderna en los Institutos Nacionales de Enseñanza Media, la cual editó, en los años 1967 y 1969, textos piloto para el 5º y 6º cursos de bachillerato, respectivamente, textos que se convirtieron, de hecho, en el nuevo programa de matemáticas que progresivamente se fue implantando en el Bachillerato. Los fundamentos de estos textos piloto son la teoría de conjuntos y las estructuras de las matemáticas en sentido bourbakista, es decir, las estructuras algebraicas, de orden y topológicas (Rico y Sierra, 1994, 1997).

En cuanto a la continuidad, en dichos textos piloto, en el correspondiente al 5º curso, se hace una breve introducción en el capítulo dedicado a funciones de variable real y, en el de 6º curso, en un capítulo titulado de igual manera, se profundiza en este concepto, prevaleciendo el punto de vista topológico.

Los nueve libros analizados se han dividido en tres bloques que representan tres tendencias observadas en este periodo. Junto al nuevo paradigma (la matemática moderna) que surge como una nueva revolución, sigue coexistiendo el antiguo. Así, los libros del bloque A siguen el modelo de la etapa anterior; los del bloque B suponen una ruptura que presenta las nuevas ideas acerca de las matemáticas; los del bloque C introducen la matemática estructural y axiomática, pero a la vez proponen actividades para el alumno, y las explicaciones se apoyan en ellas.

Cuadro 4

Bloque A	Bloque B	Bloque C
• Sin autores, *Matemáticas sexto curso*, Edelvives, Zaragoza, 1972 (aprobado por OM 23-02-68). • Segura, S., *Matemáticas 6º curso*, ECIR, Valencia, 1974. • Tuduri, J. y Casals, R., COU *Matemáticas especiales*, Vimasa, Terrasa, 1974.	• Abellanas, P., García Rúa, J., Rodríguez Labajo, A., Casulleras Regás, J. y Marcos de Lanuza, F., *Matemática Moderna. Quinto curso*, MEC, Madrid, 1967. • Abellanas, P., García Rúa, J., Rodríguez Labajo, A., Casulleras Regás, J. y Marcos de Lanuza, F., *Matemática Moderna. Sexto curso*, MEC, Madrid, 1969. • Marcos de Lanuza, F., *Matemáticas 5º curso*, G. del Toro, Madrid, 1972a. • Marcos de Lanuza, F., *Matemáticas* COU *optativa*, G. del Toro, Madrid, 1972b.	• Agustí, J. M. y Vila, A., *Matemáticas 6º Bachillerato*, vol. 2, Vicens Vives, Barcelona, 1973. • Marcos, C. y Martínez, J., *Matemáticas generales* COU, SM, Valencia, 1973.

2.1. *Análisis conceptual*

a) Definiciones

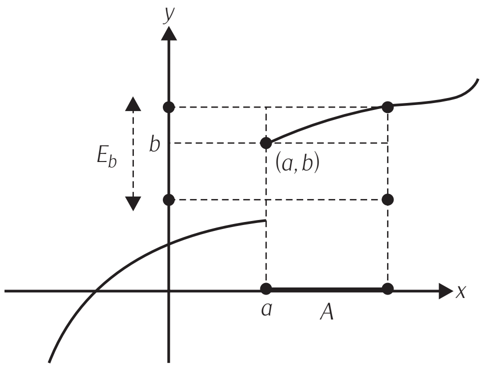
En los tres textos del bloque A la definición de continuidad es posterior a la del límite y se apoya en ella, utilizando el lenguaje de los incrementos. En el bloque B aparecen mezcladas ambas definiciones, con predominio de la visión topológica, Finalmente, en el bloque C cada uno de los dos autores sigue un criterio diferente: Marcos y Martínez dan la definición clásica, la topológica y la métrica, aunque trabajan preferentemente con la última y, en Agustí y Vila, se trabaja con la definición topológica. La idea intuitiva de continuidad está presente en todos los bloques y en todos los autores, bien como punto de partida, bien como conclusión.

Por ejemplo, en los textos piloto (bloque B) aparece la siguiente definición:

Diremos que una función $f(x) = y$ *tiene por límite* b *para* $x = a$, *cuando para todo entorno* E_b *del punto* b, *se verifica* $f^{-1}(E_b) = E_a - a$, *o bien,* $f^{-1}(E_b) = E_a$.

En el segundo caso, además de tener límite la función en x = *a, diremos que es continua en dicho punto.*

Para la discontinuidad, además de presentarla de modo intuitivo, se da la definición negativa por entornos como se observa en la gráfica 1.



Gráfica 1

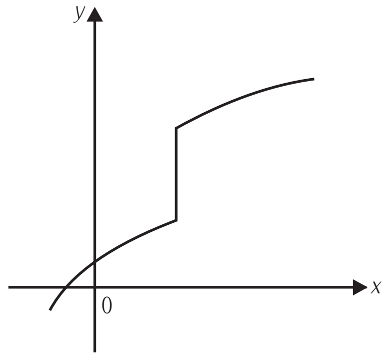
Como podemos ver, la gráfica de la función "está partida", este concepto de estar partida podemos expresarlo de forma matemática mediante los entornos del punto b*, observando que en este caso hay entornos* E_b*, del punto* b *tales que* $f^{-1}(E_b) = A$*, siendo* A *un conjunto de puntos que no es un entorno del punto* a.

b) Representaciones gráficas y simbólicas

Representaciones gráficas. Aparecen tablas cartesianas y otras representaciones estrechamente ligadas al tipo de definición que se utiliza. En cuanto a las tablas, en el libro de Agustí y Vila (bloque C) al considerar la definición topológica de continuidad, las tablas de valores de la función se usan para comprobar que se verifica o no dicha definición para casos particulares.

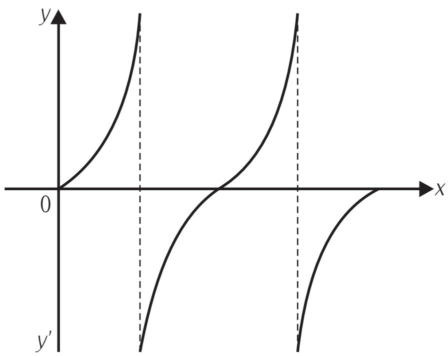
Las gráficas cartesianas aparecen en todos los libros analizados, algunas de ellas incluso realizadas a mano alzada, presentando las características que interesa resaltar. Sin embargo, el único libro que clasifica las discontinuidades es el de Edelvives (bloque A), que considera tres tipos:

- Salto brusco finito (gráfica 2).



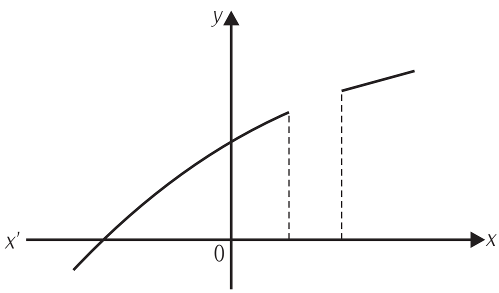
Gráfica 2

- Salto brusco infinito (gráfica 3).



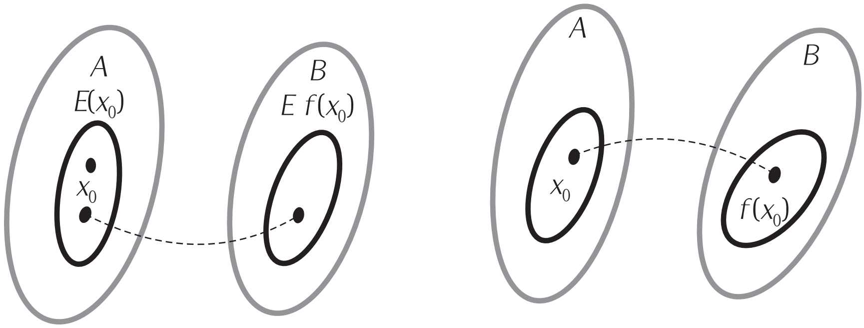
Gráfica 3

- Por tomar la función valores imaginarios (gráfica 4).



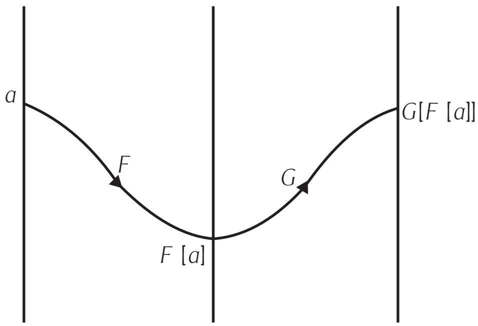
Gráfica 4

Además, hay otros tipos de representaciones gráficas como diagramas de Venn (Marcos y Martínez, 1973). (Véase la gráfica 5.)



Gráfica 5

Asimismo, se usa la recta numérica (Agustí y Vila, 1973) al tratar la continuidad de la función compuesta (gráfica 6).



Gráfica 6 Fuente: Agustí y Vila, p. 220.

Representaciones simbólicas. Todos los libros, excepto Agustí y Vila (bloque C) utilizan la notación $\lim\limits_{x \to f} f(x)$ y la simbolización empleada está en estrecha relación con la que se utiliza para el límite. Hay que destacar que en los libros del bloque A se usa la simbolización de incrementos en consonancia con las definiciones dadas en ese lenguaje, asimismo, se utilizan los infinitésimos. Los incrementos desaparecen casi por completo en los libros de los bloques B y C.

2.2. *Análisis didáctico-cognitivo*

Cada unos de los tres bloques pretende desarrollar capacidades diferentes en los alumnos. Los libros del bloque A siguen el modelo de la etapa anterior y las capacidades que pretenden desarrollar son: aprendizaje memorístico de las definiciones y aplicación de estas definiciones a la resolución de ejercicios.

Los libros del bloque B significan la introducción de la matemática moderna en el bachillerato, rompiendo con la tradición anterior. Esta ruptura se ve reflejada en que los conjuntos y las aplicaciones son los cimientos sobre los que se pretende construir el edificio de las matemáticas, y las estructuras constituyen las herramientas para construir dicho edificio. Además, la orientación topológica de la continuidad es justamente la defendida por los pioneros de la reforma de la enseñanza de las matemáticas, de acuerdo con las ideas bourbakistas. Esta orientación se presenta también en los otros dos libros de este bloque. Las capacidades que se pretenden desarrollar son: adquisición de las formas de hacer matemáticas con el nuevo lenguaje, el conocimiento de la definición de continuidad en este lenguaje y las aplicaciones de las definiciones a la resolución de ejercicios relacionados con la continuidad.

La corriente de la matemática moderna está presente claramente en los libros del bloque C. Se advierte un cierto cambio en estos autores sobre la enseñanza de las matemáticas, ya que se empieza a considerar al alumno como sujeto que aprende, tratando de explicar este aprendizaje desde las teorías piagetianas. En cuanto a las capacidades que se pretenden desarrollar, mientras que en el libro de Marcos y Martínez (1973) se pretende que el alumno aprenda memorísticamente las definiciones, que se acostumbre al mecanismo de las demostraciones inductivas y realice numerosos ejercicios, en el libro de Agustí y Vila (1973) se pretende que el alumno vaya construyendo, de una manera dirigida, los distintos conceptos, que entrevea algunas demostraciones y realice numerosos ejercicios.

2.3. *Análisis fenomenológico*

En todos los libros analizados no hay referencias a situaciones o fenómenos de otras ciencias distintas de las matemáticas. La matemática se encierra en sí misma y se explica por ella misma; incluso, desaparecen las interpretaciones y los problemas en sentido geométrico de la época anterior. Insistimos en el predominio de la visión topológica en el caso de la continuidad. Incluso al tratar discontinuidad de una función, la idea de estar partida, más que una idea intuitiva, es una idea que se utiliza para reafirmar el uso de los entornos.

En definitiva, todos los libros analizados reflejan un cierto espíritu de la época en cuanto a la concepción de las matemáticas, lo que va a marcar toda una generación de profesores y alumnos que transmitirán y asimilarán, respectivamente, unas matemáticas sin conexión con otras ciencias y fenómenos.

Es interesante resaltar que, aunque los promotores de la reforma, Papy y Dieudonné, entre otros, señalan que las matemáticas están por todas partes y que son un instrumento para comprender la realidad, en escasas ocasiones, en sus obras dedicadas a la enseñanza, aparecen las matemáticas para interpretar fenómenos de otras ciencias. Igual sucederá en el caso español en los libros de texto de este periodo, lo que va a marcar toda una generación de profesores y alumnos que trasmitirán y asimilarán, respectivamente, unas matemáticas sin conexión con otras ciencias y fenómenos.

3. Desarrollo del plan de estudios de Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP) y del Curso de Orientación Universitaria (COU): 1975-1995

En el año 1970 se aprobó la Ley General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa (LGE) en la que se estableció el Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP) y el Curso de Orientación Universitaria (COU) necesario para tener acceso a estudios universitarios. El nuevo bachillerato tenía una duración de tres cursos (alumnos de 14-17 años); sin embargo, hasta el año 1975 no se estableció el currículo para el nuevo bachillerato y para el Curso de Orientación Universitaria. El cuadro 5 muestra la estructura del plan de estudios.

Se han analizado trece libros en este periodo distribuidos en cuatro bloques (véase el cuadro 6).

Los libros del bloque A continúan en la línea iniciada en el periodo anterior, por lo que no exponemos los resultados. En los libros del bloque B, se impone la tendencia de la matemática moderna. El bloque C está formado por un único libro, el del Grupo Cero de Valencia. Los libros del bloque D, aunque desarrollan el plan de estudios del Bachillerato del año 1975, están influidos por las nuevas corrientes en didáctica de la matemática que, en el caso español, cristalizarán en un nuevo plan de estudios derivado de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) de 1990, a la que nos referiremos posteriormente.

Cuadro 5

<table>
<tr><th>Plan</th><th>Edad de acceso</th><th>Etapas</th><th colspan="2">Orientación general</th><th>Asignaturas de matemáticas</th></tr>
<tr><td rowspan="10">1975</td><td rowspan="10">14 años</td><td rowspan="3">BUP (3 años)</td><td colspan="2">General</td><td>Matemáticas 1^{0}</td></tr>
<tr><td colspan="2">General</td><td>Matemáticas 2^{0}</td></tr>
<tr><td colspan="2">Materias comunes, optativas y técnico-profesionales</td><td>Matemáticas 3^{0} (optativa)</td></tr>
<tr><td rowspan="6">COU</td><td rowspan="2">Hasta 1987</td><td>Opción A</td><td>Optativa</td></tr>
<tr><td>Opción B</td><td>Obligatoria</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Desde 1987</td><td>Opción A (científico-técnica)</td><td>Matemáticas I (obligatoria)</td></tr>
<tr><td>Opción B (biosanitaria)</td><td>Matemáticas I (optativa)</td></tr>
<tr><td>Opción C (ciencias sociales)</td><td>Matemáticas II (obligatoria)</td></tr>
<tr><td>Opción D (humanístico-lingüística)</td><td>Matemáticas II (optativa)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Examen de acceso a la universidad</td></tr>
</table>

3.1. *Análisis conceptual*

a) Definiciones

Todos los libros del bloque B comienzan con la definición clásica de continuidad, es decir, a través del límite, dando posteriormente la métrica (Etayo *et al.*, 1977, y Anzola *et al.*, 1976) y la topológica (Boadas *et al.*, 1976, y Anzola *et al.*, 1976). En estos libros aparece la idea intuitiva de que una función es continua si se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Solamente Boadas (1976) define la continuidad a la derecha y a la izquierda. Boadas *et al.* (1976), Anzola *et al.* (1976) y Lazcano *et al.* (1993) hacen una clasificación de las discontinuidades evitables, de primera especie y segunda especie, finita e infinita.

Cuadro 6

Bloque A	Bloque B	Bloque C	Bloque D
• Marcos de Lanuza, F., *Matemáticas 2º* BUP, G. del Toro, Madrid, 1978. • Marcos de Lanuza, F., *Matemáticas especiales,* COU, G. del Toro, Madrid, 1976. • Agustí, J. M. y Vila, A., *Matemáticas. Vectores, 2º* BUP, Vicens Vives, Barcelona, 1976	• Guillén, J., Navarro, R., Peña, J. A., y Ferrer, S., *Matemáticas 2º Bachillerato,* Magisterio, Madrid, 1976. • Boadas, J., Romero, R., y Villalbí, R., *Matemáticas 2º curso de* BUP, Teide, Barcelona, 1976. • Etayo, J., Colera, J. y Ruíz, A., *Matemáticas 2º de* BUP, Anaya, Salamanca, 1977. • Anzola, M., Caruncho, J. y Gutiérrez, M., *Matemáticas 2º de Bachillerato,* Santillana, Madrid, 1976. • Lazcano, I. y Barolo, P., *Matemáticas 2º* BUP, Edelvives, Madrid, 1993. • Álvarez, F., García, C., Garrido, L. M. y Vila, A., *Matemáticas. Factor 2,* Vicens Vives, Barcelona, 1992.	• Grupo Cero, *Matemáticas de bachillerato. Volumen 2,* Teide, Barcelona, 1985.	• Hernández, F., Lorenzo, F., Martínez, A., y Valés, J., *Signo II. Matemáticas 2º Bachillerato,* Bruño, 1989. • Colera, J. y Guzmán, M., *Bachillerato. Matemáticas 2,* Anaya, Madrid, 1994. • Guzmán, M. y Colera, J., *Matemáticas I* COU, Anaya, Madrid, 1989.

En el libro del Grupo Cero (que constituye el bloque C) no hay ningún capítulo especial dedicado a la continuidad; en el capítulo dedicado a gráficas, aparece por vez primera la idea intuitiva de discontinuidad ligada a un fenómeno natural: la ocultación por Io, uno de los trece satélites conocidos de Júpiter, de la estrella Beta Scorpi C, muestra la gráfica del brillo de la estrella, antes, durante y después de la ocultación. Posteriormente, menciona la idea de discontinuidad al estudiar la gráfica de una función en escalera. Este libro dedica un apéndice a la formalización de los conceptos de límite y continuidad, dando la definición topológica de continuidad y la definición mediante el límite.

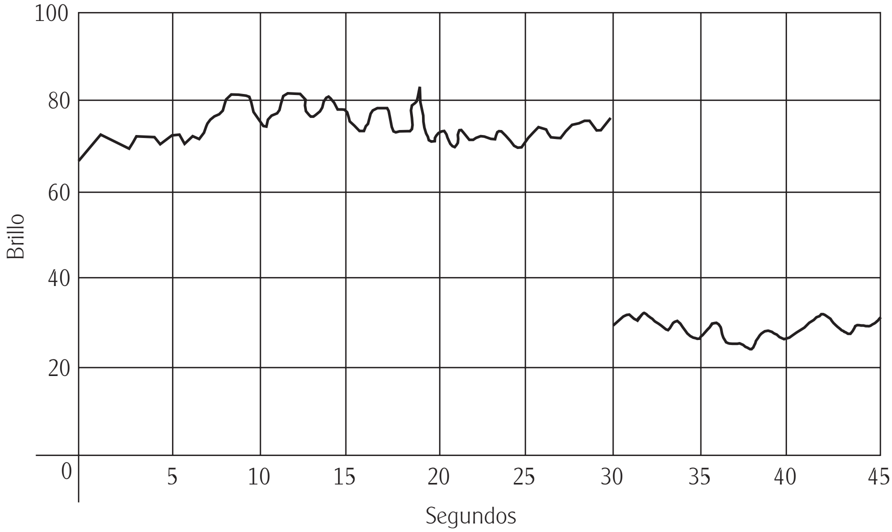
En cuanto a los libros del bloque D, Guzmán y Colera (1989) y Hernández *et al.* (1989) en segundo curso de bachillerato, hacen una introducción intuitiva de la idea de discontinuidad y continuidad, basándose en la gráfica de la función e incorporando, en el caso de Hernández *et al.*, la definición por límite y la métrica. Estas dos definiciones, junto con la topológica, son las utilizadas en el libro de COU, de Guzmán y Colera (1994).

b) Representaciones gráficas y simbólicas

Representaciones gráficas. Se ha detectado un aumento considerable de representaciones gráficas respecto del periodo anterior. Gráficas cartesianas aparecen en todos los libros, en ellas se representan tanto funciones continuas como discontinuas, las más habituales son: rectas, parábolas, hipérbolas, logarítmicas, cocientes de polinomios, escalonadas, definidas a trozos. Estas gráficas se utilizan como apoyo a la definición intuitiva de continuidad, aunque difieren grandemente de un libro a otro.

Destaca por su peculiaridad la gráfica que aparece en el libro del Grupo Cero que indica el brillo combinado de la estrella Beta Scorpii C y de Io en un intervalo de tiempo que comprende 30 segundos antes de la ocultación hasta 15 segundos después de que ésta tuviera lugar (véase la gráfica 7).

Representaciones simbólicas. Las representaciones simbólicas son muy abundantes a comienzo del periodo considerado, el lenguaje de ε y δ está consolidado y aparecen por doquier símbolos, subíndices, valores absolutos, flechas, etc., aunque en ninguno de los libros aparecen los símbolos de los cuantificadores. Todos los libros utilizan la notación $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. El uso del lenguaje de entornos o del valor absoluto viene determinado por el peso que conceden los autores a las definiciones topológica o métrica en sus respectivos textos. Sin embargo, al final del periodo, los autores tienen una tendencia a la simplificación del simbolismo.



Gráfica 7

3.2. *Análisis didáctico-cognitivo*

En los prólogos de los libros del bloque B, los respectivos autores expresan sus intenciones, las cuales son coincidentes en todos ellos. La idea predominante es la de presentar las matemáticas desde la corriente de la matemática moderna, con rigor pero "al mismo tiempo evitar en un excesivo rigorismo que haría ininteligibles las citadas cuestiones para los alumnos de esta edad" (Anzola *et al.*, 1976) o "con el lenguaje y el rigor necesarios pero al mismo tiempo viables para los alumnos" (Boadas *et al.*, 1976). Sin embargo, a nuestro juicio, el rigor se mantiene a lo largo de los textos, hay una distancia entre los propósitos expresados por los autores y su concreción al presentar el concepto de continuidad. El método predominante para conseguirlo es presentar múltiples y variados ejemplos y ejercicios intercalados en el texto. Las capacidades que se pretende desarrollar son las siguientes: aprendizaje de las definiciones, no sólo desde el punto de vista verbal sino simbólico; manipulación de símbolos, reglas lógicas, conocimiento del método deductivo, adquisición de las herramientas necesarias para la resolución de ejercicios y comprensión de algunas propiedades fundamentales. En COU se tratará de consolidar estas habilidades.

En cuanto al libro del Grupo Cero (1985), sus planteamientos indican que el aprendizaje debe predominar sobre la enseñanza. Las teorías constructivistas del aprendizaje subyacen en las ideas de este grupo; además, estas ideas influirán en la configuración del currículo oficial actualmente vigente. Por ello, se trata de que sea el alumno el que investigue, conjeture y rectifique, si es preciso, para alcanzar el conocimiento, y la labor del profesor es la de gestionar el aprendizaje. Por esto, el libro no busca señalar un programa, sino aportar materiales para el trabajo de los alumnos. En palabras de los autores, "en una clase activa de matemáticas, la tarea primordial es hacer matemáticas, es decir, matematizar". Y entienden hacer matemáticas como la actividad intensa del alumno para estudiar diversos fenómenos con los conceptos matemáticos que sirven para organizarlos e interpretarlos. A través de estos planteamientos, se pretende desarrollar en los alumnos capacidades inéditas hasta este momento en los libros de texto, como son inducir, conjeturar, experimentar, analizar, rectificar los propios errores y sintetizar, bajo la tutela del profesor.

Aunque en los libros del bloque D se sigue desarrollando el plan de estudios de 1975, hay en ellos un enfoque distinto, ya que, como se ha dicho anteriormente, participan de las ideas derivadas de la LOGSE. Así, en estos libros observamos las siguientes características:

a) Importancia concedida a la motivación, ya que "los conceptos matemáticos surgen de modo natural del deseo de explorar cuantitativamente la realidad" (Guzmán y Colera, 1989, prólogo).
b) El apoyo en la historia de las matemáticas y en sus aplicaciones.
c) La presentación intuitiva de los conceptos antes de su desarrollo formal.
d) La actividad intensa de los alumnos a través de la realización de numerosos ejercicios y problemas, los cuales son de diferentes tipos.
e) La conexión con la realidad y con otras ciencias, que se manifiesta en la presentación de diversos fenómenos que se pueden organizar desarrollando los conceptos matemáticos.
f) El énfasis puesto en los procedimientos de resolución de problemas.
g) La incorporación de apoyos didácticos como resúmenes, utilización de la calculadora, orientación en el uso de herramientas matemáticas y ejercicios de autoevaluación.
h) La presentación de anécdotas, hechos curiosos y llamativos para resaltar el aspecto social, lúdico y cultural de las matemáticas.

Las capacidades que se pretenden desarrollar son, entre otras: aprendizaje comprensivo de la definición partiendo de las intuiciones hasta llegar a su formalización, desarrollo de estrategias de pensamiento (experimentar, observar, buscar pautas y regularidades, formular conjeturas, demostrar), comprensión, interpretación y predicción de ciertos fenómenos y reconocimiento de la aplicabilidad de las matemáticas a otras ciencias.

Todo esto configura una nueva generación de libros de texto donde se notan las influencias de ciertas corrientes de la didáctica de la matemática como la fenomenología didáctica, el aprendizaje por descubrimiento y la resolución de problemas.

3.3. *Análisis fenomenológico*

En los libros del bloque B casi no hay referencias a fenómenos propios de otras ciencias distintas de las matemáticas, si hacemos excepción de un ejemplo que aparece en Etayo y Colera (1977) que relaciona la temperatura T de un gas con la potencia P con la que trabaja una máquina y dos situaciones que presenta el libro de Lazcano y Barolo (1993), la primera referida a la energía consumida por una lámpara en función del tiempo que permanece encendida, y la segunda al gasto de teléfono en función de los pasos. En el libro de Álvarez *et al.* (1992) aparece una situación para ilustrar la discontinuidad referente al cambio de velocidad de un móvil por efecto de un choque y otra situación referida a la capacidad de botellas de vino para ejemplificar una discontinuidad de tipo salto.

El texto del Grupo Cero (1985) se desarrolla de acuerdo con la aproximación fenomenológica de Freundenthal, incluso en el prólogo del libro se hace la siguiente cita de este autor: “la mentalidad matemática se expresa en la tendencia a matematizar las matemáticas. Por supuesto que los estudiantes deben aprender a matematizar situaciones reales. Matematizar situaciones matemáticas puede ser el final, pero no el comienzo. Para muchos, el objetivo de la enseñanza de las matemáticas es introducir a los muchachos en un sistema de matemáticas, sistema que, innegablemente, irradia encanto estético, el cual, sin embargo, no puede ser captado por personas que no tengan un profundo conocimiento de las matemáticas.” Hay, por consiguiente, a nuestro juicio, una diferencia profunda con el resto de los autores, todos hablan de hacer matemáticas, pero esta idea difiere esencialmente desde la perspectiva que la considera el Grupo Cero y desde la perspectiva en que la consideran los demás. Mientras que los autores anteriormente analizados se "encierran" en la misma matemática como ciencia y, para ellos, eso es hacer matemáticas, el Grupo Cero, siguiendo las ideas de Freudenthal, parte de una serie de fenómenos, de la física, economía, etc., que matematizan. En palabras de los mismos autores: "no tratan de desarrollar un cuerpo de ideas matemáticas y sólo después introducir varias aplicaciones, sino que las aplicaciones deben surgir de un modo natural, alejando la posibilidad de toda separación ficticia entre teoría y práctica". Por ello, se rompe la secuencia ejemplo-definición-propiedades-ejercicios, convirtiéndola en: presentación de diversos fenómenos-análisis de estos fenómenos-introducción del concepto organizador-nuevos fenómenos-ejercicios.

En los libros del bloque D se presentan algunas situaciones relacionadas con otras ciencias. Así, por ejemplo, en el libro de Colera y Guzmán (1994) se considera una situación relacionada con un depósito de agua a partir de la cual se construye una función continua. Hemos observado que este libro presenta diversos fenómenos en relación con el límite, tendencia que no sigue en la continuidad.

4. Libros de texto del Bachillerato LOGSE: 1995-2000

Durante la década de los años ochenta se produjo un amplio debate sobre la reforma educativa en España que culminó con la aprobación y promulgación en 1990 de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE). Esta ley establece una nueva etapa de 12 a 16 años denominada Educación Secundaria Obligatoria (ESO). El bachillerato se reduce a dos años de duración, que se cursarán como regla general entre los 16 y 18 años y se suprime el Curso de Orientación Universitaria. Se han establecido cuatro modalidades de bachillerato: artes, ciencias de la naturaleza y de la salud, tecnología, humanidades y ciencias sociales. El cuadro 7 muestra la estructura del plan de estudios.

Algunas de las consideraciones que se hacen en el decreto ministerial que desarrolla el currículo para las asignaturas de matemáticas I y II son las siguientes:

a) Participar en el conocimiento matemático consiste más que en la posesión de los resultados finales de esta ciencia, en el dominio de su "forma de hacer".

b) La adquisición del conocimiento matemático es un proceso lento, laborioso, cuyo comienzo debe ser una prolongada actividad sobre elementos

Cuadro 7

<table>
<tr><th>Plan</th><th>Edad de acceso</th><th>Etapas</th><th>Modalidades</th><th colspan="2">Asignaturas de matemáticas</th></tr>
<tr><td rowspan="11">1995</td><td rowspan="11">16 años</td><td rowspan="10">Bachillerato</td><td rowspan="3">Ciencias de la naturaleza y de la salud</td><td colspan="2">Matemáticas I (obligatoria)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Matemáticas II</td><td>Opción de ciencias e ingeniería (obligatoria)</td></tr>
<tr><td>Opción de ciencias de la salud (optativa)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tecnología</td><td colspan="2">Matemáticas I (optativa)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Matemáticas II (optativa)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Humanidades y ciencias sociales</td><td rowspan="2">Matemáticas I aplicadas a las ciencias sociales</td><td>Opción ciencias sociales (obligatoria)</td></tr>
<tr><td>Opción humanidades (optativa)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Matemáticas II aplicadas a las ciencias sociales</td><td>Opción ciencias sociales (optativa)</td></tr>
<tr><td>Opción humanidades (optativa)</td></tr>
<tr><td>Artes</td><td colspan="2">Matemáticas de la forma (optativa)</td></tr>
<tr><td colspan="4">Pruebas de acceso a la universidad (PAUS)</td></tr>
</table>

concretos, con objeto de crear intuiciones que son un paso previo al proceso de formalización.

c) Los aspectos conceptuales no son los únicos elementos que están presentes en la actividad matemática; a menudo, no son más que pretextos para la puesta en práctica de procesos y estrategias y sirven para incitar a la exploración y a la investigación.

De acuerdo con estas consideraciones, en el bachillerato se desarrollarán capacidades tan importantes como la abstracción, el razonamiento en todas sus vertientes, la resolución de problemas, la investigación y el análisis y comprensión de la realidad. Las matemáticas en el bachillerato deben desempeñar un triple papel: instrumental, formativo y de fundamentación teórica.

El nuevo bachillerato comenzó a impartirse de modo generalizado en el curso 1997-1998 y aún continúa impartiéndose el antiguo BUP en algunos centros no estatales. Además, en enero de 2001 apareció un nuevo Decreto ministerial sobre el currículo del Bachillerato que entrará en vigor en el curso 2001-2002. Durante estos años, observamos distintos fenómenos en la producción de libros de texto. Por un lado, algunas editoriales "clásicas" (Anaya, Santillana, Vicens-Vives, SM) en general han "maquillado" los libros del periodo anterior, que ya hemos analizado, adaptándolos al nuevo bachillerato. Por otro, editoriales dedicadas tradicionalmente a la educación básica (Edebé, Everest) han comenzado a publicar textos para ESO y bachillerato. También, editoriales tradicionalmente dedicadas a la enseñanza universitaria (McGraw-Hill) están elaborando libros para el bachillerato. Además, debido al nuevo decreto de currículo de bachillerato, se anuncian para el curso 2001-2002 nuevos libros de texto. Por estas razones, las consideraciones que se hacen a continuación están marcadas por las circunstancias en las que se desarrolla este periodo.

Hemos analizado los manuales siguientes, todos ellos correspondientes a editoriales "clásicas":

- Grupo Azul 21, *Matemáticas 2, Ciencias de la Naturaleza y de la Salud,* Santillana, Madrid, 1997.
- Colera, J., Oliveira, M. J., Fernández, S. y Guzmán, M., *Matemáticas I (Bachillerato LOGSE),* Anaya, Madrid, 1996.
- Colera, J., Oliveira, M. J. y Fernández, S., *Matemáticas 2 (Bachillerato LOGSE),* Madrid: Anaya, 1997.
- Vizmanos, J. R. y Anzola, M., *Matemáticas I,* SM, Madrid, 1997.

En cuanto al *análisis conceptual,* en todos los libros hay temas específicos dedicados al límite y a la continuidad, donde la continuidad se desarrolla a partir de la idea de límite, aunque en Colera *et al.* (1996, 1997) y en el Grupo Azul 21 (1997) aparece la idea intuitiva de dibujar la función sin levantar el lápiz del papel y en Vizmanos y Anzola (1997) la idea de tasa de variación que recupera el concepto de incremento. Además, la definición métrica aparece en el segundo curso en todos los libros.

Las representaciones gráficas son superabundantes en los cinco libros analizados. Cada concepto va seguido de su interpretación gráfica y de ejemplos gráficos que lo ilustran. Hay muchos gráficos cartesianos y un notable aumento de las tablas de valores, posiblemente debido a la introducción del límite por sucesiones. Además, en Vizmanos y Anzola (1997), se recuperan elementos de periodos anteriores como los diagramas de Venn, y se incorporan ciertos modos de los inicios de la matemática moderna, como las presentaciones tipo "película" que recuerdan las demostraciones por "películas" de Papy.

En relación con las representaciones simbólicas, hay una clara diferencia entre los libros. Mientras el Grupo Azul 21 (1997) utiliza un lenguaje simbólico abundante, Colera *et al.* (1996, 1997) y Vizmanos y Anzola (1997) suelen reducir el simbolismo. Así, el Grupo Azul 21 (1997) hace uso tanto de cuantificadores como de entornos y módulos, utilizando el lenguaje de ε y δ. La definición por ε y δ también aparece en Colera *et al.* (1996, 1997) y Vizmanos y Anzola (1997), sin utilizar simbólicamente los cuantificadores $\exists$ y $\forall$ y, en este último, reaparece la notación incremental.

En lo que se refiere al *análisis cognitivo*, todos los libros, excepto el de Matemáticas II de Colera *et al.* (1997), tienen un prólogo en el que los autores expresan sus intenciones. En los libros de Vizmanos y Anzola (1997) y Colera *et al.* (1996, 1997) se observa un intento de adaptación de los principios que inspiran el desarrollo curricular derivado de la LOGSE, lo que se manifiesta en dos direcciones: por un lado, se intenta dar significado a los conceptos, aproximándolos tanto a la realidad del alumno como al contexto histórico y cultural en el que han surgido; por otro, se incide en la resolución de problemas. Para estos libros son válidas las ocho características que señalábamos en el análisis cognitivo del periodo anterior, correspondientes al bloque D.

En el prólogo del libro del Grupo Azul 21 (1997), no se hace ninguna mención a la LOGSE; los autores manifiestan que: "hemos querido hacer un manual riguroso y útil[...] se ha cuidado mucho que resulte un libro adecuado para esta difícil travesía de la enseñanza media a la universidad". Con estos presupuestos, se configura un texto que pone el énfasis en las definiciones y en las demostraciones. Aunque también, al final de cada tema, aparecen notas históricas que tratan de contextualizar los conceptos.

Este diferente tratamiento va a condicionar las capacidades que se pretenden desarrollar en el alumno. Así, mientras que en los libros de Vizmanos y Anzola (1997) y Colera *et al.* (1997), el énfasis está puesto en los procedimientos y en la comprensión de los conceptos, el libro del Grupo Azul 21 (1997) incide más en el aprendizaje deductivo y en los aspectos simbólicos y formales asociados a los conceptos de límite y de continuidad.

En cuanto al *análisis fenomenológico,* aunque en los cinco libros analizados hemos encontrado referencias tanto a situaciones de la vida diaria como a diversos fenómenos de la naturaleza, observamos una menor profusión que en el periodo anterior.

En el libro del Grupo Azul (1997) aparecen los siguientes fenómenos:

- Variación de la temperatura en el interior de la Tierra en función de la profundidad (función continua), y variación de la densidad del interior de la Tierra en función de la profundidad (función discontinua).

En Colera *et al.* (1997):

- El aumento que proporciona una lupa en función de la distancia de ésta al objeto.
- La temperatura del agua en función del tiempo que transcurre entre el momento en que entra en ebullición y el momento en el que pasa a temperatura ambiente.

Finalmente, en Vizmanos y Anzola (1997) se presentan los siguientes fenómenos:

- Costo de una llamada telefónica en función del tiempo (función escalonada).
- Crecimiento de una persona en función del tiempo (función continua).
- Aterrizaje de un avión (que proporciona una visión intuitiva del concepto de límite de una función).

Además, estos autores plantean situaciones estrictamente matemáticas en las que se utilizan distintos tipos de funciones; las más habituales son las polinómicas, racionales y escalonadas.

CONCLUSIONES

Los planes de estudio, aunque no se han presentado pormenorizadamente, tienen las siguientes características señaladas en un artículo anterior (Sierra, González y López, 1999):

- El currículo oficial es cerrado hasta la última reforma derivada de la LOGSE.
- Su desarrollo no ha sido uniforme en cada una de las épocas; al analizar los libros de texto hemos demostrado las diferencias notables que existen entre ellos, a pesar de que en cada época deberían ajustarse a las disposiciones oficiales, y en una misma fecha coexisten libros de planes distintos.
- Existen "puntos de transición": introducción de la matemática moderna y aprendizaje constructivista preconizado en la última reforma.
- Está influido por las corrientes internacionales.

En los libros de texto analizados en los diferentes periodos se presentan las siguientes características:

- Paso progresivo de los "libros de autor", como los de Rodríguez San Juan, Sixto Ríos o Marcos de Lanuza, a los "libros de editoriales", como Magisterio Español, SM, Anaya y Santillana.
- Son producto de cada época con su lenguaje y sus justificaciones; términos como *intuición, matematización, rigor, matemática aplicada* tienen distintos sentidos en cada uno de los periodos considerados, incluso en cada periodo de un libro a otro.
- Ciertos libros han sido precursores de los cambios relacionados con los puntos de transición de los programas oficiales, como los textos piloto o el libro del Grupo Cero.

El concepto de continuidad ha experimentado una evolución desde considerarlo ligado a los conceptos de función y límite hasta alcanzar entidad propia. Particularizando para cada periodo, hemos de destacar las siguientes conclusiones:

- En el primer periodo, inicialmente (hasta los años cincuenta) se dan definiciones en las que se mezcla el concepto de variable y el de función y se utiliza el lenguaje de incrementos para definir la continuidad y, posteriormente, con la clarificación del concepto de límite, se da una definición precisa de continuidad.
- Durante el periodo de la matemática moderna, casi todos los autores presentan previamente una idea intuitiva de continuidad y, posteriormente, se define a partir del límite; se pone el énfasis en una presentación formal y se utiliza la definición topológica.

- En el periodo 1975-1995 se rompe la tendencia anterior. Algunos autores comienzan con la continuidad y siguen con el límite y otros mezclan ambos conceptos. Además, se incorpora la definición métrica de continuidad, aunque se da también la noción intuitiva y otras definiciones y, en la última fase de este periodo, se hace énfasis en la presentación intuitiva relacionándola con situaciones de la vida diaria y fenómenos naturales.
- Finalmente, en el último periodo, quizás debido a la reducción del bachillerato a dos años, se observa una cierta "condensación" de los contenidos y, en particular, del de continuidad, con una tendencia, por parte de la mayoría de los autores, a dar mucha información en poco espacio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné,* Grenoble, La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. y M.A. Johsua (1982), "Un exemple d'analyse de la transpositon didactique: La notion de distance", *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 3(1), pp. 159-239.

Choppin, A. (1993), "L'histoire des manuels scolaires. Un bilan bibliométrique de la recherche française", *Histoire de l'Éducation,* 58, pp. 165-185.

Dormolen, J., Van (1986), "Textual analysis", en B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (eds.), *Perspectives on Mathematics Education,* Dordrecht, Reidel, pp. 141-147.

Duval, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine,* Berna, Peter Lang.

Escolano, A. (dir.) (1997, 1998), *Historia ilustrada del libro escolar en España,* Madrid, Fundación Germán Sánchez Ruipérez.

Howson, G. (1995), *Mathematics Textbooks: A Comparative Study of Grade 8 texts,* Vancouver, Pacific Educational Press.

Lowe, E. y D. Pimm (1996), "'This is so': a text on texts", en A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (eds.), *International Handbook on Mathematics Education,* Dordrecht, Reidel, pp. 371-410.

Pimm, D. (1987), *Speaking mathematically,* Nueva York, Routledge y Kegan Paul. [versión en español: (1990), El lenguaje matemático en el aula, Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia-Ediciones Morata].

Pimm, D. (1994), "Mathematics classroom language, form, function and force", en R. Bielher, R. W. Cholz, R. Sträber y B. Winkelmann (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Dordrecht, Kluwer, pp. 159-169.

Puig, L. (1997), "Análisis fenomenológico", en L. Rico (coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, Barcelona, ICE, Universidad de Salamanca-Horsori, pp. 61-94.

Rico, L. y M. Sierra (1994), "Educación matemática en la España del siglo XX", en J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra, *Educación matemática e investigación*, Madrid, Síntesis.

—— (1997), "Antecedentes del currículo de matemática", en L. Rico (ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*, Madrid, Síntesis.

Sierra, M., M.T. González y C. López (1997), *Los conceptos de límite y continuidad en la educación secundaria: transposición didáctica y concepciones de los alumnos*, Salamanca, Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca (documento inédito).

—— (1999), "Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU), 1940-1995", *Enseñanza de las Ciencias*, 17 (3), pp. 463-476.

DATOS DE LOS AUTORES

Modesto Sierra Vázquez
Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales,
Universidad de Salamanca, España
mosiva@usal.es

María Teresa González Astudillo
Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales,
Universidad de Salamanca, España
maite@usal.es

Carmen López Esteban
Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales,
Universidad de Salamanca, España
clopez@usal.es

Schubring, G. (1986), "Rupture dans le statut mathématique des nombres négatifs", *Petit x*, núm 12.

—— (1987), "On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook autor", *For the Learning of Mathematics*, 7(3), pp. 41-51.

—— (1988), "Discussion epistemologique sur le statut des nombres negatifs et leur representation dans les manuels allemands et français de matématiques entre 1795 et 1845", *Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des mathématique et de l'Informatique*, La Pensée Sauvage, pp. 137-145.

Steiner, H.G. (1987), "Philosophical and epistemological aspects of mathematics and their interaction with theory and practice in mathematics education", *For the Learning of Mathematics*, 7(1), pp. 7-13.

Tavignot, P. (1993), "Analyse du processus de transposition didactique. Application à la symétrie orthogonal en sixième lors de la réforme de 1985", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13(3), pp. 257-294.

Un suplemento para un texto de cálculo

Daniel McGee y Rafael Martínez Planell

Resumen: Un elemento básico en el movimiento de reforma del cálculo es la incorporación de representaciones múltiples de funciones en el curso. El uso de representaciones múltiples de funciones produce diferentes métodos y formas de tratar los tópicos del curso. La "regla de tres", que fue adoptada por el Consorcio de Harvard, consiste en que cada tópico sea presentado desde los puntos de vista algebraico, geométrico y numérico. Éstos corresponden hasta cierto punto al uso de fórmulas, gráficas y tablas para presentar un tópico. Este artículo presenta nuestra motivación para adoptar un curso de cálculo de reforma, describe material suplementario que hemos creado para el curso y provee algunos resultados de un estudio estadístico que llevamos a cabo para evaluar la efectividad de los métodos de reforma en el curso de cálculo.

Abstract: A basic element of calculus reform movement is the incorporation of multiple representations of functions into the course. Using multiple representations of functions produces distinct methods and approaches to the topics of calculus. The "rule of three" adopted by the Harvard Consortium indicates that each topic should be presented from algebraic, geometric, and numeric points of view. To certain extent, these correspond to the use of formulas, graphs, and tables to present a topic. This article presents our motivation for adopting a "reform" calculus course, outlines supplementary material that we have created for this course, and provides some results of a case control study we conducted to judge the effectiveness of reform methods at calculus level.

Fecha de recepción: marzo de 2002.

INTRODUCCIÓN

El uso de representaciones múltiples puede dar a los alumnos varias imágenes mentales para lograr entender el concepto de función (Barker, 1993; Barshinger, 1993; Cuocco, 1994). Una extensión natural de este concepto es lo que se llama en el movimiento de reforma del cálculo "la regla de tres": que cada tópico se debe presentar desde la perspectiva algebraica, geométrica y numérica. Este artículo describe una experiencia con representaciones múltiples y "la regla de tres" al nivel de cálculo.

Hace algunos años, en la Universidad de Puerto Rico en Mayagüez nos dimos a la tarea de implantar un modelo de cálculo de reforma en pos de mejorar la enseñanza de esta materia. En este articulo, discutimos nuestra motivación para hacer este cambio. Luego, describimos un suplemento (Acuña, 1993) que originalmente desarrollamos para ser usado con los materiales del Consorcio de Harvard (CCH) (Hughes-Hallet, Gleason *et al.*, 1995). Este suplemento también puede ser utilizado con cualquier curso de cálculo. Finalmente, compartimos algunos de los resultados de una evaluación que hicimos comparando el rendimiento de los estudiantes en secciones de reforma con el de estudiantes en secciones tradicionales.

LA REFORMA EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO Y LA REGLA DE TRES

Los estudiantes tienden a salir de un curso típico de cálculo con una intuición geométrica muy pobre (Eisenberg y Dreyfus, 1991; Tall, 1991; Selden, Selden y Mason, 1994; Zimmermann y Cunningham, 1991). Así, por ejemplo, hace algunos años pedimos en una prueba que se computara la integral de la función valor absoluto en el intervalo de -1 a 1. Muchos estudiantes no pudieron completar exitosamente el ejercicio, a pesar de que la interpretación geométrica obvia proporciona el resultado de inmediato. Más interesante aún fue examinar la naturaleza de los errores cometidos por los estudiantes. La gran mayoría escogió hacer un cómputo analítico de la integral, cometiendo todo tipo de errores algebraicos al no saber manejar correctamente la expresión de valor absoluto. ¿A qué se debe que nuestros estudiantes graviten automáticamente a la manipulación de símbolos incluso en situaciones donde la interpretación geométrica resulta más efectiva? ¿Qué podemos hacer al respecto? A nuestro entender, para desarrollar la intuición geométrica en el estudiante promedio hay que diseñar ejemplos y ejercicios con este fin explícito en mente. Esto es algo que en textos tradicionales de cálculo no sucede con suficiente frecuencia.

En varios de los textos que resultaron del movimiento de reforma del cálculo en Estados Unidos (Darken, Wynegar y Kuhn, 2000; Haver, 1998; Tucker y Leitzel, 1995; Tucker, 1990; Solow, 1994), se hace un esfuerzo genuino por desarrollar la intuición geométrica. En particular, con el texto de cálculo del Consorcio de Harvard (Hughes-Hallet, Gleason, *et al.*, 1995), se populariza "la regla de tres" donde, al mismo tiempo que se desarrolla la intuición geométrica, también se tienden lazos con el entendimiento analítico para fortalecer así ambos modos de pensamiento. También consistentemente a través de este y otros textos que ponen en práctica la "regla de tres", se entrelaza el tratamiento numérico con el geométrico y analítico. Esto se hace con el uso de tablas numéricas que permiten interpretar el cálculo en el contexto de colecciones discretas de datos. El continuo enfocar e interrelacionar de las ideas del cálculo desde estas tres perspectivas (geométrica, analítica, y numérica) puede contribuir a construir una red de ideas que facilite la recuperación de memorias, al mismo tiempo que prepara al estudiante para que enfoque un problema dado desde perspectivas diferentes. Esto está de acuerdo con investigaciones sobre el funcionamiento de la memoria que establecen que, mientras más conexiones se puedan formar entre información que ha de ser recordada, mejor se puede recordar esa información (Hirst, 1988).

Además de la falta de intuición geométrica, los estudiantes típicamente tienen dificultad en transferir el conocimiento matemático obtenido en el curso de cálculo a las situaciones nuevas que se les presentan en los cursos de ciencias aplicadas, en particular de ingeniería. La práctica de presentar las ideas primero en el contexto de una situación sencilla de la vida diaria permite al estudiante utilizar su sentido común como punto de acceso al entendimiento de un nuevo concepto. De esta manera, el estudiante construye sobre lo ya conocido y de inmediato relaciona el mundo que lo rodea con su emergente mundo matemático del cálculo.

PROPÓSITO DEL SUPLEMENTO

El suplemento fue diseñado en un inicio para ser usado conjuntamente con el texto de cálculo del Consorcio de Harvard (CCH). Sin embargo, puede adaptarse para ser usado con cualquier otro texto de cálculo.

El suplemento se concentra principalmente en los tópicos que corresponden a un segundo semestre de cálculo en nuestra universidad, o sea: integración (por tablas, numérica, impropia), aplicaciones de la integral (concentrándonos en aplicaciones a geometría y a física), una breve introducción a ecuaciones diferenciales (campos de pendientes, método de Euler y separación de variables) y, por último, aproximaciones (polinomios de Taylor, serie de Taylor, aplicaciones, y un apéndice que trata de series en general).

Cada sección del suplemento cuenta con tres partes: una introducción, el cuerpo de la sección, y una colección de problemas suplementarios. La introducción, que por lo general es muy breve, está dirigida al profesor del curso. Por lo común, se sugieren aspectos de la materia en la que se va a hacer énfasis y se dan algunas indicaciones referentes a los problemas suplementarios. En algunas secciones esta parte hace referencia al texto del CCH.

La parte más importante y más extensa de cada sección, el cuerpo de la sección, consiste en una serie de ejemplos trabajados con todo detalle. Esta parte ha sido escrita teniendo al estudiante en mente y su propósito es facilitarle el entendimiento del material, proporcionándole una mayor variedad de ejemplos no tradicionales y ejemplos donde se interrelacionan diferentes formas de representación: algebraica, numérica y geométrica. Se incluyen, posiblemente, más detalles de los que un texto típico ofrece.

Finalmente, en cada sección incluimos una colección de problemas suplementarios, en ocasiones para expandir la materia cubierta en una sección dada del texto (CCH) y, en general, para dar al profesor opciones más allá de las contenidas en el texto que esté usando.

EJEMPLO TOMADO DE UNA SECCIÓN DEL SUPLEMENTO

SITUACIÓN

Tenemos una taza de café con una temperatura inicial de 80°F en una habitación donde la temperatura ambiente es igual a 26°F. Después de un minuto, la temperatura es igual a 78°F. Queremos saber cuál es la temperatura del café después de 10 minutos, después de 20 minutos y después de una hora.

Representación de la situación con una ecuación diferencial

Según la ley de enfriamiento de Newton, la razón con que un objeto se enfría es proporcional a la diferencia entre la temperatura ambiente y la temperatura del objeto. Es decir, si un objeto está a una temperatura 50°F más caliente que el medio ambiente, la temperatura va a bajar mucho más rápido que si sólo estuviese 1°F más caliente que el medio ambiente. Para representar este concepto matemáticamente, podemos definir las variables:

t = minutos transcurridos, y
$x(t)$ = temperatura después de t minutos.

Con estas variables, la relación de Newton se puede expresar como

$$\frac{dx}{dt} = k(x(t) - 26), \; x(0) = 80$$

donde k es la constante de proporcionalidad para el enfriamiento de café. Las constantes de proporcionalidad para distintas sustancias están en libros de referencia o se pueden conseguir de manera experimental. Vamos a suponer que hemos determinado que nuestra constante de proporcionalidad es $k = -0.2$. Entonces, la ecuación diferencial va a ser:

$$\frac{dx}{dt} = -0.2(x(t) - 26), \; x(0) = 80$$

Soluciones algebraicas

La primera alternativa para conseguir los datos que buscamos es resolver la ecuación diferencial algebraicamente utilizando el método de separación de variables. Al separar las variables e integrar ambos lados

$$\frac{dx}{dt} = -0.2(x(t) - 26)$$

llega a ser

$$\int \frac{dx}{x(t)-26} = \int -0.2dt$$

Completando la integración, tenemos la fórmula

$$\ln(x - 26) = -0.2t + C, \text{ donde } C \text{ es constante.}$$

Aplicando la función exponencial a ambos lados, obtenemos

$$x - 26 = e^{-0.2t - C} = e^{-0.2t}e^{C} = C_2e^{-0.2t}, \text{ donde } C_2 = e^{C}$$

y así terminamos con la fórmula

$$x(t) = 26 + C_2e^{-0.2t}, \quad x(0) = 80$$

Sustituyendo la condición inicial, tenemos:

$$80 = 26 + C_2e^{0}.$$

Así, podemos concluir que $C_2 = 54$ y nuestra fórmula es

$$x(t) = 26 + 54e^{-0.2t}$$

Con esta fórmula podemos concluir que, después de 10 minutos, $x = 26 + 54e^{-2} \approx 33.308°$. Después de 20 minutos, $x = 26 + 54e^{-4} \approx 26.989°$ y después de una hora, $x = 26 + 54e^{-12} \approx 26°$.

Soluciones geométricas

La ecuación diferencial nos da la fórmula para la pendiente $m = \frac{dx}{dt} = -0.2(x - 26)$ de la recta tangente a una curva solución $y = x(t)$ en un punto $(t, x(t))$. Con esta fórmula, podemos construir el cuadro 1, donde para cada (t, x), el cuadro nos da la pendiente asociada.

Cuadro 1 Pendiente en el punto (t, x)

	Minutos (t)						
		0	15	30	45	60	75
Temperatura (x)	0	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2	5.2
	20	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2
	26	0	0	0	0	0	0
	40	–2.8	–2.8	–2.8	–2.8	–2.8	–2.8
	60	–6.8	–6.8	–6.8	–6.8	–6.8	–6.8
	80	–10.8	–10.8	–10.8	–10.8	–10.8	–10.8

Con este cuadro, podemos dibujar el sistema de coordenadas y poner en cada uno de los puntos (t, x(t)) un pequeño segmento de recta con la pendiente que indica el cuadro. Observamos que una curva x(t) que sea solución de la ecuación diferencial y que pase por un punto (t, x (t)) va a tener como tangente el segmento de recta que está ahí dibujado. La figura 1 contiene el campo de pendientes que resulta al seguir este procedimiento con los datos del cuadro anterior.

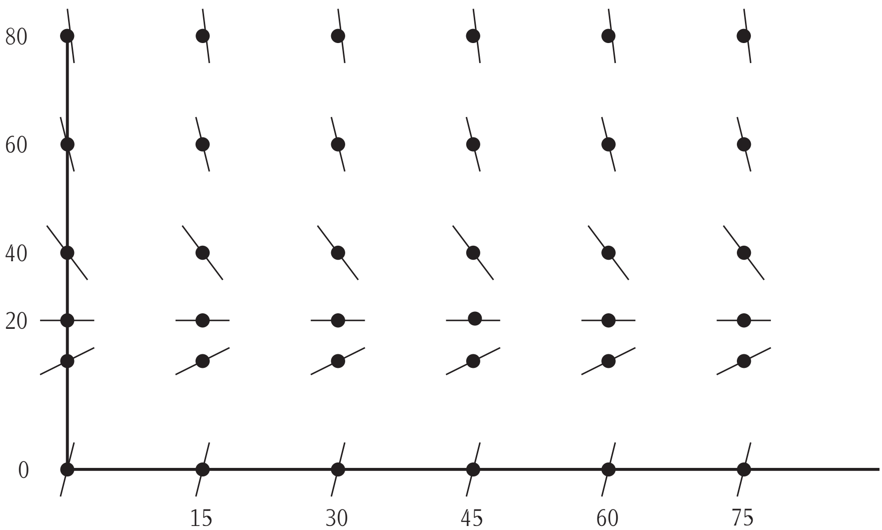


Figura 1

Con la ayuda de la tecnología, podemos mejorar este campo de pendientes para incluir muchos más puntos y las pendientes asociadas. Esto se muestra en la figura 2.

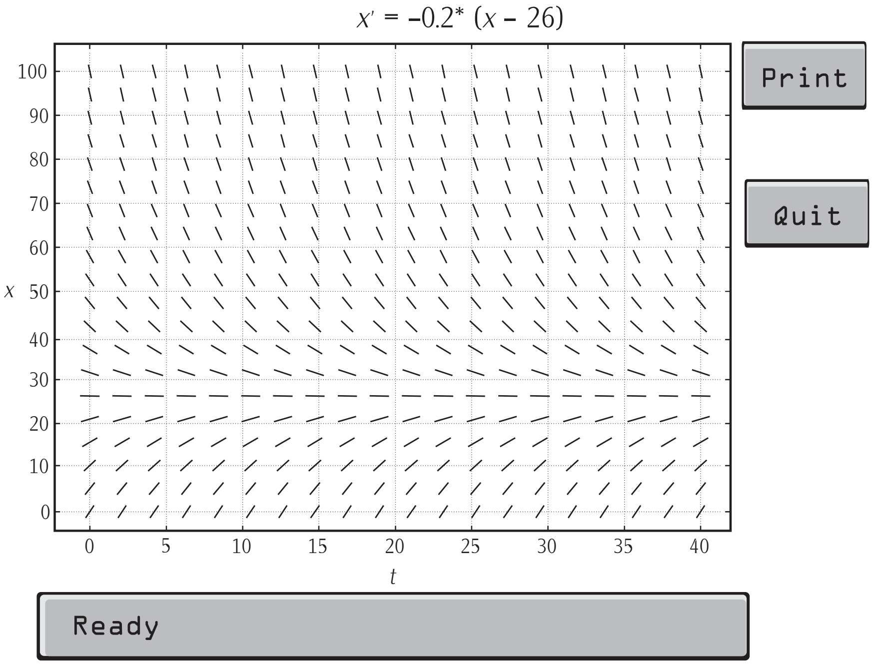


Figura 2

Sabemos que al comienzo del experimento, o sea cuando $t = 0$ minutos, la temperatura es igual a 80°F. Por tanto, la curva de la solución va a pasar por el punto (0, 80) y, además, debe ser consistente con el campo de pendientes que obtuvimos de la ecuación diferencial. Con estos dos datos podemos aproximar la curva solución como en la figura 3.

Al inspeccionar visualmente la curva solución, podemos ver que los puntos asociados con x = 10, x = 20 y x = 60 son aproximadamente (10, 33), (20, 27) y (60, 26). Así, después de 10 minutos la temperatura es aproximadamente 33°F, después de 20 minutos la temperatura es aproximadamente 27°F, y después de 60 minutos la temperatura es aproximadamente 26°F. Esto es congruente con los resultados obtenidos anteriormente con métodos algebraicos.

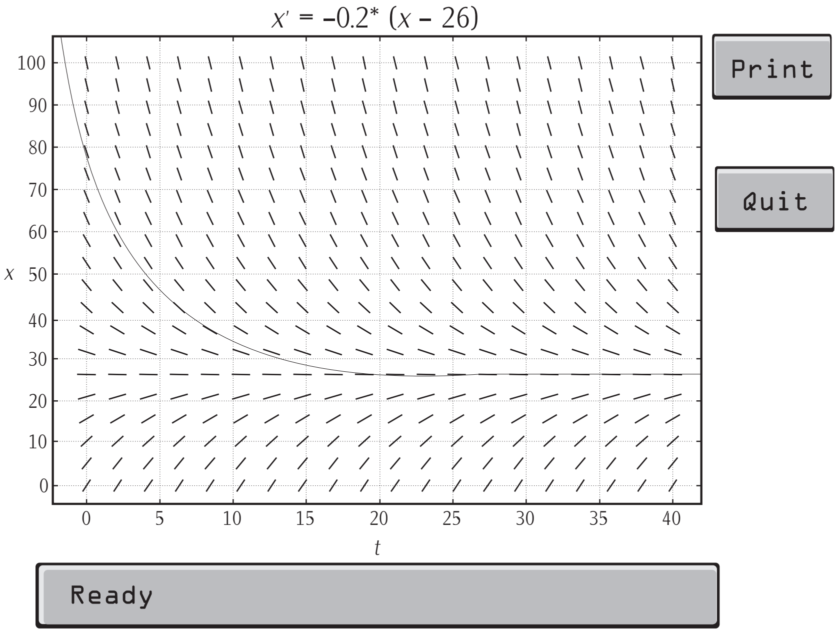


Figura 3

Soluciones numéricas

Ahora, vamos a conseguir la solución numéricamente utilizando el método de Euler. Para comenzar, tomamos $\Delta t = 2$, es decir, vamos a aproximar los puntos $(t, x(t))$ de la curva solución tomando intervalos de 2 minutos: partiendo de $(0, x(0))$ aproximamos $(2, x(2))$, luego, partiendo de esta aproximación de $(2, x(2))$ aproximamos $(4, x(4))$, y continuamos de esta manera. Para hacer esto, mantendremos la pendiente constante en intervalos de 2 minutos a la vez.

Durante el primer intervalo de 2 minutos, comenzamos en $t = 0$ minutos con una temperatura de 80°F, o sea, en el punto (0, 80). La pendiente de la curva en este punto es $m = \dfrac{dx}{dt} = -0.2(80 - 26) = -10.8$. Al trazar una recta que comienza en (0, 80) y sigue hasta $t = 2$ con pendiente igual a –10.8, vamos a terminar en el punto (2, 58.4).

Ahora estamos listos para comenzar el segundo paso de nuestra iteración. Comenzamos en $t = 2$ minutos con una temperatura de 58.4°F, o sea, en el punto

(2, 58.4). La pendiente de la curva en este punto es $m = \dfrac{dx}{dt} = -0.2(58.4 - 26) = -6.48.$ Al trazar una recta que comienza en (2, 58.4) y sigue hasta $t = 4$ con pendiente igual a −6.48, vamos a terminar en el punto (4, 45.44).

El proceso durante los primeros dos intervalos, se puede visualizar en la figura 4.

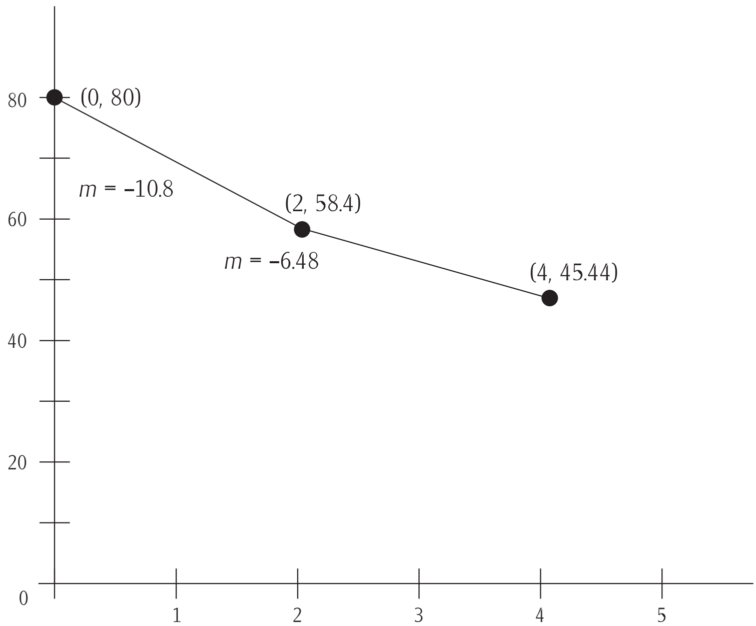


Figura 4

Al repetir este procedimiento 30 veces para todos los intervalos de 2 minutos entre 0 y 60 minutos, obtenemos la figura 5.

Con los valores de la gráfica 5 encontramos que, después de 10 minutos, la temperatura es aproximadamente 30.20°F, después de 20 minutos la temperatura es aproximadamente igual a 26.33°F y después de 60 minutos la temperatura es aproximadamente 26°F. Claramente los resultados que se obtienen dependen del tamaño de Δt. En este caso vemos que los resultados que obtuvimos son algo distinto a los obtenidos anteriormente.

Si repetimos el mismo procedimiento usando $\Delta t = 0.01$ encontramos que, después de 10 minutos, la temperatura es 33.2935, después de 20 minutos, la temperatura es igual a 26.9879 y, después de 60 minutos, la temperatura es igual

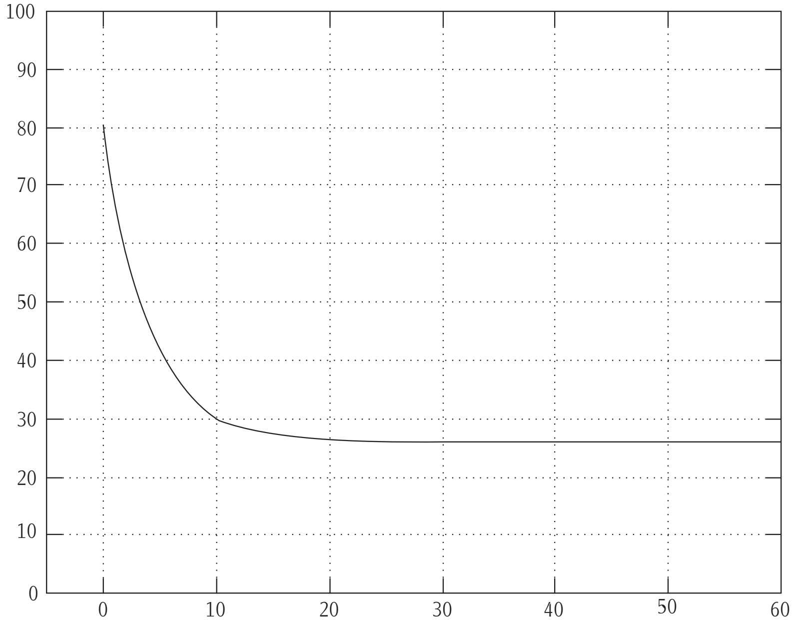


Figura 5

a 26.0003. Comparado con los valores precisos que conseguimos con el método algebraico, podemos ver que este método es extremadamente preciso si utilizamos un valor de Δt muy pequeño.

Resumen de los métodos

En conclusión, hemos buscado la temperatura después de 10, 20 y 60 minutos empleando tres métodos distintos. Encontramos que todos los métodos nos dieron aproximadamente la misma respuesta, aunque con el método numérico tenemos que tener cuidado de utilizar un valor de Δt suficientemente pequeño.

RESULTADOS

Como parte de la evaluación de la implantación del modelo del cálculo de reforma (CCH), formamos un comité que incluía a tres profesores del curso tradicional y a tres profesores del curso de la reforma. Este comité escogió 10 preguntas comunes para los exámenes finales del curso tradicional y del curso de la reforma. De estas 10 preguntas, 3 requerían un buen dominio de la interpretación geométrica y/o numérica de conceptos de cálculo. Estas preguntas fueron consideradas por el comité como ligeramente orientadas hacia el método de Harvard. Otras 3 eran preguntas donde se pedía hacer un cómputo que sólo requería buena destreza algebraica. Éstas se consideraron como ligeramente orientadas hacia el método tradicional. Hubo otras 4 preguntas que se consideraron neutrales. Aproximadamente 500 estudiantes hicieron la prueba en igualdad de condiciones. Más o menos la mitad de los estudiantes habían usado el cálculo de la reforma y la otra mitad, el cálculo tradicional.

Para asegurar que las poblaciones de estudiantes en ambas modalidades de cálculo tenían una preparación matemática comparable previa al curso, usamos la Prueba Estandardizada de Aprovechamiento en Matemática que es administrada por el Puerto Rico College Board y que los estudiantes realizan antes de entrar en la universidad. Habíamos observado en estudios anteriores que esta prueba era un buen predictor del desempeño académico de los estudiantes en los cursos de matemática.

Creamos 5 grupos distintos como se aprecia en el cuadro 2.

Solamente hicimos comparaciones entre alumnos del mismo grupo. Se adjudicó un total de 30 puntos para las preguntas comunes. Los resultados están en el cuadro 3.

Estos resultados son sólo parte de los que se obtuvieron en el estudio estadístico que se realizó después de un segundo semestre de cálculo. Se pueden obtener más resultados del análisis estadístico que se hizo para la primera porción del curso de cálculo en Acuña y Martínez-Planell (1995).

Cuadro 2

Grupo	Nota en la Prueba Estandarizada
I	Mejor que 749
II	700-749
III	650-699
IV	600-649
V	Menos de 600

Cuadro 3

Grupo	Promedio de los alumnos en el curso de reforma	Promedio de los alumnos en el curso tradicional
I	29.0	22.5
II	21.3	18.3
III	19.0	16.4
IV	18.5	11.2
V	17.5	19.0

CONCLUSIÓN

El estudio estadístico que se hizo comparando el aprovechamiento de los estudiantes en las secciones de cálculo de reforma con el de los estudiantes en las secciones tradicionales sugiere que, al finalizar el curso, los estudiantes de reforma habían logrado una mejor comprensión de conceptos básicos de cálculo que los de las secciones tradicionales. Claramente este estudio estadístico no permite concluir sin lugar a dudas que los resultados positivos obtenidos se deben a la aplicación consistente de representaciones múltiples a través del curso. Son demasiadas las variables que pueden afectar el aprendizaje de la matemática. Sin embargo, estos resultados sí indican que vale la pena continuar utilizando representaciones múltiples en la presentación de los conceptos de cálculo y seguir estudiando el efecto de este enfoque en el aprendizaje que se da en los estudiantes.

En resumen, nuestra experiencia con la reforma fue una experiencia muy positiva, tanto en términos de los resultados como en términos de la experiencia pedagógica. Algunos aspectos que hemos señalado del suplemento ayudaron a que la implantación del programa fuera un éxito. Así, nos gustaría ofrecerlo como opción a otros profesores e instituciones. Tanto el suplemento como resultados más completos de nuestro estudio de la efectividad del programa del Consorcio de Harvard se pueden conseguir poniéndose en contacto con los autores.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acuña, E. y R. Martínez-Planell (1995), "Comparing the reform calculus with tradicional calculus at the University of Puerto Rico", *en Proceedings of the Eighth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics,* Menlo Park CA, Addison Wesley, pp. 10-14.

Artigue, A. (1998), "Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 1, pp. 40-55.

Barker, W.H. (1993), "Pendulum motion-the value of multiple solution methods", *PRIMUS,* vol. III, núm. 3, Rose-Hulman Institute of Technology, Indiana, pp. 225-244.

Barshinger, R. (1993), "Calculus revision: exploratory data analysis and the rule of three", *PRIMUS,* vol. III, núm. 4, Rose-Hulman Institute of Technology, Indiana, pp. 430-436.

Cuocco, A.A. (1994), "Multiple representations for functions, in Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning", en J. Kapunt y E. Dubinsky (eds.), MAA notes núm. 33, Washington, Mathematical Association of America, pp. 121-140.

Darken, B., R. Wynegar y S. Khun (2000), "Evaluating calculus reform: a review and a longitudinal study", en E. Dubinsky, A. Schoenfeld y J. Kapunt (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV,* Providence RI, CBMS Issues in Mathematics Education, vol. 8, American Mathematical Society, pp. 16-41.

Eisenberg, T., T. Dreyfus (1991), "On the reluctance to visualize in mathematics", en W. Zimmermann y S. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*", MMA notes núm. 19, Washington, Mathematical Association of America, pp. 25-38.

Haver, W.E. (ed.) (1998), *Calculus: Catalyzing a National Community for Reform,* Washington, Mathematical Association of America.

Hirst, W. (1998), "Improving memory", en M. Gazzaniga (ed.), *Perspectives in Memory Research,* MIT.

Hughes-Hallet, D., A.M. Gleason *et al.* (1995), *Cálculo,* México, Compañía Editorial Continental.

Martínez-Planell, R., D. McGee, K. Wayland *et al.* (1996), *Suplemento de cálculo II,* Mayagüez, Universidad de Puerto Rico en Mayagüez.

Selden, J., A. Selden, y A. Mason (1994), "Even good calculus students can't solve non-routine problems", en J. Kapunt y E. Dubinsky (eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning,* MAA notes núm. 33, Washington, Mathematical Association of America, pp. 17-26.

Solow, A. (1994), *Preparing for a New Calculus, Mathematical Association of America,* MAA notes núm. 36, Washington, Mathematical Association of America.

Tall, D. (1991), "Intuition and rigor: the role of visualization in the calculus", en W. Zimmermann y S. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics,* MAA notes núm. 19, Washington, Mathematical Association of America, pp. 105-119.

Tucker, A. y J. Leitzel (1995), "Assessing calculus reform efforts", MAA report núm. 6, Washington, Mathematical Association of America.

Zimmermann, W. y S. Cunningham (1991), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics,* MAA notes núm. 19, Washington, Mathematical Association of America.

DATOS DE LOS AUTORES

Daniel McGee

Departamento de Matemática, Universidad de Puerto Rico en Mayagüez, Puerto Rico

mcgee@quiz.uprm.edu

Rafael Martínez Planell

Departamento de Matemática, Universidad de Puerto Rico en Mayagüez, Puerto Rico

rafael@math.uprm.edu

Estudio de la estructura de las unidades didácticas en los libros de texto de matemáticas para la educación secundaria obligatoria*

Ana Serradó Bayés y Pilar Azcárate Goded

Resumen: Este artículo recoge los primeros resultados de una investigación sobre la estructura y organización de los libros de textos de matemáticas en la educación secundaria obligatoria desarrollada en España. Su finalidad es detectar el modelo y las formas implícitas en su organización, en su discurso y en el tipo de actividades que proponen. Para su desarrollo se elaboró un formulario que recoge los diferentes elementos que intervienen en un proceso de enseñanza y aprendizaje y sus interacciones desde la perspectiva de los diferentes modelos didácticos posibles. El estudio se ha centrado en las unidades de trabajo que tratan sobre uno de los contenidos matemáticos más olvidados en los libros de texto, el "tratamiento del azar", aunque constituye uno de los conocimientos básicos de la formación matemática del ciudadano actual.

Abstract: This article presents the first results of an investigation about the structure and organization of the Spanish mathematical textbooks. The main purpose is to detect the model and the implicit forms in its organization, discourse, and the kind of activities proposed. For its development, a form containing all the elements involved in a teaching and learning process was built. This study is focussed in the chapters that present one of the most forgotten topics in mathematical textbooks, probability, although this is basic content for the mathematical instruction of nowadays citizens.

INTRODUCCIÓN

Durante los últimos cursos ha surgido una demanda en el ámbito social en torno al uso y la influencia del libro de texto en los procesos de enseñanza y aprendizaje desarrollados en las aulas. Este tipo de demanda no ha pasado inadvertida

Fecha de recepción: junio de 2001.

*Esta publicación es resultado del proyecto PB97-0737 financiado por la CICYT.

por los investigadores en educación que, ya en la década de los ochenta, emprendieron un gran número de estudios sobre los materiales escolares (Apple, 1989; Goodson, 1989; Torres, 1991; Albatch, 1991; Gimeno, 1995). En un primer momento, las investigaciones sobre los libros de texto se centraron en analizar los aspectos estructurales de éstos, como el diseño del material, el tamaño, la encuadernación, las características del texto o ilustración y la amenidad o facilidad para la comprensión lectora. En la actualidad, los materiales curriculares que desarrollan el currículo se han convertido en un motivo central de atención en relación con los problemas de la calidad de la enseñanza. Hecho que también se ha reflejado en la ampliación del campo de análisis de los materiales escolares, que va desde cuestiones técnicas hasta otro tipo de preocupaciones relacionadas con la manera en que se elabora el material curricular y cómo, explícita o implícitamente, ésta determina gran parte de la actividad de la escolarización (Martínez Bonafé, 1995).

En general, la mayoría de los profesores de matemáticas se apoyan en los libros de texto y en sus guías didácticas para planificar y desarrollar los procesos instructivos. Estas guías les aportan la información necesaria sobre los objetivos y contenidos que deben establecer y las orientaciones metodológicas que guiarán su práctica. Es decir, los libros de texto especifican el proceso de enseñanza-aprendizaje, las nociones teóricas que se van a explicar, las actividades que deben realizar los alumnos y, en cierta manera, caracterizan la formación matemática que, desde sus propuestas, se está promoviendo en las aulas.

Como ya indicaba Goodson (1995), los textos escolares se elaboran desde determinados puntos de vista sociales y políticos, sus autores han desplegado en ellos su carga ideológica y algunos recursos concretos adecuados para conseguir sus fines individuales y colectivos. En nuestra opinión, conocer los modelos didácticos implícitos en sus propuestas es de vital importancia para comprender el tipo de intervención que promueven y poder reflexionar sobre sus consecuencias y su evolución. Para Torres (1991), resulta interesante develar qué es lo que dicen y lo que omiten los libros de texto que, obligatoriamente, entran en contacto con los alumnos y alumnas, cuáles son los estereotipos y distorsiones de la realidad que promueven, de quiénes se habla y qué colectivos no existen, etcétera.

En esta línea, presentamos a continuación los resultados del análisis realizado sobre la estructura que presentan las unidades didácticas en los libros de texto de matemáticas que corresponden a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) desarrollada en España (1er ciclo: 1º y 2º curso de ESO; 2º ciclo: 3º y

4º de ESO; en 4º se diferencian dos niveles, A y B, según los estudios futuros). Realizamos el análisis sobre algunas de las editoriales más habituales en España.

La principal finalidad del estudio es detectar el modelo y las formas implícitas en su organización, en su discurso y en el tipo de actividades que proponen (Serradó y Azcarate, 2000a; Serradó, 2000a). Esta investigación intenta caracterizar los elementos que configuran la intervención del profesor en el aula y el papel que se concede al alumno en el proceso de enseñanza y aprendizaje propuesto. Torres (1991) nos propone algunas pautas para el análisis del contenido de los libros de texto en cualquier área de educación secundaria:

- ¿Qué conocimientos introducen los libros de texto?
- ¿Cuáles son las relaciones que se establecen entre estos conocimientos?
- ¿Qué estrategias metodológicas presenta el libro de texto? (Tipo de actividades, recursos usados, agrupamientos de alumnos, etcétera).

Desde esta perspectiva nos hemos formulado una serie de interrogantes que, en definitiva, son los problemas específicos abordados en el estudio empírico:

Problema 1: En primer lugar, nos interesa caracterizar los elementos que configuran la intervención de un profesor que siga estrictamente la estructura propuesta en el libro de texto: *¿Qué elementos caracterizan la estructura y el diseño de las unidades en los libros de texto analizados? ¿Cómo se presentan los contenidos? ¿Cómo se organiza el discurso? ¿Qué tipos de actividades introducen? ¿Qué recursos y estrategias metodológicas sugieren? ¿Cómo se evalúa al alumno?*

Problema 2: En segundo lugar, nos interesa analizar si los elementos que caracterizan la estructura del libro de texto están relacionados entre sí y se configuran un determinado modelo didáctico: *¿Existen ciertos modelos entre el conjunto de libros de texto analizados?*

La resolución de estos dos problemas de investigación tiene como objetivo detectar los modelos de enseñanza y aprendizaje implícitos en las unidades analizadas. En este artículo presentamos algunas respuestas a estos problemas. El análisis se ha centrado exclusivamente en las unidades didácticas dedicadas al tratamiento del azar, por ser este tópico matemático el núcleo de la agenda de investigación de nuestro grupo (Azcárate, 1996; Cardeñoso, 1998; Cardeñoso y Serradó, 2000).

Para su resolución, utilizamos como estrategia metodológica el *análisis de contenido* (Bardín, 1986). Esta estrategia de investigación se caracteriza por determinadas fases: la precisión del objetivo que se persigue, la definición del universo de estudio, la determinación de las unidades de análisis, la elaboración de hipótesis, la determinación de categorías, la elaboración de una guía objetiva, la cuantificación de cada una de las categorías, la interpretación de los datos obtenidos, la elaboración de las conclusiones. El proceso se ha realizado a través del análisis del contenido de los libros de texto de la muestra escogida (anexo I). Este análisis se realiza a través de un formulario (anexo II), elaborado a partir del análisis teórico de los elementos que intervienen en la planificación de la intervención en el aula y modelados en un sistema de categorías. Estas categorías han sido formuladas desde los trabajos realizados por nuestro grupo de investigación sobre los diferentes modelos didácticos, los cuales están sintetizados en el anexo III; en el estudio que nos ocupa se han adaptado al análisis de los elementos presentes en los libros de texto (Azcarate, 2001; Porlan y Rivero, 1998).

ORGANIZACIÓN DE LOS BLOQUES DE CONTENIDOS

Los libros de texto seleccionados se organizan en torno a los siguientes bloques de contenidos: números y operaciones; medida, estimación y cálculo de magnitudes; representación y organización del espacio; interpretación, representación y tratamiento de la información y tratamiento del azar. La propuesta de organización de los contenidos es disciplinar siguiendo las pautas habituales (Cardeñoso y Azcárate, 1995).

Autores como Gimeno (1995) o Apple (1989) indican que, en las investigaciones relacionadas con los libros de texto, es necesario analizar tanto la posición de las diferentes unidades como la cantidad de páginas dedicadas a cada una de las unidades. Según estos autores, esta información permite establecer la importancia que dan los autores o el grupo editorial a la unidad que se estudia. La mayoría de las editoriales coinciden en ubicar las unidades dedicadas al tratamiento del azar como las últimas del libro de texto. Las diferentes editoriales dedican entre 6% (Guadiel) y 16% (McGraw-Hill) del total de páginas del libro al bloque dedicado al "tratamiento del azar"; este porcentaje es insignificante en relación con el número de páginas que se dedica a otros bloques.

El análisis exhaustivo de la organización de los bloques de contenido, de la secuencia de éstos a lo largo de la etapa, de la ubicación de las unidades en el libro de texto y del número de páginas dedicadas a éstas permiten intuir la poca importancia que los autores de los libros de texto y las editoriales asignan al "tratamiento del azar".

ESTRUCTURA DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS

En general, los rasgos específicos de las matemáticas en la cultura occidental son: claridad, precisión, valor argumentativo de las pruebas, valor de veracidad en las demostraciones, y aplicabilidad en la interpretación de los fenómenos y en la resolución de problemas (Rico, 1997). Estos rasgos no se concretan en una manera única de dar significado al proceso de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos, sino en diferentes modos de entender la relación entre los elementos que intervienen en el proceso (Serradó, 1998, 2000a), los cuales están presentes en la organización y contenido de los libros de texto.

El análisis del contenido reflejado en los libros de texto, aunque no permite el estudio exhaustivo de las características del proceso de enseñanza y aprendizaje desarrollado en el aula, sí nos permite conocer y caracterizar gran parte de los elementos que configuran la planificación de la intervención del profesor. Muchos de los ámbitos que los profesores deben poner en juego a la hora de planificar la intervención se ven reflejados en el diseño de los libros de texto; por ejemplo: las finalidades del proceso de enseñanza-aprendizaje (en forma de objetivos), el tipo de conocimiento que se va a poner en juego a partir del análisis de la manera de presentar el contenido, las fuentes del conocimiento, los recursos utilizados para elaborar el conocimiento, el papel que desarrolla el alumno a partir del análisis de la propuesta de actividades y la regulación de la comunicación a partir del análisis de la presentación de ítems de evaluación y las características de ésta.

Estos aspectos generales de planificación de un proceso de enseñanza y aprendizaje se concretan en los libros de texto en tres partes diferenciadas que son *la presentación, el desarrollo* y *el cierre de la unidad:*

- La presentación de la unidad incluye los *objetivos* y los *contenidos* que se desarrollarán a lo largo de ésta, además de un conjunto de *actividades* para motivar, explorar o evaluar los conocimientos previos de los alumnos.
- El desarrollo de la unidad incluye el análisis de la manera de *organizar y secuenciar* los contenidos y la *estructura del discurso*, determinada por las diferentes formas de presentar las nociones teóricas y las actividades.

- El cierre de la unidad incluye los diferentes *tipos de actividades* que presentan las unidades para consolidar y evaluar los contenidos aprendidos, y un breve *resumen*.

Sobre ellas hemos estructurado nuestro análisis, intentando dar luz a los interrogantes planteados y aproximándonos a la comprensión del modelo didáctico subyacente.

I. Presentación de la unidad

Las cuatro editoriales de la muestra introducen diferentes partes en la presentación de la unidad; éstas pueden ser: la concreción de los objetivos, la de los contenidos y la introducción de un texto motivador que, junto con un conjunto de actividades, tiene la finalidad de evaluar los conocimientos previos de los alumnos o explorar las ideas iniciales de éstos.

I.1. *Los objetivos*

El Diseño Curricular Base para la Educación Matemática en la Etapa de Educación Secundaria Obligatoria desarrollada en España, establece que *los objetivos* deben entenderse como las intenciones que sustentan el diseño y la realización de las actividades necesarias para la consecución de las grandes finalidades educativas. Los objetivos aluden a lo que se pretende enseñar. Se expresan, sobre todo, en términos de las capacidades que los alumnos han de desarrollar y no tanto en el sentido de objetivos que establezcan lo que deben hacer. Estos objetivos marcan prioridades en el desarrollo de las capacidades de los alumnos (Serradó y Azcárate, 2000b).

A continuación, presentamos algunos enunciados referentes a las diferentes capacidades que se pretenden desarrollar a lo largo de la etapa, clasificados según sean para aprender contenidos conceptuales, procedimentales o actitudinales. Los ejemplos presentados son todos de la opción B del 4º curso:

- Objetivos referidos a aprender hechos, conceptos y estructuras conceptuales: “Distinguir entre sucesos compatibles e incompatibles” (Santillana, 4ºB, p. 264).

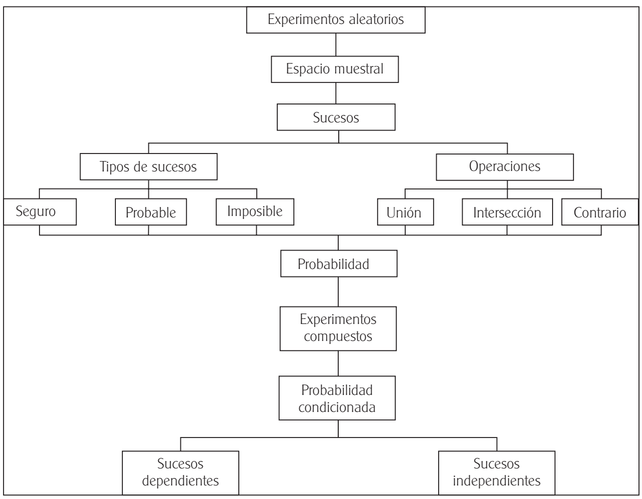
"Distinguir entre sucesos dependientes y sucesos independientes en situaciones problemáticas simples" (Bruño, 4ºB, p. 265).

- Objetivos referidos a aprender un procedimiento:
  "Utilizar recursos como la construcción de diagramas en árbol para la asignación de probabilidades en los casos de sucesos compuestos" (Guadiel, 4ºB, p. 230).
  "Utilizar las técnicas de los diagramas de árbol y de las tablas de contingencia para la resolución de problemas de probabilidad" (Santillana, 4ºB, p. 264).
- Objetivos referidos a desarrollar una actitud:
  "La desconfianza de que se den situaciones con probabilidad prácticamente nula, como, por ejemplo, que al lanzar mil monedas salgan todas caras" (McGraw-Hill, 4ºB, p. 227).

I.2. *Los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales*

Todas las editoriales priman la introducción de contenidos conceptuales por encima de los procedimentales y los actitudinales.

Los *contenidos conceptuales* se caracterizan como un conocimiento que es rico en relaciones. En este sentido, las editoriales muestran diferentes maneras de relacionar los contenidos conceptuales. Las editoriales Bruño y Guadiel presentan los contenidos de la unidad mediante mapas conceptuales, como por ejemplo, el presentado por la editorial Bruño en 4ºB, p. 265.



Éstos presentan, de manera concisa, simple y vistosa, las relaciones entre las principales ideas, aprovechando la notable capacidad humana para la representación visual (Novak, 1982). En los libros de texto, estos mapas conceptuales muestran a los alumnos cómo integrar y organizar los contenidos conceptuales. La editorial Santillana no presenta desarrollados los contenidos conceptuales. La editorial McGraw-Hill presenta los contenidos conceptuales como sentencias que especifican los conceptos que hay que trabajar, sin plantearse la creación de una estructura conceptual.

La mayoría de las editoriales analizadas no acostumbra introducir contenidos *actitudinales*. De las cuatro editoriales analizadas, sólo la editorial McGraw-Hill desarrolla los contenidos actitudinales en la sección "Y descubrirás la importancia de:", en la que encontramos, por ejemplo, el siguiente texto: "El reconocimiento y valoración de las matemáticas para interpretar, describir y predecir situaciones inciertas".

En los libros de texto podemos encontrar dos propuestas diferenciadas de contenidos procedimentales. Por una parte, hay libros de texto que introducen contenidos procedimentales en relación con destrezas y procedimientos concretos como: calcular, utilizar, aplicar, asignar, etc., que implican la aplicación de contenidos conceptuales aprendidos con anterioridad y que están asociados habitualmente a un aprendizaje memorístico como: "Utilizar correctamente el lenguaje del azar y asignar probabilidades a resultados en experimentos aleatorios utilizando la regla de Laplace" (Santillana, 3º, p. 248). Por el contrario, hay otros libros de texto que, cuando hablan de contenidos procedimentales, hacen referencia a capacidades como: construir, obtener, buscar estrategias, diseñar, comprobar, formular, etc., que sugieren un intento en la construcción de los contenidos como, por ejemplo: "Confección de tablas de frecuencia para representar el comportamiento de fenómenos aleatorios" (McGraw-Hill, 4ºB, p. 227).

I.3. *Las actividades iniciales*

Las cuatro editoriales inician las diferentes unidades con un conjunto de actividades a fin de motivar y presentar la unidad (Serradó y Azcárate, 2000a). Según la finalidad que adquieren estas actividades en la presentación, las podamos clasificar en: actividades de motivación, evaluación inicial o exploración.

Santillana inicia las diferentes unidades de cada curso siguiendo exactamente la misma estructura. En primer lugar, como instrumento de motivación y con el propósito de introducir al alumno en el tema, presenta un texto introductorio y, a continuación, plantea una serie de cuestiones en relación directa con el texto. A lo largo de los cuatro cursos se presentan los siguientes textos: "Juegos de azar", "Resultados posibles en los juegos del azar", "El juego de dominó", "El juego de la ruleta" y "El juego de los chinos". Los dos primeros textos hacen referencia a las nociones de aleatoriedad y probabilidad, mientras que los otros tres textos introducen a los alumnos en los tres juegos planteados. Estos textos utilizan un lenguaje simple, cotidiano, que les permite introducir algunos de los contenidos conceptuales que se desarrollarán a lo largo de la unidad, además de otras cuestiones. En ninguna de las cuestiones propuestas se pretende que el alumno llegue a elaborar respuesta alguna.

Guadiel, por el contrario, introduce una primera actividad con el título "Recuerda lo que sabes", que tiene la finalidad de hacer una evaluación inicial. Por ejemplo, en el libro de Matemáticas de 2º, p. 126, se introduce una prueba inicial de los contenidos desarrollados con anterioridad y que son necesarios en ésta, a través de la siguiente actividad: "Expresa los siguientes tantos por ciento en tantos por uno y en forma de fracción: *a)* 15% = ... = 15/100 *b)* 2,5% = 0,025 =... / ...". Sin embargo, en el libro de 4º, para mostrar los contenidos por desarrollar en la unidad, utiliza un texto sobre el uso cotidiano de la noción de probabilidad a partir de términos como "seguro", "probable", "imposible", etc., y dos actividades de exploración independientes entre sí. La primera, para buscar el significado de palabras como "causal" y "aleatorio", y la segunda, sobre el planteamiento y análisis de una falacia.

Bruño sigue, en los diferentes cursos, una estructura común parecida a la de Santillana. Vemos que esta editorial se plantea cuestiones de reflexión que surgen de las intuiciones primarias que poseen los alumnos sobre situaciones de aleatoriedad y probabilidad. Este tipo de actividades se pueden considerar como actividades exploratorias y diagnósticas de las intuiciones primarias de los alumnos (Fischbein, 1975). Un ejemplo claro de la intencionalidad de este diagnóstico lo podemos encontrar en el libro de texto *Matemáticas 3º* de la Editorial Bruño, p. 264:

> Constantemente estamos recibiendo, a través de los periódicos, de la radio o de la televisión, noticias sobre los premios de las quinielas, la lotería, la Primitiva, el sorteo de la ONCE, etc. Todos ellos son juegos de azar.
>
> Los juegos son muy antiguos, pero solamente en los últimos tiempos han sido controlados por los estados.

Los juegos de cartas, dados y otros juegos de mesa también son juegos de azar; aunque en ellos influye la pericia del jugador".

1. Si tienes que comprar 10 números para una rifa de un ordenador, ¿prefieres que los números sean consecutivos o salteados?
2. Si se lanza una moneda 5 veces y las cinco sale cara, en la siguiente tirada, ¿a qué apostarías, a cara o cruz?
3. Un matrimonio tiene 4 hijos varones y la mujer está embarazada. ¿Qué es más probable que tenga: una niña o un niño?

Como podemos observar, ahí se presenta un texto introductorio sobre las características de los juegos de azar y plantea tres cuestiones de opinión (a partir de las intuiciones de los alumnos) sobre la posibilidad de ocurrencia de un suceso en situaciones cotidianas y de juego. No se pretende modificar las ideas detectadas mediante otras actividades que maticen los argumentos aportados en éstas. Además de esta finalidad exploratoria, el objetivo de esta actividad sería desarrollar una actitud crítica del uso cotidiano de las nociones de aleatoriedad y probabilidad.

McGraw-Hill presenta un primer conjunto de actividades con el título "Para empezar: investiguemos...", con una estructura común para los cuatro cursos que especifica que "te han de permitir relacionar los conocimientos que vas a aprender con los que previamente tenías" (McGraw-Hill, *Matemáticas 1º*, p. 5). Por ejemplo, en el libro del 2º curso, presenta cinco actividades que hacen referencia a diferentes generadores aleatorios: moneda, dado, urna, chinchetas, pero sin manipularlos. El alumno ha de asignar probabilidades a partir del estudio de las posibilidades de ocurrencia de determinados sucesos. En la misma línea, en 4º A propone tres actividades independientes: una, de razonamiento sobre una falacia; otra, de carácter manipulativo para realizar en grupo en busca de estrategias ganadoras; y una tercera, para introducir el concepto de juego justo.

Son actividades que permiten la *exploración* de los conocimientos que poseen los alumnos a partir de la manipulación, de la reflexión en ciertos contextos, o a partir del uso del significado cotidiano de las nociones de probabilidad e independencia. Esta editorial sigue con la misma dinámica en el desarrollo de la unidad y, habitualmente, introduce todas las nociones teóricas a partir de ejercicios exploratorios de carácter manipulativo que deben realizar los alumnos. En las otras editoriales detectamos una total desconexión entre las actividades que se introducen en la presentación de la unidad y las que facilitan su desarrollo.

II. Desarrollo de la unidad

En esta sección presentamos el contraste entre editoriales respecto a dos dimensiones: las diferentes formas de organizar y secuenciar los contenidos y la manera de organizar la estructura del discurso. Esta última dimensión la analizaremos mediante la relación que se establece entre la presentación de las nociones teóricas y las actividades que deben realizar los alumnos durante el desarrollo de las unidades: como se proponen, y qué tipo de vínculo se va estableciendo entre ellas. Este análisis nos permite detectar el papel que se le otorga al alumno en la elaboración del conocimiento matemático y el significado ontológico y epistemológico implícito en la propuesta.

II.1. *La organización y secuenciación de los contenidos*

Con ello hacemos referencia a la presentación y organización de los contenidos teóricos a lo largo de la etapa y la secuencia que se presenta en cada una de las unidades. Al analizar las diferentes editoriales de la muestra, podemos observar que, en la mayoría, las unidades se organizan a partir de la presentación de una secuencia jerarquizada de los contenidos. Las diferentes unidades se fragmentan en secciones que, a menudo, se vuelven a fragmentar en apartados, cada uno de los cuales introduce un único contenido conceptual.

Pero se pueden detectar algunas diferencias. En dos de las editoriales, Santillana y Bruño, la organización de las nociones teóricas se presenta de una manera muy *lineal* que recuerda los modelos tradicionales de organización de los contenidos académicos y condiciona tanto la organización de los contenidos a lo largo de la etapa como la secuencia de los contenidos a lo largo de la unidad.

Por consiguiente, a lo largo de la etapa los contenidos se van incorporando, progresivamente, respetando siempre una secuencia disciplinar. Esta organización de los contenidos matemáticos sigue una lógica disciplinar académica en la que cada uno de los contenidos conceptuales fundamenta el siguiente contenido que se va a introducir y en ningún momento se retoman o se relacionan con actividades previas. En cursos sucesivos, se repiten algunos contenidos y se incorporan otros nuevos. En los diferentes libros de la etapa no se encuentran referencias a los libros de texto de cursos inferiores, de modo que no se hace referencia alguna a los conocimientos previos de los alumnos. Esta secuencia se caracteriza por una ordenación común de los contenidos que se van a tratar en los diferentes niveles, trabajando inicialmente la noción de suceso, los tipos de sucesos, la noción de probabilidad y el cálculo de probabilidades. La noción de aleatoriedad se suele obviar. Para Santillana y Bruño, que presentan esta secuencia lineal de contenidos conceptuales, la fragmentación en partes simples –secciones perfectamente delimitadas– es tan importante que la secuencia condiciona incluso la maqueta del libro de texto. Cada uno de los contenidos conceptuales se trabaja en una o dos páginas en las que se incorpora un conjunto reducido de ejercicios.

Sin embargo, en Guadiel y McGraw-Hill, aun manteniendo una concepción simple de la estructura organizativa del conocimiento, ésta es significativamente distinta de la organización lineal. En cada uno de los niveles, se prima la ampliación progresiva de los contenidos por tratar, tanto en amplitud como en profundidad, y se presenta una organización más cercana a la *helicoidal*. Esta ampliación se realiza siempre a partir de la investigación sobre los contenidos aprendidos con anterioridad; las presentaciones de las unidades incorporan actividades de evaluación o exploración de los contenidos trabajados con anterioridad que luego se retomarán a lo largo de la unidad. Además, en los libros de texto de estas editoriales, podemos encontrar referencias a libros de texto de niveles previos. La maqueta de los libros de estas editoriales no está condicionada por la secuencia de los contenidos, sino que intenta crear la sensación de un continuo en el tratamiento de los ejemplos, las actividades y las explicaciones teóricas.

En ambas formas de organizar el contenido, cada una de las secciones está compuesta por un conjunto de explicaciones que configuran el discurso escrito. En él podemos detectar diferentes maneras de introducir las nociones teóricas y su vinculación con el conjunto de actividades que se proponen al hilo del discurso; aspectos que vamos a intentar caracterizar en el siguiente apartado.

II.2. *La estructura del discurso*

La naturaleza del conocimiento matemático condiciona la estructura de los libros de texto y, principalmente, la del discurso teórico que introducen los libros de texto. Si analizamos la estructura del discurso a la hora de presentar los contenidos, vemos que las cuatro editoriales parten de lo concreto, con la presentación de ejemplos solucionados o actividades introductorias, para definir o deducir una propiedad. Pero se pueden percibir ciertos matices entre ellas.

En este sentido, podemos encontrar dos maneras básicas de presentar las nociones teóricas a los alumnos. Una en la que se introducen los conocimientos de manera deductiva y otra en la que se introducen de manera inductiva.

Los libros de texto que organizan las unidades linealmente (Santillana y Bruño) suelen presentar el contenido con *argumentación de carácter más deductivo,* característica de la visión academicista del conocimiento. Las estrategias deductivas de organización del conocimiento se apoyan en el conocimiento ya consolidado y, mediante procesos deductivos concatenados lógicamente, se derivan hipótesis de trabajo o normas de intervención (Pérez Gómez, 1998). Según Socas (1997, p. 130), "el abandono de las demostraciones formales en algunos programas de matemáticas de la Secundaria Obligatoria se ha estimado como adecuado, pero esto no incluye el abandono sobre el pensamiento lógico; es decir, la capacidad para seguir un argumento lógico [...]"

Para favorecer el pensamiento lógico de los alumnos, las editoriales que organizan el discurso de manera deductiva inician las explicaciones con un conjunto de ejemplos que matizan las diferentes características del contenido conceptual que se va a tratar. A continuación, presentan una serie de explicaciones que permiten generalizar los ejemplos y extraer definiciones, propiedades o fórmulas que, en general, destacan con otro color o las enmarcan. Para terminar las explicaciones teóricas, presentan una colección de ejemplos en los que se desarrollan los diferentes procesos trabajados. Por ejemplo, Santillana (1º curso, p. 249) en la sección, "Introducción a la probabilidad", presenta un apartado con el título "Probabilidad y resultados favorables y posibles", donde, sin referencia directa a la regla de Laplace, hace el siguiente razonamiento:

> Al lanzar una moneda es igualmente probable obtener cara que obtener cruz porque hay un resultado favorable a cara entre dos posibles (cara y cruz). Por ello la Probabilidad de obtener cara = Probabilidad de obtener cruz.
>
> Al lanzar un dado de seis caras hay un resultado favorable a obtener un 5 y seis casos posibles. A la probabilidad de obtener cara 5 en el lanzamiento de un dado de seis caras se le asigna el valor 1/6. Probabilidad de obtener cara 5 = 1/6.
>
> Al lanzar un dado de cuatro caras hay un resultado favorable a obtener un tres y cuatro casos posibles. Probabilidad de obtener cara 3 = 1/4.
>
> En todos estos casos hemos obtenido la probabilidad como un cociente entre el número de resultados favorables y el número de resultados posibles.

Como podemos observar en este ejemplo, la editorial deduce la teoría a partir de la explicación de diferentes ejemplos. En el último párrafo enuncia la regla o ley de Laplace como consecuencia de la generalización de los ejemplos, pero no le da nombre.

Para completar cada una de las unidades, se presenta un conjunto de actividades vinculadas al proceso de desarrollo de la unidad (Serradó y Azcárate, 2000a). Estas actividades tienen como propósito que los alumnos elaboren los objetivos relacionados con cada uno de los contenidos conceptuales. La estructura que adquieren estas actividades está condicionada por la manera de introducir las nociones teóricas y por el protagonismo que adquiere el alumno en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Este tipo de actividades son fundamentalmente *actividades de aplicación,* que se caracterizan por:

- Ser comunes para todos los alumnos de un grupo clase, sin diferencias en función de las necesidades de cada individuo.
- Estar redactadas en tercera persona de manera abstracta e impersonal. Esta redacción no favorece la motivación intrínseca de los alumnos hacia el aprendizaje de los contenidos matemáticos.
- Se han de realizar exclusivamente con el uso de lápiz y papel. Para la realización de las actividades, los alumnos no necesitan del uso de materiales o recursos que favorezcan la exploración.
- Se han de realizar individualmente sin favorecer el intercambio de información y la construcción compartida del conocimiento.

Estas actividades se resuelven a través de la aplicación directa de un único contenido conceptual que se introduce en la sección correspondiente; por ejemplo, Bruño (3er curso, p. 267), al introducir la noción de suceso, propone un único ejercicio: "Determina el espacio muestral correspondiente al experimento aleatorio 'lanzar dos monedas'".

En este sentido, las únicas capacidades que desarrollan los alumnos con la resolución de este tipo de actividades son: reconocer, utilizar, asignar, aplicar, etc., el contenido conceptual o procedimental presentado. Según Polya (1966), el punto más débil de los textos de matemáticas escritos con intención manifiesta de aumentar la "capacidad de pensamiento" es que "casi todos sus problemas son aplicaciones directas de reglas demasiado evidentes". Es significativa la actividad de aplicación presentada por Santillana en el libro de 3º, en el que propone "Ana saca una bola al azar de una bolsa que contiene 6 bolas rojas, 9 bolas azules y 10 bolas verdes. ¿Cuál es la probabilidad de que salga bola roja? ¿Y la probabilidad de que no salga bola azul?"

La cantidad de actividades que se proponen está condicionada por la propia maqueta del libro de texto y puede oscilar entre una o cuatro; es decir, no viene determinada por la dificultad del contenido, sino por el espacio libre que queda tras la explicación teórica.

Además de las actividades de aplicación, estas editoriales suelen incluir actividades de *validación del conocimiento* y de las propiedades que cumplen los contenidos conceptuales introducidos. Este tipo de validaciones no consiste en la demostración formal de las propiedades, sino en la búsqueda de contraejemplos o argumentaciones que validen las propiedades. Todas estas actividades están condicionadas por el contenido que se quiere explicar y no forman parte de una secuencia didáctica que permita superar este modelo academicista de presentar el conocimiento matemático.

Si analizamos la importancia que adquieren las explicaciones teóricas, en contraposición con el número de actividades de desarrollo que se introducen, podemos establecer que, en el momento de utilizar el libro de texto en el aula, el peso del protagonismo del proceso de enseñanza-aprendizaje recae fundamentalmente en el profesor, mientras que el alumno será un actor pasivo o reproductor de las aportaciones y propuestas del profesor. Para Sáenz Barrio (1983), esta forma de presentar el conocimiento es característica de una *metodología tradicional,* donde la realización del proceso de enseñanza-aprendizaje gira en torno a una actividad fundamental: la explicación del profesor. El profesor (y su actividad específica: la explicación) es el protagonista frente al alumno (y a su aprendizaje), que queda relegado a un papel secundario.

Por el contrario, los libros de texto que organizan las unidades de manera helicoidal, como los de Guadiel y McGraw-Hill, presentan una estructura del discurso que refleja *modos de argumentación de carácter más inductivo*. El protagonismo del proceso de enseñanza-aprendizaje es compartido entre el profesor y el alumno, que debe utilizar rutinas de ensayo y error que consisten en aproximaciones ordenadas y sistemáticas para observar y experimentar empíricamente y recoger datos que puedan apoyar sus futuras decisiones. Esta observación y experimentación se ha de considerar como un primer paso en la construcción del conocimiento matemático (Serradó, 2000b).

Se observa una evolución en la manera de introducir las nociones teóricas a lo largo de la etapa. Esta evolución consiste en aumentar el nivel de formalización en el uso del lenguaje matemático y en las argumentaciones que favorecen la institucionalización del conocimiento matemático. La participación activa del alumno en el proceso de enseñanza y aprendizaje que promueven estos libros de texto se puede determinar a partir del análisis exhaustivo de la propuesta de actividades que se realiza durante el desarrollo de la unidad y su incidencia en la elaboración del conocimiento. Estas actividades se confunden con las nociones teóricas que tienen la finalidad de institucionalizar el conocimiento matemático; conocimiento que se utilizará en la posterior reconstrucción de éste en una secuencia helicoidal de organización de los contenidos. Aunque mantienen una secuencia cerrada y escalonada de ejercicios, éstos invitan a la exploración, reflexión, validación y aplicación de los contenidos de la unidad. Algunas de estas actividades se habrán de realizar a partir del uso de recursos y datos recogidos del entorno, destacando la finalidad exploratoria del proceso e, incluso, en algunas ocasiones se señala si las actividades se han de realizar en parejas o en grupo.

Analizando el tipo de actividades que promueven estas editoriales y la manera de presentar el conocimiento, podemos caracterizar su propuesta como cercana a una enseñanza de corte más tecnológico.

También podemos observar diferencias en las actividades según la finalidad que adquieren en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En el primer ciclo de Educación Secundaria prima la introducción de las actividades de exploración y reflexión sobre las de observación y experimentación, para analizar las propiedades de los contenidos que se van a institucionalizar. En el segundo ciclo de Educación Secundaria, estas actividades de exploración y reflexión se complementan con actividades de validación del conocimiento.

Encontramos también distintas maneras de redactar las actividades según el tiempo verbal que se utilice, dato que nos permite clarificar el tipo de actuación que se pretende del alumno. En primer lugar, si el libro de texto intenta establecer una relación directa ante la tarea que se va a ejecutar y el alumno, los enunciados están redactados en segunda persona del presente de indicativo. Por ejemplo, "Pon algún ejemplo de sucesos incompatibles" (*Matemáticas 2º*, McGraw-Hill, p. 251). Por el contrario, si la situación asociada a la tarea por realizar es una situación genérica en la que el alumno ha de comprender una idea a partir de una abstracción de la realidad, los enunciados están redactados de manera impersonal. Por ejemplo, "En las quinielas, ¿cuál es el suceso contrario a que los dos equipos empaten?" (*Matemáticas 2º*, McGraw-Hill, p. 251).

Por lo general se indica si la actividad ha de realizarse individualmente o en grupo y, a menudo, estas actividades se acompañan de un gráfico o dibujo que visualiza la situación planteada.

Por ejemplo, la actividad que presenta *Matemáticas de 2º* de Guadiel (p. 132):

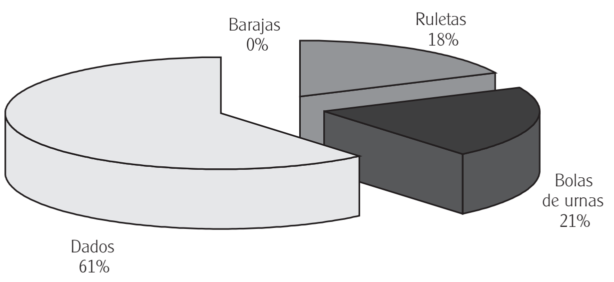
Coge un dado de quinielas y efectúa 50 lanzamientos. Anota el número de veces que sale cada signo y completa la siguiente tabla con las frecuencias absolutas y relativas de los sucesos 1, X, 2.

Suceso	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1		
X		
2		

Reúne en una sola tabla tus resultados y los de tus compañeros y analízalos.

Es frecuente que en las actividades que presentan estas dos editoriales se fomente el uso de materiales. La utilización de estos materiales y recursos está asociada con la finalidad exploratoria que adquieren las actividades en su proceso inicial de construcción y validación del conocimiento. Sánchez Molina (1998, p. 17) argumenta que "el aprendizaje de las Matemáticas es más eficaz y significativo en los alumnos que adquieren sus conocimientos con ayuda de unos recursos adecuados". Cuando los alumnos trabajan con materiales didácticos y recursos, se produce un acercamiento entre sus pensamientos y acciones y se reduce sensiblemente el esfuerzo de imaginar situaciones matemáticas, ya que éstas están siendo vividas o experimentadas (Coriat, 1998).

Batanero (1998) presenta una clasificación de los principales materiales que favorecen la experimentación en el bloque dedicado al "Tratamiento del azar". Esta autora especifica que los generadores aleatorios de tipo físico pueden reducirse a cuatro: dados, bolas de urnas, ruletas o barajas.



Los datos de este gráfico proceden del análisis de las actividades de los libros de texto de las editoriales Santillana, McGraw-Hill y Guadiel. Como podemos observar, el principal generador aleatorio que se utiliza son los dados y no se utilizan las barajas (asociadas tradicionalmente a actividades relacionadas con combinatoria).

En conclusión, las características de estas actividades, junto con el papel que adquieren las nociones teóricas, nos sugieren que estos libros de texto fomentan la construcción del conocimiento matemático. Desde el punto de vista del significado que adquiere la elaboración del conocimiento en el proceso de enseñanza y aprendizaje, fomentan *una enseñanza más innovadora*. Los libros de texto recurren al uso de situaciones que permiten que los alumnos se comprometan activamente en su aprendizaje mediante la manipulación física y la interacción con otros compañeros. Las actividades insisten en la observación, el acopio de datos, la generación y la prueba de hipótesis a partir del trabajo cooperativo.

Es decir, las construcciones no están invariablemente ligadas al mundo externo ni son exclusivamente resultado de elaboraciones de la mente, sino que reflejan las consecuencias de las contradicciones mentales que surgen en las interacciones con el medio (Serradó, 2000b) y que permiten evolucionar las estructuras conceptuales y procedimentales de los alumnos.

También, podemos detectar diferencias en las secciones que componen el cierre de las unidades. Los apartados básicos que presentan los libros de texto son varios grupos de actividades y un resumen de los contenidos conceptuales desarrollados a lo largo de la unidad.

III. Cierre de la unidad

El cierre de la unidad contiene actividades de consolidación de los contenidos desarrollados a lo largo de la unidad, actividades de evaluación de los contenidos aprendidos y, en la mayoría de los casos, un breve resumen de lo tratado en la unidad.

III.1. *Actividades de consolidación*

Las actividades de consolidación tienen como objetivo afianzar y reforzar el conocimiento aprendido, consolidando la estructura conceptual de los contenidos desarrollados a lo largo de la unidad. Al analizar las actividades de consolidación, vemos que se trata de un conjunto de ejercicios de aplicación directa de los contenidos conceptuales y procedimentales desarrollados en la unidad. En la mayoría de los ejercicios se tienen que aplicar varios contenidos conceptuales. Los ejercicios se organizan por apartados y se secuencian al máximo para que el alumno pueda identificar sin dificultad el contenido que debe aplicar en cada apartado. La mayoría de las editoriales clasifican las actividades de consolidación en actividades de refuerzo y ampliación o profundización con el propósito de atender a la diversidad en el aula.

Las *actividades de refuerzo* tienen como finalidad reforzar el aprendizaje de los conocimientos desarrollados con anterioridad. Estas actividades suelen ser una aplicación directa de un concepto o procedimiento con las mismas características que las actividades de proceso, pero, aunque trabajan los mismos conceptos desarrollados en la unidad, plantean diferentes procedimientos de resolución, como, por ejemplo, el que propone Santillana (libro de 3º, p. 260, act. 11):

> ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados perfectos el producto de sus puntos valga 12? ¿Y de que el producto sea 8?
>
> **Solución**
>
> a) Casos favorables = {(3, 4), (4, 3), (2, 6), (6, 2)}
> Casos posibles = 36 $P = 4/36 = 1/9$
> Casos favorables = {(3, 6), (6, 3)}
> $P = 2/36 = 1/18$

Las actividades de refuerzo, aunque plantean un nivel de complejidad mayor, utilizan los mismos conceptos y procedimientos desarrollados en la unidad correspondiente, pero relacionan varios conceptos.

Debemos destacar que no todas las actividades que se plantean son de cálculo o de aplicación directa de los procedimientos y conceptos desarrollados, sino que, en ciertas situaciones, se pretende desarrollar ciertas capacidades en los alumnos, como en el siguiente ejemplo también tomado de Santillana (3º, p. 261, act. 14):

> Explica cómo se resuelve el siguiente problema: Un dado corriente ha sido trucado de modo que la probabilidad de cada cara es proporcional al número que en ella figura.

a) ¿Qué probabilidad tiene cada uno de los sucesos elementales?
b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara par?

En este caso concreto, observamos que el alumno debe ser capaz de elaborar una estrategia que le permita resolver el problema y, además, debe ser capaz de verbalizar dicha estrategia. Este tipo de actividad pertenece al grupo de las actividades de *ampliación y profundización*. Éstas no son aplicación directa de un contenido, sino que necesitan la relación de varios contenidos y la elaboración de estrategias personales de resolución que le permitan encontrar las posibles respuestas a la pregunta planteada.

Aunque podemos encontrar diferentes formas de presentar las actividades de consolidación, todas tienen el propósito de atender a la diversidad existente en el aula. Mientras que las actividades de proceso son comunes para todos los alumnos, éstas permiten agrupaciones según las necesidades del grupo clase.

Al comparar el número de actividades de proceso y de consolidación que presentan las diferentes editoriales, observamos que en general hay editoriales en las que las actividades de proceso adquieren más importancia que las de consolidación. Los libros de texto que muestran un modelo de intervención más tradicional presentan un número reducido de actividades de proceso y un amplio número de actividades de consolidación. Por el contrario, los libros de texto que desarrollan un modelo de intervención de corte más innovador y tecnológico incorporan un mayor número de actividades de proceso que de consolidación. En este sentido, si analizamos el número de actividades propuestas por las diferentes editoriales, podemos observar que McGraw-Hill y Guadiel le dan más importancia a las actividades de proceso que a las de consolidación, lo cual hace suponer que dedican mayor atención a los procesos de elaboración del conocimiento. Mientras que Santillana y Bruño dan más importancia a las actividades de consolidación para reforzar los conocimientos adquiridos, por lo que es mayor el número de actividades de esta naturaleza que están presentes en las distintas unidades.

Las últimas reformas del currículo español abogan por un mayor protagonismo del alumno en la elaboración del conocimiento matemático, dándole más importancia a las actividades de proceso que permiten la construcción del conocimiento matemático (Serradó y Azcárate, 1999).

III.2. *Actividades de evaluación*

Para evaluar la consecución de los objetivos planteados al iniciar la unidad, los libros de texto presentan un conjunto de actividades tituladas actividades de autoevaluación. Este tipo de evaluación se trata de una evaluación sumaria del producto obtenido en el proceso de enseñanza. Podemos encontrar dos formas diferentes de organizar las actividades de autoevaluación. En la mayoría de las editoriales, se trata de un conjunto de ejercicios con tres o cuatro respuestas, donde el alumno ha de seleccionar cuál es la correcta. Estas actividades hacen referencia, casi exclusivamente, a contenidos conceptuales; en ellas se evalúa la adquisición de capacidades como: aplicar, calcular, identificar, distinguir. El instrumento presentado es característico de una metodología tradicional en la que se evalúa el producto de la enseñanza y, por tanto, la evaluación adquiere un papel sancionador. Además, los libros que presentan la autoevaluación como un conjunto de ejercicios que incorporan la respuesta incrementan la evaluación de los contenidos conceptuales, ya que no se analizan los procesos que el alumno ha utilizado para llegar a la respuesta correcta (Romberg, 1991).

Sin embargo, hay algunas editoriales que presentan un conjunto de ejercicios abiertos, parecidos a las actividades de consolidación presentadas con anterioridad y que hacen referencia a los contenidos conceptuales de mayor importancia en la unidad. Considerarlas como actividades de autoevaluación supone, en realidad, darle más protagonismo al alumno en el proceso; de esta manera, el libro de texto intenta proporcionar herramientas al alumno para que pueda reflexionar sobre su proceso de aprendizaje.

En relación con cada editorial, Guadiel, Santillana y McGraw-Hill plantean la autoevaluación al terminar cada una de las unidades didácticas a lo largo de toda la etapa. La editorial Bruño sólo propone ejercicios de autoevaluación en el primer ciclo, siempre al terminar cada una de las unidades didácticas; para el segundo ciclo no plantea ningún tipo de actividades de autoevaluación.

Por otro lado, las actividades de autoevaluación de Santillana, McGraw-Hill y Bruño, presentadas al terminar cada una de las unidades, tienen un formato idéntico. Son una colección de actividades cerradas con cuatro respuestas posibles de las cuales se debe elegir la solución correcta. Las soluciones de esta evaluación se pueden encontrar al final de cada uno de los libros de texto.

En el caso de McGraw-Hill, en el primer nivel plantea exclusivamente actividades para evaluar contenidos conceptuales, mientras que en el segundo nivel, plantea actividades de autoevaluación para los conocimientos conceptuales y algunos procedimentales como, por ejemplo (McGraw-Hill, 1º, p. 255): "Lanzas 500 veces un dado cúbico y sale la cara 2 en 125 ocasiones. ¿Qué opinas del dado? a) Es un dado normal; b) Es un dado cargado; c) Hay que realizar al menos 1 000 pruebas para saberlo". También es significativo el ejemplo tomado del libro de 2º de McGraw-Hill (p. 261): "Tenemos una urna con 10 bolas blancas, 30 rojas y 20 negras. La probabilidad de obtener bola roja es: *a)* 1/2 *b)* 1/3 *c)*30/30".

Guadiel introduce una sección titulada "Ponte a prueba" en la que recoge una colección de actividades sin resolver que incluyen cuestiones, ejercicios y problemas de carácter más abierto como, por ejemplo (Guadiel, 2º, p. 140): "Describe con precisión dos experimentos deterministas y dos aleatorios"; "Lanzamos una moneda tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar ninguna cara?" Estas actividades de autoevaluación están relacionadas con el objetivo conceptual "Distinguir entre fenómenos aleatorios y deterministas de la vida cotidiana".

III.3. *El resumen*

Otro dato significativo sobre la importancia que otorgan las editoriales a los contenidos conceptuales es que la mayoría de ellas presentan un resumen de éstos. Los resúmenes se caracterizan por ser una colección de sentencias sobre los contenidos conceptuales desarrollados a lo largo de la unidad, sin establecer ningún tipo de conexión entre ellos. En este sentido, se puede pensar que el aprendizaje, al final, consiste en retener en la memoria el conjunto de informaciones que constituyen un determinado conocimiento previamente elaborado y estructurado de manera formal. No se pretende que el alumno organice el material identificando cuáles son los contenidos más importantes o cómo se relacionan. La estructuración y elaboración del contenido que se considera más significativo corre por cuenta del autor del libro de texto. La inclusión de este tipo de resúmenes indica la importancia que todavía tiene, como se puede apreciar en los libros de texto, el aprendizaje memorístico de definiciones, teoremas, reglas, etcétera.

CONCLUSIONES

Desde el análisis realizado en los textos propuestos por las cuatro editoriales en su organización y tratamiento de cada uno de sus elementos, señalados en los primeros apartados de este artículo, podemos detectar cómo promueven las distintas editoriales diferentes modelos de intervención asociados a sus propuestas de organización y secuencia de contenidos y de actividades.

Las cuatro editoriales de la muestra introducen la unidad a partir del establecimiento de los objetivos que rigen la elección de los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales, no siempre desarrollados en la unidad. Además, las cuatro editoriales introducen una actividad de presentación de la unidad, con diferentes objetivos como son: motivar, explorar o evaluar los conocimientos previos de los alumnos.

Sin embargo, es en el desarrollo de la unidad donde podemos encontrar las mayores diferencias. Dos de las editoriales, Santillana y Bruño, reflejan en sus textos un modelo que se caracteriza por organizar y secuenciar los contenidos de manera lineal, la cual introduce las nociones teóricas de forma deductiva y donde las actividades son fundamentalmente de aplicación o validación de los contenidos introducidos, todo esto sin el uso de recursos manipulativos y sin fomentar el trabajo cooperativo. Podemos diferenciar un segundo modelo, que se caracteriza por organizar y secuenciar los contenidos de manera helicoidal con una estructura del discurso de carácter inductivo, intercalando las nociones teóricas y las actividades, el cual está presente en los textos de Guadiel y McGraw-Hill. Las nociones teóricas se introducen a partir de actividades en las que se han explorado, contrastado y verificado sus propiedades, con un amplio uso de recursos manipulativos y del trabajo cooperativo, para posteriormente realizar actividades con el fin de introducir, generalizar e institucionalizar los contenidos matemáticos.

Estas dos formas de desarrollar las unidades suponen dos enfoques diferenciados de intervención en el aula. *El primer modelo es de corte más tradicional,* mientras que *el segundo, se asemeja a un modelo innovador de corte tecnológico*. A grandes rasgos, los dos modelos diferenciados, si bien suponen un cierto avance con respecto a libros de años atrás, no reflejan en sus propuestas las orientaciones adecuadas para que resulten coherentes con las finalidades educativas que presenta la LOGSE y las directrices desarrolladas en el Diseño Curricular Base para la Educación Matemática.

ANEXO I: LIBROS DE TEXTO DE LA MUESTRA

Editorial Bruño

Miñano, A. y J.A. Ródenas (1998), *Matemáticas 1º; Matemáticas 2º; Matemáticas 3º; Matemáticas 4ºA; Matemáticas 4ºB*, Madrid.

Editorial Santillana

Almodóvar, J.A., F. Corbalán, P. García, J. Gil y A. Nortes (1999), *Matemáticas. Curso 1º ESO; Matemáticas. Curso 2º ESO*, Madrid.
Almodóvar, J.A., P. García, J. Gil y C. Vázquez (1999), *Matemáticas. Curso 3º ESO; Matemáticas Opción B*, Madrid.
Almodóvar, J.A., J. Gil y A. Nortes (1998), *Matemáticas Curso 4º. Opción A*, Madrid.

Editorial Guadiel

Guasch, M., R. Merino, J. Solsona y Equipo Guadiel (1996), *Matemáticas 1; Matemáticas 2*, Sevilla, Grupo Edebé.
Doménech, Ma. A., M. Doménech, M. Jimeno, Ma. A. Morató, Ma. M. Suñé, J. Tomás y Equipo Guadiel (1995), *Matemáticas 3*, Sevilla, Grupo Edebé.
Fuster, M., M. Jimeno, F. Martín, E. Martínez, Ma. A. Morató, J. Tomás y Equipo Guadiel (1996), *Matemáticas 4* (B), Sevilla, Grupo Edebé.

Editorial McGraw-Hill

L. Pancorbo, Ma. V. Becerra, R. Martínez y R. Rodríguez (1995), *Matemáticas 1*; (1996), *Matemáticas 2*, Madrid.
Amigo, C, P. Peña, A. Pérez, A. Rodríguez, F. Sivit, Ma. J. Asencio y E. Vicente (1996), *Matemáticas 3*; *Matemáticas 4 Opción A*; (1997), *Matemáticas 4 Opción B*, Madrid.

ANEXO II: FORMULARIO

Título:
Curso:
Editorial:
Año de edición:
Edición núm.:
Autores:

¿Contiene probabilidad y azar en este curso? Sí [ ] No [ ]
En caso afirmativo, escribe el número de páginas dedicadas al tema/el número de páginas totales del libro.
¿Qué título reciben las unidades dedicadas al conocimiento probabilístico?

1.1. Presentación de la unidad

1.1.1. ¿Se expresan los objetivos por desarrollar? Sí [ ] No [ ]
1.1.2. ¿Se expresa la lógica que organiza el contenido? Sí [ ] No [ ]
1.1.3. ¿Se expresan los criterios de inclusión y exclusión de los tópicos de contenido? Sí [ ] No [ ]
1.1.4. ¿Se expresan los conceptos básicos del área y las relaciones entre ellos (por ejemplo, mediante un mapa conceptual)? Sí [ ] No [ ]
1.1.5. ¿Se expresan los procedimientos por desarrollar? Sí [ ] No [ ]
1.1.6. ¿Se expresan las actitudes por desarrollar? Sí [ ] No [ ]

1.2. Conocimiento

1.2.1. Presentación del conocimiento
1.2.1.1. ¿El contenido se organiza a través de una serie jerarquizada de secciones? Sí [ ] No [ ]
1.2.1.2. ¿Presenta un formato muy estructurado y cerrado que predetermina en gran medida su seguimiento? Sí [ ] No [ ]
1.2.1.3. ¿El contenido se presenta atendiendo a criterios de interdisciplinariedad? Sí [ ] No [ ]
1.2.1.4. ¿El contenido se presenta a través de situaciones didácticas?
1.2.2. Atención a la diversidad

1.2.2.1.	¿Contiene una prueba inicial o exploración que permita realizar un diagnóstico de las necesidades de los alumnos?	Sí [ ]	No [ ]
1.2.2.2.	¿Se considera la atención a la diversidad a partir de la incorporación de actividades con distintos niveles de complejidad? Estas actividades se clasifican en:	Sí [ ]	No [ ]
1.2.3.	Fuentes del conocimiento		
1.2.3.1.	¿Presenta informaciones recogidas, explícitamente, de fuentes como periódicos, enciclopedias, etc.? (Actividades pág. y núm.)	Sí [ ]	No [ ]
1.2.3.2.	¿Presenta alguna referencia histórica al tema? (Tipo de referencia histórica)	Sí [ ]	No [ ]
1.2.3.3.	¿Presenta actividades que el alumno deba completar con el uso de documentos que no sean el libro de texto? (Actividades pág. y núm.)	Sí [ ]	No [ ]
1.2.3.4.	¿Presenta actividades por realizar mediante el uso de materiales manipulativos? (Actividades pág. y núm.)	Sí [ ]	No [ ]
1.2.3.5.	¿Presenta actividades por realizar mediante el uso de calculadoras u ordenadores? (Actividades pág. y núm.)	Sí [ ]	No [ ]
1.2.3.6.	¿Presenta actividades que el alumno deberá realizar mediante su interacción con el medio? (Actividades pág. y núm.)	Sí [ ]	No [ ]

1.3. Presentación de las actividades

Señalar en caso afirmativo la página y el número de la actividad

1.3.1.	¿Presenta algún ejemplo introductorio de la unidad?	Sí [ ]	No [ ]
1.3.2.	¿Presenta algún ejemplo introductorio de cada sección?	Sí [ ]	No [ ]
	¿Existe una secuencia de ejemplos introductorios para desarrollar las matizaciones del contenido por estudiar sobre:		
	• la noción de aleatoriedad?	Sí [ ]	No [ ]
	• la noción de probabilidad?	Sí [ ]	No [ ]
1.3.3.	¿Presenta alguna actividad introductoria de la unidad?	Sí [ ]	No [ ]
1.3.4.	¿Presenta alguna actividad introductoria de la sección?	Sí [ ]	No [ ]
1.3.5.	¿Presenta una secuencia introductoria de actividades para desarrollar las matizaciones del contenido por estudiar sobre:		

	• la noción de aleatoriedad?	Sí [ ]	No [ ]
	• la noción de probabilidad?	Sí [ ]	No [ ]
1.3.6.	¿Presenta después de la introducción teórica un conjunto de ejemplos de aplicación?	Sí [ ]	No [ ]
1.3.7.	¿Presenta al final de la unidad un conjunto de actividades?	Sí [ ]	No [ ]
1.3.8.	¿Presenta al final de la unidad algún tipo de resumen?	Sí [ ]	No [ ]

1.4. Evaluación

¿Existen ítems específicos para evaluación? Sí [ ] No [ ]

En caso afirmativo:

1.4.1.	¿El material evalúa solamente la adquisición de conceptos?	Sí [ ]	No [ ]
1.4.2.	¿El material evalúa la adquisición de capacidades?	Sí [ ]	No [ ]

14.3. El material sugiere como pautas para la evaluación
- Nada
- Sólo exámenes
- Exámenes e intervenciones de los alumnos
- El proceso de E/A

1.4.4. La evaluación se realiza:
- Al final del proceso instructivo
- Durante el proceso instructivo

ANEXO III: CUADRO DE ELEMENTOS Y CATEGORÍAS

Elementos	Modelo tradicional	Modelo innovador		Modelo investigativo
		Tecnológico	Espontaneísta	
Elección de contenidos	Ciencia único referente	Ciencia y variables psicológicas	Intereses y experiencias de los alumnos	Integración de lo cotidiano, social, científico, ideológico
Programación	Centrada en los contenidos	Sistemática. Objetivos	Asistemática, elección de los alumnos	Sistemática, explícita, tentativa y reformulable
Contenidos	Predominio conceptual	Predominio conceptual y procedimental	Predominio actitudinal y procedimental	Integración de lo conceptual, procedimental y actitudinal
Presentación del conocimiento	Organización fragmentada, acumulativa y lineal	Organización escalonada y rígida, emulando secuencia constructivista	Abierta sin progresión aparente	Construcción del conocimiento
Estructura del discurso	Modelo deductivo	Modelo inductivo	Modelo inductivo	Modelo transductivo
Objetivos del discurso	Transmisión de contenidos	Emulación método científico	Ensayo y error	Problemas relevantes
Estrategias metodológicas	Explicación	Secuencia cerrada y escalonada de actividades	Asistemático	Plan de actividades flexible con planificación
Fuentes del conocimiento	Libro de texto Profesor	Diversidad de recursos. Uso cerrado	Diversidad de recursos. Uso asistemático	Diversidad de recursos. Uso como medios
Trabajo	Individual	Predominio del trabajo individual, algo grupal	Predominio de trabajo en grupo	Trabajo individual y grupal
Interacción	No se considera	Contraste esporádico y dirigido	Contraste asistemático	Construcción colectiva del conocimiento
Secuenciación	Temporal muy rígida	Temporal muy rígida	Temporal muy flexible	Temporal flexible
Motivación	No se considera	No se considera	Consideración constante	Consideración continua

Experiencias e ideas iniciales de los alumnos	No se considera	Exploración inicial de aprendizajes de partida	No se consideran ideas, sí experiencias	Eje organizador del PE/A
Actividades	Aplicación o refuerzo. Validación del conocimiento	Emulación secuencia constructivista	Organización asistemática	Resolución de problemas
¿Cuándo evaluar?	Al final del proceso	Inicio y final	Periódica	Continua
¿Qué evaluar?	Contenidos conceptuales y actividades de aplicación	Consecución de objetivos programados	La dinámica del grupo	Proceso de E/A.
¿Cómo evaluar?	Exámenes	Pre-test y post-test	Asamblea de clase	Diversidad de instrumentos

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Albatch, P. (1991), "Texbooks: The international dimension", en M. Appel, L. Chistian-Smith (eds.), *The polítics of the textbooks,* Nueva York, Routledge.

Apple, M. W. (1989), *Maestros y textos,* Colección Temas de Educación, Barcelona, Paidós/MEC.

Azcárate, P. (1996), *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de aleatoriedad y probabilidad,* Colección Mathema, Granada, Comares.

—— (2001), *El conocimiento profesional didáctico-matemático en la formación inicial de los maestros,* Cádiz, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Bardin (1986), *Análisis del contenido,* Madrid, Akal.

Batanero, C. (1998), "Estadística y probabilidad", en Berenguer, Cardeñoso y Sánchez Molina (eds.), *Investigación en el aula de Matemáticas, Recursos,* Universidad de Granada, SAEM Thales.

Cardeñoso, J. Ma. (1998), "Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad", tesis doctoral inédita, Universidad de Cádiz.

Cardeñoso, J. Ma. y P. Azcárate (1995), "Tratamiento del conocimiento probabilístico en los proyectos y materiales curriculares", *Suma,* 20, pp. 41-51.

Cardeñoso, J. Ma. y A. Serradó (2000), "El desarrollo del profesor y la aleatoriedad", en Perales *et al.* (eds.), *Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI,* vol. II, Granada, Grupo Editorial Universitario.

Coriat, M. (1997), "Materiales, recursos y actividades: un panorama", en Rico *et al.* (eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria,* Cuadernos de Formación del Profesorado. Educación Secundaria, ICE Universidad de Barcelona, Horsori.

Fischebein, E. (1975), *The intuitive sources of probabilistic thinking in children,* Dordrecht, Reidel.

Gimeno, J. (1995), "Materiales y textos: contradicciones de la democracia cultural", en J. G. Minguez, y M. Beas (col.), *Libro de texto y construcción de materiales curriculares,* Granada, Proyecto Sur de Ediciones.

Goodson, I. (1989), "Curriculum Reform and Curriculum Theory: A Case of Historial Amnesia", *Cambridge Journal of Education,* 19 (2), pp. 131-141.

—— (1995), "Materias escolares y la construcción del curriculum: Texto y contexto", en J. G. García Mínguez y M. Beas (eds.), *Libro de texto y construcción de materiales curriculares,* Granada, Proyecto Sur de Ediciones.

Martínez Bonafé, J. (1995), "Interrogando al material curricular. Guión para el análisis y elaboración de materiales para el desarrollo del currículum", en J. G. Mínguez y M. Beas (col.), *Libro de texto y construcción de materiales curriculares,* Granada, Proyecto Sur de Ediciones.

Novak, J.D. (1982), *Teoría y práctica de la educación,* Madrid, Alizanza Universidad.

Pérez Gómez, A. (1998), *La cultura escolar en la sociedad neoliberal,* Madrid, Morata.

Polya, G. (1966), "On teaching problems solving", en Begle (ed.), *The role of axiomatics and problem solving in Mathematics,* Gill, pp. 123-129.

Porlán, R. y A. Rivero (1998), *El conocimiento de los profesores,* Serie Fundamentos núm. 9, Colección investigación y Enseñanza, Sevilla, Diada Editoria.

Rico, L. (1997), "Los organizadores del currículo de matemáticas", en Rico *et al.* (eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria,* Cuadernos de Formación del Profesorado, Educación Secundaria, ICE Universidad de Barcelona, Horsori.

Romberg, T. A. (1991), "Características problemáticas del currículum escolar de matemáticas", *Revista de Educación,* 294, pp. 323-406.

Sáenz Barrio, O. (1983), *Didáctica general,* Madrid, Anaya.

Sánchez Molina, J.M. (1998), "¿En el aula de matemáticas se utilizan los recursos didácticos?", en M.I. Berenguer, J.M. Cardeñoso y J.M. Sánchez Molina (eds.), *Investigación en el aula de matemáticas,* Recursos, Universidad de Granada, SAEM Thales.

Serradó, A. (1998), *Marco teórico para el análisis del tratamiento del concepto de azar en los libros de texto de matemáticas de educación secundaria,* Trabajo inédito de tercer ciclo, Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz.

—— (2000a), *Diseño de las unidades dedicadas al "tratamiento del azar" en los libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria,* trabajo de investigación inédito, julio, Departamento de Didáctica de la Universidad de Cádiz.

—— (2000b), *Proyecto docente,* documento inédito.

Serradó, A. y P. Azcárate (1999), "Didáctica de las matemáticas, en Azcárate, Ibarra y Navarrete (eds.), *Materiales curriculares para la formación inicial del profesorado de educación secundaria,* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Serradó, A. y P. Azcárate (2000a), "Estructura y organización de las actividades que incluyen los libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria", en *Actas del IX Congreso sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas "Thales"*, San Fernando, SAEM Thales, pp. 89-92.

—— (2000b), "Didáctica de las Matemáticas", en Azcárate, Ibarra y Navarrete, y Sánchez (eds.), *El profesorado de secundaria: materiales para la formación inicial*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Socas, M. (1997), "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria", en Rico *et al.* (1997), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, Cuadernos de Formación del Profesorado, Educación Secundaria, ICE, Universidad de Barcelona, Horsori.

Torres, J. (1991), *El curriculum oculto*, Madrid, Morata.

DATOS DE LAS AUTORAS

Ana Serradó Bayés
La Salle, Buen Consejo, España
aserrado@arconet.es

Pilar Azcárate Goded
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Cádiz, España
pilar.azcarate@uca.es

Pensamiento matemático, cálculo diferencial y computadoras[1]

Mónica Ester Villarreal

Resumen: Este trabajo tiene como objetivo caracterizar los procesos de pensamiento de estudiantes universitarios al abordar cuestiones matemáticas de cálculo diferencial en un ambiente computacional. Tal caracterización se realiza a partir del análisis de episodios extraídos de experimentos de enseñanza realizados con estudiantes que participaron voluntariamente en el estudio. En dichos episodios, la computadora se muestra como un dispositivo que está mediando el pensamiento humano, y así, se constituye en una herramienta que transforma y, al mismo tiempo, forma parte de dicho pensamiento, integrando un *colectivo pensante* hombre-cosas. Los estudiantes desarrollan tanto abordajes visuales como algebraicos en el ambiente computacional, lo que sugiere la necesidad de coordinarlos para superar la dicotomía visual/algebraico. Juegos de conjeturas y refutaciones caracterizan los procesos de pensamiento matemático de los estudiantes que no siguen caminos lineales sino en forma de red.

Abstract: The aim of this work is to characterize students' thinking processes while working mathematical questions related to differential calculus in a computational environment. Such a characterization is built up from the analysis of episodes of teaching experiments conducted with students that volunteered to participate in this study. Those episodes show the computer as a device that is mediating the human thinking and as a tool that transforms and, at the same time, is a part of such thinking, integrating a *thinking collective* human beings-things. The students develop visual as well as algebraic approaches in the computational environment; this suggests the necessity of coordination between

Fecha de recepción: abril de 2000.

[1] Este trabajo está basado en la tesis de doctorado de la autora (Villarreal, 1999), que fue realizada bajo la dirección del doctor Marcelo Borba, en el Programa de Pós Graduação em Educação Matemática de la Universidade Estadual Paulista (UNESP Rio Claro), miembro del Grupo de Pesquisa em Informática outras mídias e Educação Matemática (GPIMEM) de la misma universidad, con el apoyo financiero de CNPq y CAPES, agencias de apoyo a la investigación de Brasil.

them, so as to overcome the dichotomy visual/algebraic. Conjectures and refutations characterize students' mathematical thinking processes, not following a linear path but rather forming a network.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. CÁLCULO Y COMPUTADORAS

La conjunción del cálculo y la tecnología en situaciones de enseñanza y aprendizaje ha sido estudiada desde diversas perspectivas. Investigaciones comparativas en clases de cálculo procuran determinar si la introducción de la computadora produce diferencias significativas en resultados de exámenes y niveles de aprobación. Otros estudios buscan caracterizar ventajas y dificultades provenientes de la propia tecnología, analizar las transformaciones que ella introduce en la dinámica de las clases de matemática, o estudiar procesos de construcción de conocimiento de los estudiantes en ambientes computacionales.

Los estudios comparativos, como los realizados por Palmiter (1991) o Lawson (1995), muestran resultados favorables al uso de la computadora e indican la aparición de actitudes positivas hacia la matemática, pero poco dicen respecto de aspectos relacionados con la enseñanza o del tipo de aprendizaje que fue posible en ese ambiente. Existen estudios que describen características, ventajas e influencias de los ambientes computacionales en la enseñanza y aprendizaje del cálculo (Schoenfeld, 1995; Smith, 1995; Heid y Baylor, 1993; Hillel *et al.*, 1992; Heid, 1988). Según estos trabajos, algunos rasgos destacados en propuestas de enseñanza del cálculo en ambientes informatizados son los siguientes:

1. ilustra y refuerza conceptos básicos;
2. reduce la preocupación con las técnicas de cálculo y permite concentrarse en las ideas centrales del cálculo, al abordar aplicaciones más realistas;
3. comunica nuevas ideas de manera visual y experimental antes de pasar a una explicación oral;
4. ofrece imágenes que, de otro modo, serían inaccesibles para los estudiantes.

De esa manera, el trabajo en un ambiente computacional favorece la posibilidad de alcanzar una mayor comprensión conceptual, ya que la computadora dispensaría o disminuiría el tiempo dedicado al aprendizaje de técnicas y algoritmos que cuentan con un énfasis predominante y ocupan gran parte de los cursos de cálculo. Otros autores (Borba, 1995a; Capuzzo Dolcetta *et al.*, 1988) destacan también que los ambientes computacionales favorecen un abordaje más experimental en el aprendizaje matemático que alienta a los estudiantes a formular, verificar o rechazar y reformular hipótesis, generar patrones, anticipar resultados y combinar abordajes gráficos con rutinas numéricas y analíticas. Además de la posibilidad experimental, varios estudios (Borba, 1995a; Schoenfeld, 1995; Smith, 1995; Capuzzo Dolcetta *et al.*, 1988) se refieren a la visualización como un aspecto favorecido por la computadora, ya sea por la posibilidad de generar representaciones gráficas con facilidad o por el tipo de abordaje matemático, más visual, que ella permite. Por otro lado, la importancia de la visualización en la enseñanza, aprendizaje y construcción de los conceptos de cálculo es indicada como esencial por muchos autores. Hallet (1991) señala que la visualización es de fundamental importancia para favorecer la comprensión matemática en los niveles iniciales de la universidad; sin embargo, el modelo tradicional de enseñanza del cálculo y su tipo de evaluación característica fomentan la memorización de fórmulas, reglas y técnicas algebraicas, provocando que los estudiantes eviten consideraciones visuales, como fue mostrado en estudios realizados por Eisenberg y Dreyfus (1991). Estos últimos autores señalan que muchos estudiantes manifiestan un cierto rechazo a este abordaje y prefieren un tratamiento algorítmico ya que, hipotetizan los investigadores, el pensamiento visual implicaría demandas cognitivas superiores a las del pensamiento algorítmico.

La generación de vínculos entre lo visual y lo simbólico ha sido abordada por algunos investigadores. Autores como Tall y Thomas (1989) discuten el uso de la computadora para alentar un abordaje más versátil en el aprendizaje matemático, involucrando tanto actividades simbólicas como visuales, ya que el abordaje tradicional conduce a una interpretación simbólica estrecha y el uso de la computadora proporciona una moldura visual "para la manipulación mental de conceptos de orden superior" (p. 117). No obstante, los autores señalan que en un ambiente computacional pueden surgir procesos algorítmicos ligados a una secuencia de comandos computacionales para realizar una tarea determinada, lo que se señala como una limitación. Tall (1993, 1996) se refiere a los papeles complementarios de lo visual y lo simbólico y afirma que la computadora puede generar un ambiente que permita relacionarlos. El autor indica que una concentración sobre los símbolos puede conducir a un abordaje que privilegia la memorización de procedimientos que se van complicando cuando el número de reglas aumenta; por otro lado, la computadora puede ser una fuente rica de imágenes visuales y computacionales que proporciona a los estudiantes la posibilidad de explorar ideas matemáticas y analizar ejemplos y contraejemplos de algunos conceptos. Sin embargo, Tall (1996) advierte que la concentración exclusiva en lo visual puede dar *insights* sobre lo que ocurre en contextos restrictivos con un limitado poder de generalización y que pueden constituirse en barreras potenciales si no se está atento tanto a las definiciones y deducciones formales como a las complejas imágenes mentales asociadas a ellas. Cabe observar que, aunque Tall (1993, 1996) reconoce el valor de lo visual y la necesidad de complementariedad con lo simbólico, el rigor matemático se vislumbra como objetivo final al que se subordina lo visual.

La posibilidad de coordinar representaciones múltiples (gráficas, numéricas, algebraicas), favorecida por la computadora, fue también señalada por Borba (1995b), que afirma la posibilidad de que una matemática visual o discreta, apoyada por el uso de computadoras, constituya un modelo que podría atraer a aquellos estudiantes que "en general rechazan, de manera explícita o implícita, la hegemonía del álgebra" (p. 90). En este sentido, Borba señala que las representaciones múltiples, favorecidas por algunos *softwares* matemáticos, pueden "desafiar el monopolio de las expresiones algebraicas en la educación matemática sin perder de vista la importancia del uso de estas expresiones" (p. 89).

Centrando la atención en estudios que se dedican a observar en detalle los procesos de pensamiento de estudiantes de matemática en ambientes computacionales, valiéndose de entrevistas o experimentos de enseñanza, se destacan trabajos en los cuales podría decirse que la tecnología es considerada, además de una herramienta para *hacer*, para *auxiliar* o para *mostrar*, también una herramienta para *pensar con*. En este sentido, los trabajos de Lautem, Graham y Ferrini-Mundy (1994), Borba y Confrey (1996), Borba (1995c, 1994) son ejemplos donde la computadora tiene un papel central en la comprensión matemática de los estudiantes. El estudio de Lautem, Graham y Ferrini-Mundy (1994) explora las comprensiones sobre los conceptos de función y límite de estudiantes de cálculo en un ambiente con calculadoras gráficas, proporciona datos que muestran la influencia de la tecnología en las concepciones y los procesos de resolución de problemas de los alumnos. Borba y Confrey (1996) y Borba (1995c, 1994) estudian las comprensiones y la construcción de ideas matemáticas de algunos estudiantes que trabajan con transformaciones de funciones con un *software* de representaciones múltiples, en un abordaje que parte de lo visual y gráfico. Los autores afirman que el raciocinio visual es una forma de cognición potencialmente poderosa que implica dar a los estudiantes el tiempo, la oportunidad y los recursos para elaborar construcciones, investigaciones, conjeturas y modificaciones de éstas.

Desde la perspectiva de las transformaciones que el empleo de la tecnología trae al aula, existen estudios que dan cuenta de los cambios que se producen en la dinámica de las clases de matemática. Borba (1995a) ilustra cómo el uso de la calculadora gráfica, para el abordaje de algunos contenidos de un curso de cálculo, suscitó nuevas perspectivas, provocó la realización de debates centrados en cuestiones matemáticas y subrayó un abordaje "más empírico" basado principalmente en el proceso de visualización. Estas características fueron notadas también por Borba (1997), que observó que el empleo de calculadoras gráficas permite a los estudiantes coordinar representaciones algebraicas y gráficas y realizar tareas que van más allá de la interpretación de gráficos, produciendo así una reorganización de la actividad en la sala de clases, intensificando la discusión matemática, la generación de hipótesis y el propio proceso de producción de conocimiento. El trabajo de Borba y Villarreal (1998), realizado también con un abordaje experimental, ejemplifica cómo el uso de calculadoras gráficas, además de reorganizar las actividades en la sala de clases, reorganiza también el pensamiento de los estudiantes e intensifica la discusión matemática entre ellos en un trabajo colectivo donde, además de los medios tecnológicos, la oralidad y el empleo de lápiz y papel son elementos que enriquecen las discusiones matemáticas.

Los trabajos aquí revisados rescatan diferentes aspectos vinculados con la relación entre cálculo y computadoras: el papel de la visualización y la experimentación, la reorganización de la dinámica del aula, limitaciones y ventajas provenientes de su uso. En este artículo se pretende rescatar el papel mediador y reorganizador de la computadora en el desarrollo del pensamiento matemático de estudiantes de cálculo y se busca caracterizarlo en detalle. En la próxima sección, se presentan algunos elementos teóricos implícitos en este estudio y que vinculan computadoras y cognición.

1.2. Computadoras y cognición

El papel de la computadora como mediadora de la actividad intelectual humana ha sido descrito por Tikhomirov (1981) en su *teoría de la reorganización*. Según esta teoría, la actividad intelectual humana es modificada por el uso de la computadora, produciendo una reorganización en los procesos de creación, búsqueda y almacenamiento de información y en las propias relaciones humanas. Tikhomirov se refiere a la constitución de *sistemas ser humano-computadora* que producen una verdadera reorganización de la actividad humana y convierten a la computadora en mucho más que una herramienta de auxilio, en una herramienta que transforma la propia actividad.

La teoría de la reorganización es compatible con los conceptos de Levy (1993), quien desarrolla la idea de que "nuestro pensamiento se encuentra profundamente moldeado por dispositivos materiales y colectivos sociotécnicos" (p. 10). El concepto de *ecología cognitiva* que este autor propone, defendiendo la "idea de un colectivo pensante hombre-cosas" (p. 11), contempla las dimensiones técnicas y colectivas de la cognición e indica el surgimiento de nuevos estilos cognitivos en el tiempo de la informática.

Los dispositivos materiales (lápiz y papel, computadoras, calculadoras, etc.) son parte de un colectivo pensante y están relacionados con las tecnologías intelectuales descritas por Levy (1993): la oralidad, la escritura y la informática. Es claro que la oralidad y la escritura continúan siendo las tecnologías intelectuales más comunes en el trabajo matemático de los estudiantes. El abordaje algebraico de cuestiones matemáticas es característico de la cultura de la escritura, soporte fundamental para tales resoluciones. Este aspecto ya fue destacado en diferentes artículos por Borba (1993; 1995b), que señala la influencia de la *midia*[2] tradicional, lápiz y papel, en el estilo de producción matemática que subraya "el conocer un fenómeno dado, primordialmente a través del álgebra". En este sentido, puede decirse que la *midia* penetra la matemática y el pensamiento de quien hace y aprende matemática.

Difícilmente el abordaje de las cuestiones matemáticas sería algebraico sin lápiz y papel. Por eso, tal vez, algunos estudiantes no se sienten cómodos frente a la computadora, que exige otras formas de pensar, que sugiere nuevos abordajes. Levy (1993) describe con claridad esa tendencia:

> Es grande la tentación de condenar o ignorar aquello que nos es extraño. Es aun posible que no percibamos la existencia de nuevos estilos de saber, simplemente porque no corresponden a los criterios y definiciones que nos constituyeron y que heredamos de la tradición (p. 117).

Los estilos de saber, característicos de la cultura informática, pueden ser condenados o ignorados o no ser percibidos, porque no satisfacen los criterios y definiciones tradicionales que provienen de la civilización de la escritura.

[2] Con este término se designan los diferentes recursos y dispositivos que están mediando procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática: computadora, lápiz y papel, calculadora, oralidad, etcétera.

El colectivo pensante, del cual la computadora forma parte, parece privilegiar lo que se puede llamar pensamiento visual. La imagen se destaca como un punto de apoyo fundamental de las nuevas tecnologías intelectuales, sin implicar, con esto, un rechazo de lo verbal, lo escrito o lo algebraico, en el caso de la matemática.

En este trabajo se pretende mostrar cómo los procesos de pensamiento matemático desarrollados por estudiantes son condicionados, sin ser determinados, por el ambiente computacional en el que trabajan. Se presentan diversos ejemplos a través de los cuales se muestran las características de tales procesos de pensamiento.

2. EL ESTUDIO

2.1. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

El objetivo del estudio aquí expuesto era caracterizar los procesos de pensamiento desarrollados por estudiantes en un ambiente computacional al realizar actividades matemáticas relacionadas con cálculo diferencial. Para la consecución de este objetivo fue necesario observar y registrar en detalle el trabajo de estudiantes en ambientes computacionales.

Se optó por una metodología de tipo cualitativa, basada principalmente en la realización de experimentos de enseñanza constructivistas (Cobb y Steffe, 1983); se trabajó con pares de estudiantes en un ambiente computacional. Un experimento de enseñanza (Cobb y Steffe, 1983) consiste básicamente en una serie de encuentros del investigador con los estudiantes por un cierto periodo de tiempo e implica procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes es influida, también, por la interacción con el investigador.

El estudio se realizó en horarios fuera de clase con tres pares de estudiantes voluntarias de primer año de Biología del Instituto de Biociências de la Universidade Estadual Paulista (UNESP, campus de Rio Claro, Brasil) que cursaban, en el momento de esta investigación, la disciplina matemática aplicada.

Se utilizó el *software Derive 3.14*. Ninguna de las participantes tenía experiencia con el *software*. Además de la computadora, siempre había disponibles lápices y papel, para que las estudiantes los utilizaran cuando lo considerasen necesario, ya que ocasionalmente escribían sus conclusiones, las que serían usadas en sesiones posteriores, sea para aplicarlas a nuevas situaciones, para cuestionarlas o para mejorarlas.

En el momento de iniciar este estudio, las estudiantes ya habían visto en el curso de matemática aplicada: el proceso de determinación de rectas tangentes a una curva a través de rectas secantes, la derivada de una función en un punto como el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto, la derivada como función y algunas reglas de derivación.

Cada experimento de enseñanza fue estructurado en cuatro sesiones de trabajo con cada par de estudiantes participantes en el estudio. Estas sesiones tenían duración aproximada de una hora y media cada una y fueron realizadas y videograbadas en el laboratorio de video del Departamento de Matemática de la UNESP, Rio Claro.

En la primera sesión de trabajo se explicó el objetivo de la investigación y por qué era importante filmar las sesiones. Posteriormente se presentó el *software* con el que se trabajaría. Se introdujeron los comandos básicos para comenzar: escribir expresiones algebraicas, realizar gráficos, modificar escalas de los gráficos, marcar puntos en el plano cartesiano, etc. A medida que era necesario para el desenvolvimiento de las actividades propuestas, se fueron enseñando nuevos comandos.

Cada sesión se estructuraba en torno de cuestiones amplias que tenían la función de generar discusiones matemáticas entre las estudiantes y también con la investigadora. No existía una secuencia lineal. De esta manera, cada grupo participante de la experiencia recorrió caminos diferentes, dependiendo tanto de las intervenciones de la investigadora como de los intereses, preguntas, dudas y expectativas de las estudiantes generadas a partir del trabajo con la computadora o con las cuestiones matemáticas planteadas.

Después de cada sesión de los experimentos de enseñanza, se veían las correspondientes filmaciones y se proporcionaban elementos para responder a las preguntas de investigación. Se efectuaban anotaciones de situaciones frecuentes y recurrentes que llamaran la atención. A partir de ellas, se identificaban regularidades y patrones de comportamiento o resolución de problemas. Esto conducía al establecimiento de invariantes en las acciones de las estudiantes y la generación de conjeturas. Se registraron el accionar de las estudiantes y las intervenciones de la entrevistadora y, posteriormente, se analizaron. Este procedimiento permitía reestructurar las siguientes sesiones, establecer hipótesis de trabajo y reexaminar situaciones previamente observadas. Luego de completar todos los experimentos de enseñanza, los videos fueron completamente transcritos para poder realizar un análisis más profundo. Así, el proceso de análisis de los datos fue "no lineal", se desarrolló simultáneamente con la recolección de datos y se intensificó después de haberla acabado.

Se optó por un análisis de tipo inductivo/constructivo (Lincoln y Guba, 1985). Para tal análisis, no se parte de hipótesis previamente establecidas, sino que, a partir de los datos recogidos, se van generando "hipótesis de trabajo", esto es, proposiciones, conjeturas y relaciones entre ellas, y su validez se pone a prueba durante el transcurso de los experimentos de enseñanza.

Se seleccionaron y analizaron doce episodios (pasajes relevantes con elementos útiles para caracterizar los procesos y estrategias de pensamiento de los estudiantes). Algunos de ellos fueron discutidos con colegas del Grupo de Pesquisa Informática, outras Mídias y Educação Matemática (GPIMEM-UNESP-Rio Claro). A partir del análisis efectuado, se caracterizaron los procesos de pensamiento desarrollados por las estudiantes en el ambiente computacional en el cual trabajaron. Posteriormente, los episodios fueron observados a través de "lentes bibliográficos", esto es, fueron contrastados con la literatura pertinente, con la intención de construir nuevas comprensiones.

2.2. Tres episodios

A continuación se presentan tres de los doce episodios de aprendizaje analizados. En el primer episodio, se relata cómo las estudiantes del grupo constituido por Mayra y Carolina deciden si la recta $y = 4x - 4$, tangente a la parábola de expresión $y = x^2$, la toca en más de un punto. El segundo episodio muestra el análisis que las mismas estudiantes realizan acerca de gráficos de distintas funciones exponenciales desconocidas para ellas. El tercer episodio relata las estrategias desarrolladas por una estudiante (Camila) para determinar gráficamente la derivada de una función cuya expresión algebraica desconocía.

2.2.1. *Episodio 1*

En este episodio las estudiantes trazan en la computadora el gráfico de $y = x^2$, determinan algebraicamente, usando la computadora, la recta tangente a la parábola en el punto $x = 2$ ($y = 4x - 4$) y trazan su gráfico.

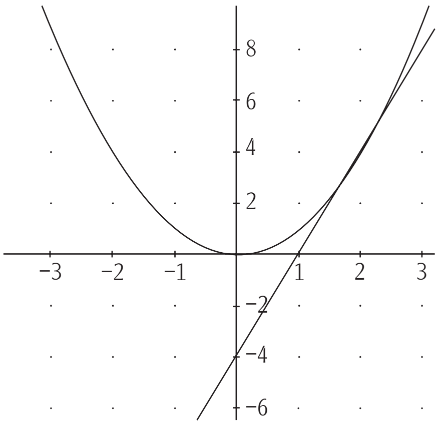


Figura 1

A partir de los gráficos mostrados por la computadora, surge un conflicto: la recta tangente parece estar tocando a la parábola en más de un punto (véase la figura 1). Esto motivó la pregunta de Carolina:

C: *¿una recta tangente puede tocar en varios puntos?*

La primera estrategia de las estudiantes para resolver este problema fue el empleo del comando *zoom* para aproximarse al gráfico, con el objetivo de conseguir una mejor visión de la región en que la recta tangente y la parábola parecen "estar juntas". Entretanto, esta opción no resolvió el problema, ya que parábola y recta tangente tienden a "confundirse" en un entorno del punto de tangencia, tal como se muestra en la figura 2.

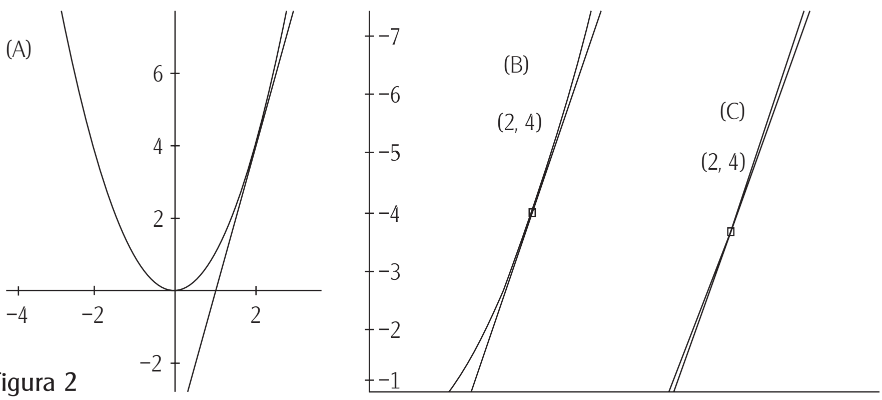
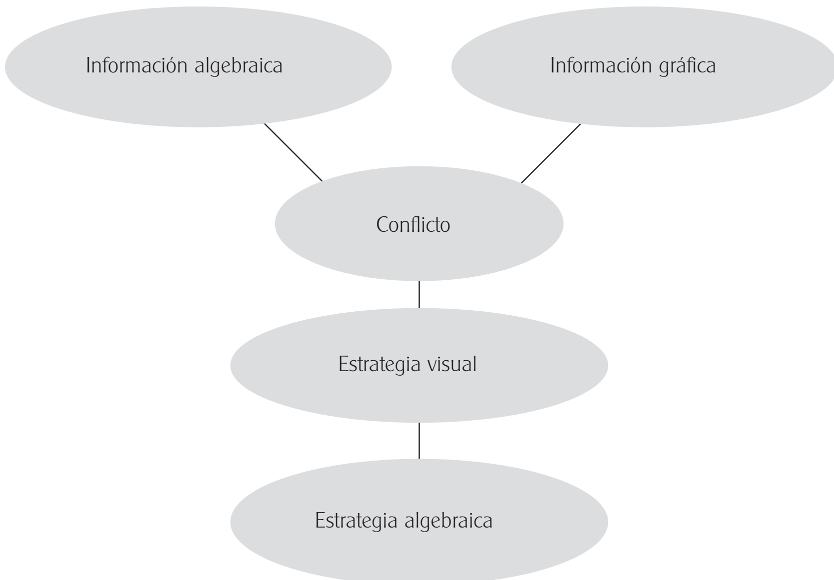


Figura 2

Surgió, así, la necesidad de un abordaje algebraico para resolver la cuestión: igualar las ecuaciones de la recta tangente y de la parábola para verificar si se encontraban en algún otro punto, además del punto de tangencia.

Resumiendo: existe una información algebraica proporcionada por la computadora cuando se determina la ecuación de la recta tangente a través de ella. Esa información dice que $y = 4x - 4$ es una recta tangente a la función $y = x^2$ en el punto (2, 4). Por otro lado, existe también una información gráfica cuando la recta tangente es trazada por la computadora, mostrando que esa recta aparentemente toca la parábola en más de un punto. Es a partir de la confrontación de esas dos informaciones que surge un conflicto y dos estrategias para resolverlo: visual, primero, y algebraica, después. Este proceso está representado en el siguiente esquema:



Cabe señalar que el conflicto que surge como una aparente contradicción entre las informaciones algebraica y gráfica no aparecería trabajando con lápiz y papel, ya que la representación gráfica que se genera con estas herramientas está subordinada a la siguiente imagen: "una recta tangente sólo toca a la curva en un punto", y así el gráfico sería trazado de manera que eso ocurriera. La condición de tocar al gráfico en un punto es previa al dibujo y no consecuencia de él, pero, al trabajar con la computadora, eso no ocurre y de ahí el conflicto.

La estrategia del empleo del *zoom* para tener una mejor visualización del gráfico no resulta adecuada por el hecho de que la función es derivable y, así, localmente linealizable por la recta tangente. Sin embargo, esta aparente limitación visual de la computadora puede utilizarse como un auxiliar para trabajar la linealización local de funciones derivables, como la imagen gráfica de la derivabilidad de una función en un punto.

Este ejemplo muestra que los recursos del *software*: posibilidad de determinar rectas tangentes, trazado de gráficos y uso del *zoom;* en este caso particular, influyeron en el tipo de cuestiones que aparecieron en el episodio. La tarea presenta características peculiares provenientes del uso de esta *midia*.

El episodio muestra la importancia de un trabajo con representaciones múltiples, y las relaciones que las vinculan, para conseguir conectar dominios que, de otra manera, permanecerían separados pero conectados; generan comprensiones matemáticas más amplias y completas. Por otro lado, además de la necesidad de una coordinación entre representaciones múltiples, la introducción de la computadora en la ecología cognitiva de las estudiantes sugiere, también, la necesidad de una coordinación *intermidias* que permita transitar de una *midia* a otra, teniendo en cuenta las características propias de cada una. Tanto el trabajo con representaciones múltiples como la coordinación *intermidias* son indispensables en los colectivos pensantes de los cuales forma parte la computadora.

2.2.2. *Episodio 2*

En otro de los encuentros realizados con Mayra y Carolina, se abordó una cuestión matemática que no fue prevista por la entrevistadora. Las estudiantes exploraron gráficos de diversas funciones exponenciales desconocidas para ellas.

Inicialmente, trazan el gráfico de $y = 3^{x^2}$ (figura 3). Ellas nunca habían visto esa función y, buscando establecer conexiones con otros contenidos ya existentes, surgen preguntas que muestran la intención de vincular esa función exponencial con las funciones cuadráticas:

> *¿Una exponencial, cuando está elevada al cuadrado, se transforma en parábola?*

En pocas palabras, se puede decir que las estudiantes piensan que el tipo de gráfico producido está asociado al formato del gráfico de la función que está en

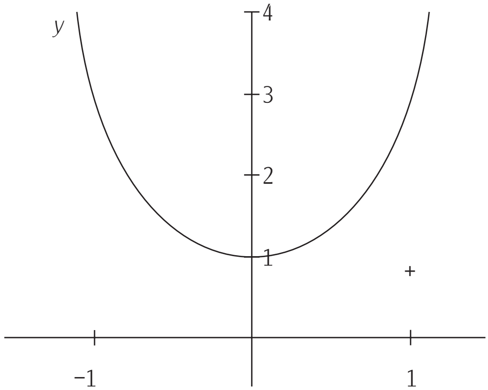


Figura 3

el exponente, es decir $y = x^2$. Inclusive trazan el gráfico de $y = x^2 + 1$ y lo comparan con el de $y = 3^{x^2}$ para visualizar si "coinciden".

Esa misma conjetura surge frente a la función $y = 3^{x^3}$ (figura 4). No obstante, cuando trazan su gráfico en la computadora, se hacen nuevas reflexiones: el gráfico es considerado como una "mezcla" de una función exponencial ($y = 3^x$) y de una función polinomial de grado 3 ($y = x^3$). Las estudiantes intentan justificar su conjetura escribiendo la función $y = 3^{x^3}$ como un producto entre 3^x y 3^{x^2}, pero perciben que ese producto no es 3^{x^3}, sino $3^{(x^2 + x)}$. Posteriormente, trazan el gráfico de la función $y = 3^{(x^2 + x)}$ e intentan asociarlo nuevamente con el gráfico de $y = x^2 + x$; observan que el punto crítico de la parábola coincide con el punto crí-

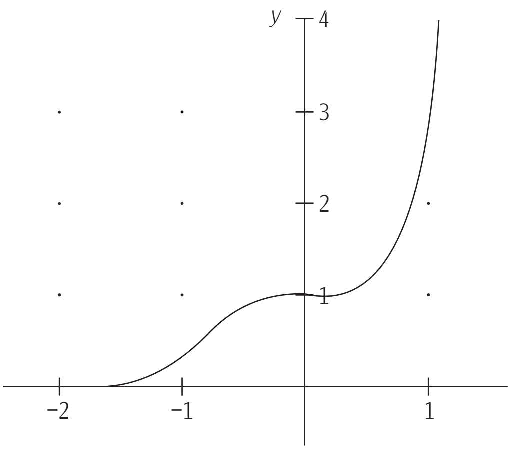


Figura 4

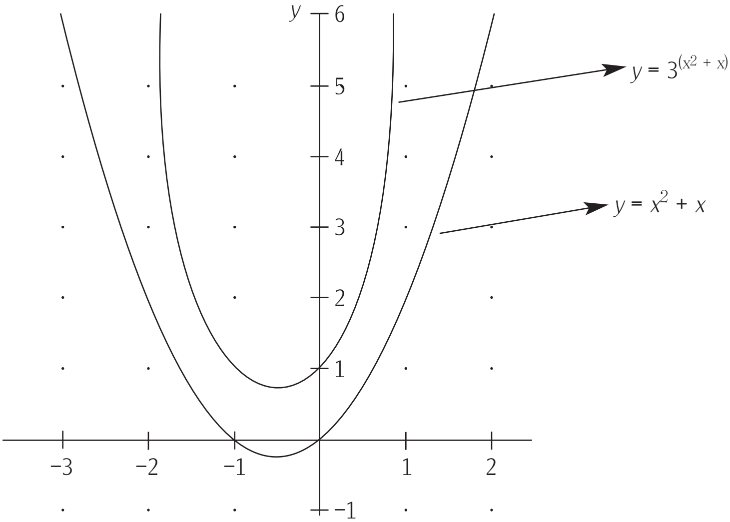


Figura 5

tico de la función $y = 3^{(x^2 + x)}$ (véase la figura 5), e inclusive intentan determinar ese valor valiéndose de la fórmula que permite calcular la abscisa del vértice de una parábola ($x_v = -b/2a$ si $y = ax^2 + bx + c$), pero perciben que eso no es posible.

En el transcurso del episodio, se trataron diversos tópicos, procurando tener una mayor comprensión matemática: composición de funciones como una operación que permite generar las funciones $y = 3^{x^2}$, $y = 3^{x^3}$ o $y = 3^{(x^2 + x)}$, a partir de funciones conocidas, como $y = 3^x$, $y = x^2$, etc.; resolución de ecuaciones e, incluso sin saber calcular la derivada de funciones de tipo $y = a^{f(x)}$ ($a > 0$ y $a \neq 1$), la presencia de la computadora permitió avanzar en este sentido y abordar cuestiones relacionadas con el cálculo algebraico de los puntos críticos de la función $y = 3^{(x^2 + x)}$.

A partir del trabajo en la computadora con este tipo de gráficos, surgen algunos comentarios que revelan el reconocimiento de que las informaciones visuales presentan aspectos positivos y limitaciones. Es evidente que, a partir de una información visual generada por las estudiantes en la computadora, surgieron las cuestiones ya relatadas. Por otro lado, las explicaciones algebraicas de las estudiantes intentan dar cuenta de las evidencias gráficas. Se recurre a funciones y reglas conocidas frente a la necesidad de explicar, también algebraicamente, el "extraño" comportamiento de estas funciones que nunca habían visto antes. Sólo el álgebra de las funciones no habría mostrado la riqueza de las cuestiones abordadas en el ambiente computacional y, recíprocamente, el poder de la información visual requiere también de la ayuda algebraica para tener acceso a explicaciones más allá de lo visual. Este episodio sugiere la necesidad del uso de representaciones múltiples para conseguir una mejor apropiación de los conceptos matemáticos.

Es interesante notar que, aunque las funciones exponenciales consideradas presenten expresiones algebraicas totalmente distintas de las correspondientes a las funciones cuadráticas, la asociación visual de los gráficos es más fuerte y persistente, y aparece en varios momentos del episodio aquí resumido. Aun después de haber reflexionado que, a pesar de la similitud de los gráficos, se trata de funciones diferentes, ante nuevas situaciones las estudiantes vuelven a utilizar fórmulas asociadas a las funciones cuadráticas para resolver cuestiones relacionadas con la función $y = 3^{(x^2 + x)}$.

Las funciones cuadráticas detentan una posición privilegiada en la enseñanza de la matemática. Existen fórmulas para determinar su vértice y raíces y, con frecuencia, se utilizan para introducir, por ejemplo, el concepto de derivada, entre otras aplicaciones. No es extraño, entonces, que aparezcan aquí dando soporte a algunas interpretaciones de las estudiantes. ¿Hasta qué punto el hecho de que las estudiantes extiendan la validez de las fórmulas que permiten determinar el vértice y las raíces de la parábola no es generado por la propia enseñanza? Frente a funciones desconocidas y aliadas a la computadora, las estudiantes generan nuevos gráficos que, aunque similares a los gráficos de las parábolas, tienen características propias. Las fórmulas conocidas para determinar vértice y raíces de parábolas pierden su validez para esas nuevas funciones. Se hacen necesarias, entonces, nuevas reflexiones matemáticas que expliquen las diferencias entre las funciones consideradas, pero también cuestiones tales como: ¿por qué el punto crítico de la función $y = 3^{(x^2 + x)}$ coincide con el punto crítico de su exponente $y = x^2 + x$? ¿Los puntos críticos de funciones de tipo $y = a^{f(x)}$ ($a > 0$ y $a \neq 1$) coinciden siempre con los puntos críticos de su exponente $y = f(x)$? ¿Por qué?

Este episodio puede considerarse también como un ejemplo de las posibilidades educativas que la computadora ofrece, ya que muestra una oportunidad de aprendizaje para las estudiantes a partir de la experimentación con funciones desconocidas, favorece la aparición de conexiones con conocimientos previos y exhibe la necesidad de establecer relaciones entre lo visual y lo algebraico para construir nuevas explicaciones y comprensiones matemáticas.

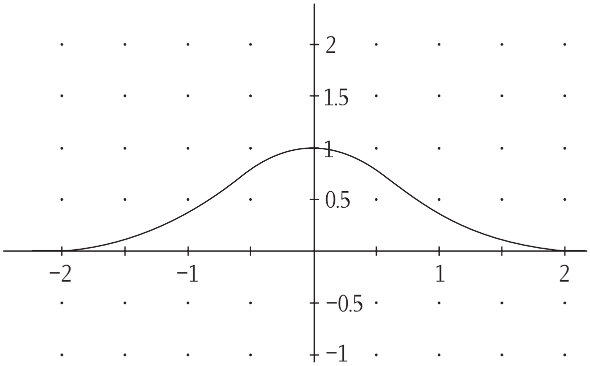


Figura 6

2.2.3. *Episodio 3*

El episodio que se presenta a continuación tiene como protagonista a Camila, que integraba otro de los grupos participantes del estudio, aunque en esta sesión trabajó sola. El problema abordado fue: dado el gráfico de una función en la computadora ($f(x) = e^{-x^2}$), trazar el gráfico de su derivada sin recurrir a la expresión algebraica de la función. El gráfico proporcionado por la computadora se muestra en la figura 6. A fin de que Camila pudiese realizar el gráfico de la derivada, se colocó una transparencia sobre la pantalla de la computadora.

Camila ya había trabajado en encuentros anteriores con este tipo de problema, pero con gráficos de funciones polinomiales. A partir de ese trabajo previo, se habían establecido algunas relaciones entre el signo de la derivada y el crecimiento de la función:

> En el trecho donde la función es decreciente, la derivada tendrá valores negativos; en el trecho donde la función es creciente, la derivada tendrá valores positivos.

Camila sabía también que los extremos de la función determinaban los ceros de la derivada.

A continuación se presentan las estrategias desarrolladas por la estudiante en el transcurso del episodio. La primera de ellas fue identificar el punto crítico de máximo en x = 0, por lo cual la derivada pasaría por el origen de coordenadas.

Posteriormente, Camila afirma que, en el intervalo donde la función es creciente, la derivada será positiva y, donde la función es decreciente, la derivada será negativa. Inicialmente indica que la derivada podría ser una curva decreciente que pasa por el origen. Aparentemente, la estudiante realizó una asociación con la parábola que representa la función cuadrática $y = -x^2$, que es el exponente de la función exponencial dada, y que se trata de una función cuya derivada conoce.

Camila señala que, para tener una noción del formato de la derivada, miraría "el grado de la función" que, en el caso de las funciones polinomiales con las cuales estaba familiarizada, proporciona información sobre el tipo de gráfico de la derivada, la cual sería de un grado menor. No obstante, en este caso la estrategia no funciona. Una vez que esto queda claro, Camila comienza a calcular la derivada en algunos puntos de la función a partir de la construcción de rectas tangentes. Esta actividad fue facilitada por la computadora que, a través del comando *tangent*, proporciona la ecuación y el gráfico de las rectas tangentes solicitadas. Sin embargo, la primera tentativa de Camila para calcular la derivada en el punto $(-1, f(-1))$ fue calcular el cociente $f(-1)/(-1)$, afirmando que ése era el valor del coeficiente angular de la recta tangente en el punto mencionado. El resultado de tal cociente es negativo, lo cual contradice el hecho previsto por Camila de que la derivada en ese punto debería ser positiva por ser creciente la función. Ella afirma:

> C: ... pero... debo haber dicho algo errado... porque yo dije que aquí la función, en ese trecho, es creciente [indica para $x < 0$] entonces dije que la derivada iba a ser positiva, la derivada iba a dar aquí encima [indica por sobre el eje X] pero si es negativa, va a estar para abajo... ¡ahí ya no entendí más nada!

Frente a esta contradicción y ayudada por la investigadora, Camila traza la recta tangente a la curva en el punto $(-1, f(-1))$, usando la computadora. Una vez obtenido el gráfico de dicha recta tangente, identifica con ayuda de la computadora el punto donde tal recta corta al eje Y ($y_0 = 1.109$) y plantea una ecuación ($f(-1) = (a - 1) + 1.109$), que también será resuelta por la computadora, para determinar el coeficiente angular (a) de la misma.

Una vez calculado el valor del coeficiente angular ($a = 0.741$), Camila tiene dificultades para identificar el par ordenado $(-1, 0.741)$ como un punto del gráfico de la derivada. Se supera el inconveniente a través de una analogía con el cero de la derivada, que fue determinado a través del coeficiente angular de la recta tangente a la función en el punto extremo $(0, f(0))$, punto donde ésta resulta ser ho-

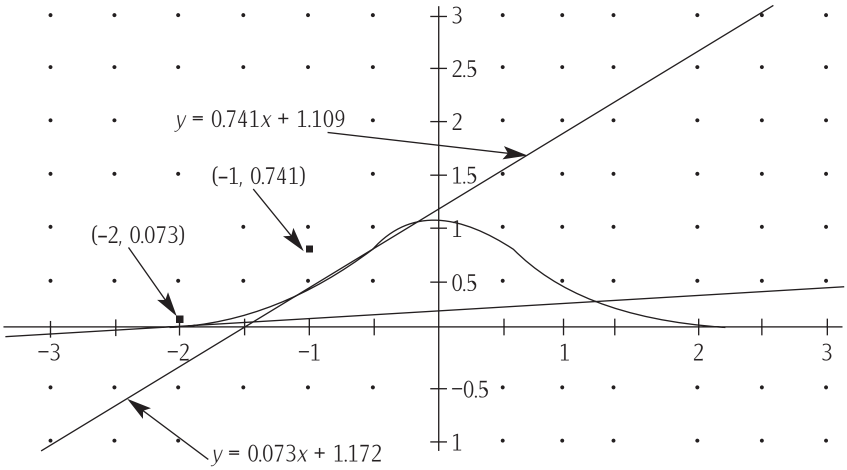


Figura 7

rizontal. Así, Camila consigue marcar un punto (–1, 0.741) en el gráfico de la derivada pedida. Luego repite el procedimiento descrito para determinar el valor de la derivada en $x = -2$ (véase la figura 7).

Al considerar puntos pertenecientes al intervalo $-1 < x < 0$, señala que ahí el gráfico de la derivada será decreciente, pues debe pasar por el origen. Afirma también que, para $x > 0$, el gráfico de la derivada será una curva decreciente.

Finalmente, la estudiante traza el gráfico de la derivada previsto por ella y lo contrasta con el proporcionado por la computadora (véase la figura 8). La estudiante analiza las diferencias entre los gráficos y observa que la derivada es simétrica respecto al origen, mientras que la función original es simétrica respecto al eje Y, y recuerda haber notado esta característica en algunas funciones polinomiales y sus respectivas derivadas, graficadas antes.

Este episodio sugiere la existencia de aspectos visuales y algebraicos en el pensamiento de Camila que en algunos momentos parecen desconectados. El valor de la derivada en un punto es determinado algebraicamente calculando el coeficiente angular de rectas tangentes trazadas en la computadora, pero la interpretación gráfica de ese cálculo se muestra inicialmente complicado. La construcción de posibles conexiones entre informaciones visuales y algebraicas caracteriza el proceso seguido por Camila en el transcurso del episodio, en el cual la

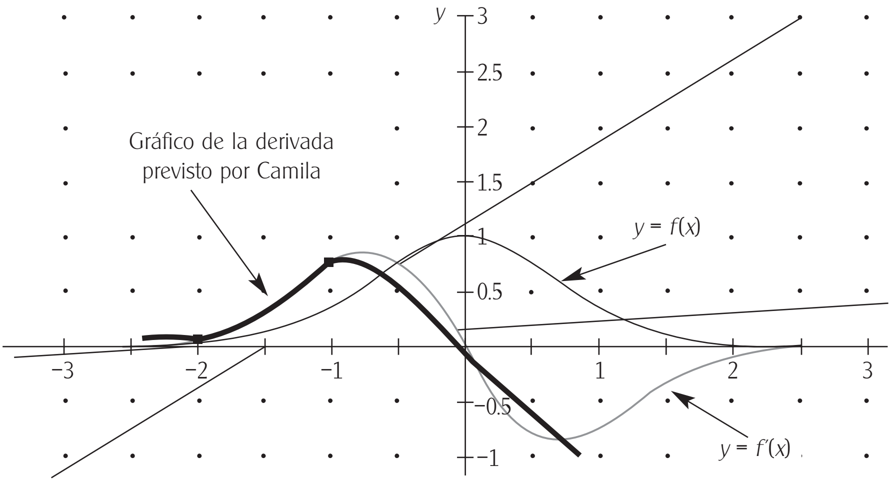


Figura 8

estudiante integró la computadora a sus actividades, conformando así un sistema que resuelve diferentes cuestiones matemáticas.

La construcción de la propia derivada a través del trazado de rectas tangentes se muestra como una actividad que permite, en cierta manera, visualizar la relación entre derivada y rectas tangentes. Esa génesis visual de la derivada por lo general queda en la sombra en cursos de cálculo. El cálculo de la derivada a través de reglas acaba surgiendo como una máquina que permite generar pendientes de rectas tangentes y se olvida que la derivada fue generada a partir de ellas.

Los patrones de simetría, observados por Camila en los gráficos en los que trabajó, muestran la generación de una conjetura informal que trata el hecho de que la derivada de una función par es una función impar y de que la derivada de una función impar es una función par. Es importante observar que este tipo de análisis fue facilitado por el trabajo hecho con gráficos y muestra el surgimiento de relaciones matemáticas que no estaban previstas.

3. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

El análisis de los episodios relatados aquí de manera resumida sugiere los siguientes resultados:

1. El pensamiento matemático es mediado y reorganizado por los dispositivos utilizados.
2. En un ambiente computacional, las estudiantes desarrollan tanto abordajes visuales como algebraicos, lo que sugiere la necesidad de coordinarlos para superar una dicotomía entre lo visual y lo algebraico.
3. Los procesos de pensamiento matemático de las estudiantes se caracterizan por ser juegos de conjeturas y refutaciones articulados en forma de red.

El pensamiento de las estudiantes en ambiente computacional no sigue un estilo de tipo deductivo. Los aspectos visuales y las respuestas provenientes de la computadora influyen en el estilo de construcción matemática desarrollado por ellas. Conjeturas y refutaciones parecen estar en la base del aprendizaje matemático cuando hay una interacción intensa entre los actores del sistema constituido por estudiantes, investigadora, computadora, lápiz y papel.

En el caso de las estudiantes, las conjeturas se elaboran a partir de conocimientos previos. Se trata de suposiciones que, aunque no verificadas, tienen un sustento que puede ser la aplicación de una regla, las concepciones matemáticas presentes, las palabras del profesor, las intervenciones de la entrevistadora o de la colega, etc. Esas conjeturas se confrontan con las respuestas de la computadora, o con las ideas de la colega o son desafiadas por algún contraejemplo sugerido por las estudiantes, por la investigadora o por las representaciones proporcionadas por la computadora. Los contraejemplos ayudan a reformular la conjetura o a generar una nueva.

Otra característica del pensamiento de las estudiantes, íntimamente ligada al proceso de generación de conjeturas y refutaciones, es la constitución del conocimiento en red. Esto es, no existe una linealidad en la manera de abordar el contenido matemático. Cuando se destaca la voz del estudiante y se siguen los pasos de sus ideas, los caminos recorridos se revelan particularmente diferentes de una secuencia lineal característica en las clases tradicionales de matemática.

La metáfora del conocimiento como red de significados (Machado, 1995) se contrapone con la metáfora del conocimiento como un "balde" que se llena, con la imagen de la "educación bancaria" de Paulo Freire (1979), con la idea de cadena y de presentación lineal y lógicamente ordenada de contenidos, y respeta una secuencia jerárquica que va de lo simple a lo complejo, esto es, una visión cartesiana del conocimiento.

Finalmente, cabe señalar que, en esa constitución reticular del conocimiento, se observan abordajes tanto visuales como algebraicos en el tratamiento de cuestiones matemáticas. Tales abordajes no son excluyentes ni disyuntivos. Esto permite trabajar con vistas a la consecución de un equilibrio entre lo visual y lo algebraico en la educación matemática. El énfasis dado a las técnicas en la enseñanza matemática implica necesariamente un énfasis en lo algorítmico y en lo algebraico lo cual unido al valor limitado que se atribuye a lo visual y experimental en la educación matemática, podrían considerarse, en la terminología de Levy (1993), como efectos ecológicos que están relacionados con las tecnologías predominantes en las clases de matemática, y también en el propio proceso de producción matemática, esto es, la oralidad y la escritura. Precisamente, a través de la computadora, esto podría ser desafiado.

Considerando que la introducción de la computadora en ambientes de aprendizaje contribuye al establecimiento de una nueva ecología cognitiva, es razonable pensar que esta nueva especie que forma parte de esa ecología puede tener diferentes tipos de relaciones con los integrantes del sistema (elementos que la constituyen). Si la computadora simplemente se utiliza para hacer cuentas, será un suplemento, pero si se asume como una herramienta "para pensar con", será un reorganizador tanto de los procesos de pensamiento como de las relaciones entre los componentes del colectivo pensante integrado por seres humanos y dispositivos materiales. Esa reorganización producirá modificaciones en la organización de contenidos y en las actividades desarrolladas en clase. Alterará los papeles de los profesores y los estudiantes e inclusive la relación con el propio objeto de conocimiento.

Teniendo en cuenta la supremacía de la enseñanza tradicional en cursos universitarios de cálculo (al menos en Argentina o Brasil), los aspectos señalados sugieren la conveniencia de repensar su enseñanza a partir de una visión del conocimiento como red de significados y considerando a la computadora como posible protagonista de un papel que supera lo meramente auxiliar para transformarse en integrante de un *colectivo pensante* que caracteriza a una *ecología cognitiva* particular que produce una *reorganización* de los procesos de pensamiento y actividades, tanto de quien enseña como de quien aprende y de quien produce matemática.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Cristina Esteley y Humberto Alagia, por sus sugerencias y observaciones realizadas en versiones previas de este artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Borba, M. (1993), *Students´ understanding of transformations of functions using multirepresentational software*, tesis de doctorado en Educación, Cornell University, 377 pp.

—— (1994), "A model for students´ understanding in a multi-representational environment", en J. da Ponte y J. Matos (ed.), *Proceedings of the 18th PME Conference,* Lisboa 2, pp. 104-111.

—— (1995a), "O uso de calculadoras gráficas no ensino de funções na sala de aula", en *Anais da Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática,* Recife, UFPE, pp. 67-72.

—— (1995b), "Funções, representações múltiplas e visualização na Educação Matemática", en *Anais do I Seminário Internacional de Educação Matemática,* Río de Janeiro, IM-UFRJ, pp. 71-90.

—— (1995c), "Computadores, representações múltiplas e a construção de idéias matemáticas", *Bolema,* Rio Claro, año 9, especial 3, pp. 83-101.

—— (1997), "Graphing calculator, functions and reorganization of the classroom", en M. Borba, T. Souza, B. Hudson, y J. Fey (ed.), *Proceedings of Working Group 16 at ICME 8: the role of technology in the Mathematics classroom,* Rio Claro, UNESP, pp. 53-62.

Borba, M. y J. Confrey, (1996), "A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment", *Educational Studies in Mathematics,* 31 (3), pp. 319-337.

Borba, M. y M. Villarreal (1998), "Graphing calculators and reorganization of thinking: the transition from functions to derivative", en A. Olivier, y K. Newstead (ed.), *Proceedings of the 22nd PME Conference,* Stellenbosch, 2, pp. 135-143.

Capuzzo Dolcetta, I. *et al.* (1988), "The impact of new technologies on teaching calculus: a report of an experiment", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 19 (5), pp. 637-657.

Cobb, P. y L. Steffe (1983), "The constructivist researcher as teacher and model builder", *Journal for Research in Mathematics Education,* 14 (2), pp. 83-94.

Eisenberg, T. y T. Dreyfus (1991), "On the reluctance to visualize in mathematics", en W. Zimmermann y S. Cunningham (eds.), *Visualization in teaching and learning Mathematics,* Washington, Mathematical Association of America, pp. 25-38.

Freire, P. (1979), *Educação e mudanza,* trad. de M. Gadotti y L. L. Martin, Río de Janeiro, Paz e Terra.

Hallet, D. (1991), "Visualization and calculus reform", en W. Zimmermann y S. Cunningham (ed.), *Visualization in teaching and learning mathematics,* Washington, Mathematical Association of America, pp. 121-126.

Heid, M.K. (1988), "Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool", *Journal for Research in Mathematics Education,* 19 (1), pp. 3-25.

Heid, M.K. y T. Baylor (1993), "Computing technology", en P.S. Wilson (ed.), *Research ideas for the classroom-High School Mathematics,* Reston, VA, NCTM, Macmillam, pp. 198-214.

Hillel, J. *et al.* (1992), "Basic functions through the lens of Computer Algebra System", *Journal of Mathematical Behavior,* 11(2), pp. 119-158.

Lautem, A., K. Graham y Ferrini-Mundy (1994), "Student understanding of basic calculus concepts: interaction with the graphics calculator", *Journal of Mathematical Behavior,* 13, pp. 225-237.

Lawson, D. (1995), "The effectiveness of a computer-assisted learning programme in engineering mathematics", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 26(4), pp. 567-574.

Levy, P. (1993), *As tecnologias da inteligência. O futuro do pensamento na era da informática,* trad. C. I. da Costa, São Paulo, Editora 34, 203 p.

Lincoln, Y. y E. Guba (1985), *Naturalistic inquiry,* California, SAGE, 416 p.

Machado, N. (1995), *Epistemologia e didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente,* São Paulo, Cortez Editora, 320 p.

Palmiter, J. (1991), "Effects of computer algebra systems on concept and skill adquisition in calculus", *Journal for Research in Mathematics Education,* Reston, 22(2), pp. 151-156.

Schoenfeld, A. (1995): "A brief biography of Calculus Reform", *UME Trends,* Lafayette, Purdue University, 6(6), pp. 3-5.

Smith, D. (1995), "Computers in Calculus Reform", *UME Trends,* Lafayette, Purdue University, 6(6), pp. 14-15, 31.

Tall, D. (1993), "Real Mathematics, rational computers and complex people", en *Proceedings of the Fifth Annual International Conference on Technology in College Mathematics Teaching,* Addison-Wesley, pp. 243-258.

—— (1996), "Information Technology and Mathematics Education: Enthusiasms, Possibilities and Realities", texto de la conferencia dictada en el 8th International Congress on Mathematical Education (ICME 8), 1996, Sevilla.

Tall, D. y M. Thomas (1989), "Versatile learning and the computer", *Focus on learning problems in Mathematics*, 11 (2), pp. 117-126.

Tikhomirov, O.K. (1981), "The psychological consequences of computarization", en J.V. Wertsch (ed.), *The concept of activity in Soviet Psychology*, Nueva York, M.E. Sharpe, pp. 256-278.

Villarreal, M. (1999), *O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas*, tesis de doctorado en Educación Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

DATOS DE LA AUTORA

Mónica Ester Villarreal

Facultad de Ciencias Agropecuarias, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

mvilla@agro.uncor.edu

Una nueva serie para el cálculo del número π

Sergio Falcón Santana

Resumen: Es de sobras conocido que existen muchísimas series numéricas para el cálculo de los primeros dígitos del número π. Pero, en general, todas estas series suelen obtenerse a partir del desarrollo en serie de un arco tangente. El presente trabajo pretende resolver este mismo problema mediante la suma de una serie numérica obtenida a partir del desarrollo en serie de potencias de la función arco coseno. Posee la ventaja, sobre otras muchas series anteriores, de que su convergencia es más rápida.

Abstract: It is well-known that there are many numerical series for the calculation of the first digits of the number π. But, in general, all these series are usually obtained from the development in series of an arc tangent. The present work tries to solve the same problem by means of the sum of a numerical series obtained from the development in series of powers of the function arc cosine. It has the advantage, over other previous series, that its convergence is faster.

DESARROLLO EN SERIE DE LA FUNCIÓN ARCO COSENO. CONVERGENCIA

Una forma relativamente sencilla de desarrollar en serie de potencias las funciones trigonométricas recíprocas consiste en desarrollar en serie la función derivada aplicando la fórmula del binomio de Newton e integrar la serie resultante, calculando posteriormente el valor de la constante de integración de modo que la variable tome el valor 0 (Falcón, 2001a).

Con este procedimiento, se encuentra el desarrollo de la función *arco coseno,* que es el siguiente:

Fecha de recepción: marzo de 2002.

$$f(x) = \text{arc cos}\, x \rightarrow$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-1/2} = -\binom{-1/2}{0} + \binom{-1/2}{1}x^2 - \binom{-1/2}{2}x^4 + \binom{-1/2}{3}x^6 - \ldots =$$

$$= -1 - \frac{\frac{1}{2}}{1!}x^2 - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}x^4 - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{3!}x^6 - \ldots = -1 - \frac{1}{2\cdot 1!}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6 - \ldots \rightarrow$$

$$\rightarrow f(x) = -x - \frac{1}{2\cdot 1!}\frac{1}{3}x^3 - \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\frac{1}{5}x^5 \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\frac{1}{7}x^7 - \ldots + C$$

$$f(0) = \text{arc cos}\, 0 = \frac{\pi}{2} = C \rightarrow \text{arc cos}\, x = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} \qquad (1)$$

Nota 1: Hay que tener en cuenta que el cálculo de los números combinatorios se hace según la fórmula $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$, donde n representa un número real cualquiera, no necesariamente natural.

Nota 2: La expresión $(2n-1)!!$ se conoce con el nombre de doble factorial (o semifactorial) de $2n-1$ y su expresión es $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)(2n-5) \cdots 5\cdot 3\cdot 1$. En caso de que el número fuera par, su doble factorial sería $(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2$.

Un problema interesante en todo desarrollo en serie es el estudio de la convergencia de la serie obtenida. Para ello se aplica el criterio de D'Alembert y resulta

$$\lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\left|\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{x^{2n+3}}{2n+3} : \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right| =$$

$$\lim\left|\frac{(2n+1)(2n-1)!!\,2^n n!\,(2n+1)x^{2n+3}}{(2n-1)!!\,2^{n+1}(n+1)n!\,(2n+3)x^{2n+1}}\right| = x^2 \lim\frac{(2n+1)(2n+1)}{2(n+1)(2n+3)} = x^2 \lim\frac{4n^2}{4n^2} = x^2 < 1$$

por lo que la serie converge para todo número real x tal que $-1 < x < +1$.

Falta estudiar la convergencia en los extremos del intervalo. Para $x = +1$, se obtiene la serie numérica $\sum_{0}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\frac{1}{2n+1}$, cuya convergencia se estudiará aplicando el criterio de Raabe:

$$\lim n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim n\left(1-\frac{(2n+1)(2n+1)}{2(n+1)(2n+3)}\right)=\lim\frac{6n^2+5n}{4n^2+10n+6}=\frac{6}{4}>1,$$ por lo

que esta serie es convergente (el valor de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ se obtuvo del párrafo anterior).

Para x = −1 se obtiene la misma serie, aunque negativa, por lo que también es convergente. En consecuencia, la serie potencial obtenida correspondiente a la función arco coseno converge en el intervalo cerrado [-1, +1].

Nota: La expresión $(2n - 1)!!$ puede sustituirse por esta otra:

$$(2n-1)!!=\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}=\frac{(2n-1)!}{2(n-1)2(n-2)\ldots(2\cdot 2)(2\cdot 1)}=\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}$$

Suma de arcos cosenos

Antes de empezar esta sección tengamos en cuenta las consideraciones que se indican a continuación:

1. La función *arco* es la recíproca de su correspondiente función trigonométrica por lo que cos (arc cos t) = t.
2. Si t = cos $u \to$ arc cos $t = u \to$ sen (arc cos t) = sen $u = \sqrt{1-\cos^2 u} = \sqrt{1-t^2}$

Por lo tanto, y teniendo en cuenta que cos (a + b) = cos$a$ cos$b$ − sen$a$ sen$b$, resulta: cos (arc cos a + arc cos b) = cos (arc cos a) cos (arc cos b) − sen (arc cos a) sen (arc cos b) = $ab - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2} \to$ arc cos a + arc cos b = arc cos $(ab - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2})$

Finalmente, el cambio $b = a$ = x conduce a la interesantísima relación

$$2\text{arc cos } x = \text{arc cos }(2x^2 - 1). \qquad (2)$$

CÁLCULO DEL NÚMERO π

Si bien es cierto que el número π puede ser calculado a partir del desarrollo (1), la convergencia es más rápida haciendo uso de la fórmula (2). Si en ella sustituimos los correspondientes desarrollos en serie (1), resulta:

$$2\left(\frac{\pi}{2} - x - \sum_{1} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}\right) = \frac{\pi}{2} - (2x^2 - 1) - \sum_{1} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \frac{1}{2n+1} (2x^2 - 1)^{2n+1} \to$$

$$\to \frac{\pi}{2} = 1 + 2x - 2x^2 + \sum_{1} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \frac{1}{2n+1} \left(2x^{2n+1} - (2x^2 - 1)^{2n+1}\right).$$

Esta relación es muy interesante, porque establece que el valor de π se puede obtener a partir de una serie potencial determinada, para cualquier número real comprendido entre −1 y +1. Y así, por ejemplo, si se hace $x = {}^1/_4$ y se toman sólo cuatro términos de esta serie, se obtiene para π el valor 3.1143. Un sencillo ejercicio de programación nos hace ver que esta serie se acerca más al valor correcto de π cuanto más se acerca x al punto medio del intervalo [0, 1] y se aleja de π cuando x se acerca a sus extremos.

Para una x que varía de 0 a 1 con incrementos de 0.05 y con sólo 7 términos de la serie, se obtienen los valores que se indican a continuación:

$x = 0,\ \pi = 2.740763$	$x = 0.05,\ \pi = 2.909787$	$x = 0.1,\ \pi = 3.021307$
$x = 0.15,\ \pi = 3.086626$	$x = 0.2,\ \pi = 3.119972$	$x = 0.25,\ \pi = 3.134481$
$x = 0.3,\ \pi = 3.139711$	$x = 0.35,\ \pi = 3.141213$	$x = 0.4,\ \pi = 3.141539$
$x = 0.45,\ \pi = 3.141588$	**$x = 0.5,\ \pi = 3.141592$**	$x = 0.55,\ \pi = 3.14159$
$x = 0.6,\ \pi = 3.141582$	$x = 0.65,\ \pi = 3.141545$	$x = 0.7,\ \pi = 3.141408$
$x = 0.75,\ \pi = 3.140922$	$x = 0.8,\ \pi = 3.139278$	$x = 0.85,\ \pi = 3.133821$
$x = 0.9,\ \pi = 3.115391$	$x = 0.95,\ \pi = 3.047382$	$x = 1,\ \pi = 2.740761$

Como se comprueba fácilmente, para x = 0.5 se obtiene el valor de 3.141592 para π que es exacto para estas primeras cifras.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Falcón, S. (2001), *Cálculo I,* España, El Libro Técnico, pp. 68-99.
—— (2001), "Inabarcable π", *Elementos de Matemática,* vol. XV, núm. 62, pp. 5-10.

DATOS DEL AUTOR

Sergio Falcón Santana
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, España
sfalcon@dma.ulpgc.es

Sobre la aplicación de la analogía para derivar un teorema extendido de Pitágoras para el tetraedro

M. A. Murray-Lasso

Resumen: El tetraedro trirrectángulo es una generalización tridimensional del triángulo rectángulo bidimensional. Es una esquina separada de un cubo por medio de un plano oblicuo, igual que un triángulo rectángulo es una esquina separada de un cuadrado por medio de una línea oblicua. Dicho tetraedro también obedece un teorema extendido de Pitágoras en el que la suma de los cuadrados de las áreas de los triángulos rectángulos ("catetos") incidentes en el ángulo triedro trirrectángulo es igual al cuadrado del área del triángulo oblicuo ("hipotenusa"). Se hace uso intenso de la analogía para demostrar el teorema, y se generaliza a cuatro y más dimensiones. Para lograrlo, se escoge una demostración del teorema de Pitágoras fácilmente generalizable a más dimensiones. La solución utilizada trabaja con proyecciones ortogonales que se generalizan sin dificultad a más dimensiones. Se dan ejemplos numéricos y se menciona la dualidad entre simplejos polirrectángulos (generalizaciones del tetraedro trirrectángulo) y polígonos formados por las aristas y la diagonal máxima de un ortoedro.

Abstract: The trirectangular tetrahedron is a three-dimensional generalization of the two-dimensional right triangle. It is a corner cut from a cube by means of an oblique plane, just as a right triangle is a corner cut from a square by means of an oblique line. The tetrahedron mentioned also obeys an Extended Pythagorean Theorem in which the sum of the squares of the areas of the right triangles ("legs") incident with the trihedral trirectangular angle is equal to the square of the area of the oblique triangle ("hypothenuse"). Intensive use is made of analogy to prove the theorem, which is generalized to four and more dimensions. To achieve this, an easily generalized proof of the Pythagorean Theorem to many dimensions is selected. The solution provided relies on orthogonal projections which are easy to extend to more dimensions. Numerical examples are provided and the duality between polirectangular simplices (generalizations of the trirectangular tetrahedron) and polygons constructed with the edges and the maximal diagonal of an orthohedron is noted.

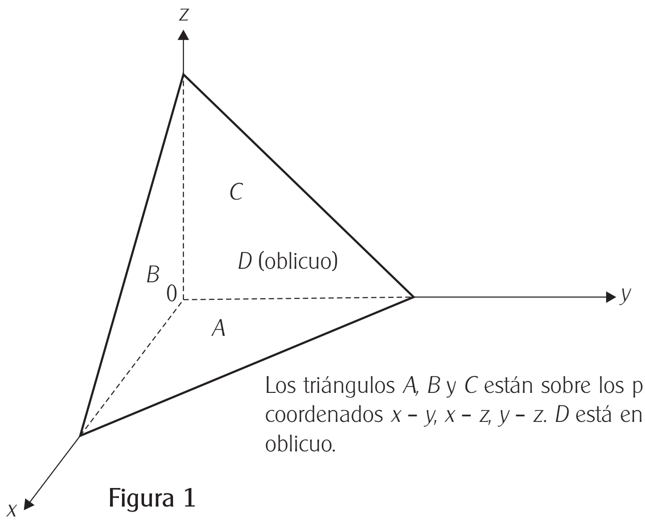
Fecha de recepción: junio de 2001.

INTRODUCCIÓN

Una de las principales herramientas de descubrimiento en las matemáticas es la analogía (Polya, 1965, 1954, 1981). Cuando se ha resuelto un problema que tiene algún parecido con un nuevo problema, una buena heurística es intentar aplicar al nuevo problema las ideas que funcionaron para el problema análogo. En vista de que analogía no es lo mismo que identidad, generalmente hay necesidad de hacerle algunas modificaciones a las ideas para que se ajusten al nuevo problema; sin embargo, en general es más fácil resolver el nuevo problema buscando y probando esas modificaciones que atacándolo desde cero. Brown y Walter (1990) han dado numerosas ideas para modificar y plantear nuevos problemas con similitudes a un problema base. Una de sus ideas importantes es hacer una lista de las características del problema y plantear problemas en las que se niegan una o varias de las características. Por ejemplo, si el teorema de Pitágoras funciona para triángulos rectángulos planos, una variante podría ser investigar qué pasa si un triángulo no es rectángulo (una solución es que se aplica la ley de los cosenos). Otra variante sería investigar qué pasa si la figura no es plana. (En este artículo investigamos este problema.) Una tercera variante podría ser qué pasa si, en vez de triángulo, se trata de un cuadrilátero. Si alguna de las variantes se ajusta al nuevo problema y somos capaces de resolver el problema variado, habremos resuelto con éxito el nuevo problema.

En este artículo se aplican las ideas planteadas a la demostración de un teorema extendido de Pitágoras. Este teorema aparece en Polya (1981, pp. 34-37). El autor lo demuestra utilizando en repetidas ocasiones el teorema de Pitágoras estándar. En este artículo presentamos una demostración diferente que resulta menos larga, requiere menos líneas auxiliares y sugiere conceptos adicionales, así como la manera de demostrarlo para cuerpos con cuatro o más dimensiones. Para ello, haremos un mayor uso de la analogía, partiendo de una demostración trigonométrica del teorema de Pitágoras estándar.

El problema en cuestión es tomar un tetraedro trirrectángulo, al cual, sin pérdida de generalidad, lo podemos colocar de manera tal que el vértice correspondiente al ángulo triedro trirrectángulo coincida con el origen de un sistema de coordenadas cartesianas x, y, z. A los tres triángulos rectángulos que forman parte de la superficie del tetraedro los haremos coincidir con los planos $x - y$, $x - z$, $y - z$. A estos triángulos los llamaremos *A, B, C,* respectivamente. El cuarto triángulo tiene como vértices los vértices de los triángulos *A, B, y C* que no coinciden con el origen, lo llamaremos *el triángulo oblicuo* y lo denominaremos *D*. En la



Los triángulos *A, B* y *C* están sobre los planos coordenados $x - y$, $x - z$, $y - z$. *D* está en el plano oblicuo.

Figura 1

figura 1 se muestra el tetraedro en perspectiva. Como indica Polya (1981, p. 34), el triángulo rectángulo es una esquina de un cuadrado cortada por medio de una línea recta oblicua, mientras que el tetraedro trirrectángulo es una esquina cortada de un cubo por medio de un plano oblicuo. De ese hecho proviene la analogía entre el triángulo rectángulo y el tetraedro trirrectángulo.

Si encerramos entre paréntesis los nombres de los triángulos y denotamos así sus áreas, lo que se trata de demostrar es el siguiente teorema generalizado de Pitágoras

$$(D)^2 = (A)^2 + (B)^2 + (C)^2$$

que involucra las áreas de los tres triángulos "cateto" y el área del triángulo "hipotenusa."

EL TEOREMA DE PITÁGORAS ESTÁNDAR

El teorema extendido de Pitágoras para el tetraedro ya tiene algunas diferencias con el teorema de Pitágoras para el triángulo rectángulo. El número de términos del lado derecho es tres en vez de dos. Esto nos debe parecer lógico, ya que si hacemos la analogía del triángulo oblicuo con la hipotenusa y de los triángulos que se unen en el ángulo triedro trirrectángulo con los dos catetos que se en-

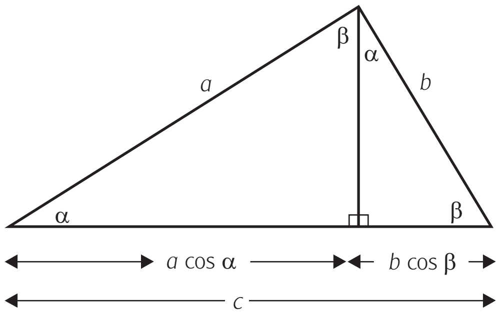


Figura 2

cuentran en el ángulo plano recto, el tetraedro tiene tres "catetos." Para una figura plana su medida es el área, mientras que para una línea recta, su medida es la longitud. Hasta ahí la analogía parece lógica. Busquemos ahora una demostración del teorema estándar de Pitágoras que se pueda extender fácilmente a más dimensiones (Flores, 1992).

En la figura 2 se muestra un triángulo rectángulo en el que se ha trazado una perpendicular que va del vértice con el ángulo recto a la hipotenusa. El pie de dicha perpendicular divide a la hipotenusa en dos segmentos con longitudes: $a \cos \alpha$ y $b \cos \beta$ que son las proyecciones de los lados a y b sobre la hipotenusa (Jurgensen, Donnelly y Dolciani, 1963, p. 259). A cada lado le corresponde uno de los segmentos; a a le corresponde $a \cos \alpha$, y a b le corresponde $b \cos \beta$.

Evidentemente, la suma de los segmentos da el segmento total c, por lo que

$$c = a \cos \alpha + b \cos \beta. \tag{1}$$

Si en el triángulo rectángulo original utilizamos la definición de cos:

$$\cos = \text{lado adyacente/hipotenusa}$$

entonces

$$\cos \alpha = a/c; \cos \beta = b/c$$

que al sustituirse en la ecuación (1) da

$$c = a^2/c + b^2/c$$

de la cual, multiplicando ambos miembros por c, se obtiene

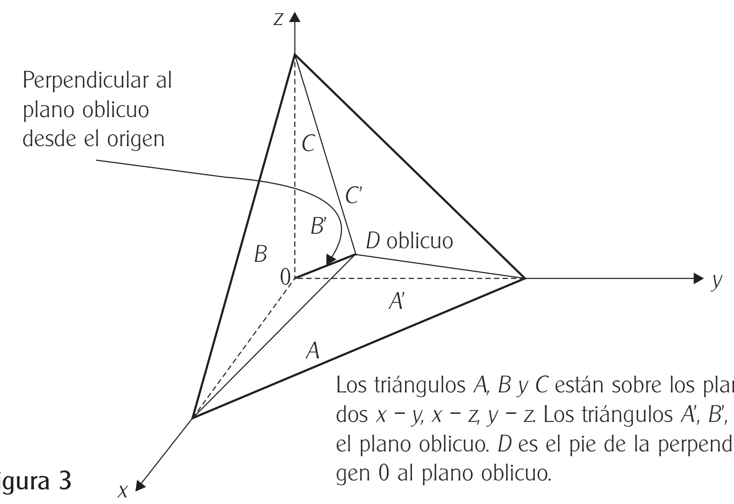
$$c^2 = a^2 + b^2$$

que es el teorema de Pitágoras.

EXTENSIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Pasemos ahora al tetraedro. Procediendo análogamente, desde el ángulo triedro trirrectángulo que corresponde al ángulo recto del triángulo rectángulo, trazamos una perpendicular al plano oblicuo. El punto no divide nada. En este punto tenemos que improvisar. Se trata de dividir la medida del triángulo oblicuo, es decir, su área, en pedazos tales que sumen el área del triángulo oblicuo y cada pedazo corresponda a uno de los triángulos que se unen en el ángulo triedro trirrectángulo. Una idea es tomar el pie de la perpendicular como vértice común de tres triángulos y, como los otros tres vértices, los vértices del triángulo oblicuo. Esto se muestra en la figura 3.

La división claramente permite la identificación de cada triángulo con cada una de las caras del ángulo triedro en analogía con la correspondencia de los catetos con los segmentos de recta en que se dividió la hipotenusa en el caso



Los triángulos A, B y C están sobre los planos coordenados $x - y$, $x - z$, $y - z$. Los triángulos A', B', C' están sobre el plano oblicuo. D es el pie de la perpendicular del origen 0 al plano oblicuo.

Figura 3

del triángulo plano. Para intentar una demostración del teorema de Pitágoras extendido, llamaremos a los triángulos formados sobre la superficie del triángulo oblicuo A', B' y C' como se muestra en la figura. 3.

Nótese que en la figura. 3, los triángulos A', B' y C' están sobre el plano oblicuo, mientras que los triángulos A, B y C están sobre los planos coordenados $x - y$, $x - z$, $y - z$.

Si denotamos las áreas de los triángulos con sus nombres encerrados entre paréntesis, evidentemente, como los tres triángulos A', B' y C' justo llenan el triángulo oblicuo D, se tiene

$$(D) = (A') + (B') + (C')$$

operación que tiene su análoga en la ecuación (1). Pero el área (A') es la proyección del área (A) sobre el plano oblicuo, ya que sus tres vértices son las proyecciones de los tres vértices de A. Lo mismo se puede decir de los triángulos B' y B, y de los triángulos C' y C. Por tanto, podemos escribir

$$(D) = (A) \cos \alpha + (B) \cos \beta + (C) \cos \gamma, \tag{2}$$

donde los ángulos α, β y γ son los ángulos diedros entre el plano del triángulo oblicuo D y los planos $x - y$, $x - z$, y $y - z$ donde están los triángulos A, B y C, respectivamente (Moise y Downs, 1975, p. 315). Dichos ángulos tienen como valores los de los ángulos (planos) entre la perpendicular al plano del triángulo oblicuo que pasa por el origen de las coordenadas y los ejes coordenados z (que es perpendicular al plano $x - y$ en el que está el triángulo A), y (que es perpendicular al plano $x - z$ en el que está el triángulo B) y x (que es perpendicular al plano $y - z$ en el que está el triángulo C) (Larson y Hostetler, 1989, p. 783). En otras palabras, $\cos \alpha$, $\cos \beta$ y $\cos \gamma$ son los cosenos directores de la recta que va del origen y es perpendicular al plano del triángulo oblicuo D.

El ángulo entre la recta perpendicular al plano del triángulo D y el eje z también vale α y su coseno es el factor que lleva el área del triángulo D a la del triángulo A; β es el correspondiente con el eje y y lleva D a B; y γ es el correspondiente con el eje x, que lleva D a C; de allí se obtienen las siguientes relaciones:

$$\cos \alpha = (A)/(D), \cos \beta = (B)/(D), \cos \gamma = (C)/(D)$$

Al utilizar estos valores en la ecuación (2) se obtiene:

$$(D) = (A)^2/(D) + (B)^2/(D) + (C)^2/(D)$$

y multiplicando ambos miembros por (D) tenemos:

$$(D)^2 = (A)^2 + (B)^2 + (C)^2$$

que es la expresión para el teorema extendido de Pitágoras para el tetraedro trirrectángulo. Es evidente la analogía entre las expresiones y el álgebra intermedia entre las demostraciones para el triángulo rectángulo y el tetraedro trirrectángulo.

DISCUSIÓN

Se debe notar que la demostración que dimos del teorema de Pitágoras está íntimamente relacionada con proyecciones; por tratarse de geometría plana (dos dimensiones), se trata de longitudes de segmentos de recta, ya que los dos segmentos en los que se divide la hipotenusa son las proyecciones ortogonales de los catetos sobre la hipotenusa y, por otro lado, los catetos son las proyecciones ortogonales de la hipotenusa sobre dos rectas ortogonales orientadas con la misma orientación que los catetos. Nótese que se manejan dos diferentes proyecciones, aunque los ángulos son los mismos. Los cosenos de estos ángulos desempeñan para el plano el mismo papel que los cosenos directores para tres dimensiones. (Compárese, por ejemplo, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$; $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$; Thomas, 1962, p. 614.)

Al pasar a tres dimensiones, lo que se proyecta son áreas, ya que el papel de los catetos lo desempeñan tres triángulos en planos que forman un ángulo triedro trirrectángulo y el papel de la hipotenusa lo desempeña el triángulo sobre el plano oblicuo. Por estas razones, lo que interesa son los ángulos diedros entre los planos en cuestión. Dichos ángulos tienen la misma medida que los ángulos planos entre las normales a los planos. Estas normales, en muchos casos, son más fáciles de manejar por ser unidimensionales. Esto es particularmente cierto para espacios con más dimensiones que tres.

Aunque en dos dimensiones los métodos gráficos son muy convenientes, ya en tres dimensiones se presentan dificultades de construcción por los dibujos en perspectiva, aunque ayudan a la visualización. Para más realismo y precisión, habría que trabajar con modelos físicos como cuerpos de cartón, trazar líneas por medio de hilos, etc. En este caso, ayuda mucho recurrir al álgebra, a saber, al álgebra lineal.

En tres dimensiones, una expresión lineal en tres variables referidas a tres ejes cartesianos ortogonales representa un plano que es una estructura bidimensional. Si el término independiente es cero, entonces el plano pasa por el origen, de lo contrario se trata de un plano que interseca a los ejes coordenados en puntos diferentes al origen. Así, por ejemplo, la ecuación

$$ax + by + cz + d = 0$$

representa un plano cuyas intersecciones con los ejes x, y, z son $-d/a$, $-d/b$ y $-d/c$, respectivamente (Larson y Hostetler, 1989, p. 782). Una manera de representación, que a veces resulta conveniente, es resolver la ecuación para representar los puntos que la satisfacen en términos de parámetros. Si despejamos cada una de las variables x, y, z en términos de d y algunos parámetros, se obtiene:

$$x = -d/a - b\, y/a - c\, z/a$$

donde se le pueden dar valores arbitrarios a y, z, digamos t_1, t_2. Podemos entonces escribir la solución general

$$\begin{aligned} x &= -\, d/a - b\, t_1/a - c\, t_2/a \\ y &= t_1 \\ z &= t_2 \end{aligned}$$

o en notación vectorial:

$$\begin{aligned} (x, y, z)' = (-d/a - b\, t_1/a - c\, t_2/a,\ t_1,\ t_2)' &= (-d/a, 0, 0)' + t_1\,(-b/a, 1, 0)' \\ &+ t_2\,(-c/a, 0, 1)' \end{aligned}$$

donde, para ahorrar espacio vertical, escribimos los vectores columna como vectores fila y, al final, agregamos el apóstrofe que denota transposición (conversión de filas a columnas y viceversa). La última expresión indica claramente que el vector $(x, y, z)'$ es igual a un vector constante $k = (-d/a, 0, 0)'$ más la suma de dos vectores constantes $v_1 = (-b/a, 1, 0)'$ y $v_2 = (-c/a, 0, 1)'$ multiplicados por los coeficientes t_1 y t_2 que son arbitrarios. En otras palabras, cualquier punto en el plano se puede expresar como la suma de un vector constante y una combinación lineal de dos vectores; estos vectores deberán ser linealmente independientes para poder generar todo el plano. Como evidentemente los vectores v_1 y v_2 son linealmente independientes, generan un plano (de dos dimensiones) que pasa por el punto k. Si deseáramos encontrar un vector que sea ortogonal al plano generado por v_1 y v_2, habría que resolver simultáneamente las ecuaciones

$$(-b/a,\ 1,\ 0)\ (x,\ y,\ z)' = 0$$
$$(-c/a,\ 0,\ 1)\ (x,\ y,\ z)' = 0$$

Como la matriz de coeficientes de estas ecuaciones homogéneas tiene rango 2 y hay tres incógnitas, la solución será un vector constante no cero (ortogonal a v_1 y v_2), digamos v_3, multiplicado por un parámetro arbitrario t_3. Nótese que en el proceso se ignoró el vector constante k, ya que basta encontrar un vector ortogonal al plano paralelo que pase por el origen, para el cual k es el vector cero. Conviene notar que, si se cuenta con la ecuación del plano en la forma $ax + by + cz + d = 0$, el vector $(a, b, c)'$ es ortogonal al plano y no hay necesidad de resolver ecuaciones para encontrar un vector ortogonal al plano (Thomas, 1960, p. 621). Otra alternativa para encontrar un vector ortogonal a v_1 y v_2 es usar el producto cruz $v_1 \times v_2$ (Thomas, 1960, p. 616).

Supóngase que ahora se desea encontrar la intersección de la recta $t_3\ v_3$ (que pasa por el origen) con el plano citado arriba. Como el plano está dado por

$$(x,\ y,\ z)' = k + t_1\ v_1 + t_2\ v_2$$

y la recta está dada por

$$(x,\ y,\ z)' = t_3\ v_3.$$

Igualando los lados derechos tenemos $k + t_1\ v_1 + t_2\ v_2 = t_3\ v_3$; rearreglando se convierte en:

$$t_1\ v_1 + t_2\ v_2 - t_3\ v_3 = -k$$

Los tres vectores v_1, v_2 y v_3 son linealmente independientes; por lo tanto el sistema en las tres incógnitas t_1, t_2, t_3 tendrá una solución única. Conocida t_3, se determina el punto de intersección utilizando

$$(x,\ y,\ z)' = t_3\ v_3$$

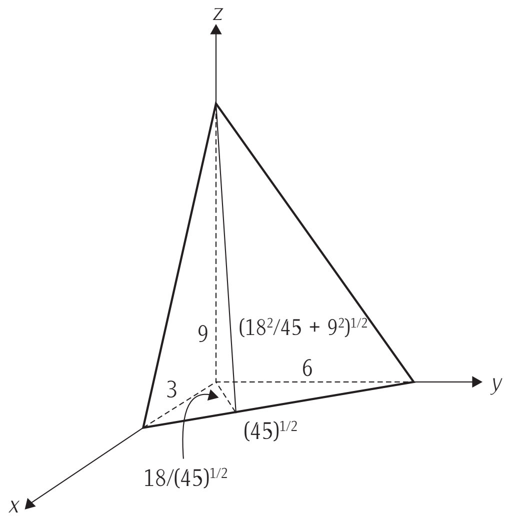


Figura 4

EJEMPLO NUMÉRICO DEL TEOREMA APLICADO A UN TETRAEDRO TRIRRECTÁNGULO

Para aclarar las ideas expresadas algebraicamente, verificaremos el teorema extendido de Pitágoras para el tetraedro de la figura 4, cuyos cuatro vértices son (3, 0, 0), (0, 6, 0), (0, 0, 9) *y* (0, 0 ,0). Junto a diversas líneas de la misma figura, se muestran sus longitudes, las cuales se pueden calcular usando el teorema de Pitágoras y el hecho de que la altura de un triángulo rectángulo, usando como base la hipotenusa, divide a ésta en segmentos proporcionales a los cuadrados de los catetos adyacentes.

Las áreas de los triángulos rectángulos sobre los planos coordenados $x - y$, $x - z$, $y - z$ son: $A = 3 \times 6/2 = 9$, $B = 9 \times 3/2 = 27/2$, $C = 9 \times 6/2 = 27$. Los correspondientes cuadrados son: $A^2 = 81$, $B^2 = 729/4$ *y* $C^2 = 729$. La suma de estos cuadrados vale 992.25. El cuadrado del área del triángulo sobre el plano oblicuo es $45 \times ((18^2/45 + 9^2)/4) = 992.25$, que coincide con la suma de los cuadrados de los triángulos rectángulos previamente calculada. Por tanto, se cumple el teorema extendido de Pitágoras.

Podría interesar determinar el punto donde cruza la perpendicular al plano oblicuo que pasa por el vértice del ángulo trirrectángulo. Esto se podría calcular encontrando un vector ortogonal a dos vectores linealmente independientes en el plano oblicuo. Estos vectores se pueden calcular conociendo tres puntos de dicho plano. Con un vector ortogonal determinado, se puede escribir fácilmente la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el origen y tiene la misma dirección que el vector. De igual manera, se puede escribir la ecuación paramétrica del plano oblicuo. Haciendo simultáneas las ecuaciones, se determina el punto único que satisface a ambas, el cual corresponde al punto buscado (Hadley, 1962, pp. 51, 61; Gass, 1966, p. 62). El resultado es $(x, y, z)' = (108/49, 54/49, 36/49)$. Dejamos los detalles al lector.

DUALIDAD: EL TEOREMA EXTENDIDO Y LA SUMA VECTORIAL DE LOS LADOS DE UN POLÍGONO

Si analizamos cuidadosamente los ángulos α, β, y γ, cuyos cosenos aparecen dos veces, haciendo operaciones diferentes en la demostración del teorema extendido de Pitágoras, podemos llegar a la siguiente conclusión, en vista del resultado final del teorema extendido:

1. Las áreas de las diversas figuras planas las podemos representar por medio de vectores cuya magnitud (longitud) es igual al área representada y cuya orientación es ortogonal al plano del área representada. En ingeniería es común representar un par, momento, cantidad de movimiento angular o una velocidad angular que actúan en un plano con un vector ortogonal al plano, de magnitud igual a la cantidad representada y con un sentido dado por la ley del tornillo de rosca derecha (Seely y Ensign, 1948, p. 23; Cannon, 1967, pp. 22-23). En forma natural se presenta la oportunidad de darle a las áreas un signo positivo o negativo, escogiendo el sentido del vector ortogonal. En la geometría griega ni siquiera se había inventado el cero o los números negativos, por lo que siempre se consideraron positivas las longitudes, áreas y volúmenes. Aquí seguiremos dicha costumbre. Así, en la figura 1, las áreas de los triángulos *A, B y C* pueden quedar representadas por vectores en las direcciones y sentidos de los ejes *z, y, x*, respectivamente.
2. Puesto que se cumple el teorema extendido de Pitágoras para el tetraedro trirrectángulo

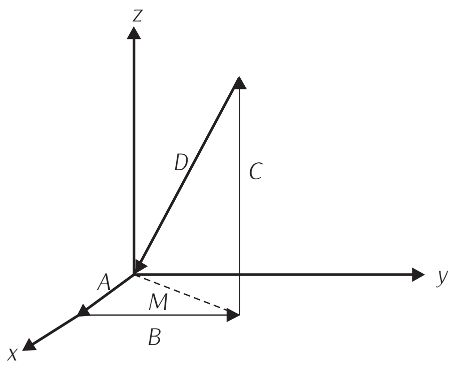


Figura 5

$$(D)^2 = (A)^2 + (B)^2 + (C)^2$$

ésta se puede interpretar como la aplicación de la ley del paralelogramo (o ley del triángulo o del polígono). Podemos entonces pensar en los vectores que representan las áreas como las fuerzas resultantes debido a una presión unitaria uniforme en todo el medio que rodea a un tetraedro trirrectángulo. Cada área, al multiplicarla por la presión unitaria, da como fuerza resultante el vector que representa el área con dirección ortogonal al área y dirigida hacia el cuerpo.

3. Una posible interpretación de nuestra descripción sería que los tetraedros trirrectángulos están en equilibrio bajo las presiones mencionadas, por lo que la suma vectorial de las fuerzas queda representada por el teorema extendido de Pitágoras. Con una interpretación *ad hoc* de los sentidos de los vectores (cambiándole el sentido al vector *D*), los vectores que representan las áreas de los triángulos del ángulo triedro trirrectángulo y del plano oblicuo cierran el polígono de fuerzas dando una resultante cero (véase la figura 5).
4. En la figura 5 los vectores *A, B y C* representan las áreas de los tres triángulos *A, B y C* del tetraedro trirrectángulo, y el vector *D* representa el área del triángulo sobre el plano oblicuo. Aplicando dos veces el teorema estándar de Pitágoras a los triángulos formados por los vectores *A, B, M* y *M, C, D,* se obtiene

$$(A)^2 + (B)^2 = (M)^2; \quad (M)^2 + (C)^2 = (D)^2;$$

por tanto

$$(A)^2 + (B)^2 + (C)^2 = (D)^2$$

Esta interpretación se puede extender a cualquier número de dimensiones para simplejos multirrectángulos de n dimensiones. (Un *simplejo* de n dimensiones es un poliedro convexo que tiene exactamente $n + 1$ vértices. La frontera del simplejo contiene *símplices* de menor dimensión, los cuales reciben el nombre de *caras simpliciales;* el número de tales caras de dimensión i es igual al número de combinaciones de $n + 1$ objetos tomados de $i + 1$ en $i + 1$, o sea

$$\left(\frac{n+1}{i+1}\right) = \frac{(n+1)!}{(i+1)!(n-1)!}$$

El simplejo es una generalización del segmento de recta, el triángulo y el tetraedro (Gass, 1968, pp. 53-54). En las extensiones a simplejos de cuatro y más dimensiones (A), (B), ... son "hiperáreas", es decir, por ejemplo, para cuatro dimensiones, son volúmenes de tetraedros, ya que los simplejos de cuatro dimensiones están delimitados por simplejos de tres dimensiones y, en general, los simplejos de n dimensiones están delimitados por simplejos de $n - 1$ dimensiones. Estos últimos son pedazos de hiperplanos: en tres dimensiones pedazos de planos (triángulos), en dos dimensiones pedazos de línea y, en una dimensión, puntos.

La identificación de los conceptos nos ayuda a visualizar que el teorema se puede extender, pues, por ejemplo, el concepto de proyección se define en forma análoga para objetos en más dimensiones.

EXTENSIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS A CUATRO DIMENSIONES

Existen por lo menos dos tipos de extensiones del teorema de Pitágoras. La más conocida es la que corresponde a encontrar una diagonal que atraviesa el espacio interior de un paralelepípedo rectangular recto (*ortoedro,* Baldor, 1983, p. 252) y sus generalizaciones. Simplemente aplicando el teorema de Pitágoras primero en un plano y luego en otro, se puede llegar al resultado que se ilustró en la figura 5. La extensión a cuatro y más dimensiones está clara; independientemente de la imposibilidad para dibujar geométricamente los ortoedros, pode-

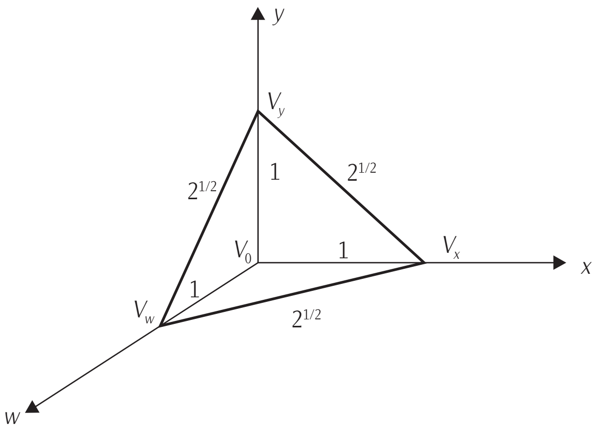


Figura 6

mos postular cuerpos que son extensiones del cuerpo en tres dimensiones. Para calcular la distancia entre dos vértices que no están en el mismo hiperplano, se aplica una generalización del teorema de Pitágoras de la siguiente índole:

$$Z^2 = A^2 + B^2 + \ldots + Y^2$$

donde las letras *A, B, ... Y,* representan longitudes de líneas unidimensionales, cada una orientada en una dirección ortogonal a todas las demás y *Z* representa una línea oblicua que parte de un vértice del ortoedro al otro vértice que no está en el mismo hiperplano.

Menos conocida, y motivo principal de este artículo, es la segunda extensión, donde las magnitudes consideradas no son unidimensionales (líneas), sino que van subiendo de dimensión, comenzando por ser longitudes de líneas (lados de triángulos rectángulos en un plano) luego áreas bidimensionales (triángulos rectángulos para el tetraedro trirrectángulo), hiperáreas (volúmenes de tetraedros para simplejos tetrarrectángulos de 4 dimensiones), etcétera.

Los cuerpos correspondientes a los triángulos y tetraedros a los cuales hemos llamado “simplejos” están definidos para más dimensiones y aunque no se pueden construir (sí se pueden manejar sus proyecciones en dos y tres dimensiones, análogamente a las proyecciones en dos dimensiones que se hacen de cuerpos en tres dimensiones), se utilizan mucho en aplicaciones como la programación lineal. No es frecuente tratar con cuerpos de este tipo que sean tetrarrectángulos, por ejemplo, en programación lineal en general no lo son, pero sí es frecuente manejar proyecciones de cuerpos multidimensionales en hiperplanos o subespacios de diferentes dimensiones para problemas de mínimos cuadrados. Una de las generalizaciones del espacio euclideano a más de tres dimensiones se basa precisamente en el concepto de producto interno que está íntimamente relacionado con el concepto de proyección de un vector (segmento de recta dirigido) sobre otro (Leithold, 1973, pp. 815-816). Las coordenadas cartesianas de un vector multidimensional son las medidas de sus proyecciones ortogonales sobre vectores unitarios ortogonales entre sí. Los espacios multidimensionales han encontrado toda clase de aplicaciones en la ingeniería, física, estadística, economía y administración. El concepto se ha encontrado tan útil que se ha generalizado a un número infinito de dimensiones y han aparecido los espacios de Hilbert con múltiples aplicaciones a las vibraciones, conducción de calor, electromagnetismo y oscilaciones eléctricas, así como a la física cuántica y, con una generalización de los conceptos de longitud y área utilizando medidas más abstractas (normas), en los espacios de Banach (Taylor, 1958, p. 98).

Para ser más concretos, diremos que un simplejo en cuatro dimensiones es un cuerpo (que se puede considerar como una generalización del tetraedro) con cinco vértices con todos los vértices conectados por medio de aristas. Dicho cuerpo tiene tantos tetraedros como subconjuntos de cuatro vértices hay en un conjunto de cinco vértices, es decir, $C_4^5 = 5!/4! = 5$. El número de aristas de dicho cuerpo es 10 y también tiene 10 triángulos (Courant y Robbins, 1969, p. 233; Colerus, 1948, p. 361). Por otra parte, un hipercubo en cuatro dimensiones, se puede visualizar como dos cubos unidos entre vértices correspondientes por aristas que surgieron entre los vértices al desplazarse un cubo en una dirección ortogonal (*sic*) a las tres direcciones de cada una de las aristas. Para aclarar de dónde viene esta idea, consideremos que, si un punto tiene cero dimensiones y un segmento de recta una dimensión, se puede visualizar el segmento de recta como la estela que deja el desplazamiento del punto en una dirección fija. El desplazamiento de la recta en una dirección ortogonal a la recta deja una estela que es un rectángulo, el cual, con las dimensiones adecuadas, puede ser un cuadrado. El prisma recto de base cuadrada es la estela de un cuadrado al desplazarse en una dirección ortogonal al cuadrado. Si la altura es igual al lado de la base, entonces se trata de un cubo. El hipercubo de cuatro dimensiones es un caso particular de una estela de un cubo desplazándose en una dirección ortogonal a las otras tres. Aunque esto ya no lo podemos visualizar, mucho se puede decir sobre este cuerpo y se puede dibujar en perspectiva al proyectarlo en un espacio de dos o tres dimensiones. Un hipercubo proyectado a tres dimensiones y visto como esqueleto con alambres entre los vértices se podría ver como dos cubos (una posibilidad es dibujar un cubo dentro de otro) con alambres que conectan los ocho vértices del primer cubo con los ocho vértices correspondientes del segundo cubo. Si a uno de estos hipercubos le cortamos una de sus esquinas por medio de un hiperplano inclinado, se formaría un simplejo con cuatro hiperplanos (estructuras tridimensionales) mutuamente ortogonales que tendrían un punto cuadridimensional en común (en cuatro dimensiones cuatro hiperplanos en posición arbitraria –es decir, que no se presentan ciertos paralelismos– determinan un punto), el cual correspondería al vértice del ángulo triedro (en este caso sería un ángulo tetrahiperédrico) del tetraedro del artículo. Este cuerpo sería la generalización a cuatro dimensiones del tetraedro, y si sus cuatro hiperplanos tetraédricos tuvieran "áreas" (A), (B), (C) y (D) y el "área" del tetraedro en el hiperplano oblicuo tuviera "área" (E), se cumpliría

$$(E)^2 = (A)^2 + (B)^2 + (C)^2 + (D)^2$$

una obvia extensión del teorema extendido de Pitágoras demostrado en este artículo. La demostración procedería describiendo un experimento de pensamiento que comenzara por poner el simplejo en posición tal que el origen del sistema de coordenadas cartesianas coincidiera con el vértice tetraédrico tetrarrectángulo y que los cuatro tetraedros trirrectángulos estuviesen en los hiperplanos coordenados

$$w - x - y, \qquad w - x - z, \qquad w - y - z, \qquad x - y - z$$

Posteriormente, se harían las mismas acciones que se hicieron para el tetraedro adaptándolas a la circunstancia de que se trabaja en cuatro dimensiones. Si se trabaja analíticamente, se puede definir el simplejo_4 (o versión cuadridimensional del tetraedro) por medio de desigualdades lineales.

Dada la dificultad de visualización, conviene proceder analíticamente. Los puntos en cuatro dimensiones serían cuartetos de números $v = (w, x, y, z)$. Una arista con extremos $v_1 = (w_1, x_1, y_1, z_1)$, $v_2 = (w_2, x_2, y_2, z_2)$ se puede representar paramétricamente por medio de la expresión

$$v(t) = v_1 \cdot (1 - t) + v_2 \cdot t, \; 0 \leq t \leq 1$$

Un hiperplano de extensión infinita en cuatro dimensiones queda representado por una ecuación lineal en las cuatro variables w, x, y, z utilizadas para representar un punto, es decir

$$aw + bx + cy + dz + e = 0$$

con *a, b, c, d y e* números reales fijos. (Si estuviéramos en tres dimensiones, solamente se tendrían tres variables y la ecuación representaría un plano bidimensional infinito). Para representar cuerpos finitos se utilizan desigualdades. Por ejemplo, para representar un hipercubo con centro en el origen y lados con longitud 2 sobre los ejes coordenados que incluye superficie e interior, se puede escribir

$$|w| - 1 \leq 0, \ |x| - 1 \leq 0, \ |y| - 1 \leq 0, \ |z| - 1 \leq 0$$

Si lo que se quiere representar es nada más la superficie del cubo, entonces se agrega la condición de que por lo menos una de las desigualdades se cumpla con igualdad.

Para representar en cuatro dimensiones un simplejo cuyos vértices están dados por los cinco puntos $a_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41})$, $a_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42})$, $a_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43})$, $a_4 = (a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44})$ y $a_5 = (a_{15}, a_{25}, a_{35}, a_{45})$, en vista de que el simplejo es el *casco convexo* de los vértices, el cuerpo se puede generar como una *combinación lineal convexa* (Winston, 1991, pp. 571-572) de los vértices y, por tanto, se pueden utilizar las siguientes igualdades y desigualdades paramétricas:

$$\begin{gathered}
w = a_{11} t_1 + a_{12} t_2 + a_{13} t_3 + a_{14} t_4 + a_{15} t_5 \\
x = a_{21} t_1 + a_{22} t_2 + a_{23} t_3 + a_{24} t_4 + a_{25} t_5 \\
y = a_{31} t_1 + a_{32} t_2 + a_{33} t_3 + a_{34} t_4 + a_{35} t_5 \\
z = a_{41} t_1 + a_{42} t_2 + a_{43} t_3 + a_{44} t_4 + a_{45} t_5 \\
t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 1 \\
t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0,\ t_3 \geq 0,\ t_4 \geq 0,\ t_5 \geq 0
\end{gathered} \tag{5}$$

Si de los vértices dados, los cuatro primeros representan los vértices del tetraedro oblicuo, buscar una línea ortogonal a dicho tetraedro equivale a encontrar una línea que sea simultáneamente ortogonal a cada uno de los vectores que representan a los vértices; esto equivale a encontrar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$
\begin{aligned}
a_{11}\, w + a_{21}\, x + a_{31}\, y + a_{41}\, z &= 0\\
a_{12}\, w + a_{22}\, x + a_{32}\, y + a_{42}\, z &= 0\\
a_{13}\, w + a_{23}\, x + a_{33}\, y + a_{43}\, z &= 0\\
a_{14}\, w + a_{24}\, x + a_{34}\, y + a_{44}\, z &= 0
\end{aligned}
$$

Nótese que se han invertido los índices de las a_{ij} en los coeficientes porque se está utilizando parte de la transpuesta de la matriz de coeficientes de la ecuación anterior. Aunque a primera vista parecería que la única solución del sistema homogéneo sería la solución trivial (0, 0, 0, 0), la realidad de las cosas es que la matriz de la ecuación debe ser singular pues, al cortarle la esquina al hipercubo para formar el simplejo, los cuatro vértices deben quedar precisamente en un hiperplano tridimensional (hay que recordar que para el caso tridimensional en que le quitamos un pedazo a un cubo, los tres vértices del triángulo oblicuo son coplanares, y lo análogo sucede al lograr el triángulo rectángulo, pues al cortarle al cuadrado un pedazo, los vértices son colineales), por lo que los cuatro vectores deben ser linealmente dependientes, lo que implica una matriz singular y la existencia de una solución con un parámetro independiente, es decir, un subespacio unidimensional que pasa por el origen (debido a que la solución incluye la trivial). Conocida la expresión de la línea ortogonal, que se puede escribir

$$
\begin{aligned}
w &= t\, b_1\\
x &= t\, b_2\\
y &= t\, b_3\\
z &= t\, b_4
\end{aligned}
\tag{6}
$$

donde los números b_1, b_2, b_3 y b_4 son números fijos y t puede tomar un valor arbitrario.

Con las ecuaciones (6) y las ecuaciones (5) a las que se elimina el término donde aparece t_5, se pueden eliminar w, x, y, z y dejar un sistema de cinco ecuaciones en las incógnitas t, t_1, t_2, t_3, t_4. (Las desigualdades se pueden ignorar, toda vez que estamos seguros de que el punto donde la recta ortogonal al tetraedro incide con el mismo satisface las desigualdades.) Determinadas las t de la ecuación (6) (la solución debe ser única), podemos calcular el punto de intersección d que, al combinarlo con los tríos de puntos (a_1, a_2, a_3), (a_1, a_2, a_4), (a_1, a_3, a_4) y (a_2, a_3, a_4), forma cuatro tetraedros cuyas hiperáreas (volúmenes por estar en el espacio de tres dimensiones) supondremos que valen A, B, C y D. Puesto que los cuatro tetraedros están en el mismo hiperplano del tetraedro cuyos vértices son (a_1, a_2, a_3, a_4), cada uno de ellos es ortogonal a la recta descrita por la ecuación

(6). Por otra parte, los tetraedros que están sobre los hiperplanos coordenados $w - x - y$, $w - x - z$, $w - y - z$, $x - y - z$ y cuyos vértices son respectivamente (a_1, a_2, a_3, a_5), (a_1, a_2, a_4, a_5), (a_1, a_3, a_4, a_5), (a_2, a_3, a_4, a_5) tienen hiperáreas que son iguales al hiperárea del tetraedro (oblicuo) de vértices (a_1, a_2, a_3, a_4), proyectada sobre cada uno de los hiperplanos coordenados.

Como en tres dimensiones, la proyección ortogonal de una región inmersa en un hiperplano sobre un segundo hiperplano se encuentra multiplicando la medida de la región por el coseno del ángulo entre los vectores normales a los hiperplanos. La definición del coseno entre dos vectores que pasan por el origen se apoya en el producto interno entre los vectores. Definimos el producto interno entre los vectores $g = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ y $h = (h_1, h_2, h_3, h_4)$ por medio de la expresión

$$[g, h] = g_1\ h_1 + g_2\ h_2 + g_3\ h_3 + g_4\ h_4$$

y el coseno del ángulo entre los vectores lo definimos por medio de la expresión (Hadley, 1962, p. 40):

$$\cos (g, h) = [g, h]\ /\ |\ g\ |\ |\ h\ |$$

donde los cuadrados de las magnitudes $|\ g\ |^2$ y $|\ h\ |^2$ de los vectores estan dadas por

$$|\ g\ |^2 = [g, g],\ |\ h\ |^2 = [h, h]$$

En realidad, lo importante es que los cosenos de los ángulos con los que se proyecta el hiperárea del tetraedro oblicuo sobre los hiperplanos coordenados: $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ y $\cos \delta$ son los mismos cosenos de los ángulos con los que se proyectan los tetraedros que están sobre los hiperplanos coordenados (los que forman el ángulo tetrarrectángulo) sobre el hiperplano oblicuo. *Ésta es la observación crucial de la demostración*. Como la suma de las hiperáreas de los cuatro tetraedros en los que se dividió el tetraedro oblicuo dan el hiperárea de dicho tetraedro, igual que en el caso de tres dimensiones, podemos escribir, llamando a estas hiperáreas (A'), (B'), (C'), (D'), y (E) al hiperárea del tetraedro oblicuo

$$(E) = (A') + (B') + (C') + (D')$$
$$(A') = (A) \cos \alpha,\ (B') = (B) \cos \beta,\ (C') = (C) \cos \gamma,\ (D') = (D) \cos \delta$$
$$(A) = (E) \cos \alpha,\ (B) = (E) \cos \beta,\ (C) = (E) \cos \gamma,\ (D) = (E) \cos \delta$$

de donde

$$(E) = (A)^2/(E) + (B)^2/(E) + (C)^2/(E) + (D)^2/(E)$$

y, finalmente, multiplicando por (E) ambos miembros se llega a

$$(E)^2 = (A)^2 + (B)^2 + (C)^2 + (D)^2.$$

Esta última expresión la podemos llamar, con todo derecho, *el teorema extendido de Pitágoras en cuatro dimensiones para el simplejo$_4$ tetrarrectángulo*. Debe quedar claro que el argumento se puede extender sin dificultad a más dimensiones.

EJEMPLO NUMÉRICO SENCILLO DEL TEOREMA EXTENDIDO DE PITÁGORAS PARA CUATRO DIMENSIONES

Un simplejo en cuatro dimensiones tiene cinco vértices. Si el simplejo es tetrarrectángulo se pueden hacer coincidir las caras simpliciales que forman el ángulo tetraédrico tetrarrectángulo con los cuatro hiperplanos coordenados $w - x - y$, $w - x - z$, $w - y - z$, y $x - y - z$, y el vértice correspondiente con el origen de las coordenadas a las cuales hemos llamado w, x, y, z. Para evitar cálculos aritméticos laboriosos, consideraremos un simplejo muy sencillo, cuyos cinco vértices están dados por $V_w = (1, 0, 0, 0)'$, $V_x = (0, 1, 0, 0)'$, $V_y = (0, 0, 1, 0)'$, $V_z = (0, 0, 0, 1)'$ y $V_0 = (0, 0, 0, 0)'$.

Por estar en un espacio de cuatro dimensiones, las caras simpliciales en la frontera del simplejo bajo consideración son tetraedros, cada uno con cuatro vértices y las hiperáreas (volúmenes) elevadas al cuadrado y sumadas deben ser iguales al cuadrado del hiperárea (volumen) del tetraedro oblicuo que se opone al vértice que está en el origen.

A continuación, procedemos a calcular la hiperárea del tetraedro sobre el hiperplano coordenado $w - x - y$. El tetraedro tiene como vértices V_w, V_x, V_y y V_0, como se muestra en la figura 6. Como la hiperárea es el volumen del tetraedro, el cual está en tres dimensiones, estamos en terreno familiar. Comenzamos por considerar como base el triángulo rectángulo que está en el plano $w - x$, cuyos vértices son V_w, V_x, V_0. Este triángulo tiene su ángulo recto en el origen y las longitudes de sus dos catetos son unitarias. Por lo tanto, su área es 1/2. La altura del tetraedro (la cual se mide sobre el eje y) es uno. Por lo tanto, el volumen (hiperárea) del tetraedro (que es una pirámide triangular) es (1/2)(1/3) = 1/6.

Por la perfecta simetría del simplejo, los otros tres tetraedros sobre los otros tres hiperplanos coordenados deben tener el mismo volumen (hiperárea). Si sumamos los cuadrados de los volúmenes de los cuatro tetraedros el resultado es 4 (1/36) = 1/9.

Procedemos ahora a calcular el volumen del tetraedro oblicuo, el cual tiene como vértices V_w, V_x, V_y y V_z. La distancia entre cada uno de los seis pares de vértices es $(2)^{1/2}$. Como todas las aristas del tetraedro tienen la misma longitud, se trata de un tetraedro regular. Su volumen en función de un lado es (Welchons, Crickenberger y Pearson, 1965, p. 334)

$$v = \frac{e^3(2)^{1/2}}{12}$$

donde e es la longitud del lado del tetraedro regular. Poniendo el valor $e = (2)^{1/2}$ se obtiene

$$V = 1/3 \text{ y } V^2 = 1/9$$

por lo que se cumple con el teorema extendido de Pitágoras para este caso.

Para ilustrar cómo se manejan cuatro dimensiones para localizar el punto de cruce de la línea que parte del origen de las coordenadas y es ortogonal al tetraedro oblicuo, determinaremos dicho punto. El hiperplano tridimensional en el que está el tetraedro oblicuo contiene los siguientes puntos, que son vértices del tetraedro:

$$V_w = (1, 0, 0, 0)', V_x = (0, 1, 0, 0)', V_y = (0, 0, 1, 0)', V_z = (0, 0, 0, 1)'$$

Si tomamos una combinación lineal con coeficientes t_1, t_2, t_3, t_4, generaremos el hiperplano y podremos expresar cualquier punto (w, x, y, z) del mismo.

$$(w, x, y, z)' = (t_1, t_2, t_3, 1 - t_1 - t_2 - t_3)'$$

El vector ortogonal al hiperplano debe ser ortogonal a los vectores (1, 0, 0, –1), (0, 1, 0, –1), (0, 0, 1, –1), por lo que lo podemos escribir

$$(w, x, y, z)\,(1, 0, 0, -1)' = w - z = 0, \text{ de donde } w = z$$
$$(w, x, y, z)\,(0, 1, 0, -1)' = x - z = 0, \text{ de donde } x = z$$
$$(w, x, y, z)\,(0, 0, 1, -1)' = y - z = 0, \text{ de donde } y = z$$

donde z es un número arbitrario al cual llamaremos t_4. Un punto arbitrario de la recta ortogonal tendrá coordenadas $t_4\,(1, 1, 1, 1)$. Igualando el punto arbitrario del hiperplano y de la recta ortogonal tenemos

$(t_1, t_2, t_3, 1 - t_1 - t_2 - t_3)' = t_4\,(1, 1, 1, 1)'$ que equivale a $t_1 = t_4$, $t_2 = t_4$, $t_3 = t_4$, $1 - t_1 - t_2 - t_3 = t_4$. De donde $4\,t_4 = 1$, por lo que $t_4 = 1/4$, y, finalmente,

$$(w, x, y, z)' = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)'$$

es el punto buscado.

Observación: por la simetría del tetraedro analizado, el punto de cruce coincide con el centro de masa del tetraedro. Si se analiza la estructura del álgebra que se requirió, se puede *conjeturar* que el centro de masa de un simplejo$_4$ quedará a 1/5 de la altura del simplejo (distancia entre su vértice y cara simplicial opuesta). Para el simplejo$_5$ la distancia sería 1/6, ... , y para el simplejo$_n$, sería $1/(n + 1)$; éste sería el término general de la secuencia: *segmento de recta* = 1/2, *triángulo* = 1/3, *tetraedro* = 1/4, . . .

CONCLUSIÓN

El teorema de Pitágoras tiene fama de ser el teorema más importante y famoso de todas las matemáticas (Wylie, Jr., 1964, p. 141; Davis y Hersh, 1981, pp. 147-151). Muchas generalizaciones de conceptos matemáticos están íntimamente relacionadas con dicho teorema. Algunos ejemplos son los conceptos matemáticos de "punto" que, aunque proviene de la geometría, se ha generalizado en el álgebra, en las funciones de varias variables, en las ecuaciones diferenciales, en el análisis funcional, en el cálculo operacional. En muchas de estas extensiones se definen las coordenadas como proyecciones sobre vectores unitarios ortogonales y se define la longitud de los vectores y la distancia entre puntos (que en algunos casos son funciones) por medio de generalizaciones del teorema de Pitágoras, que en muchos casos se toma como postulado. Debido a lo anterior, un análisis que sirva para aclarar el significado del teorema de Pitágoras y sus posibles extensiones tiene el potencial de enriquecer el entendimiento de los estudiantes en varias áreas de las matemáticas. Por esta razón, invertir tiempo y esfuerzo en profundizar en dicho entendimiento será, en general, un tiempo y esfuerzo bien invertido.

En este artículo se utiliza la analogía para demostrar un teorema sobre áreas en un tetraedro trirrectángulo utilizando ideas análogas a las que se usan en una de las tantas demostraciones del teorema de Pitágoras. Las ideas principales tienen que ver con proyecciones ortogonales que se pueden definir tanto para puntos, como para líneas, áreas bidimensionales, volúmenes y en general hiperáreas. Al utilizar el concepto de proyección, se vislumbra la posible generalización de la extensión del teorema a cuerpos geométricos en espacios de más dimensiones que tres. La generalización se hace utilizando el álgebra lineal, en la que se tiene toda una teoría *n*-dimensional sobre la cual nos podemos apoyar para darle precisión a los conceptos, pese a la dificultad de visualizarlos físicamente. Los conceptos de punto, línea, plano (e hiperplano), arista, cara, longitud, distancia, área (e hiperárea), ángulo, proyección, ortogonalidad se pueden manejar con facilidad usando álgebra lineal dentro de la geometría analítica. Se relacionan conceptos algebraicos como dependencia lineal, combinación lineal y combinación lineal convexa, rango de una matriz y otros, para guiar la intuición. Así, se concluye que, en un espacio de cuatro dimensiones, la intersección de un tetraedro con una línea es un punto y no un segmento de línea, como sucedería en tres dimensiones, debido a que el tetraedro en cuatro dimensiones es una porción de hiperplano que involucra una restricción lineal con cuatro variables y la línea involucra tres restricciones lineales, por lo que la intersección implica restringir 1 + 3 dimensiones de las cuatro disponibles, de lo que resulta que la intersección tiene cero dimensiones libres y corresponde a un punto. La situación descrita corresponde en tres dimensiones a la intersección de un plano (una restricción lineal) con una línea (dos restricciones lineales) las cuales agotan la dimensionalidad (3), por lo que el resultado de la intersección es un punto, lo que contrasta con el caso de la intersección de un tetraedro (ninguna restricción lineal en un espacio de tres dimensiones) con una recta (dos restricciones lineales) que produce un pedazo de línea. (En la anterior discusión ignoramos las restricciones que producen las desigualdades que, al convertirse en igualdades añadiendo una variable de holgura, no implican una restricción en dimensionalidad (Hadley, 1962, p. 72). Todas estas consideraciones se manejan automáticamente en el contexto del álgebra lineal, programación lineal y la teoría de ecuaciones lineales simultáneas.

Además, en el artículo se trata muy brevemente un caso de dualidad, en el que se señala que el tetraedro tiene un dual que es un polígono tridimensional que corre sobre las aristas de un ortoedro. El polígono obedece la ley del paralelogramo de los vectores, por lo que las áreas se pueden representar por medio de vectores ortogonales a los planos de las áreas, y el teorema extendido de Pitágoras, motivo principal de este artículo, se puede interpretar como un teorema entre líneas (aristas y diagonal máxima del ortoedro) y cuadrados de longitudes de líneas. Esta dualidad se puede llevar a *n* dimensiones.

AGRADECIMIENTO

El autor agradece a su colega, el matemático Mario Rodríguez Green, de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, así como a los revisores anónimos, por haber leído el manuscrito y señalado algunas fallas. Las fallas que persisten son, naturalmente, responsabilidad del autor.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Baldor, J.A.. (1983), *Geometría plana del espacio y trigonometría,* México, Cultural.

Brown, S.I. y M.I. Walter (1990), *The Art of Problem Posing,* 2a. ed., Nueva York, Lawrence Erlbaum Publishers.

Colerus, E. (1948), *Desde el punto a la cuarta dimensión. Una geometría para todos,* 2a. ed., Barcelona, Labor.

Courant, R. y H. Robbins (1969), *What Is Mathematics?,* Londres, Oxford University Press.

Davis, P.J. y R. Hersh (1980), *The Mathematical Experience,* Boston, Birkhâuser.

Flores, A. (1992), "La feria de Pitágoras", *Educación Matemática,* (4) 2, pp. 62-78.

Gass, S.I. (1966), *Programación lineal-métodos y aplicaciones,* México, Continental.

Hadley, G. (1962), *Linear Programming,* Reading, MA, Addison-Wesley.

Jurgensen, R.C., A.J. Donnelly y M.P. Dolciani (1963), *Modern Geometry,* Boston, Houghton Mifflin.

Larson, R.E. y R.P. Hostetler (1989), *Cálculo y geometría analítica,* 3ª ed., México, McGraw-Hill.

Moise, E.E. y F.L. Downs (1975), *Geometry,* Menlo Park, CA, Addison-Wesley.

Polya, G. (1954), *Mathematics and Plausible Reasoning. Vol. I: Induction and Analogy in Mathematics. Vol. II: Patterns of Plausible Reasoning,* Princeton, N.J., Princeton University Press.

Polya, G. (1965), *Cómo plantear y resolver problemas,* México, Trillas.
—— (1981), *Mathematical Discovery-On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving* (vols. *I* y *II*), Nueva York, John Wiley & Sons.
Seely, F. B. y N. E. Ensign (1948), *Mecánica analítica para ingenieros,* México, Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.
Taylor, A. E. (1958), *Introduction to Functional Analysis,* Nueva York, John Wiley & Sons.
Thomas, G. B. (1960), *Calculus and Analytic Geometry,* Reading, MA, Addison-Wesley.
Welchons, M.A., W.R. Krickenberger y H.R. Pearson (1965), *Solid Geometry,* Boston, MA, Ginn and Company.
Winston, W. L. (1991), *Investigación de operaciones-aplicaciones y algoritmos,* México, Iberoamérica.
Wylie, Jr., C. R. (1964), *Foundations of Geometry,* Nueva York, McGraw-Hill.

DATOS DEL AUTOR

Marco A. Murray-Lasso
Departamento de Ingeniería de Sistemas, Unidad de Enseñanza Auxiliada por Computadora, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México
walpole@prodigy.net.mx

Política editorial

La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA es una publicación internacional arbitrada, que ofrece un foro interdisciplinario para la presentación y discusión de ideas, conceptos y modelos que puedan ejercer una influencia profunda en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La revista aparece tres veces al año y publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática.

OBJETIVOS

EDUCACIÓN MATEMÁTICA se propone:

- Actuar como un foro de discusión internacional en lengua española en el que se discutan las problemáticas asociadas a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- Facilitar la comunicación entre investigadores y maestros de matemáticas.
- Promover la investigación en educación matemática.
- Alentar acercamientos multidisciplinarios.
- Buscar una comprensión profunda de la naturaleza, teoría y práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

LECTORES

EDUCACIÓN MATEMÁTICA está dirigida a investigadores y teóricos de la educación matemática, maestros en formación y en ejercicio, estudiantes de posgrado, diseñadores, evaluadores, directivos, administradores y cuadros técnicos vinculados con la educación matemática.

TEMÁTICAS

El contenido de EDUCACIÓN MATEMÁTICA se centra en los siguientes temas:

1. Investigaciones sobre educación matemática en el nivel básico
   - 1.1. Aprendizaje, cognición y desempeño de los alumnos
   - 1.2. Conocimientos, concepciones, formación y prácticas de los maestros
   - 1.3. Saber matemático
     - 1.3.1. Aritmética
     - 13.2. Geometría
     - 1.3.3. Probabilidad y estadística
     - 13.4. Preálgebra y álgebra
     - 1.3.5. Trigonometría
   - 1.4. Materiales, textos y otros recursos de apoyo a la enseñanza
   - 1.5. Diseño, desarrollo y evaluación curricular
   - 1.6. Uso de la tecnología
   - 1.7. Interacciones en el aula
   - 1.8. Evaluación
   - 1.9 Enseñanza experimental
   - 1.10. Educación de adultos
2. Investigaciones sobre educación matemática en el nivel preuniversitario
   - 2.1. Aprendizaje, cognición y desempeño de los alumnos
   - 2.2. Conocimientos, concepciones, formación y prácticas de los maestros
   - 2.3. Saber matemático
     - 2.3.1. Álgebra
     - 2.3.2. Geometría
     - 2.3.3. Probabilidad y estadística
     - 2.3.4. Cálculo
     - 2.3.5. Razonamiento matemático
   - 2.4. Materiales, textos y otros recursos de apoyo a la enseñanza
   - 2.5. Diseño, desarrollo y evaluación curricular
   - 2.6. Uso de la tecnología
   - 2.7. Interacción en el aula
   - 2.8. Evaluación
   - 2.9. Enseñanza experimental

3. Investigaciones sobre educación matemática en el nivel universitario
   3.1. Aprendizaje, cognición y desempeño de los alumnos
   3.2. Conocimientos, concepciones, formación y prácticas de los maestros
   3.3. Saber matemático
      3.3.1. Álgebra lineal
      3.3.2. Geometría
      3.3.3. Probabilidad y estadística
      3.3.4. Cálculo de una o varias variables
      3.3.5. Análisis
      3.3.6. Ecuaciones diferenciales
      3.3.7. Variable compleja
   3.4. Materiales, textos y otros recursos de apoyo a la enseñanza
   3.5. Diseño, desarrollo y evaluación curricular
   3.6. Uso de la tecnología
   3.7. Interacciones en el aula
   3.8. Diagnósticos y evaluación
   3.9. Enseñanza experimental
4. Estudios sobre la historia y la epistemología de las matemáticas y de la educación matemática
   4.1. Usos de la historia en la enseñanza y en la formación de maestros
   4.2. Análisis histórico y epistemológico de conceptos y procesos matemáticos
   4.3. Análisis de textos y acercamientos didácticos en las distintas épocas
5. Estudios sobre el sistema educativo
   5.1. Políticas
   5.2. Instituciones
   5.3. Asociaciones
   5.4. Evaluación
6. Estudios sobre la investigación en educación matemática
   6.1. Teorías y marcos referenciales
   6.2. Métodos de investigación
   6.3. Validación
   6.4. Instituciones y organizaciones
   6.5. Historia

Serán considerados para su publicación los artículos sobre estos temas que no excedan las 30 cuartillas a doble espacio (alrededor de 10 000 palabras), incluidas tablas, gráficas y figuras.

Los editores de Educación Matemática considerarán sugerencias para la publicación de números especiales monotemáticos.

Los autores interesados en publicar sus trabajos en Educación Matemática deberán enviar sus manuscritos por correo electrónico de acuerdo con las siguientes directrices.

GUÍA PARA AUTORES

La portada debe contener el título del artículo, nombre, filiación, domicilio postal completo, teléfono, fax y correo electrónico de todos los autores, tema del artículo y fecha de envío.

La primera página del artículo debe omitir nombre y filiación de los autores pero incluir el título y una versión abreviada del mismo; un resumen en español de entre 100 y 150 palabras; la versión en inglés o francés del resumen, y un mínimo de 5 palabras clave.

El resumen debe sintetizar claramente los objetivos y contenido del manuscrito. Las notas y pies de página que contengan información sobre la identidad de los autores deberán ubicarse en páginas separadas. Los autores deben esforzarse para evitar que el manuscrito contenga indicios que permitan conocer su identidad.

Los autores deben confirmar que el manuscrito contiene material original e inédito y que no ha sido enviado para publicación a ninguna otra revista. Es responsabilidad de los autores informar al Comité Editorial de cualquier trabajo similar que haya sido publicado o esté en vías de serlo. Los manuscritos y la portada deben ser enviados electrónicamente como documentos en Microsoft Word o en formato RTF (nombrando el archivo con los apellidos del primer autor) a:

Guillermina Waldegg Casanova
Departamento de Investigación
Centro de Investigación y Estudios Avanzados
Tenorios 235, Delegación Tlalpan,
México, D.F., 14330
Tel. 52 + (55) 5483-2800
Fax. 52 + (55) 5483-2831
Correo electrónico: gwaldegg@mail.cinvestav.mx

Para mayores detalles, consúltese la **Guía del Autor** en www.santillana.com.mx

PROCESO DE ARBITRAJE

Todos los manuscritos recibidos están sujetos al siguiente proceso:

El Comité Editorial hace una primera revisión del manuscrito para verificar si cumple los requisitos básicos para publicarse en EDUCACIÓN MATEMÁTICA. Esta revisión interna toma entre 1 y 3 semanas, en este término se le notificará por correo electrónico al autor si su manuscrito será enviado a evaluadores externos. En el caso en el que el manuscrito no se considere adecuado para ser evaluado externamente, se le darán las razones al autor.

Las contribuciones que cumplan los requisitos básicos serán enviadas para un arbitraje ciego de 2 o 3 expertos en el tema. Este segundo proceso de revisión toma entre 2 y 3 meses. Después de este periodo, el autor recibirá los comentarios de los revisores y se le notificará la decisión del Comité Editorial (aceptado, aceptado con cambios menores, propuesta de cambios mayores y nuevo arbitraje, y rechazado). El autor deberá contestar si está de acuerdo con los cambios propuestos (si éste fuera el caso), comprometiéndose a enviar una versión revisada, que incluya una relación de los cambios efectuados, en un periodo no mayor de 3 meses.

Para mayores detalles, consúltese la **Guía de Arbitraje** en www.santillana.com.mx

NOTAS DE CLASE

EDUCACIÓN MATEMÁTICA considera para su publicación un número limitado de notas de clase, consistentes en propuestas originales de presentación de un tema, acercamientos novedosos que hayan sido probados en clase, lecciones, prácticas, ejercicios y, en general, cualquier producto de la experiencia en el aula que el profesor considere valioso compartir con sus colegas, siempre y cuando se incluya el soporte bibliográfico correspondiente. Las notas de clase no deberán exceder las 10 cuartillas a doble espacio (aproximadamente 4 000 palabras), incluyendo tablas, gráficas y figuras, y deberán enviarse en formato Word o RTF con los mismos lineamientos de presentación que los artículos. Las notas de clase se someten a un proceso de arbitraje interno y su contenido matemático y originalidad es revisado por un árbitro externo.

RESEÑAS

EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica también reseñas de libros especializados, libros de texto, software y tesis de posgrado relacionados con las temáticas de la revista. Estas reseñas no excederán las 5 cuartillas a doble espacio (aproximadamente 2 000 palabras) y deberán enviarse igualmente en formato Word o RTF. Las reseñas deben incluir la ficha completa del texto o software reseñado; el nombre, la filiación y el correo electrónico del autor; en el caso de las reseñas de tesis de posgrado, se incluirá también el grado, institución, director de tesis y fecha de defensa.