Versión electrónica ISSN: 2448-8089

Contenido

RESEÑAS

De libros

Dirección editorial: Antonio Moreno Paniagua
Editora responsable: Guillermina Waldegg Casanova
Cuidado editorial: Susana Moreno Parada
Corrección de estilo: Ofelia Arruti Hernández
Diagramación: Moisés Arroyo Hernández
Fotomecánica electrónica: Gabriel Miranda Barrón

Certificado de reserva de derechos al uso exclusivo: 04-2002-111517075100-102

Certificado de licitud de contenido: 10070
Certificado de licitud de título: 12499

Fecha de edición: diciembre de 2003.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana.

Impreso en México/Printed in Mexico.

RESEÑAS

De libros

Dirección editorial: Antonio Moreno Paniagua
Editora responsable: Guillermina Waldegg Casanova
Cuidado editorial: Susana Moreno Parada
Corrección de estilo: Ofelia Arruti Hernández
Diagramación: Moisés Arroyo Hernández
Fotomecánica electrónica: Gabriel Miranda Barrón

Certificado de reserva de derechos al uso exclusivo:
04-2002-111517075100-102

Certificado de licitud de contenido: 10070
Certificado de licitud de título: 12499

Fecha de edición: diciembre de 2003.

Miembro de la Cámara Nacional
de la Industria Editorial Mexicana.

Impreso en México/Printed in Mexico.

Editorial

En los últimos años, se amplió la base de quienes se dedican a la Educación Matemática y se han incrementado las aportaciones en este campo. Sin duda, a medida que han avanzado las investigaciones y hallazgos, se ha logrado configurar una corriente de pensamiento que reconoce mayor complejidad en los problemas de esta área y que cada vez es más pertinente en el tratamiento de los problemas educativos. Esta perspectiva ha rebasado tendencias apoyadas exclusivamente en la pericia con los contenidos disciplinarios. La obviedad de afirmaciones como: "Para enseñar matemáticas, solamente basta saber matemáticas", verdad de perogrullo, ha dejado de ser "la solución" a los problemas de la educación matemática.

Las áreas de acción para la investigación en educación matemática se han incrementado horizontal y verticalmente. En efecto, en un sentido horizontal, se han incorporado nuevas temáticas o se les ha prestado mayor atención a temas poco trabajados; en un sentido vertical, se han logrado mayores niveles de profundización en estudios recientes. Muestra de ello es el número que el lector tiene entre manos.

Al leer los artículos incluidos se encontrarán aportaciones interesantes, tanto por la temática abordada como por el enfoque metodológico. Además, encontramos en los artículos informaciones o conjeturas que motivarán indagaciones o estudios acuciosos de varios aspectos de la educación matemática.

Por ejemplo, el informe elaborado a partir de las concepciones sobre el promedio arroja datos interesantes e inquietantes, como aquellos sobre el mejor desempeño en estudiantes de secundaria que el de estudiantes de niveles superiores.

Otro tema sin duda atrayente es el que se refiere al papel del "sentido" en el proceso de resolución de problemas, la atención a los significados que se elaboran en el proceso de resolución de problemas, el cual invita a explorar con mayor profundidad un aspecto no trabajado suficientemente por atender a las estrategias o a las herramientas conceptuales que se emplean en dichos procesos.

La relación establecida entre "capacidad espacial" y diversos aspectos de la geometría resulta pertinente por el aspecto formativo de esta rama de la matemática muy descuidada en la enseñanza de los niveles medios, carencia no superada que participa en el deterioro de la visualización matemática en los estudiantes.

El artículo anterior sirve de marco para ampliar la discusión sobre la imaginación espacial que se desarrolla en otra de las aportaciones incluidas, la medición de habilidades de imaginación espacial traducidas a ítems de un test resulta de interés no sólo para el investigador, sino también para el maestro que siempre se ocupa de encontrar formas de enseñanza novedosas o que incluyan aspectos que se han pasado por alto.

Los aspectos geométricos se llevan más lejos al abordar la problemática de cuadratura de curvas y la forma de manejar estas situaciones a partir del uso de software que permite ampliar la visualización y ensayar ampliamente las intuiciones que se logran en el trabajo de casos específicos en clase.

Los maestros y los estudiantes son también incorporados en la discusión sobre la pertinencia de una formación matemática o el manejo de estrategias para la enseñanza apoyadas en ejercicios o problemas.

En fin, temas múltiples y sugerentes que invitan a conocer más de diversos aspectos y nos hacen constar una vez más que la educación matemática, además de estar en la búsqueda de un estatus en las disciplinas científicas, se ha vuelto más compleja y ha ampliado sus horizontes, no parece estar acotada ni mucho menos suficientemente explorada.

El Comité Editorial

Un estudio sobre el promedio: concepciones y dificultades en dos niveles educativos

Simón Mochón y María Margarita Tlachy Anell

Resumen: En este artículo se presentan los resultados de un cuestionario y las entrevistas subsecuentes aplicados a dos grupos de estudiantes de diferentes niveles (tercero de secundaria y primer año del nivel profesional) sobre el concepto y cálculo del promedio. El promedio es un concepto que se aplica en circunstancias muy variadas con los datos presentados en diferentes formatos, de lo cual derivan sus dificultades. En general se observó que ambos grupos tuvieron un desempeño deficiente, con una mejora del grupo del nivel alto. Sin embargo, se encontraron situaciones en las que los estudiantes de secundaria tienen mejores estrategias de solución. Se muestra también que los estudiantes de este nivel ya tienen muchas intuiciones desarrolladas sobre este concepto en las cuales se puede basar una enseñanza más efectiva.

Palabras clave: Promedio, concepciones, dificultades, estudio, estudiantes.

Abstract: In this article we present the results of a questionnaire and subsequent interviews applied to two groups of students of different levels (one of middle high school and the other of college level) about the concept and computation of the average. The average is a concept that is applied to many circumstances and with data presented in different formats, which make it difficult. We observed in general a low performance of the two groups, with some improvement of the higher-level students. However, we found instances in which the lower level group has better strategies of solution. We show also that the students of this level have lots of intuitions about this concept in which it can be based a more effective teaching.

Keywords: Average, concepts, difficulties, study, students.

Fecha de recepción: agosto de 2002.

INTRODUCCIÓN

El promedio aritmético es un concepto muy importante que se usa frecuentemente en la vida cotidiana para dar un valor representativo sobre registros de datos variados: calificaciones, encuestas, censos de población, salarios, velocidades, etc. El promedio se encuentra también en varias disciplinas educativas como la física, la medicina, la sociología, etc. y está inmerso en la estadística como una idea fundamental que aparece reiteradamente.

Los temas de tratamiento de la información y de estadística están contenidos en el programa de estudios de México desde los últimos grados del nivel básico y hasta los niveles profesionales. Sin embargo, en la práctica docente se deja muchas veces de lado. En países europeos, la probabilidad y la estadística tienen un tratamiento más integral dentro del currículum de la enseñanza básica, media y superior.

De acuerdo con Shaughnessy (1992), los estudiantes entran en una sociedad donde el uso de los datos y las gráficas para comunicar información e influir en decisiones es creciente y, por tanto, la investigación en la enseñanza de la estadística y la probabilidad es particularmente importante.

Así, algunas preguntas que sería importante responder son las siguientes:

- ¿Qué interpretación dan los estudiantes de diferentes niveles educativos en México a la información proporcionada mediante un promedio en diferentes instancias?
- ¿Qué deficiencias, en este concepto y su aplicación, se pueden encontrar en los diferentes niveles educativos?
- Según estos resultados, ¿cómo se pueden mejorar las nociones de los estudiantes sobre el promedio?

Puesto que existen varias medidas de tendencia central como la moda, la mediana y la media, aquí nos referiremos al promedio exclusivamente como el promedio aritmético o media aritmética. Así, tomaremos al promedio como:

"La suma de todos los datos dividida entre el número total de datos"

Como se discutirá aquí, aun cuando el promedio parece ser un concepto sencillo, la variedad de situaciones en las que surge y las distintas formas en las que se pueden organizar los datos lo hacen bastante más complejo.

Diversas investigaciones han mostrado que el promedio se utiliza como una regla de cálculo y se dan diferentes interpretaciones a su significado.

Con estas ideas en mente, se realizó una investigación (explicada en este artículo), cuyos objetivos principales son los siguientes:

- Averiguar las concepciones de los estudiantes de diferentes niveles educativos sobre el promedio.
- Observar las estrategias que utilizan estos estudiantes al calcular el promedio dada una serie de datos en distintos formatos.

Para este propósito, se diseñó y aplicó un cuestionario (véase el anexo) a dos grupos de estudiantes de diferentes niveles educativos. Posteriormente se realizaron entrevistas para profundizar sobre las respuestas dadas a este cuestionario.

MARCO TEÓRICO

En un artículo sobre proporcionalidad (Flores, 1995), el autor describe la diversidad de circunstancias en las que aparece el promedio. En este artículo cita dos maneras de calcular el promedio, las cuales se dan a continuación.

El promedio se puede obtener de dos maneras matemáticamente equivalentes, dependiendo de cómo están presentados los datos. Para una lista de datos, $x_1, x_2, ..., x_n$, el promedio se expresa como:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Si por otro lado, los datos están enumerados con sus frecuencias absolutas respectivas ($f_1, f_2, ..., f_n$), el promedio se expresa de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_n f_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n}$$

Este procedimiento es conocido como el algoritmo del promedio ponderado (el número de veces que aparece cada dato es su "peso" o su ponderación).

Por ejemplo, si un profesor realizó cuatro exámenes durante un mes y desea contarlos con diferentes "pesos": 10% el primero, 20% los siguientes dos y 50%

el final, y desea obtener el promedio de las calificaciones de sus alumnos, tendrá que realizar un promedio ponderado.

Esta idea de ponderación es más general y aparece en problemas de velocidades, mezclas, etc. Daremos a continuación dos ejemplos sobre esto.

Por ejemplo, si un automóvil viaja a una velocidad de 100 km/h durante 2 horas y después viaja a 40 km/h durante la siguiente hora, su velocidad promedio no será de 70 km/h. El promedio debe realizarse ponderado, usando los tiempos como "pesos". De esta manera, la respuesta correcta será de 80 km/h.

En un segundo ejemplo, si se mezclan dos metales en una razón de 4 a 1 y sus valores monetarios respectivos son diferentes, el valor de la aleación resultará ser un promedio ponderado de los valores de los dos metales.

Otro de los trabajos pertinentes a la presente investigación es un estudio sobre el desarrollo del concepto de promedio aritmético en niños (Strauss y Bichler, 1988). En él se citan siete propiedades fundamentales del promedio, las cuales se enlistan a continuación (en cada una de ellas hemos incluido un ejemplo a manera de explicación):

a. El promedio se localiza entre los valores extremos.
   Por ejemplo, el promedio de las edades de un grupo de personas no puede ser mayor que la edad de la persona más adulta ni ser menor que la edad de la persona más joven.
b. La suma de las desviaciones desde el promedio es cero.
   Por ejemplo, el promedio de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 es 3.5 y, por tanto, tenemos que:
   $(3.5 - 1) + (3.5 - 2) + (3.5 - 3) + (3.5 - 4) + (3.5 - 5) + (3.5 - 6) = 0$
c. El promedio es afectado por valores diferentes a él.
   Por ejemplo, si el promedio de calificaciones de un estudiante durante 5 años es de 9, cualquier calificación subsecuente diferente de 9 cambiará su promedio.
d. El promedio no es necesariamente igual a uno de los valores que fueron sumados.
   Por ejemplo, el promedio de 1 y 3 es 2. Este valor no forma parte de los datos que fueron promediados.
e. El promedio puede ser una fracción que no tiene contraparte en la realidad física.
   Por ejemplo, el promedio del número de hijos por familia de una población determinada puede ser de 4.7. Este valor decimal no tiene un significado claro dentro de la variable promediada que puede tener sólo valores discretos enteros.

f. Cuando se calcula un promedio, deben ser tomados en cuenta los valores de cero.
   Por ejemplo, al promediar las calificaciones de un grupo de estudiantes en un examen, debemos incluir todos los ceros que haya.
g. El promedio es un valor representativo de los valores que fueron promediados.
   El promedio de los sueldos de las personas en una región determinada es un indicador de alrededor de qué valor se centra esta variable.

Mokros y Russell (1995) investigaron la noción de representatividad del promedio con niños en grados escolares del cuarto al octavo. Encontraron cinco acercamientos diferentes al resolver problemas de promedio, los cuales se dan a continuación con una pequeña explicación:

- Promedio como moda.
  En este enfoque los estudiantes manejan el promedio como el valor modal, es decir, como el valor que ocurre con mayor frecuencia. Muestran también una falta de flexibilidad en la elección de estrategias.
- Promedio como algoritmo.
  Aquí los estudiantes eligen un acercamiento exclusivamente algorítmico para encontrar el promedio, lo cual resulta con frecuencia poco efectivo.
- Promedio como algo razonable.
  En éste, los estudiantes se basan en su experiencia cotidiana y en su intuición para resolver los problemas. Usualmente, estos estudiantes tienen la noción de que el promedio está mas o menos centrado dentro de los datos.
- Promedio como punto medio.
  Estos estudiantes usan el concepto de punto medio en sus construcciones e interpretaciones para definir el promedio. Impera en ellos la idea de una distribución simétrica.
- Promedio como punto matemático de balance.
  En esta noción, que aparece en estudiantes de mayor edad, el promedio es visto como un punto de balance, para el cual, un valor mayor tiene que balancearse con uno menor.

Varios investigadores señalan problemas de comprensión acerca del promedio.

Strauss y Bichler (1988), mediante tareas presentadas a niños de 8 a 14 años de edad, estudiaron la dificultad de cada una de las propiedades mencionadas anteriormente. Estos autores concluyeron que estas propiedades podrían dividirse por su dificultad en dos grupos, siendo las más complejas, las propiedades B (suma de desviaciones = 0), F (ceros en los datos) y G (representatividad del promedio). Estos investigadores sugieren que la instrucción del promedio en el salón de clase se debe realizar en dos tiempos diferentes; uno atendiendo a las propiedades más sencillas y el otro a las propiedades más difíciles.

Otras investigaciones registran que el promedio es utilizado principalmente como una regla de cálculo, sin poderle dar una interpretación al valor obtenido (Gattusso y Mary, 1996; Gattusso, 1997). En estos estudios se registran las concepciones que tienen los estudiantes de diferentes niveles de escolaridad sobre el concepto de promedio. Estos autores concluyen que el promedio no es un concepto fácil de entender.

Por último, Pollatsek, Lima y Well (1981) estudiaron la noción del promedio y el promedio ponderado en estudiantes universitarios. Un problema del tipo usado en este estudio es el siguiente. Puesto que el peso promedio de 6 hombres es de 180 libras y el peso promedio de 4 mujeres es de 125 libras, se preguntó a los estudiantes cuál sería el peso promedio de las 10 personas. Sus resultados indicaron que una gran proporción de los estudiantes no tiene un buen sentido de los promedios ponderados. Estos autores atribuyen estos problemas a la enseñanza de tipo de reglas de cálculo y recetas sin que los estudiantes obtengan una comprensión de los conceptos.

METODOLOGÍA

Se diseñó un cuestionario con diez problemas sobre promedio (véase el anexo), el cual fue aplicado a un grupo de 21 estudiantes de tercer grado de secundaria (Secundaria Diurna núm. 260 de la Ciudad de México) y a un grupo de 31 estudiantes de primer semestre de ingeniería en sistemas computacionales (Escuela Superior de Computación del Instituto Politécnico Nacional). Los dos objetivos buscados eran observar las estrategias de resolución y dificultades de cada uno de estos dos grupos y hacer una comparación de las respuestas entre estos dos diferentes niveles educativos.

Cada problema del cuestionario tenía un objetivo particular, el cual se describe a continuación:

Objetivo problema 1: Averiguar si los estudiantes se dan cuenta de la "Propiedad A" de Strauss y Bichler (el promedio se encuentra entre los valores extremos).
Objetivo problema 2: Averiguar si los estudiantes advierten la "Propiedad C" de Strauss y Bichler (el promedio es afectado por valores diferentes a él).
Objetivo problema 3: Averiguar si los estudiantes aceptan o rechazan la "Propiedad D" de Strauss y Bichler (el promedio no es necesariamente igual a uno de los valores).
Objetivo problema 4: Observar cómo calculan los estudiantes el promedio en un caso simple y averiguar si tienen dificultades con un promedio que no tiene contraparte en la realidad física ("Propiedad E" de Strauss y Bichler).
Objetivo problema 5: Observar si los estudiantes se dan cuenta de que incluir ceros en los datos influye en el valor del promedio ("Propiedad F" de Strauss y Bichler).
Objetivo problema 6: Averiguar qué interpretación le dan los estudiantes al valor del promedio ("Propiedad G" de Strauss y Bichler sobre la representatividad del promedio).
Objetivo problema 7: Observar las estrategias de los estudiantes al calcular el promedio cuando los datos se dan en una tabla de frecuencias (promedio ponderado).
Objetivo problema 8: Observar las estrategias de los estudiantes al calcular el promedio cuando los datos se dan en una lista.
Objetivo problema 9: Investigar si los estudiantes son capaces de calcular el promedio ponderado en una situación de velocidades.
Objetivo problema 10: Averiguar qué entienden los estudiantes por promedio cuando el problema admite varias interpretaciones: "el promedio de las tallas", "el promedio de las ventas", el promedio de las tallas ponderado por el número de ventas", etcétera.

Posteriormente, se aplicó un cuestionario de 6 problemas (problemas 1, 2, 5, 7, 8 y 9 del primer cuestionario, con pequeñas modificaciones) a otro grupo de 22 estudiantes de tercer grado de secundaria de la misma institución que la anterior, con el propósito de seleccionar 6 estudiantes para ser entrevistados acerca de sus respuestas dadas. Se escogieron al azar 3 estudiantes que habían contestado completamente el cuestionario y 3 estudiantes que lo habían contestado parcialmente (no tomamos en cuenta cuestionarios con respuestas escasas, ya que estos estudiantes posiblemente nos darían muy poca información sobre sus métodos de resolución).

Las entrevistas fueron semiestructuradas, con algunas preguntas planeadas de antemano para profundizar sobre las ideas de los estudiantes y preguntas adicionales que dependían de las respuestas de cada estudiante.

RESULTADOS DEL CUESTIONARIO Y SU ANÁLISIS

En esta sección se describen los resultados principales del análisis realizado a las respuestas de los estudiantes al primer cuestionario. Recordamos al lector que este cuestionario se aplicó a dos grupos, uno de 21 estudiantes de tercero de secundaria y otro de 31 estudiantes de nivel superior.

Problema 1

Las respuestas a este problema se clasificaron de la siguiente manera:

Categorías	Respuesta	Núm. de estudiantes 3º sec.	Núm. de estudiantes nivel superior
Calculan el promedio	No es posible	12	15
Suman los datos	No es posible	3	
Explicación sin cálculos	No es posible	3	16
Explicación sin cálculos	Sí es posible	2	

(En este y en los demás problemas no se incluyen los estudiantes que no dieron una respuesta.)

En este problema se esperaba que, *sin hacer cálculos*, el estudiante se diera cuenta de que no es posible el valor dado del promedio (9.20), porque se encuentra fuera del rango de los datos (de 5.30 a 8.10). Ésta es la tercera categoría de el cuadro anterior. Obviamente, si el estudiante realiza los cálculos correspondientes al promedio (primeras dos categorías del cuadro), su valor obtenido lo ayuda a ver que el valor dado no es posible porque no son iguales.

Se puede apreciar que únicamente 3 estudiantes de los 21 de secundaria y sólo 16 estudiantes de los 31 de nivel superior responden que no es posible el valor del promedio *sin necesidad de calcularlo*. Esto indica que la gran mayoría de los estudiantes de secundaria y la mitad del nivel superior no tienen la noción (o no la aplican) de que el promedio debe estar entre los valores extremos.

Se observa también que algunos estudiantes de secundaria suman los datos para calcular el promedio y no dividen entre el número de datos (promedio como una suma).

Problema 2

Para este problema se registrarán solamente las respuestas al inciso (a). Éstas se clasificaron de la siguiente manera:

Categorías	Respuesta	Núm. de estudiantes 3º sec.	Núm. de estudiantes nivel superior
Calculan el promedio	No influyen	6	13
Operaciones variadas	Sin conclusión	4	3
Explicación sin cálculos	No influyen	2	12
Explicación sin cálculos	Sí influyen	3	3

En este problema se dice explícitamente que el promedio de las primeras seis ventas es de $47. Por lo tanto, las siguientes dos ventas de $47 no deben afectar el promedio. Se esperaba entonces que los estudiantes respondieran esto sin realizar ningún cálculo (tercera categoría del cuadro anterior).

Se puede apreciar que únicamente 2 estudiantes de secundaria y sólo 12 estudiantes del nivel superior responden que no influye en el promedio el agregar valores iguales a él, *sin necesidad de calcularlo*. Esto otra vez indica que la gran mayoría de los estudiantes de secundaria y un gran porcentaje del nivel superior no tienen esta noción (o no la aplican) acerca del promedio.

(No se muestran aquí los resultados del problema 3.)

Problema 4

Las respuestas a este problema se clasificaron de la siguiente manera:

Categorías	Núm. de estudiantes 3º sec.	Núm. de estudiantes nivel superior
Uso de la fórmula usual	8	17
Moda (dato más frecuente)	3	12
Suman el número de teléfonos	3	
Cantidad de datos como promedio	2	
Otras	2	1

En este problema se quería averiguar qué procedimientos utilizan los estudiantes para calcular el promedio de una lista sencilla de valores.

El procedimiento más común es calcular el promedio con la fórmula usual, aun cuando buena parte de los estudiantes consideraron el valor más frecuente (la moda) como el promedio.

También se puede observar del cuadro que tres estudiantes de secundaria consideran la suma de los datos como el promedio (esto ya se observó anteriormente). Dos estudiantes más toman al promedio como la cantidad de datos (10 en este caso).

El valor correcto del promedio de los 10 datos dados es de 1.3. Este valor decimal no tiene sentido en la realidad física (número de teléfonos) y por lo tanto debe de interpretarse de alguna manera.

Las interpretaciones del promedio calculado son muy variadas. Algunas se transcriben a continuación con su categoría respectiva:

"El promedio de teléfonos es de 1 en cada casa" (Uso de la fórmula usual)
En este caso, el estudiante no obtiene decimales al dividir

"En la mayoría de las casas hay uno" (Moda)

"13 el número promedio que hay por casa" (Promedio como suma de datos)

"Por cada casa hay de 1 a 3 teléfonos" (Interpretación de rango)

Nótese que, en el caso del uso de la fórmula, la interpretación es más una afirmación del valor. Las otras tres sí dan una explicación de su significado. Sin embargo, no se observó que el valor decimal del promedio fuera interpretado como tal.

Problema 5

Para este problema se mostrarán solamente las respuestas al inciso (b), que es el más interesante. Éstas se clasificaron de la siguiente manera:

Categorías	Respuesta	Núm. de estudiantes 3º sec.	Núm. de estudiantes nivel superior
Calculan el promedio	Sí se altera	4	11
Calculan el promedio	No hay conclusión	4	
Respuesta sin cálculos (sí)	Sí se altera	5	16
Respuesta sin cálculos (no)	No se altera	7	4

En este problema se esperaba que, *sin hacer cálculos*, el estudiante se diera cuenta de que, al agregar un cero a los datos, éste definitivamente altera el valor del promedio. Ésta es la tercera categoría del cuadro anterior. Obviamente, si el estudiante realiza los cálculos correspondientes al promedio (primeras dos categorías del cuadro), notará que el promedio se ha alterado.

Del cuadro anterior se observa que solamente 5 de los estudiantes de secundaria y alrededor de la mitad (16) de los estudiantes de nivel superior afirmaron que sí se alterará el valor del promedio cuando se insertan ceros en los datos. En la otra categoría de respuesta afirmativa (4 estudiantes de secundaria y 11 del nivel superior), los estudiantes calculan el promedio y por tanto su respuesta se basa en su resultado numérico y no en su intuición sobre la respuesta.

Dos de las justificaciones dadas por los estudiantes de secundaria en la tercera categoría son las siguientes:

"Sí, porque ahora tendríamos que repartir los dulces y el promedio variaría"
"Sí, porque hay que aumentar otro niño al resultado"

Problema 6

Cuatro de las respuestas de los estudiantes de secundaria se dan a continuación:

"El promedio de 30.5 representa la capacidad física de los reclutas y da a entender que casi todos tienen una capacidad física aproximada de 30.5"
"Que muchos se acercan más a 30.5"
"Que cada recluta tuvo para hacer ejercicios 30 min."
"Se suman los reclutas y se dividen entre 20"

La primera respuesta muestra la idea de que todos los datos están cercanos al valor del promedio. En general, las respuestas muestran poca idea conceptual de lo que significa el valor del promedio.

La mayoría de los estudiantes del nivel superior manifiestan que el promedio representa que cada recluta tiene la capacidad de hacer 30 minutos de ejercicio (idea de distribución constante). El resto de los estudiantes explican que unos valores se compensan con otros para dar el promedio (punto matemático de balance).

Problema 7

Las respuestas al inciso (a) de este problema se clasificaron de la siguiente manera:

Categorías	Núm. de estudiantes 3º sec.	Núm. de estudiantes nivel superior
Calculan el promedio ponderado	9	21
Dan el valor más frecuente (moda)		5
Cálculos variados	7	4

Recordamos al lector que el objetivo de este problema era observar las estrategias de los estudiantes al calcular el promedio cuando los datos se dan en una tabla de frecuencias y si utilizaban la idea del promedio ponderado, que consiste en utilizar las frecuencias de cada grupo de datos como factores.

Es interesante encontrar que 9 de los estudiantes de secundaria calculan el promedio multiplicando las cantidades del número de hijos por familia por las frecuencias respectivas (número de familias), aun cuando no conocen todavía la fórmula del promedio ponderado. Esto indica de alguna manera que el procedimiento que esta fórmula contiene de manera oculta resulta más o menos natural para una parte significante de los estudiantes.

Entre los cálculos variados, los estudiantes simplemente suman una o ambas columnas y en el segundo caso dividen los resultados entre sí (ya sea 33 entre 6 o 6 entre 33). Este método se asemeja al cálculo simple del promedio cuando se enlistan todos los datos.

Problema 8

Las respuestas a este problema se clasificaron de la siguiente manera:

Categorías	Núm. de estudiantes 3º sec.	Núm. de estudiantes nivel superior
Calculan el promedio ponderado	9	30
Calculan el promedio sumando	4	
Suman sin dividir	5	

De manera similar al problema anterior, el objetivo de este problema era observar las estrategias de los estudiantes al calcular el promedio cuando los datos se dan en una lista.

Es interesante nuevamente encontrar que 9 de los estudiantes de secundaria calculan el promedio multiplicando las calificaciones por sus respectivas frecuencias (no dadas), las cuales obtienen de contar el número de dieces, nueves, ochos, etc. Esto muestra cómo se puede generar la fórmula del promedio ponderado de manera intuitiva.

Se observa también que 5 de los estudiantes de secundaria consideran la suma de los datos como el promedio.

Por otro lado, casi todos los estudiantes del nivel superior calculan el promedio ponderado a través de la fórmula que ya conocen.

Problema 9

Las respuestas a este problema se clasificaron de la siguiente manera:

Categorías	Núm. de estudiantes 3º sec.	Núm. de estudiantes nivel superior
Calculan la velocidad ponderando	10	11
Suma de velocidades entre 2		13
Suma velocidades entre suma tiempos	4	3
Cálculos variados	5	4

Este problema es relativamente difícil, ya que la cantidad de la cual se tiene que calcular el promedio (la velocidad) varía de una manera continua y no discreta como en los casos anteriores.

En este problema sucede algo sorprendente. Casi 50% de los estudiantes de secundaria (10 de 21) y sólo 35% de los estudiantes de preparatoria (11 de 31) lo resuelven correctamente, ponderando las velocidades con su tiempo respectivo:

$$\frac{80\times 2+120\times 8}{10}=112 \text{ km/hr}$$

Una gran parte de los estudiantes de nivel superior promedian (incorrectamente) las velocidades sin tomar en cuenta los tiempos:

$$\frac{80+120}{2}=100 \text{ km/hr}$$

Posiblemente la razón de esto es que los estudiantes de secundaria, al no tener un procedimiento automático para realizarlo, reflexionan sobre el mejor método para hacer esto. En cambio, los estudiantes del nivel superior, aplican el algoritmo que conocen de manera mecánica.

Entre los cálculos variados está una simple suma de ambas velocidades.

(No se registran aquí los resultados del problema 10.)

ANÁLISIS DE LAS ENTREVISTAS

En esta sección se destacarán algunas de las respuestas dadas por los seis estudiantes entrevistados de tercero de secundaria.

Problema 1. En este problema estabamos interesados en observar si los estudiantes podían darse cuenta de que el valor dado del promedio no era posible por no estar dentro del rango de los datos. Cuatro estudiantes mencionaron que el valor propuesto no era el indicado (dos de ellos necesitaron calcular primero el promedio). Sus explicaciones son las siguientes.

> Carlos, al preguntarle "¿qué hizo?" contestó: *"Comparé los precios"*. Al pedirle que explique su respuesta de por qué no era posible, dijo que: *"No, porque son diferentes precios muy bajos"*. Aquí vemos que tiene la intuición de que el valor "alto" dado del promedio no es posible.

> Alejandro calcula inicialmente el promedio y contesta: *"No, porque hay precios de 6 y 7 que son los que hay más y no daría el promedio 9.20"*. Al insistir el entrevistador, Alejandro respondió: *"no hay ningún precio de 9.20, o sea, que rebase los 8.10 más alto"*. Aquí observamos dos cosas. El estudiante se da cuenta de que la mayoría de los precios están entre 6 y 7 y que por ello el

promedio no podría llegar hasta 9.20. Después da mas precisión a su idea diciendo que, como el más alto es de 8.10, el promedio no puede ser 9.20.

Pedro, después de calcular el promedio, dice que no es posible y, al pedirle que no use las operaciones, explica: *"Se redondea ... los precios se ve que valen 7, 5 y 8 y si a uno le quitamos y a otro le ponemos no va a dar"*. Esto muestra una técnica para comprobar el promedio que se basa en que unos valores se deben compensar con los otros.

Ana, después de haber calculado el promedio de 6.76, dice lo siguiente: *"el promedio no era 9.20 sino 6.76; además no podía ser porque ahí ni siquiera había un precio de 9.20"*. Sin embargo, cuando posteriormente el entrevistador pregunta: "¿Tú crees que el promedio puede ser de 4?", ella contesta que *"podría ser"*. Esto muestra que, aun cuando tiene cierta idea sobre esto, no está bien fundamentada.

Los otros dos estudiantes también recurrieron al algoritmo y, cuando se les preguntó si podían contestar la pregunta sin realizar las operaciones, contestaron que sí era posible el valor dado del promedio.

Berenice, al preguntársele si el promedio podría ser de 4, respondió que no, *"porque sería muy bajo, los precios están muy altos"*. Aquí muestra algún sentido de que el promedio no puede ser muy bajo, pero posiblemente no pueda definir el rango exacto.

Noemí durante su entrevista dijo: *"Porque si no me dan la posibilidad de hacer operaciones, no sabría"*. Aquí afirma que, si no hace los cálculos correspondientes, no podría saber.

Problema 2. En este problema estabamos interesados en observar si los estudiantes podían dar una respuesta cualitativa del cambio del valor del promedio cuando se agregan más datos: parte *a)* dos datos más con el mismo valor del promedio (el promedio queda igual) y parte *b)* un dato más con un valor mayor que el promedio (el promedio aumenta).

Parte a): Dos estudiantes no hicieron operaciones. Otros tres recurrieron a calcular el promedio. Describimos a continuación cada uno de ellos.

Ana, sin calcular, dice que el promedio será *"más grande"*. Explica que: *como anexaron dos precios más, se tendría que sumar todo"*.

Noemí también responde que *"Se altera. Nos daría otro promedio"*. Cuando se le pregunta si sería mayor o menor, contesta que mayor, pero su explicación no es clara.

Alejandro calcula el promedio. De igual manera, Berenice y Pedro proceden a calcular el promedio. De sus resultados, se dan cuenta que no cambia.

Parte b): En esta parte, dos estudiantes no hacen operaciones y otros tres calculan el promedio (no los mismos que en el inciso anterior). Sus procedimientos y explicaciones son las siguientes.

Ana en este inciso dice que *"se vuelve a alterar el promedio"*. Cuando se le pregunta cómo, ella contesta que: *"podría ser que aumente o que disminuya"* y después agrega que: *"ni que aumente demasiado ni que disminuya tanto, sino que se queda intercalado"*. Vemos que Ana se basa aquí en una estimación. Tiene la idea de que un valor parecido a los otros no debe afectar mucho al promedio de otras 8 cantidades.

Alejandro, ahora sin calcular, dice que: *"dará un número mayor"*. Su explicación, sin embargo, no es muy clara, ya que puede ser correcta o incorrecta: *"Pensé que era más cantidad de dinero y más personas"*.

También aquí Noemí contesta que el promedio aumentaría.

Berenice y Pedro proceden a calcular el promedio y basan sus respuestas en sus resultados.

De las respuestas anteriores se puede concluir que esta pregunta les resultó particularmente difícil.

Problema 5. En este problema estabamos interesados en observar si los estudiantes se dan cuenta de que un cero adicional en los datos afecta el valor del promedio.

Cinco de los estudiantes indicaron que sí se alteraría el promedio (aunque Carlos no es muy claro en su explicación). Algunas de las razones que dieron fueron: *"ahora se divide entre 4"* o *"ya no son 3 sino 4 niños"*.

Noemí dice que *"no, porque él llegó sin nada, no aportó ningún dulce, entonces el promedio se queda como está"*.

Problema 7. En este problema estabamos interesados en observar las estrategias de los estudiantes al calcular el promedio cuando los datos se dan en una tabla de frecuencias.

Berenice calculó intuitivamente el promedio ponderado: *"... el 4 por 0 y el 8 por 1, porque se supone que éstos son número de familias y éstos son los hijos"*. Después de corregir un error encuentra el valor de 1.8 para el promedio.

Ana, Pedro y Alejandro no saben cómo manejar las dos columnas de datos. El procedimiento que siguieron para calcular el promedio fue el de sumar cada una y dividir los resultados uno entre el otro. Pedro explica: *"Sumé los hijos y lo dividí entre las 33 familias y no daba ni siquiera uno"* (Ana, al contrario, divide 33 entre 6).

Noemí calcula el promedio de la primera columna del número de hijos (6 entre 4) e ignora la segunda columna.

Carlos únicamente suma la columna del número de hijos y dice que el promedio es de 6.

Obviamente, esta forma de presentar los datos es muy confusa para estos estudiante y sólo uno logra calcular el promedio ponderado de manera intuitiva.

Problema 8. En este problema estabamos interesados en observar las estrategias de los estudiantes al calcular el promedio cuando los datos se dan en una lista.

Ana, Alejandro, Berenice y Pedro agrupan de manera intuitiva cantidades para sumar y calcular el promedio: Por ejemplo, Pedro explica así su procedimiento: *"luego el 6 lo multipliqué por 3 ... luego el 7 por 3 ... luego el 8 por 7 ..."*

Carlos y Noemí sumaron los datos y dividieron para obtener el promedio.

Es interesante observar que la mayoría de los niños intuitivamente agrupan las cantidades para calcular el promedio. Esto puede tomarse como base para formar tablas de frecuencia y para calcular la fórmula del promedio correspondiente.

Problema 9. En este problema estabamos interesados en observar si los estudiantes son capaces de calcular el promedio ponderado en una situación más compleja de velocidades.

Ana calcula el promedio con el procedimiento correcto (pero en vez de dividir entre el tiempo total (10 horas) divide entre el promedio de las horas (5)). Ella explica: *"Pues yo multipliqué 80 km por 2, que son las dos horas, me dio 160; después los 120 km por 8 que son las horas ... le sumé y me salió 1 120. Luego eso lo dividí entre 5"*.

Berenice sigue un procedimiento similar al de Ana, pero al final divide entre 2. También Noemí hace algo muy similar, pero no divide.

Alejandro divide cada velocidad entre su tiempo respectivo y suma estas cantidades para dar el promedio.

Pedro suma directamente las dos velocidades y las divide entre dos.

Carlos tuvo muchos problemas con este ejercicio, haciendo varios cálculos un poco al azar.

Es impresionante observar que, para un problema tan complejo como éste, tres de los seis estudiantes realizaron procedimientos en la dirección apropiada y casi correctos.

CONCLUSIONES

El desempeño de los estudiantes en los primeros seis problemas fue bajo para el grupo de secundaria y mediano para el del nivel superior. Estos problemas están relacionados con cada una de las propiedades descritas por Strauss y Bichler sobre el promedio, lo cual indica que existen deficiencias conceptuales fuertes en los estudiantes de secundaria que permanecen en menor grado en los estudiantes del nivel superior.

En los problemas relacionados con el cálculo del promedio con datos en formatos diferentes, se encontraron dificultades principalmente con los estudiantes del nivel medio. Éstos aplican más lo que podríamos llamar "fórmulas falsas", es decir, variaciones incorrectas del algoritmo, como sólo sumar. Éstos no sólo son errores de cálculo, sino que reflejan que los estudiantes tienen otras concepciones del promedio como por ejemplo, "Promedio = Suma".

También se observó en ambos niveles una interpretación deficiente del valor obtenido del promedio, aun cuando, al comparar los resultados de los dos grupos de estudiantes, sí se nota un progreso en el cálculo e interpretación del promedio de los estudiantes de nivel superior

Se puede también observar en los resultados de los problemas 7, 8 y 9 del cuestionario que los estudiantes del nivel medio los resuelven correctamente a base de sus intuiciones y que el conocimiento de fórmulas mecánicas de los estudiantes del nivel superior les dificulta aplicar una estrategia apropiada.

Las entrevistas confirman estas conclusiones

El análisis nos permite darnos cuenta de que hace falta mejorar las prácticas de la enseñanza del promedio. Entre otras se sugiere:

- Discutir una gama amplia de tipos de problemas en los que aparezca el promedio.
- Presentar datos en diferentes formas.
- Hacer énfasis en el significado del valor obtenido del promedio en cada caso particular.
- No enseñar prematuramente la fórmula del cálculo del promedio. Basarse más bien en descripciones numéricas sobre el procedimiento de este cálculo y la razón de éste.

ANEXO. CUESTIONARIO APLICADO

PROBLEMA 1

Los datos que vienen a continuación corresponden a los precios observados en cinco tiendas diferentes para una lata de atún de la marca MAR:

Tienda 1	Tienda 2	Tienda 3	Tienda 4	Tienda 5
7.50	5.30	8.10	6.20	6.70

Alguien calculó que el promedio de estos precios es de 9.20.
¿Puede ser posible? Explica.

PROBLEMA 2

A la salida de un centro comercial se le preguntó a un grupo de personas la cantidad de dinero que habían gastado en la compra de alimentos. Éstas fueron las respuestas:

$35, $39, $28, $93, $62, $25

El promedio de estas 6 ventas es de $47.

a) Dos personas que salían, mencionaron que habían gastado $47 cada una. ¿Cómo influyen estos dos valores al nuevo promedio de las 8 ventas?
b) Otra persona al salir, manifiesta que se gastó $65 en alimentos. ¿Cómo influye este nuevo valor al promedio de las 9 ventas anteriores?
c) ¿Cuál es el valor del promedio?

PROBLEMA 3

Observa los 10 valores siguientes:

2, 4, 4, 4, 5, 5, 8, 8, 10, 10

¿Crees que el promedio tiene que ser igual a uno de estos valores?
Explica tu respuesta.

Problema 4

En 10 casas de una cuadra se realizó una encuesta en la que se preguntaba por "el número de teléfonos" en cada casa. Los datos obtenidos se muestran a continuación:

Número de teléfonos en cada casa: 1, 2, 1, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 1

¿En promedio, cuál es el número de teléfonos que hay por casa?
Interpreta y explica tu respuesta.

Problema 5

Mayra, Jaime y Pedro se reunieron en una fiesta. Cada uno trajo un cierto número de dulces. Mayra trajo 12 dulces, Jaime 8 y Pedro 16.

a) ¿Cuántos dulces trajeron en promedio por niño?
b) Un cuarto niño llega a la fiesta sin dulces. ¿Se altera el promedio de dulces por niño?
c) ¿Cuál será ahora el promedio de dulces por niño?

Problema 6

A los reclutas de una academia de policía se les solicitó presentar un examen que mide la capacidad que tienen para hacer ejercicio. Esta capacidad (medida en minutos) se obtuvo para cada uno de los 20 reclutas:

25, 21, 35, 33, 40, 32, 30, 34, 30, 27, 16, 25, 29, 31, 31, 32, 44, 32, 33, 20

El promedio de estos valores es de 30.5
¿Qué representa este valor? Explica tu respuesta.

Problema 7

Se realizó una encuesta acerca del número de hijos que tiene una familia mexicana. Los datos obtenidos de 33 familias de una cuadra se presentan en el cuadro siguiente:

Número de hijos por familia	Número de familias
0	4
1	8
2	11
3	10

a) ¿Cuál es el número de hijos promedio que hay entre las 33 familias encuestadas?
b) ¿De qué manera interpretas el valor que representa el promedio?

Problema 8

Se aplicó un examen a un grupo y las calificaciones obtenidas por los alumnos fueron las siguientes (en una escala del 0 al 10):

4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10

¿Cuál es el promedio de las calificaciones?

Problema 9

Un automóvil viaja a una velocidad de 80 km/hr durante 2 horas y después a una velocidad de 120 km/hr durante 8 horas. ¿Cuál será su velocidad promedio?

Problema 10

El departamento de mercadotecnia de una fábrica de zapatos tenis realizó una encuesta relativa a las tallas de los alumnos de secundaria:

Talla	Ventas
3	0
4	10
5	20
6	30
7	40

Obtén el promedio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Flores Peñafiel, A. (1995), "Nexos en el razonamiento proporcional: Palancas, media aritmética, promedio ponderado, mezclas, porcentajes de bateo y velocidades", *Educación Matemática,* vol. 7, núm. 2, pp. 113-125.

Gattusso, L. (1997), "La moyenne, un concept élémentaire?", *La Revue del IÁDOQ,* vol. 9, núm. 3, pp. 12-14.

Gattusso, L. y C. Mary (1996), "Development of the Concepts of the Arithmetic Average from High School to University", en *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* núm. 2, pp. 401-408.

Mokros, J. y S. J. Russell (1995), "Children's Concepts of Average and Representativeness", en *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 26, núm. 1, pp. 20-39.

Pollatsek, A., S. Lima y A. D. Well (1981), "Concept of Computation: Students' Understanding of the Mean", en *Educational Studies in Mathematics,* núm. 12, pp. 191-204.

Shaughnessy, J. M. (1992), "Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics", en *Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions*, núm. 19, pp. 465-494.

Strauss, S. y E. Bichler (1988), "The Development of Children's Concepts of the Arithmetic Average, en *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 19, núm. 1, pp. 64-80.

DATOS DE LOS AUTORES

Simón Mochón
Departamento de Matemática Educativa,
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
smochona@sni.conacyt.mx

María Margarita Tlachy Anell
Departamento de Matemática Educativa,
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
mtlachy@conafe.edu.mx

Problemas aritméticos. Articulación, significados y procedimientos de resolución[1]

Marie-Lise Peltier

Resumen: En este artículo se hace una síntesis de diversos trabajos relevantes del campo de la psicología cognitiva y de la didáctica de las matemáticas, los cuales abordan la construcción del sentido en el caso particular de los problemas aritméticos. Se pretende aportar elementos teóricos que permitan comprender mejor cómo los alumnos pueden dar sentido al enunciado de un problema y comprometerse en la solución. Se trata también de hacer elecciones argumentadas para planificar la enseñanza de los problemas aritméticos en la escuela elemental.

Palabras clave: Construcción del sentido, problemas aritméticos, escuela primaria.

Abstract: This article proposes a synthesis of various works concerned with the fields of cognitive psychology and the fields of mathematics didactics on the question of meaning construction in the particular case of arithmetic problems. It is a matter of bringing theoretical elements making it possible to better understanding how the students can give sense to a problem statement and engage themselves into the resolution. It is also a question of making sound choices in order to plan the teaching of the arithmetic problems at elementary school.

Keywords: Meaning construction, arithmetical problems, primary school.

INTRODUCCIÓN

La cuestión de la enseñanza de las operaciones y de los problemas aritméticos es recurrente. ¿Cómo articular el trabajo sobre los problemas con la necesidad de adquisición de técnicas operatorias?, ¿Cómo trabajar el "sentido" de las operaciones?, ¿Qué significa "construir el sentido"? En este artículo, me propongo "re-visitar" estas cuestiones a la luz de diversos trabajos sobre el tema, presen-

Fecha de recepción: febrero de 2002.

[1] Traducción del francés de Alicia Ávila, David Block y Guillermina Waldegg.

tando primero diferentes puntos de vista complementarios sobre la noción de sentido.

Actualmente, un *slogan* de la pedagogía es la necesaria construcción del sentido. El postulado sobre el cual se apoya este *slogan* es que un conocimiento no puede ser funcional sino en la medida en que es portador de sentido para quien lo posee. De manera breve se podría decir que un conocimiento es portador de sentido para un sujeto si este último es capaz de identificar un campo de aplicación de este conocimiento. Pero esta formulación es relativamente reduccionista en la medida en que remite principalmente a un aspecto "funcional" de los conocimientos, toma en cuenta al sujeto, pero ignora en parte la naturaleza y el valor intrínseco de los conocimientos.

Desde un punto de vista filosófico, siguiendo a G. Deleuze (1969),[2] podemos considerar la cuestión del sentido a partir de la articulación de tres dimensiones:

- La primera es la relativa a lo que Deleuze designa como "referencia", y que se podría caracterizar de manera un poco simplista como vínculo con el mundo real; se podría igualmente decir que la referencia articula las proposiciones con los objetos de los que éstas hablan, esto remite a una cierta funcionalidad del saber y a una forma de objetividad, puesto que en ese dominio las proposiciones serán susceptibles de verificación.
- La segunda es la "significación", esta dimensión remite a los conceptos en sí mismos y a las relaciones entre los conceptos. En esta dimensión, las proposiciones son susceptibles de tener un valor de verdad, se puede hablar de la pertinencia o de lo absurdo de las proposiciones enunciadas.
- La última, la "manifestación", se refiere a hacerse cargo de la subjetividad de las proposiciones, el sujeto se apropia de la proposiciones o se distancia de ellas; es la relación del sujeto con el saber.

Desde el punto de vista de la psicología cognitiva, el sentido se define con referencia al sujeto. Para G. Vergnaud,[3] por ejemplo, el sentido es una relación del sujeto con las situaciones y con los significantes.

Más precisamente, son los esquemas, es decir las conductas y su organiza-

[2] Citado por M. Fabre (1999).
[3] G. Vergnaud (1990), p. 158.

ción, evocados por el sujeto individual para una situación o para un significante, los que constituyen el sentido de esta situación o de ese significado para ese individuo. El sentido de la adición para un sujeto individual es el conjunto de esquemas que puede poner a funcionar para abordar las situaciones a las cuales se enfrenta y que implican la idea de adición, es también el conjunto de esquemas que puede poner en práctica para operar con los símbolos, numéricos, algebraicos, gráficos y lingüísticos que representan la adición.

Desde un punto de vista didáctico, por ejemplo para Brousseau –que se apoya a este respecto en el pensamiento de Bachelard– el sentido de un conocimiento está definido por tres conjuntos:

a) la colección de situaciones en las que este conocimiento se realiza en cuanto teoría matemática (semántica).
b) la colección de problemas en los que este conocimiento interviene como solución (pragmática).
c) el conjunto de concepciones, de elecciones anteriores que él rechaza (historia individual y colectiva).

Se ve aquí aparecer la noción de concepción, tanto desde un punto de vista epistemológico como desde un punto de vista psicológico.

En cada uno de estos tres paradigmas encontramos, con pesos diferentes, la relación con el mundo, el aspecto subjetivo y las características teóricas y epistemológicas de los saberes.

Para la enseñanza que tiene por objetivo trabajar las operaciones aritméticas, la cuestión del sentido se planteará en tres niveles:

- El del concepto (sentido de la adición, de la sustracción, de la multiplicación, etcétera).
- El del problema (cómo ayudar a los niños a comprender un problema y resolverlo).
- El de la articulación entre la comprensión del problema y la puesta en marcha de un procedimiento de resolución.

I. EL SENTIDO DE UN CONCEPTO

I.1. Concepto y campo conceptual

Nos apoyaremos en la definición propuesta por G. Vergnaud:[4]

> Una aproximación psicológica y didáctica de la formación de conceptos matemáticos lleva a considerar un concepto como un conjunto de invariantes utilizables en la acción. La definición pragmática de un concepto apela así al conjunto de situaciones que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades y al conjunto de esquemas puestos en práctica por los sujetos en esas situaciones. No obstante, la acción operatoria está lejos de ser la totalidad de la conceptualización de lo real. No se discute la validez o la falsedad de un enunciado totalmente implícito y no se identifican los aspectos de lo real a los cuales hay que poner atención, sin la ayuda de palabras, enunciados, símbolos y signos. El uso de significantes explícitos es indispensable para la conceptualización. Esto nos lleva a considerar que un concepto es una tripleta de tres conjuntos:
>
> C = (S, I, ###)
>
> S: el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (la referencia);
> I: el conjunto de invariantes sobre los cuales descansa la operacionalidad de los esquemas (los significados);
> ###: el conjunto de formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (el significante).
>
> Estudiar el desarrollo y el funcionamiento de un concepto en el curso del aprendizaje o durante su utilización es necesariamente considerar a la vez estos tres planos. No hay en general una biyección entre significantes y significados, ni entre invariantes y situaciones. No se puede, pues, reducir el significado ni a los significantes ni a las situaciones.

Pero los conceptos no están aislados, están constituidos en una red y mantienen relaciones entre ellos, lo que conduce a G. Vergnaud a definir “campos conceptuales” (en otras disciplinas se habla también de “tramas conceptuales”).

[4] *Ibid.*, p. 145.

En un primer momento, Vergnaud[5] define un campo conceptual como "un conjunto de situaciones, lo que permite generar clasificaciones que se basan en el análisis de las tareas cognitivas y de los procedimientos que pueden ponerse en juego en cada una de ellas".

Así, por ejemplo, el campo conceptual de las estructuras aditivas es el conjunto de situaciones, en el sentido de tareas, que demandan una adición, una sustracción o una combinación de tales operaciones. Esta primera aproximación permite, como ya señalamos, "generar una clasificación que descansa en el análisis de las tareas cognitivas y de los procedimientos que pueden ponerse en juego en cada una de ellas".

Después, Vergnaud[6] precisa: "el campo conceptual de las estructuras aditivas es a la vez el conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar esas situaciones como tareas matemáticas. Son así constitutivas de las estructuras aditivas, los conceptos de cardinal, medida, transformación temporal por aumento o disminución, relación de comparación cualitativa, inversión [...]"

Este segundo enfoque conduce a afinar la clasificación y, con ello, resulta a la vez matemática y psicológica.

La teoría de los campos conceptuales no es propiamente una teoría "didáctica", es una teoría del desarrollo cognitivo que resulta, como acabamos de decirlo, de consideraciones psicológicas y matemáticas. Esta teoría permite un análisis de las situaciones didácticas, pero también de las dificultades conceptuales encontradas por los alumnos, del repertorio de procedimientos disponibles, de formas de representación posibles, etcétera.

En didáctica de las matemáticas, M. Artigue[7] retoma esta definición de concepto de la manera siguiente, posicionándola en relación con la de concepción:

> Así como se distinguen en un concepto matemático la noción matemática tal como se define en el contexto del saber sabio en una época dada, el conjunto de significantes asociados al concepto, la clase de problemas en cuya resolución toma su sentido, los teoremas, las técnicas algorítmicas específicas del tratamiento del concepto, así también se distinguirán en las concepciones de los sujetos esos diferentes componentes y, en particular, la clase de situacio-

[5] *Ibid.*, p. 146.
[6] *Ibid.*, p. 147.
[7] M. Artigue (1984), *Contribution á l'étude de la reproductibilité des situations didactiques,* Tesis de doctorado de Estado, París VII.

nes-problema que dan su sentido al concepto para el alumno, el conjunto de significantes que él es capaz de asociar a dicho concepto, en particular las imágenes mentales, las expresiones simbólicas, los teoremas, los algoritmos de los que dispone para manipular el concepto.

I.2. Los campos conceptuales de las estructuras aditivas y multiplicativas

G. Vergnaud distingue en los problemas, los números que designan estados, que son números reales (positivos si designan estados-medida y positivos o negativos si designan estados relativos), y los números que traducen una transformación o una comparación (y que son reales positivos o negativos).

Así, en el enunciado "Cloé tiene 57 estampas, le da 15 a Jeanne. ¿Cuántas estampas tiene Cloé ahora?", el número "57" designa un estado (el haber inicial de Cloé), cuando Cloé da 15 estampas a Jeanne, se trata de una transformación que aquí es negativa y puede representarse por el número "-15". La pregunta orienta a la determinación del estado final, es decir, el número de imágenes de Cloé después de la transformación de su haber.

Tomemos otro ejemplo: "Pedro tiene 27 canicas, Víctor tiene 15 canicas más que Pedro, ¿cuántas canicas tiene Víctor?", el número "27" designa un estado, es el referente para la comparación, la comparación es positiva "+15", se busca el estado referido, es decir, el haber de Víctor.

Para las estructuras aditivas, G. Vergnaud identifica seis relaciones básicas a partir de las cuales es posible engendrar la casi-totalidad de problemas de adición y de sustracción de la aritmética ordinaria (véase el anexo 1).

Esta clasificación muy fina se apoya a la vez en un análisis matemático de los objetos en juego y de las relaciones entre esos objetos y en un análisis psicológico de la tarea por efectuar para resolver el problema.

La clasificación, que consiste en categorizar los problemas en función de si la resolución experta es una adición o una sustracción, hace caso omiso de los dos análisis anteriores para centrarse solamente en las escrituras matemáticas que traducen no el problema sino su solución. De dicha clasificación se deducía –de manera apresurada– que los problemas cuya resolución implica una sustracción eran más difíciles que los que requerían una adición. El contraejemplo siguiente permite invalidar esta concepción y mostrar que la dificultad de un problema está esencialmente ligada a su estructura y al elemento de esa estructura sobre el cual se plantea la pregunta.

Así el problema: "Paul tenía 105f (francos) en su portamonedas. Gastó 99f, ¿cuánto dinero tiene ahora en su portamonedas?" no plantea grandes dificultades a los alumnos, aunque se trata de una sustracción. En cambio el problema "María va de compras, gasta 150f. Ahora le quedan 200f en su portamonedas. ¿Cuánto dinero tenía María en su portamonedas antes de hacer las compras?" es un problema difícil aunque la situación sea familiar, aunque los números en juego sean simples y aunque la operación por efectuar (una adición) sea elemental.

La aproximación de G. Vergnaud permite poner en evidencia la necesidad de simultaneidad del aprendizaje de la adición y la sustracción, permite conducir un análisis *a priori* de las situaciones al precisar las relaciones matemáticas abordadas y la tarea de los alumnos.

En lo que concierne a las estructuras multiplicativas, G. Vergnaud propone cuatro clases: la comparación multiplicativa, la proporcionalidad simple, la proporcionalidad simple compuesta, la proporcionalidad doble (cf. anexo 2).

Desde un punto de vista didáctico, esta tipología permite re-visitar el problema del momento del aprendizaje en el que se introduce la división abogando por un acercamiento simultáneo con el de la multiplicación, siempre y cuando se elijan los problemas de manera pertinente.

Estas tipologías de problemas aditivos y multiplicativos permiten ayudar a los profesores a identificar con precisión, en los problemas que plantean, los objetos matemáticos en juego y sus relaciones, analizar la complejidad de la tarea que proponen y, por tanto, a decidir, establecer secuencias para conducir a los alumnos a enfrentarse a situaciones variadas y construir evaluaciones en concordancia con los aprendizajes efectuados.

Finalmente, se podrá decir que un sujeto construyó el sentido de una operación si reconoce en cualquier situación relevante del campo conceptual las estructuras que corresponden a esta operación, la estructura específica de esta situación y, posteriormente, si la aborda de manera conveniente. Pero la cuestión de saber cómo va a dar sentido el sujeto a un problema particular queda planteado y es esta cuestión la que vamos a examinar ahora.

II. EL SENTIDO DE UN PROBLEMA, REPRESENTACIÓN Y TRATAMIENTO ASOCIADO

II.1 ¿Qué es un problema?

Comenzaré haciendo una cita de J. Brun:[8]

> Un problema generalmente se define como una situación inicial con un objetivo por alcanzar, que le pide al sujeto realizar una serie de acciones o de operaciones para alcanzar ese objetivo. Sólo hay un problema en la relación sujeto-situación, y sólo cuando la solución no está disponible de golpe pero es posible construirla. Esto significa también que un problema para un cierto sujeto puede no ser problema para otro, debido, por ejemplo, al distinto nivel de desarrollo intelectual de ambos sujetos.

Dar sentido a un problema, o aun comprenderlo, requiere por lo tanto de la articulación de diversas competencias.

Comprender el problema es, por una parte, comprender que el enunciado planteado relata una cierta situación, la cual, en el caso de los problemas aritméticos de la escuela elemental, se obtiene con frecuencia de la vida real y, además, que los datos que se proporcionan son ya respuestas a preguntas que podría haberse planteado un personaje ficticio que se encontrara en la situación evocada. Pero es también comprender que ese enunciado debe conducir a una "acción" que implica una reflexión y tomas de decisión, es decir que no se trata simplemente de un acto de lectura, sino de un texto específico que contiene un proyecto de respuestas a preguntas. Así, Brousseau[9] propone una ingeniería para el aprendizaje de la sustracción que, escribe él, "se propone hacer pasar las preguntas del dominio del profesor al dominio del alumno, enseñar tanto las preguntas como las respuestas y, hasta donde sea posible, enseñar los conocimientos con su sentido"

Es por tanto indispensable que la lectura del enunciado evoque una situación que, si no es ya conocida por el alumno, sea susceptible de ser construida mentalmente por analogía o adaptación de situaciones conocidas. De esta manera, el alumno puede construir una representación mental de la situación evo-

[8] Jean Brun, *Math-Ecole*, núm. 141.

[9] Guy Brousseau (1989), *RDM 9/3*, La Pensée Sauvage, p. 327.

cada y anticipar las que pueden ser preguntas relativas a dicha situación. Puede entonces leer ciertos datos como respuestas a ciertas preguntas, mientras comprueba que otras preguntas no están planteadas en el enunciado pero podrían estarlo manipulando los datos. Sin fase de anticipación, es muy difícil "escoger la operación correcta". A partir de esta representación mental de la situación y de la anticipación de preguntas y de respuestas, el alumno puede resolver el problema y no a partir de rasgos o de índices superficiales del texto o de la proximidad temporal con nociones en proceso de aprendizaje.

II.2. La construcción de las representaciones

Los trabajos en psicología cognitiva que se han realizado desde hace unos 20 años han centrado la atención en la cuestión de la construcción de las representaciones del sujeto, tanto para fines de la comprensión de fenómenos cognitivos como para fines de ayudar al sujeto en casos de disfuncionamiento de los mecanismos cognitivos. El término de representación se utiliza aquí en el sentido de una representación puntual y ocasional ligada a una situación particular (en caso contrario se habla de conocimientos o de concepciones, de conjuntos de conocimientos y de creencias estables en la memoria de largo plazo, o de estructura cognitiva si lo que interesa es su organización).

Estos trabajos toman en cuenta los conocimientos en juego, los problemas y sus características propias, intentan describir la actividad mental en términos de procesos y estudian las representaciones.

Para dar una idea de estos trabajos, voy a hacer referencia en primer lugar a J. Julo.[10]

En la resolución de un problema, la actividad cognitiva se desarrolla en dos vertientes, una relativa a la representación, la otra relativa a la acción. Evidentemente estas dos vertientes están estrechamente ligadas. En esta construcción intervienen varios procesos que están naturalmente concatenados y no son sucesivos:

- Un proceso de interpretación y de selección
  A partir del contexto semántico que se le propone, el sujeto realiza una selección de las informaciones que le parecen pertinentes. Esta selección

[10] J. Julo (1995), *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, PUR.

está, por supuesto, en relación con sus conocimientos anteriores disponibles en un doble movimiento, de los conocimientos disponibles hacia las informaciones y de las informaciones hacia los conocimientos disponibles, desencadenados por la consideración de las informaciones.

- Un proceso de estructuración
  El contenido de las representaciones no es un conjunto de entidades disjuntas. Las representaciones están fuertemente organizadas, su contenido constituye "un todo" que tiene su funcionamiento y su lógica propios. La cuestión consiste en saber cómo se efectúa la estructuración de la representación. Intervienen varios factores: el contexto semántico y los conocimientos anteriores que éste permite movilizar, las analogías con otros problemas que él induce (los problemas encontrados con anterioridad se almacenan en la memoria y desempeñan un papel de "esquemas de problemas" que forman parte de los conocimientos puestos en funcionamiento por el sujeto en el momento de conocer el enunciado del problema), pero también los procedimientos y las estrategias puestos en marcha progresivamente conforme se van haciendo intentos de resolución.
- Un proceso de operacionalización
  Ya hemos visto que la representación de la situación en la resolución de un problema tiene como propósito permitirnos actuar para alcanzar el objetivo propuesto.

El proceso de operacionalización es el que permite el paso a la acción, ya sea que se trate de una acción efectiva (hacer un cálculo, un esquema...) o de una acción mental (hacer deducciones, emitir una hipótesis...). Este paso a la acción resulta de la aplicación de los conocimientos operatorios que provienen de nuestra experiencia. Recíprocamente, el hecho de actuar va a tener, como lo hemos sugerido ya, una influencia sobre la representación, especialmente sobre su estructuración, lo cual permitirá también integrar nuevos elementos, ya que, al transformar la situación inicial, la acción va a transformar el contenido de la representación y también, sin duda, tendrá una repercusión sobre el control de la pertinencia de la representación con respecto al objetivo por alcanzar. Este proceso de operacionalización se manifiesta especialmente en el tanteo.

La representación puede ser más o menos operacional, es decir, puede hacer más o menos fácil la elaboración de un procedimiento o de una estrategia.

La cuestión del paso de la representación a la acción todavía no se conoce bien, pero pueden citarse algunos casos en los que este paso parece facilitarse.

El primero es el caso en el que los conocimientos operatorios se pueden poner en movimiento de inmediato ya que hay un reconocimiento por parte del sujeto del tipo de problema. Éste es el caso en particular de los problemas que son objeto de un entrenamiento específico.

El segundo es el caso de los problemas en los que es posible desarrollar una gran cantidad de acciones, hacer numerosos ensayos, ya que en este caso la representación inicial se enriquece y puede estructurarse.

El tercero es el caso más frecuente en matemáticas. Es el caso en el que los conocimientos adquiridos anteriormente y que se pueden poner en movimiento permiten modelizar la situación y trabajar con el modelo mediante modos de representación simbólicos más operacionales que el lenguaje: esquemas, cuadros, diagramas, escrituras aritméticas. En efecto, el proceso de modelización simplifica la representación, la vuelve considerablemente más operacional y permite el control de la pertinencia.

Apoyándose en el análisis de los procesos cognitivos en juego en la actividad de resolución de problemas, J. Julo propone una modalidad de acción didáctica para ayudar a los alumnos a enriquecer su representación del problema y volverla operativa o, dicho de manera más simple, para ayudar a los alumnos a comprender el problema para poderlo resolver y luchar contra los disfuncionamientos. Esta modalidad consiste en enriquecer el contexto que caracteriza el problema dado, proponiendo simultáneamente varios enunciados de ese problema (misma problemática, mismos valores numéricos sólo cambia el contexto semántico) entre los cuales el alumno escoge el que él quiere resolver, o bien, puede resolverlos todos. Esta modalidad está orientada hacia la representación y prácticamente no afecta el proceso de resolución.

Las experiencias realizadas muestran una clara mejoría en el grado de éxito de todos los alumnos, mejoría que puede explicarse por varios factores entre los cuales cabe destacar un peso menor del contexto en la construcción de la representación y, por ello, una posibilidad de estructuración acrecentada, así como un aumento de la probabilidad de poner en movimiento esquemas de problemas y de conocimientos operatorios.

II.3. Las etapas en la construcción del sentido de un problema

La construcción del sentido de un problema se apoya en el paso de una representación de la situación a una representación del problema, es decir, a una representación de la situación que integra la vertiente de la acción. Las modalidades de representación evolucionan progresivamente.

En el caso de los problemas aritméticos, la evolución puede dividirse en varias grandes etapas o, más bien, en varias modalidades grandes, ya que la evolución no es necesariamente lineal.

A. Las modalidades de representación icónicas, figurativas o analógicas

- La modalidad de las representaciones figurativas no operativas se encuentran con frecuencia en el segundo ciclo y pueden estar todavía presentes en algunos alumnos del tercer ciclo.
  El niño percibe la historia con personajes y objetos, y se construye una especie de película pero sin percibir todavía la trama numérica. Si se le pide que represente por escrito la situación, hará dibujos que no permitirían un procedimiento de resolución.
- La modalidad de las representaciones figurativas operativas.
  El niño sigue dependiendo mucho del contexto y de la realidad a la que éste corresponde, pero puede organizarlo de manera operativa. Dibuja todavía de una manera figurativa, pero ya toma en cuenta las informaciones numéricas, el dibujo puede, por tanto, servir como un soporte para la resolución.
- La modalidad de las representaciones analógicas.
  El niño permanece todavía ligado al contexto, a la representación de los personajes y de los objetos, pero, por una parte, no conserva más que aquellos que son pertinentes para el problema, por otra parte, ya no intenta fijar la realidad exactamente, puede simplificar los objetos, simbolizarlos con ruedas, taches, puntos, con sus dedos... y utilizar esas colecciones analógicas para resolver el problema al menos parcialmente, con un procedimiento probablemente muy "primitivo" y de alcance muy local.

B. Las modalidades de las representaciones simbólicas

El niño se desprende de la representación icónica para interesarse ahora sólo en las relaciones entre los objetos. Entre las representaciones simbólicas, se encuentran modos de representación esquemáticos (diagramas de Venn, esquemas con flechas, cuadros, recta numérica, segmentos, tablas de proporcionalidad, etc.). Estos esquemas constituyen un medio para identificar con mayor claridad los objetos matemáticos decisivos para la conceptualización. Constituye una modalidad más abstracta y más rica en el plano operativo.

Encontramos finalmente las escrituras aritméticas que constituyen representaciones simbólicas particulares. Traducir el enunciado de un problema a una escritura numérica (del tipo ecuación para los problemas aritméticos) es una modalidad experta de representación que permite dar la respuesta solicitada a un menor costo. Esta modalidad supone la asimilación de las modalidades anteriores, traduce lo que normalmente se llama la adquisición del sentido del problema.

Estas representaciones simbólicas representan un papel que podría designarse como "en espiral": se apoyan en categorizaciones primitivas de diversas situaciones conocidas ya utilizadas, al mismo tiempo que posibilitan en el alumno el desarrollo de competencias para categorizar las situaciones nuevas que encuentra y, de esta manera, afinar las primeras categorías que sirven otra vez como apoyo para enriquecer las diversas clases de situaciones.

A cada una de estas modalidades se asocia una modalidad de representación mediante el lenguaje cuya función es múltiple: ayuda a la designación que permite la identificación de elementos de la situación y de sus relaciones, ayuda a la anticipación de los efectos y de las metas, ayuda al pensamiento, al razonamiento y a la inferencia, ayuda a la organización de la acción, planificación y control.

II.4. De la representación de la situación a la puesta en marcha de procedimientos de resolución

Descaves[11] insiste en el hecho de que construir la representación de un problema y calcular su solución son dos fases de la resolución que están en interacción, pero que no utilizan los mismos procesos mentales: proceso de categorización para la construcción de la representación, procesos calculatorios en el segundo caso. Plantea la hipótesis de que ciertos registros semióticos (esquemas, escrituras algebraicas) funcionan como interfases y pueden interpretarse primero como modelización de la situación y después como soporte que permite transformaciones simbólicas de los problemas.

[11] A. Descaves (1999), "Introduction du symbolisme à la fin de l'école élémentaire et au début du collège", en *Actes du 26 ième Colloque de la Corirelem*, Limoges, IREM du Limousin.

A continuación damos dos ejemplos que analiza A. Descaves para ilustrar lo anterior, según si la representación icónica de la situación está en concordancia con la escritura aritmética que traduce la solución, o si no lo está. Se trata del problema de Paul, que tenía 105 francos y gastaba 99, y del de María a quien, después de haber gastado 150 francos, todavía le quedaban 200 francos.

El problema de Paul es un caso de concordancia. En efecto, la escritura aritmética que representa el problema es idéntica a la que da la solución: 105 - 99 = ?

El cálculo efectivo de la solución depende por supuesto de los conocimientos empleados por los alumnos. Los procedimientos pueden ser muy numerosos y variados y pueden basarse en:

- la relación de concordancia con la representación mental icónica (figurativa o analógica);
- la transformación previa de la representación icónica (reciprocidad de transformaciones: lo que Paul tiene ahora, agregado a lo que ha gastado es 105 francos, por tanto 99 + ? = 105);
- una transformación de significado en el sistema aritmético del tratamiento (buscar $a - b$ equivale a encontrar lo que hay que agregar a b para obtener a);
- un sistema de transformaciones en el sistema de representación aritmética ($a - b = (a + n) - (b + n)$, por tanto, para calcular la diferencia 105 – 99 se puede calcular la diferencia 106 – 100);
- la ejecución de una técnica operatoria;
- transformaciones que operan sobre la representación aritmética del problema y sobre los conocimientos de numeración (–99 equivale a –100 + 1).

El problema de María es un caso de discordancia, puesto que la representación icónica es la de una disminución y, por tanto, una escritura aritmética que traduce este enunciado es del tipo ? – 150 = 200, en cambio, la escritura aritmética experta que representa la solución es 200 + 150 = ?

Por consiguiente, aquí la discordancia implica necesariamente transformaciones. Los procedimientos pueden basarse en diversos tipos de transformaciones:

- una transformación previa que opera sobre la representación icónica de la situación (¿cuánto hubiera conservado María si no hubiera ido de compras?);
- el tratamiento que opera sobre una representación esquemática del problema, por ejemplo:

- uso de la reversibilidad de las transformaciones: –150, +105 en un esquema sagital,
  –150
  ? → 200
- uso de la recta numérica
- uso de segmentos puestos uno detrás de otro que representan respectivamente el gasto o lo que queda, etcétera.
- el reconocimiento de una situación aditiva y el tanteo controlado, etcétera.

A partir de sus trabajos, A. Descaves propone una ayuda para pasar de la representación a la elaboración de un procedimiento de cálculo a través de un proceso algebraizante. Puesto que la construcción del procedimiento de cálculo requiere una transformación del significado dentro del sistema de representación o en el del tratamiento aritmético, Descaves plantea la hipótesis de que el hecho de poder nombrar la incógnita constituye en sí mismo una ayuda tanto para la comprensión del problema como de para su tratamiento. Además, la introducción y la utilización de escrituras matemáticas pueden tener, según él, un papel determinante como ayuda para la categorización de los problemas. Así, desde el CE2,[12] introduce una representación en un cuadro como soporte para la automatización de ciertas relaciones numéricas, el cual permite imaginar en una coherencia casi formal entre las tres escrituras: 6 + 4= 10, 10 – 4 = 6 y 10 – 6 = 4.

10	
6	4

Se dan entonces varios problemas y varias escrituras matemáticas, los alumnos deben vincular cada problema con las escrituras que lo traducen (un problema, varias escrituras posibles), después deben asociar cada problema a uno de los dos cuadros que le corresponden, lo que conduce a categorizar los problemas.

Por otra parte, si se parte de la hipótesis de que la modelización permite una mejoría en el tratamiento del problema, la pregunta es si sería razonable proponer a los alumnos un aprendizaje de la esquematización. A. Broner y el equipo de investigación ERES de Montepellier realizan actualmente un estudio sobre esa cuestión, apoyándose en las hipótesis siguientes:

[12] N de T: CE2 corresponde al tercer grado de primaria en México.

- Los esquemas desempeñan un papel de representaciones intermedias entre el lenguaje natural y el simbolismo matemático.
- Los esquemas no son ni necesarios ni indispensables para una resolución exitosa del problema; sin embargo, constituyen una ayuda eficaz para la representación y la resolución de problemas estándar difíciles o de problemas complejos que el maestro podría difícilmente proponer en un nivel escolar dado.
- Para ser eficaz, la esquematización supone una enseñanza en la que los esquemas se integran como herramienta de ayuda junto con las herramientas matemáticas, una enseñanza donde el lugar y el estatuto deben pensarse dentro de la progresión de aprendizaje y las situaciones propuestas.

Los primeros resultados parecen mostrar que si bien los alumnos que ya lograban resolver problemas sin utilizar los esquemas no siempre los utilizan en la resolución de nuevos problemas después de la enseñanza específica de la esquematización, algunos de los que no lograban desarrollar procedimientos de resolución antes de la enseñanza se apropian de este procedimiento con éxito.

En la Teoría de las Situaciones, G. Brousseau[13] plantea la hipótesis de que "el sentido de un conocimiento proviene en gran parte del hecho de que el alumno adquiere este conocimiento adaptándose a las situaciones didácticas que le son devueltas" y admite también que "para todo conocimiento existe una familia de situaciones susceptible de darle un sentido correcto". Precisa que "en ciertos casos, existen algunas situaciones fundamentales accesibles al alumno en un momento dado que le permiten construir, en relativamente poco tiempo, una concepción correcta del conocimiento (...)". A partir del ejemplo de la enseñanza de la sustracción, G. Brousseau[14] propone una situación fundamental, la cual, según afirma, permite construir a la vez el sentido correcto de la sustracción y los procedimientos de resolución. Se trata de "el juego de la caja". Para describir esta situación que se desarrolla en 17 sesiones, G. Brousseau empieza por insistir en la necesidad de devolver a los alumnos no únicamente el problema sino también la pregunta, y muestra cómo pueden aprovechar las fases adidácticas en la situación didáctica elaborada por el maestro, de manera que se logre que el alumno se responsabilice del conocimiento que va a adquirir. La articulación del sentido y de la técnica se trata mediante la consideración de los procedimientos empíricos

[13] G. Brousseau (1998), *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, p. 73.
[14] *Ibid.*

utilizados por los alumnos en las fases de acción, mediante su evolución a lo largo de un periodo de tiempo largo, gracias a un juego sobre las variables de comando que están a disposición del maestro, y mediante la institucionalización de una técnica oficial cuando ya se ha efectuado un trabajo importante sobre la cuestión.

Aquí el punto de vista de R. Douady sobre la herramienta dialéctica aporta elementos interesantes para comprender el paso de los procedimientos de cálculo empíricos, en cuanto herramientas de resolución, a la utilización de procedimientos expertos de cálculo reflexivo o algoritmizado, es decir, a objetos de saber.

Podemos mencionar también aquí las ideas de R. Brissiaud para ayudar a los alumnos a establecer procedimientos de cálculo expertos. Brissiaud concede especial importancia a las relaciones de concordancia o de discordancia entre la representación inicial de un problema y la economía de su resolución numérica. Considera que se trata aquí de un fenómeno que permite precisar los interjuegos de la conceptualización aritmética y elaborar situaciones de aprendizaje. Brissiaud dice que hay concordancia en un enunciado como "Juan tiene 105 francos, gasta 6 francos, ¿cuánto tiene ahora?", puesto que el resultado de la operación 105 – 6 puede determinarse por un conteo regresivo de manera económica y, por tanto, sin un procedimiento de cálculo de la sustracción. De la misma manera, el problema "un niño compra tres chocolates a 50 francos cada uno, ¿cuál es el precio total?" es un caso de concordancia pues 3 × 50 puede calcularse de manera económica, mediante 50 + 50 + 50. En cambio, hay discordancia en los casos siguientes: "Juan tiene 105 francos gasta 67, ¿cuánto tiene ahora?", o bien, "un niño compra 50 chocolates a 3 francos cada uno ¿cuál es el precio total?", porque el procedimiento de cálculo experto es económico con respecto a los procedimientos empíricos. Brissiaud plantea entonces la hipótesis de que, para que haya aprendizaje, el primer encuentro con una operación debe ser en una situación de discordancia y que, por tanto, conviene enseñar el procedimiento experto en el caso de discordancia. Podría pensarse *por el contrario* que es precisamente el juego sobre las variables numéricas lo que va a permitir una evolución de los procedimientos empíricos hacia procedimientos más elaborados, es decir expertos, sin pérdida de sentido, y que la utilización por parte del alumno de un procedimiento experto en un caso de discordancia podría ser una manifestación de la comprensión de ciertas propiedades de la operación.

Por otra parte el sentido de un problema no es el sentido de un concepto, inferir la construcción del sentido solamente del primer encuentro es tal vez un poco reductor de la manera en la que se puede construir el sentido de un concepto. Estas cuestiones deben seguir siendo estudiadas.

Las investigaciones de D. Butlen y M. Pezard[15] muestran el impacto de una práctica regular de cálculo mental sobre las competencias de los alumnos en la resolución de los problemas aritméticos. En efecto, si el cálculo mental aporta de manera natural un mejor dominio de los cálculos e interviene como una herramienta de previsión o de control, abre paralelamente un espacio de libertad en la búsqueda del modelo, permitiendo tomar cierta distancia con respecto a los datos numéricos y una exploración más cómoda de las relaciones entre los datos. Los autores concluyen: "el aporte de cálculo mental se vincula con la heurística en la medida en que ayuda al alumno a adquirir estrategias de resolución de problemas numéricos".

Finalmente tres tipos de tareas contribuyen a mejorar de manera significativa la resolución de problemas aritméticos en el caso de muchos alumnos:

- El entrenamiento regular en la utilización de diferentes procedimientos de cálculo basados en diferentes significaciones de las operaciones.
- La adquisición de automatismos en la producción de relaciones numéricas.
- El entrenamiento para hacer explícitas las elecciones de las operaciones y de los procedimientos de cálculo empleados en la resolución, esto con diferentes registros de escritura.

II.5. El papel del maestro

Desde un punto de vista práctico, es muy compleja la tarea, delegada al maestro, que consiste en seleccionar o construir clases de problemas que permitan a los alumnos construir un concepto tal como el de una operación aritmética. Para intentar llevar esta tarea a buen término, es importante que el maestro tenga en cuenta cierto número de parámetros sobre los cuales puede maniobrar. Algunos de éstos han sido objeto de amplios comentarios en el presente texto, mientras que otros sólo se han mencionado. Desde nuestro punto de vista, el parámetro fundamental es la estructura del problema. El análisis de esta estructura, la identificación de la subcategoría dentro de la estructura dada, que es función del elemento que se busca, permite ubicar con precisión los conocimientos en juego, entrever *a priori* los procedimientos de los alumnos y, en consecuencia, preparar

[15] D. Butlen y M. Pezard (2000), "Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège", *Revue Repères Inter-IREM,* París, pp. 5-24.

las ayudas que puedan ser necesarias. Este análisis permite construir una progresión a mediano y largo plazo con el propósito de cubrir lo más posible el campo de problemas susceptibles de ser planteados y, por tanto, permite aproximarse al concepto bajo sus múltiples aspectos. Este análisis, finalmente, lleva a proponer evaluaciones adecuadas al trabajo ya efectuado con los alumnos.

Los valores numéricos constituyen el segundo parámetro fundamental, pues, por una parte, haciéndolos variar, el maestro podrá adaptar el problema a sus alumnos y, por otra parte, podrá propiciar la evolución de sus procedimientos de resolución. El docente puede hacer elecciones con respecto a la naturaleza de los números (enteros, decimales, fracciones), con respecto a sus características aritméticas (paridad, divisores primos, relaciones con la base de numeración, etc.), con respecto a su tamaño y a su tamaño relativo y con respecto a la naturaleza de las magnitudes que representan. Por supuesto, es fundamental un análisis del texto del problema, como texto escrito: las características lingüísticas del enunciado (vocabulario, presencia de operadores semánticos, sintaxis, puntuación), su organización (isomorfismo o no, isomorfismo entre la estructura temporal del enunciado y la de la situación evocada), el lugar de la pregunta, todo ello tiene una incidencia importante en la construcción de la representación del problema por parte del alumno. Finalmente, la elección de contextos más o menos vinculados a campos de experiencia de los alumnos puede facilitar o, por el contrario, dificultar esta construcción.

CONCLUSIONES

La aportación de la teoría de campos conceptuales asociada a una reflexión sobre la organización didáctica que tiene en cuenta, a la vez, las funciones epistemológicas de los conceptos, la significación social de los dominios de experiencia a los que éstos hacen referencia, las interacciones entre los actores de la situación didáctica y, en consecuencia, el contrato, es fundamental para llevar a los alumnos a construir el sentido de las "operaciones", proponiéndoles problemas que cubren, tanto como se pueda, una gran variedad de categorías. Queremos insistir en la fuerte imbricación que hay entre la adquisición del sentido de un problema y los procedimientos de resolución que los alumnos ponen en funcionamiento, ya que hemos visto que las tentativas de resolución tienen influencia en la representación del problema y, en consecuencia, que estos procedimientos, aunque sean arcaicos, contribuyen a la construcción del sentido. Insistimos, igualmente, en la necesidad de que el profesor juegue con las variables de las situaciones para hacer evolucionar las técnicas empíricas hacia técnicas más expertas de cálculo reflexivo o algoritmetizado. También quedó planteado el asunto del peso respectivo del trabajo sobre el sentido y de éste sobre la adquisición de técnicas. Pero el sentido y el funcionamiento automático de los conocimientos no se oponen, todo lo contrario, es indispensable tener un funcionamiento automático sobre ciertos puntos para liberar espacio de trabajo en la memoria y abordar así objetos nuevos. Cuando el profesor decide poner orden en estas técnicas diversas y pasar a una fase de institucionalización de una técnica convencional oficial, es posible regresar al sentido, preguntándose por los mecanismos movilizados en la técnica y en su justificación matemática; el funcionamiento automático que se alcanza con fines de aprendizaje necesita, a su vez, la puesta en marcha de medios de control que se apoyen en el sentido.

Finalmente, sólo se puede estar seguro, en términos prácticos, de que un alumno dispone de un concepto matemático con suficiencia de sentido, cuando es capaz de movilizarlo sin ayuda en situaciones suficientemente complejas en las que entra en juego el concepto, y de utilizar los diferentes teoremas asociados. Esto requiere que el alumno haya tenido, con suficiente frecuencia, la ocasión de tener que actuar bajo su propia responsabilidad sobre este tipo de problemas, y que haya tenido que plantearse preguntas fundamentales en relación con el sentido del concepto. Sólo a largo plazo se puede construir tal aprendizaje.

ANEXO 1

Tipología de G Vergnaud[16] relativa a las estructuras aditivas

En la escuela elemental, los problemas aditivos se localizan, esencialmente, en las tres primeras estructuras:

- Composición de dos medidas
  En esta familia se encuentran esencialmente los problemas de reunión o de fraccionamiento de colecciones o de magnitudes medibles. Según que se busque el todo o una de las partes, la operación experta asociada es una adición o una sustracción.

[16] Tomada del libro *Le moniteur de mathématiques, Résolution de problèmes,* bajo la dirección de G. Vergnaud, Nathan (1997), p. 16.

- Relación de transformación de estados
  Se trata de enunciados que describen situaciones que se desarrollan a menudo en el tiempo, en las que se puede identificar un estado inicial y una transformación (positiva o negativa) que opera sobre este estado para llegar a un estado final. Esta estructura permite definir seis categorías de problemas, según si la transformación es positiva o negativa y si la búsqueda lleva al estado final, a la transformación o al estado inicial.
- Relación de comparación aditiva
  Dos estados relativos a dos magnitudes medibles o localizables se comparan de manera aditiva, donde una de las magnitudes desempeña el papel de referente de la otra. La relación se enuncia mediante las expresiones "de más" o "de menos". En esta familia se encuentran, igualmente, seis categorías según si la relación es positiva o negativa, y si la pregunta lleva a la búsqueda del referido, de la comparación o del referente.

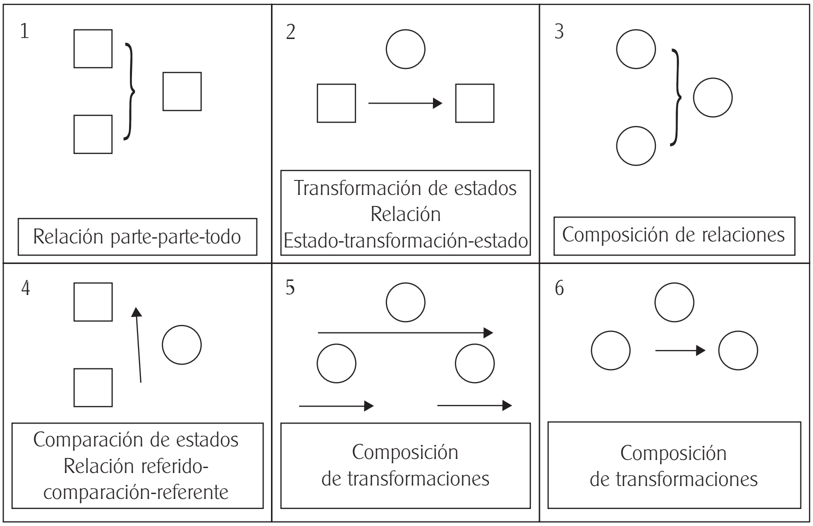
Entre las otras estructuras se encuentran:

- Las composiciones de transformaciones
  Dos transformaciones o más se aplican sucesivamente a estados desconocidos (porque si fueran conocidos, caerían en la familia de "relaciones de transformación"). La transformación única, compuesta de estas transformaciones, permite transformar el estado inicial en el estado final obtenido después de la aplicación de todas las transformaciones implicadas.

  En esta familia, el número de subcategorías depende del número de transformaciones compuestas; en el caso de dos, se pueden definir doce subcategorías según si las transformaciones compuestas son del mismo signo (dos casos), de signos opuestos (dos casos, según si la composición es positiva o negativa), y si la pregunta lleva a la determinación de la composición o de una de las dos transformaciones (tres casos).
- Las composiciones de relaciones
- Las comparaciones de transformaciones

Estos dos últimos casos pueden describirse de manera análoga a los anteriores. No aparecen prácticamente en ningún problema planteado en la escuela elemental.

Cuadro de las relaciones aditivas



Algunos ejemplos de problemas aditivos

Matilde gastó 149 F al comprar un casete de 68 F y un libro. ¿Cuál es el precio del libro?	Composición de dos medidas. Se conoce una medida y la composición, se busca la otra.
En el salón hay 42 mesas y 27 sillas. ¿Cuántas sillas es necesario traer para que haya una silla para cada mesa?	Transformación de estados. Se busca la transformación necesaria para que del estado inicial 27, se obtenga el estado final 42 definido por el cardinal de una colección de referencia (las mesas).[17]
Kevin tiene 145 timbres en su colección. Víctor tiene 20 más. ¿Cuántos timbres tiene Víctor?	Comparación positiva entre dos estados. Se busca el estado referido
Hoy hay 15° de temperatura en París, es decir, 12° menos que en Niza. ¿Cuál es la temperatura en Niza?	Comparación negativa entre dos estados. Se busca el estado referente.
En un puesto de la feria, Laura probó suerte dos veces seguidas. La primera vez, perdió 17 puntos. En total, ganó 50 puntos. ¿Qué pasó la segunda vez?	Composición de dos transformaciones, se conoce la primera transformación (negativa) y la composición (positiva), se busca la segunda.

[17] R. Brissiaud define una categoría particular para este tipo de problemas que designa "problemas de igualación". Por nuestra parte, consideramos que se trata de un caso particular de problemas de transformación.

ANEXO 2

Tipología de G. Vergnaud relativa a las estructuras multiplicativas

La comparación multiplicativa de magnitudes

En esta categoría, se encuentran los problemas que utilizan una única magnitud (medible o localizable) y dos estados relativos a esa magnitud, los cuales son objeto de la comparación multiplicativa: uno representa el papel de referente del otro. La relación numérica de comparación es entonces una relación de naturaleza escalar (sin dimensión) que se enuncia mediante las expresiones "tantas veces más", "tantas veces menos", de las que se dice que son difíciles de comprender por el hecho de que se yuxtapone un término que alude al dominio multiplicativo y otro que remite al dominio aditivo.

Se puede pensar en seis subcategorías, según si la relación multiplicativa se define por un coeficiente mayor o menor que 1, y si la pregunta lleva a la búsqueda del referido, de la comparación o del referente.

La proporcionalidad simple

Las situaciones correspondientes a esta categoría pueden representarse mediante tablas numéricas y están asociadas a una función lineal (función "multiplicar por" o "dividir entre"), conducen a realizar ya sea una multiplicación, una división, una división cociente, o una "regla de tres", es decir, buscan la cuarta proporcional.

En estos problemas se utilizan dos dominios de magnitudes y una relación funcional multiplicativa entre éstos. A menudo, en los problemas de esta categoría parece que sólo intervienen dos números, de hecho, también interviene la unidad, aunque con frecuencia no aparece explícitamente como su número ("¿cuál es el costo de 8 cuernitos de 4F cada uno?").

Para resolver estos problemas, el razonamiento puede pasar por el coeficiente de proporcionalidad entre las dos magnitudes; o por las propiedades de linealidad de la función lineal asociada:[18] multiplicación por un escalar o propiedad de aditividad.

[18] Una función lineal f de R en R es una función que a todo número real x le asocia el número ax, que se obtiene multiplicando el número x por el coeficiente a llamado coeficiente de la función lineal (corresponde al coeficiente de proporcionalidad).

Se llama propiedades de linealidad a las dos propiedades siguientes:

Proporcionalidad simple compuesta

En estos problemas intervienen tres magnitudes; se definen dos relaciones de proporcionalidad simple y la situación conduce a componer estas dos relaciones de proporcionalidad.

Este caso lleva a numerosos problemas según si los elementos se dan o se buscan.

La proporcionalidad doble (o múltiple)

Los problemas de proporcionalidad doble (o múltiple) son problemas en los que intervienen dos dominios de magnitudes (o más) que son independientes (no hay ninguna relación funcional entre ellos) y tales que una relación asocia a una pareja (o a una n-ada) de medidas de cada magnitud una tercera (o una $n + 1$-ésima) magnitud llamada magnitud producto.

Entonces, es fundamental determinar la imagen de la pareja (o de la n-ada) de las unidades de las dos (o n) magnitudes. Esta imagen puede ser la unidad de la magnitud producto u otra magnitud.

Las magnitudes pueden ser discretas o continuas.

El caso particular de la búsqueda de la relación entre el cardinal del producto cartesiano[19] de dos conjuntos finitos y el cardinal de cada uno de ellos corresponde a dos magnitudes discretas para las que la imagen de la pareja (1, 1) es igual a 1. En esta categoría se encuentran los problemas del número de cuadrados de una cuadrícula rectangular y, de manera general, los problemas que corresponden a una composición multiplicativa de dos magnitudes discretas.

La relación entre la medida del área de un rectángulo y las de las longitudes de sus lados pertenece igualmente a este caso. Aquí, las magnitudes son continuas y la imagen de la pareja (1, 1) es 1 y, entonces, la de la pareja (x, y) es xy.

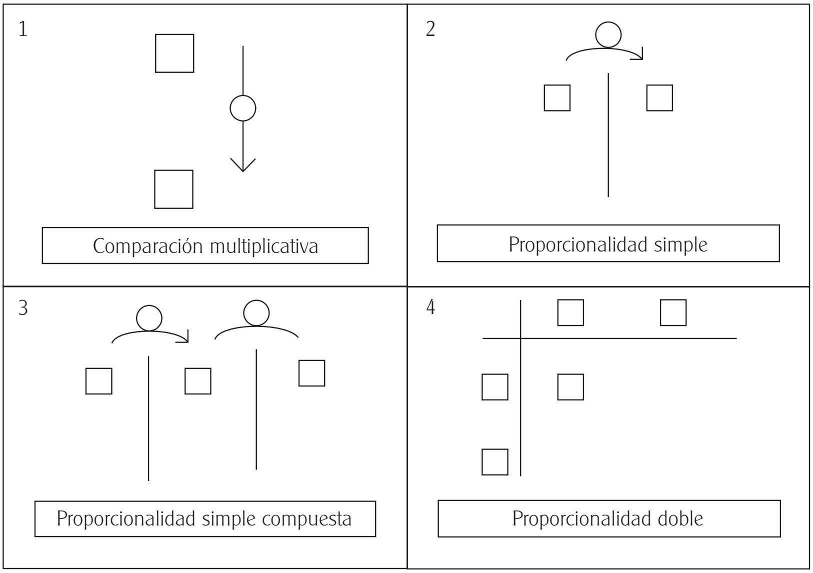
En el caso general, si la imagen de la pareja (1, 1) es el número real α, la imagen de la pareja (x, y) es αxy.

Para todo par (x, y) de números reales, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Para todo real x, y para todo escalar real λ, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

[19] El producto cartesiano de dos conjuntos es el conjunto de todas las parejas posibles cuya primera coordenada es un elemento del primer conjunto y la segunda, un elemento del segundo conjunto.

Cuadro de relaciones multiplicativas



EJEMPLOS DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS

Un ciclista hace un recorrido en una pista de 350 m, si da 2 vueltas a la pista por minuto, durante 25 minutos ¿qué distancia recorre?	Proporcionalidad simple compuesta
Para transportar 840 huevos, un mayorista utiliza 7 cajas en las que puede poner bandejas de 24 huevos. ¿Cuántas bandejas pone en cada caja?	Proporcionalidad simple compuesta
Un restaurante hace un pedido por 540 F de botellas de agua mineral de 3 F la botella; las botellas vienen en paquetes de 12. ¿Cuántos paquetes recibirá?	Proporcionalidad simple compuesta
Para disfrazar a un payaso se tienen 5 sombreros y 12 trajes ¿de cuántas maneras diferentes se puede disfrazar el payaso?	Caso particular de proporcionalidad doble: búsqueda del cardinal de un producto cartesiano, la imagen de la pareja (1, 1) es 1.
Un rectángulo cuadriculado está compuesto de 48 cuadrados, sobre su largo hay 8 cuadrados, ¿Cuántos cuadrados hay sobre su ancho?	Caso particular de proporcionalidad doble: búsqueda del cardinal de un producto cartesiano, la imagen de la pareja (1, 1) es 1.

La pensión en un hotel es de 250 F por persona y por día. ¿Cuánto pagará un grupo de 5 personas por una estancia de 17 días?	Proporcionalidad doble: la imagen de la pareja (1, 1) es 250
Un terreno rectangular mide 120 m de largo y 47 m de ancho. ¿Cuál es su área?	Caso particular de proporcionalidad doble: búsqueda del cardinal de un producto de dos medidas, la imagen de la pareja (1, 1) es 1.
Para regar los árboles de su huerta, un productor de frutas utilizó 560 litros de agua en 7 días. Se necesitan 8 litros de agua por árbol por día. ¿Cuántos árboles hay en la huerta?	Proporcionalidad doble, la imagen de la pareja (1, 1) es 8.
En una caja de chocolates, hay 6 chocolates amargos y 3 veces más chocolates con leche. ¿Cuántos chocolates con leche hay?	Comparación multiplicativa
En el grupo A, hay 15 niños, tres veces menos que en el grupo B. ¿Cuántos niños hay en el grupo B?	Comparación multiplicativa
Juan tiene 54 canicas y Pedro tiene 18, ¿cuántas veces menos que Juan?	Comparación multiplicativa
Un objeto cuesta 18 F en el supermercado y, en la tienda del barrio, 27 F ¿cuántas veces más que en el supermercado?	Comparación multiplicativa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1984), *Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques,* tesis de doctorado de Estado, París VII.

Brissiaud, R. (1998), *Le progrès en arithmétiques : continuités et ruptures avec l'expérience quotidienne. L'articulation entre le calcul et la résolution de problèmes: quatre attitudes pédagogiques,* libro del maestro del manual escolar *J'apprends les maths,* CM1, Retz, París, pp. 4-27.

Brousseau G. (1989), *RDM 9/3,* Grenoble, La pensée sauvage, p. 327.

—— (1998), *Théorie des situations didactiques,* Grenoble, La pensée sauvage, p. 73.

Brun, J. (1990), "La résolution de problèmes arithmétiques-Bilan et perspectives", *Math-Ecole,* Neufchatel, núm. 141.

Butlen D. y M. Pezard (2000), "Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège", *Revue Repères Inter-IREM,* París, pp. 5-24.
Descaves, A. (1999), "Introduction du symbolisme à la fin de l'école élémentaire et au début du collège", en *Actes du 26ème Colloque de la Corirelem,* Limoges, IREM du Limousin.
—— (2001), "L'apprentissage du sens, certes! mais dans quel sens prendre le sens", en *Actes du 28ème Colloque de la Copirelem,* Tours, Orleans, PUO.
Douady, R. (1986), "Jeux de cadre et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques", *RDM 7.2,* Grenoble, La pensée sauvage.
Fabre, M. (1999), *Situations problèmes et apprentissages scolaires.* París, PUF.
Julo, J. (1995), *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques,* PUR.
Vergnaud, G. (1990), "La théorie des champs conceptuels", *RDM 10.2.3,* Grenoble, La pensée sauvage.
—— (1994), "Le rôle de l'enseignant à la limite des concepts de schème et de champ conceptuel", *Vingt ans de Didactique des mathématiques en France,* bajo la dirección de M. Artigue, Grenoble, La pensée sauvage.
—— (1997) (dir.), *Le moniteur de mathématiques, Résolution de problémes.* Francia, Nathan.

DATOS DE LA AUTORA

Marie-Lise Peltier Barbier

Maestra de conferencias en didáctica de las matemáticas, IUFM, de Rouen, Francia

marie-lise.peltier@rouen.iufm.fr

Capacidad espacial y educación matemática: tres problemas para el futuro de la investigación

Modesto Arrieta

Resumen: Desde los años cincuenta los educadores matemáticos han estado interesados en la capacidad espacial, debido principalmente a su relación con la matemática en general y la geometría en particular. Términos como pensamiento espacial, visualización, orientación espacial... han sido tratados sin un modelo teórico de referencia, lo que dificulta la obtención de conclusiones válidas.

Se proponen tres problemas para el futuro de la investigación: La necesidad de un modelo que haga referencia a la estructura factorial, a los procesos cognitivos y a las estrategias utilizadas en las tareas espaciales; la necesidad de otro modelo de desarrollo de los contenidos geométricos asociados a la capacidad espacial; y la necesidad de un modelo de propuesta didáctica que nos permita elaborar propuestas coherentes y eficaces.

Palabras clave: Capacidad espacial, orientación espacial, visualización, geometría.

Abstract: Ever since the 50s, mathematics tutors have been interested in spatial ability, mainly, due to its connection to performance of mathematics in general and in geometry in particular. Terms such as spatial thought, visualization, spatial orientation, have been dealt with, without having a model on which to fall back on, which has brought about such variety of names, concepts and tests from carried out research that makes it extremely difficult to obtain valid conclusions.

Three problems for the future of the investigation are proposed: The need of a model that do reference to the structure factorial, to the cognitive processes and to the strategies utilized in the spatial tasks. The need of another development model of geometrics concepts associated to the spatial ability and the need of a didactics model that permit us to elaborate efficient and coherent proposals.

Keywords: Spatial ability, spatial orientation, visualization, spatial thought.

Fecha de recepción: febrero de 2002.

INTRODUCCIÓN

De la importancia de la Capacidad de Visualización Espacial en la Educación Matemática dan fe las investigaciones desarrolladas a lo largo de estos últimos años y cuyos resultados más relevantes vienen discutidos en las revisiones realizadas por Bishop (1980, 1989), Clements y Battista (1992), Clements (1998) y Gutiérrez (1998).

Esta importancia proviene de la necesidad teórica y práctica para entender cómo los individuos representan mentalmente el mundo físico y que éste está centrado en la existencia de varias capacidades espaciales (asociadas al hemisferio derecho del cerebro), que se diferencian de las capacidades verbales (asociadas al hemisferio izquierdo) y, aunque la identificación del factor espacial tiene sus raíces en el estudio de la aptitud mecánica (Stenquist, 1922; Cox, 1928) y la capacidad práctica (Kohs,1923; Mac-Farlane, 1925), desde 1925 numerosos estudios factoriales han identificado un factor espacial matemáticamente distinto de la capacidad verbal, el cual Kelley (1928) describió como la capacidad de manipular mentalmente figuras (véase McGee, 1979).

Pero no es hasta los años cincuenta cuando los educadores matemáticos se interesan por dicho campo y relacionan la capacidad espacial con la capacidad matemática. Murray (1949), Barakat (1951) y Wrigley (1958) encuentran que la capacidad de resolver tests espaciales correlaciona más alto con la capacidad en geometría que en álgebra. Mac-Farlane (1964) argumentó que la capacidad espacial era esencial para la capacidad matemática al igual que Fennema (1979) y Tartre (1990), que también reconocen la relación de la capacidad espacial con las matemáticas.

¿PARA QUÉ ES NECESARIA LA CAPACIDAD ESPACIAL?

Los currícula de la enseñanza obligatoria dan fe de esta finalidad, ya que al estudio de la Matemática se le reconoce el desarrollo de la capacidad intelectual de los sujetos. Además, el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico. Así lo creían Hadamard y Einstein, que lo consideraban esencial para el pensamiento creativo en todos los niveles de matemáticas (Lean y Clements, 1981). Además el pensamiento espacial está relacionado con la geometría tal como lo indican Suydam (1985), Usiskin (1987) y el National Council of Teachers of Mathematics (1989), y se utiliza para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas (véase Clements y Battista, 1992).

Además, en algunas profesiones esta habilidad es imprescindible: por ejemplo, para un escultor, un dibujante, un ingeniero, un arquitecto, un topógrafo.... ya que es difícil imaginar el progreso en estos dominios sin una habilidad visoespacial especialmente desarrollada y, con frecuencia, las medidas de capacidad espacial son las únicas que discriminan para ciertos cursos gráficos y de diseño de ingeniería o en trabajos como mecánico, arquitecto o piloto.

¿POR QUÉ ELEGIMOS LA CAPACIDAD ESPACIAL?

¿Por qué elegimos la capacidad espacial en detrimento de la capacidad numérica o de la capacidad de razonamiento? Evidentemente, todas estas capacidades que tienen una relación directa con el estudio de la Matemática, sobre todo en edades elementales, son susceptibles de estudio y análisis por parte de los educadores matemáticos, pero se constata un déficit de instrucción en contenidos matemáticos asociados a la capacidad espacial que conviene compensar.

El desarrollo de la aptitud numérica ha sido impulsado en todos los currícula sin distinción, ya que el Bloque Temático de Aritmética dedicado a Números y Operaciones nunca ha sido puesto en entredicho. El desarrollo de la Capacidad de razonamiento lógico tampoco se ha puesto nunca en duda y ha tenido un lugar preponderante en los diferentes niveles educativos, aunque su tratamiento siempre ha tenido el problema de la falta de explicitación como contenido matemático, pues se asocia a la demostración y al uso de estrategias en la resolución de problemas.

Por el contrario, los contenidos geométricos asociados a la capacidad espacial sí han tenido durante años un déficit de tratamiento, ya que en los años de implantación de la Enseñanza General Básica, prácticamente desapareció de los planes de estudio en las décadas de los sesenta y setenta, debido al impulso de la llamada "Matemática moderna", a su formalismo y a la algebrización de la geometría.

Como botón de muestra basta citar el libro de Brueckner y Bond (1981), *Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el aprendizaje,* todo un clásico que trata del diagnóstico y tratamiento de las dificultades de lenguaje en su vertiente lectora, escritora... pero en lo que a las matemáticas se refiere sólo trata las dificultades aritméticas y las de la resolución de problemas asociados sin mencionar las dificultades geométricas.

En el *Manual de* IGF*-inteligencia general y factorial* (Yuste, 1997), se menciona que la correlación de la aptitud espacial con lengua, inglés, matemáticas, naturales y sociales es la menor de las correlaciones de entre todas las aptitudes consideradas. De ahí que de las cuatro capacidades primarias: razonamiento abstracto, aptitud espacial, razonamiento verbal y aptitud numérica, la aptitud espacial es la que menos relación tiene con todas y cada una de las áreas del currículum, incluida la matemática. Esto nos indica la menor relación del área de matemáticas con la aptitud espacial y justifica el empeño de dedicar nuestro tiempo y esfuerzo al análisis de dicha capacidad y paliar en lo posible este déficit.

Clements y Battista (1992) dan cuenta de la poca atención instruccional en los Estados Unidos, así como Herskowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996) destacan el déficit instruccional y señalan que la educación visual se descuida a menudo en el currículum.

En los años ochenta se ha intentado comprender mejor los fenómenos ligados al aprendizaje y se le ha dado mayor importancia a la generación de imágenes mentales adecuadas para el desarrollo de habilidades como la visualización matemática en la resolución de problemas.

En España, es a partir de los Programas Renovados de 1985 cuando la capacidad espacial vuelve a adquirir una importancia análoga al resto de las capacidades, al incluirse los conceptos propios de una geometría más intuitiva y práctica.

También interesa destacar que últimamente se está detectando una mejora en la aptitud espacial de los alumnos debido, seguramente, a la "cultura" de la TV y al uso de máquinas electrónicas, ordenadores, juegos electrónicos tipo "tetris", calculadoras gráficas... con mayor presencia de lo visoespacial, aunque todavía se detecta un menor aprovechamiento escolar en matemáticas debido, seguramente, a la menor presencia de todo lo espacial y geométrico en los programas escolares (Hidalgo, Maroto, Palacios, 1999).

¿QUÉ NOS INTERESA DE LA CAPACIDAD ESPACIAL?

Adentrarse en el tema de la capacidad de visualización espacial supone adentrarse en un tema controvertido y aparentemente anárquico, pues difícilmente dos investigadores se ponen de acuerdo en conceptos básicos y fundamentales como: capacidad espacial, visualización, orientación espacial, relaciones espaciales, pensamiento espacial... Lohman *et al.* (1987) identifican algunos de estos problemas:

- Idénticos tests aparecen con diferentes nombres en diferentes estudios.
- Tests con el mismo nombre son a veces diferentes.

- El formato y la administración pueden alterar la composición factorial de un test.
- Más importante es la omnipresente diferencia en el factor de extracción y criterio de rotación usados por diferentes investigadores incluso por el mismo investigador

De ahí que, antes que nada, debemos poner un poco de orden en esta aparente maraña de conceptos y, en la medida de lo posible, proponer una estructura con las suficientes garantías teóricas y empíricas que nos permitan situar la capacidad espacial de tal manera que las investigaciones posteriores puedan trabajar con conceptos y pruebas unificadas y replicables.

Históricamente, las capacidades espaciales son las primeras que fueron medidas usando materiales concretos. La aplicación de tests de papel-y-lápiz a grupos (dictado por conveniencia y no por teoría) alteró más sustancialmente la medida de las capacidades espaciales que la medida de las capacidades verbales.

Pero seguramente el problema más complejo es el de que los sujetos pueden utilizar diferentes estrategias en el mismo test. Esto complica enormemente la interpretación conjunta de estudios correlacionales y de procesamiento de la información de la capacidad espacial.

La falta de un modelo teórico, tanto de factores como de procesos y estrategias, ha dificultado enormemente un avance en el estudio de la capacidad de visualización espacial y, como dicen Lohman *et al.* (1987), quizás el único camino para resumir toda la literatura es reanalizar estudios desde una perspectiva teórica común.

1er PROBLEMA: ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA DE LA CAPACIDAD ESPACIAL REFERIDA A FACTORES, A LOS PROCESOS COGNITIVOS ASOCIADOS Y A LAS ESTRATEGIAS UTILIZADAS EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS ESPACIALES

FACTORES

Terman y Merrill (1916) fueron los primeros en presentar la capacidad espacial de manera explícita, describiendo las pruebas que hacen referencia a diferentes aspectos de la capacidad espacial: reconocimiento de objetos por su imagen, discriminación de formas, doblado de papel, orientación...

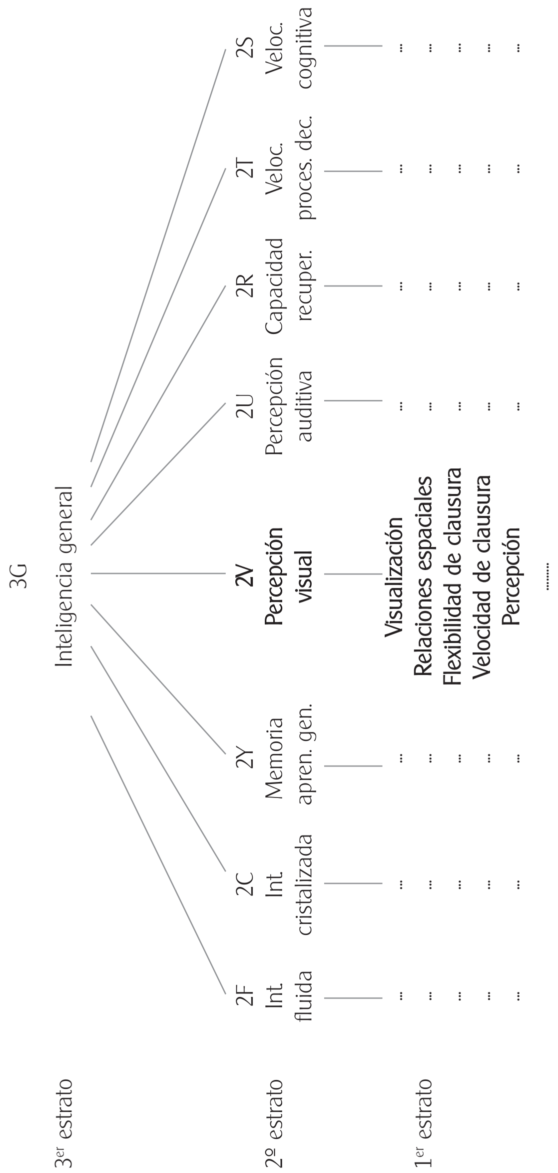
Spearman (1904, 1927), al observar correlaciones positivas entre tests mentales aplicados a una muestra de sujetos, sugirió que los tests no miden atributos totalmente independientes del funcionamiento mental y estableció un modelo bifactorial que contiene un factor común, general o factor "g" y otros factores específicos. Thurstone (1938) propuso siete factores independientes, entre los que figuraba un factor de visualización espacial que implicaba visualización de formas, rotación de objetos... Negó la existencia del factor "g" ya que la rotación ortogonal impedía la obtención de "g" como factor de 2º orden, aunque con rotación oblicua, obtuvo un factor de 2º orden que podía ser interpretado como el factor "g" de Spearman. Otros investigadores, como Burt (1949), Vernon (1950), Guilford (1967) y Cattell (1971), propusieron sendos modelos jerarquizados en diferentes niveles.

En los últimos veinte años ha habido intentos de revisar modelos anteriores y se ha tratado de unificarlos. Se considera el modelo de los tres estratos de Carroll (1988, 1993, 1994) como la síntesis final de muchas investigaciones realizadas en la literatura científica desde Spearman. Manejando 461 conjuntos de datos y utilizando las matrices de correlaciones iniciales con 2.272 factores de 1^er^ orden, 572 factores de 2º orden y 36 de 3^er^ orden el modelo de Carroll (Carroll, 1993) presenta la siguiente estructura factorial (pág. 63).

Los resultados evidencian la existencia de un factor 3G de inteligencia (el factor "g" de Spearman) que se constituye como un rasgo fuente que también fue incorporado por Vernon en su modelo y que se ha replicado 36 veces como factor de 3^er^ orden. Las aptitudes primarias de Thurstone se confirman en el 1^er^ estrato aunque aquí aparecen más (40 han podido ser replicados) y abarcan buena parte de los propuestos por Guilford. En el 2º estrato, la propuesta de Cattell y Horn obtiene apoyo suficiente (véase Carroll, 1993).

El equipo de trabajo de Horn (1985) ha estudiado la estructura de la inteligencia entre los 4 y 5 años y los 7 años. Para Horn, aunque en estas edades aparecen vestigios de la capacidad visoespacial como aptitud diferenciada, apenas puede diferenciarse de la inteligencia fluida.

A partir de los 6 años, la estructura de las aptitudes tiende a consolidarse en términos generales, tal y como la conocemos a través del modelo de los tres estratos. Bickeley, Keith y Wolfle (1995) evaluaron el modelo de los tres estratos. Para ello, tomaron una muestra de 2.201 sujetos subdividida en grupos de edad: 6, 8, 10, 13, 30-39, 50-59 y 70-79 y les aplicaron 16 tests que cubrían las aptitudes primarias. Los resultados indican que no aparecen cambios en la organización de la inteligencia a lo largo del ciclo vital (de los 6 a los 79 años).



3er estrato
3G
Inteligencia general
2º estrato
2F Int. fluida
2C Int. cristalizada
2Y Memoria apren. gen.
2V Percepción visual
2U Percepción auditiva
2R Capacidad recuper.
2T Veloc. proces. dec.
2S Veloc. cognitiva
1er estrato
Visualización
Relaciones espaciales
Flexibilidad de clausura
Velocidad de clausura
Percepción

No conozco todavía ningún estudio en Educación Matemática que tenga en cuenta esta estructural factorial. Permítaseme el atrevimiento de, por lo menos, poner sobre la mesa diferentes aspectos que me han llamado la atención y que tendremos que aclarar para poder hablar con propiedad de la capacidad espacial.

Si analizamos los factores de 1er orden correspondientes a la percepción visual descritos por Carroll (1993), llama la atención que no figure la orientación espacial. Lo dice explícitamente y señala que las pruebas o tests no lo distinguen de la visualización o de las relaciones espaciales.

Aunque la mayoría de los estudios desde la Educación Matemática relacionados con la capacidad espacial hacen referencia exclusivamente a la visualización (Fennema y Sherman, 1977; Battista *et al.*, 1982; Fennema y Tartre, 1985; Battista, 1990), también hay autores como Young y Becker (1977), Lean y Clements (1981), Mitchelmore (1980) y Bishop (1983) que, además de la visualización, también consideran otros factores como la flexibilidad de clausura, la velocidad de clausura o las relaciones espaciales. De todas maneras, hay que llamar la atención sobre el hecho de que estudios significativos y relevantes en Educación Matemática (Guay y McDaniel, 1977; Tartre, 1990) discriminan, al menos desde un punto de vista teórico, ambos factores:

Visualización: Aptitud para manipular objetos mentalmente (el objeto es lo que es manipulado por el sujeto).

Orientación espacial: Aptitud para imaginar un objeto desde otra perspectiva (el sujeto es el que cambia de posición ante el objeto).

Esta diferencia teórica, o por lo menos de matiz, entre ambos conceptos contrasta con los resultados empíricos de Carroll. Desde la Educación Matemática es un aspecto tan importante que necesitaría mejores y más potentes argumentos para decidir en uno u otro sentido.

Sorprende que los cinco factores citados aparezcan en el modelo ocupando el mismo nivel (1er estrato) sin que se proponga una jerarquía entre ellos, cuando un análisis de las pruebas en las que se basan los tests que hacen referencia a esos cinco factores parecen corresponderse con factores de muy diferentes niveles.

Al analizar las pruebas correspondientes a visualización o flexibilidad de clausura y ver su dificultad, se entiende que sean pruebas apropiadas para sujetos con edad superior a 11-12 años, lo que hace pensar que el modelo funciona bien a partir de esa edad, pero los estudios de Bickley *et al.* (1995) citados antes confirman la estructura de los tres estratos desde los 6 años (véase Carroll, 1993, p. 626).

Un análisis de las pruebas utilizadas por estos autores revela que las dos pruebas utilizadas para la capacidad espacial coinciden con la velocidad de clausura y la percepción, dos de las consideradas sencillas y por tanto aptas para edades tempranas. Este estudio corrobora la estructura de los tres estratos a partir de los 6 años, pero no aporta nada en la clarificación de la posible jerarquía entre los factores de 1er orden de la capacidad espacial.

Esto no quiere decir que la estructura de los tres estratos esté bajo sospecha, sino que, cumpliéndose el modelo de Carroll, sería posible ir un poco más lejos en esa estructura jerarquizando los factores de 1er orden, lo que nos ayudaría a los educadores matemáticos a entender mejor dicha capacidad y nos permitiría ser más eficaces en la ayuda que podamos prestar a nuestros alumnos.

Procesos cognitivos

El simple estudio de los factores, por muy jerarquizados que los podamos mostrar, nunca va a ser suficiente para un diagnóstico eficaz de nuestros alumnos, mientras no caractericemos dichos factores y asociemos a ellos los procesos cognitivos inherentes.

Los trabajos en este campo insisten en los procesos mentales de las tareas espaciales, en la rapidez y exactitud con la que se ejecutan esos procesos, en cómo se combinan estos procesos para la resolución de tareas, cuál es la base cognitiva organizada de estas formas de representación, cómo afecta, y cómo se ve afectada por los procesos, estrategias y representaciones que utilizan las personas.

Kosslyn (1980) propone una teoría general sobre el funcionamiento de la imagen mental en el sistema cognitivo, donde se establece una serie de procesos necesarios para la construcción de la representación imaginística y de procesos que deberían utilizarse para operar mentalmente con esa representación.

Las teorías cognitivas del procesamiento de la información aplicadas a la inteligencia pretenden explicar la inteligencia humana en términos de procesos mentales que contribuyen a la resolución de tareas cognitivas. Algunos investigadores han intentado controlar y medir los procesos que operan entre el estímulo y la respuesta, utilizando tareas experimentales cuyos resultados se han correlacionado con resultados en tests psicométricos tradicionales.

Destacan los trabajos de Cooper y Shepard (1973), Metzler y Shepard (1974) y Shepard (1975), donde la capacidad espacial es evaluada por tests de velocidad en los que el individuo debe decidir acerca de la identidad de una figura en 2D o 3D, rotándola mentalmente y comparándola con otra o varias.

Otros investigadores han estudiado formas muy complejas de resolución de problemas en las que se estudian la precisión y las estrategias de procesamiento utilizadas (Sternberg, 1985, 1988) e intentan detectar procesos cognitivos implicados en la resolución de tareas espaciales.

¿Son coherentes estos resultados con el modelo de Carroll? ¿Hasta qué punto podemos utilizar estos procesos cognitivos para caracterizar los factores?

Estrategias

Para Schmeck (1988), el estilo de aprendizaje es una predisposición para utilizar una estrategia particular de aprendizaje al margen de las demandas específicas de la tarea y en diferentes situaciones. La estrategia de aprendizaje es un conjunto de actividades de procesamiento de información que se utilizan para mejorar el aprendizaje. Para Schemeck, el estilo de aprendizaje es una instancia intermedia entre la personalidad y la estrategia de aprendizaje. El estilo no es tan específico como la estrategia ni tan general como la personalidad.

Para Sternberg (1999), un estilo es una manera de pensar. No es una aptitud, sino más bien una forma preferida de emplear las aptitudes que uno posee. Aptitud se refiere a lo bien que alguien puede hacer algo, estilo se refiere a cómo le gusta a alguien hacer algo. Sternberg clasifica los estilos de pensamiento según las funciones, las formas, los niveles, el alcance o las inclinaciones. Desgraciadamente, el análisis factorial confirmatorio no coincide estrictamente con el modelo teórico, ya que los estilos judicial y oligárquico se confunden en un mismo factor, cuando en el modelo teórico pertenece a categorías diferentes.

Desde la perspectiva de la Educación Matemática, Krutetski (1976) definió tres estilos:

- Analítico: los sujetos prefieren modos de pensamiento lógico-verbales en la resolución de problemas.
- Geométrico: los sujetos prefieren esquemas pictórico-visuales.
- Armónico: no tiene preferencia por uno u otro.

Suwarsono (1982) distingue dos tipos de personas:

- *Visualisers*: Individuos que prefieren usar métodos visuales cuando intentan resolver problemas que pueden resolverse utilizando métodos tanto visuales como no visuales.
- *Non-visualisers*: Sujetos que prefieren no usar métodos visuales... e indica que los mejores son *Non-visualisers* en *High School* y cita razones que justifican esos resultados. La Matemática, por su naturaleza deductiva, favorece al pensador no visual y si la componente verbal-lógica de pensamiento es una condición *sine-qua-non* de las capacidades matemáticas, la componente visoespacial no es obligatoria. Además, el currículum y los exámenes favorecen al pensador no visual (Presmeg, 1986.)

Burden y Coulson (1981), en su modelo cognitivo, señalan que toda estrategia de resolución de un determinado ítem espacial obedece fundamentalmente a tres características, dependiendo del modo de representación utilizado por el sujeto, aquello sobre lo que el sujeto concentra su atención y los medios concretos auxiliares utilizados.

Atendiendo al modo de representación empleado por el sujeto:

- Visual: el sujeto necesita formar una imagen mental.
- Verbal: el sujeto no necesita hacer uso de una imagen mental.
- Mixto: el sujeto emplea ambas estrategias.

Atendiendo a aquello sobre lo que el sujeto concentra su atención:

- Global: considera el objeto globalmente.
- Local: considera el objeto parcialmente.

Atendiendo a los medios concretos auxiliares utilizados: los sujetos toman notas, inclinan la cabeza, desplazan el lápiz...

Otros autores, como Lahrizi (1984) y Cossío (1997), han utilizado esta misma clasificación, aunque sin tener en cuenta los medios auxiliares, y han clasificado a los sujetos según las estrategias utilizadas en un estilo y una intensidad determinadas.

Autores como Lohman y Kyllonen (1983) y Lohman *et al.* (1987) analizan las estrategias utilizadas por los sujetos en tareas espaciales y definen tres fases en su resolución: codificación, síntesis y comparación, y distinguen a los sujetos por el modo de afrontar cada una de estas fases en la resolución de tareas espaciales.

De ahí que la tarea principal relativa a este primer problema sea proponer un modelo estructural de la capacidad espacial que abarque sendos modelos de factores, de procesos cognitivos y de estrategias y que, una vez combinados en un modelo integrado, nos permita diagnosticar al alumno a lo largo de todo el ciclo vital.

2º PROBLEMA: ANÁLISIS DEL DESARROLLO DE LA CAPACIDAD ESPACIAL Y DE LOS CONTENIDOS GEOMÉTRICOS ASOCIADOS A LO LARGO DE TODA LA ESCOLARIDAD.

Piaget (Piaget, Inhelder, 1956; Piaget, Inhelder, Szeminska, 1960) fue el impulsor de estos estudios y en su enfoque se preocupaba más de los aspectos cualitativos de la inteligencia y de los patrones universales establecidos, como los órdenes invariantes de adquisición. La teoría de Piaget abarca toda la escala de edades y, al examinar su trabajo, es posible observar muchos conceptos que evolucionan desde formas rudimentarias durante la primera infancia hasta formas más complejas en la niñez o en la adolescencia.

El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele (1986) se plantea la existencia de diversos niveles de razonamiento geométrico, que van desde el puramente visual, propio de los niños de los primeros cursos de Primaria, hasta el lógico-formal que desarrolla un matemático. Este modelo también sugiere cómo lograr que los alumnos mejoren la calidad de su razonamiento matemático. Para ello propone fases de aprendizaje, organizando la enseñanza para ayudar a los estudiantes a construir las estructuras mentales que les permitan lograr un nivel superior de razonamiento.

Un estudiante solo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento. Si una relación matemática no puede ser expresada de manera comprensible para el nivel de razonamiento actual de los estudiantes, es necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela. No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada manera; sólo se aprende a razonar mediante la propia experiencia. Pero sí se puede ayudar a esa persona, por medio de una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que adquiera lo antes posible la experiencia necesaria para que llegue a razonar de esa manera.

Así pues, el modelo de Van Hiele enfatiza la existencia de diferentes modos de razonamiento en Geometría y señala la necesidad de que los profesores tengan en consideración la capacidad de razonamiento de sus alumnos al decidir la forma y el rigor de sus clases.

Otros estudios han continuado esta labor (Clements *et al.*, 1999) y han extendido el análisis a los movimientos en el plano (Jaime, Gutiérrez, 1996), a los sólidos geométricos (Guillén, 1997) o proponiendo paradigmas complementarios para evaluar los niveles de Van Hiele (Gutiérrez, Jaime, Fortuny, 1991).

Además de un modelo de desarrollo de la capacidad espacial, necesitamos un modelo de desarrollo de los contenidos geométricos asociados, tanto espontáneos como adquiridos. En definitiva, un modelo integrado que nos sirva para situar al alumno en el lugar que le corresponde a lo largo de toda la escolaridad.

3ER *PROBLEMA*: HACIA UN MODELO DE PROPUESTAS DIDÁCTICAS. ¿QUÉ CONDICIONES HA DE CUMPLIR UNA PROPUESTA PARA QUE FAVOREZCA UN DESARROLLO EQUILIBRADO Y PROGRESIVO DE LA CAPACIDAD ESPACIAL?

Diferentes estudios han defendido la intuición (Fischbein, Tirosh, Hess, 1979), el entrenamiento (Connor y Serbin, 1985), el uso de materiales manipulativos (Prigge, 1978; Sowell, 1989), el uso del ordenador-Logo (Noss, 1987; Clements y Battista, 1989, 1990) para la mejora en la adquisición de conceptos geométricos, pero ¿qué valor tienen si no se utilizan conjuntamente para proponer un modelo de propuesta didáctica que nos permita elaborar propuestas eficaces? De hecho, las propuestas habituales son parciales y sólo tienen en cuenta el aspecto tratado. Lo que aquí se propone es integrar todas ellas en un modelo unitario de propuesta teniendo en cuenta todos esos aspectos e incluso otros como los errores, las ideas previas o los estilos de aprendizaje de los alumnos.

Además, una propuesta de mejora ha de plantearse en el contexto didáctico adecuado lo que conlleva la aceptación de un modelo que urge desarrollar. La teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986; Chevallard, 1991) pretende ofrecer un marco de referencia donde encajen las propuestas que pretenden mejorar la situación del alumno en cualquier faceta donde presente un déficit.

Por ello, este problema no es exclusivo de la investigación de la capacidad espacial, sino de todas aquellas investigaciones cuyo objetivo sea plantear propuestas enriquecedoras. De ahí que la tarea de proponer modelos didácticos que tengan en cuenta las ventajas de la intuición, del entrenamiento, del uso de los materiales manipulativos y del ordenador, o el conocimiento por parte del profesor de los errores, de las ideas previas o de los estilos de aprendizaje de los alumnos y dónde se pueden encajar las propuestas didácticas concretas referidas al contenido matemático propiamente dicho sea una de las tareas más urgentes de la Educación Matemática. Esperemos que para cuando lo necesitemos, dicho paradigma esté lo suficientemente desarrollado y explicitado como para poder utilizarlo en las propuestas que tengamos que elaborar relacionadas con la capacidad espacial y el contenido geométrico asociado a ella.

¿CÓMO VAMOS A ANALIZAR ESTOS PROBLEMAS?

No es fácil indicar *a priori* cuáles son los pasos a dar en el intento de resolución de todas los problemas que se han planteado anteriormente. Me gustaría destacar que las revisiones teóricas exhaustivas son imprescindibles para un avance significativo. La mirada crítica en todos los trabajos realizados hasta ahora es fundamental y es evidente de que no avanzaremos mientras no basemos nuestras investigaciones en modelos establecidos, justificados teóricamente y, en la medida de lo posible, contrastados empíricamente.

De ahí que todas las investigaciones en este campo habrán de basarse y encajar en:

- un modelo estructural
- un modelo de desarrollo
- un modelo de propuesta

para que todas aquellas investigaciones que pretendan elaborar una propuesta de mejora lo hagan dentro de un marco teórico replicable.

Por otro lado, los avances estadísticos, el acceso al ordenador personal, la facilidad de acceso bibliográfico, el software como SPSS o LISREL posibilitan un trabajo impensable hace unos cuantos años.

EPÍLOGO

El análisis exhaustivo de todas las cuestiones planteadas hasta ahora nos permitiría proponer un modelo que nos serviría de referencia en todas las investigaciones relacionadas con la capacidad espacial y que básicamente consistiría en ofrecer a la Educación Matemática información relevante que se podría contrastar o replicar sobre:

- Diagnóstico de la capacidad espacial del alumno.
- Encaje del nivel de capacidad espacial del alumno con el desarrollo de los conocimientos geométricos espontáneos y adquiridos.de acuerdo a su nivel de desarrollo.
- Propuestas de mejora coherentes y eficaces.

Si esto lo hacemos con la capacidad espacial, también lo podríamos hacer con la aptitud numérica o con la capacidad de razonamiento lógico tanto inductivo como deductivo, lo que nos permitiría conocer el mapa cognitivo del alumno que más relación guarda con la enseñanza-aprendizaje de la matemática.

De todas maneras uno no puede más que sorprenderse de que, a pesar de los esfuerzos realizados en este siglo, todavía hay mucho por hacer, tanto que a veces puede resultar tan abrumador que no estamos seguros sobre lo que deberíamos hacer a continuación; pero permita el lector que emule a Moon-Watcher, el inolvidable protagonista de la novela de Arthur C. Clarke *2001; una odisea espacial,* diciendo que ya pensaremos en algo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barakat, M. K. (1951), "A Factorial Study of Mathematical Abilities", *British Journal of Psychology: Statistics Section, núm.* 4, pp. 137-156.

Battista, M. T. (1990), "Spatial Visualization and Gender Differences in High School Geometry", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 21, núm. 1, pp. 47-60.

Battista, M. T., G. H. Wheatley, G. Talsma (1982), "The Importance of Spatial Visualization and Cognitive Development for Geometry Learning in Preservice Elementary Teachers", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 13, núm. 5, pp. 332-340.

Bickley, P. G., T. Z. Keith y L. M. Wolfle (1995), "The Three-Stratum Theory of Cognitive Abilities: Test of the Structure of Intelligence Across the Life Span", *Intelligence,* núm. 20, pp. 309-328.

Binet, A. y T. Simon (1905), "Méthodes nouvelles pour le diagnostique du niveau intellectuel des anormaux", *L'Anné Psychologique,* núm. 11, pp. 191-244.

Bishop, A. (1980), "Spatial Abilities and Mathematics Education". *Educational Studies in Mathematics*, núm. 11, pp. 257-269.

—— (1983), "Space and Geometry", en R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Nueva York, pp. 175-203.

—— (1989), "Review of Research on Visualization in Mathematics Education", *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 11, núm 1, pp. 7-16.

Brousseau, G. (1986), "Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.* 7, núm 2, pp. 33-115.

Brueckner, L. y G. L. Bond (1981), *Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el aprendizaje*, Madrid, Rialp.

Burden, L. D. y S. A. Coulson (1981), *Processing of spatial tasks*, tesis de doctorado inédita, Melbourne, Monash University.

Burt, C. (1949), "The structure of mind: A review of the results of factor anallysis", *British Journal of Educational Psychology*, núm. 19, pp. 100-111, 176-199.

Carroll, J. B. (1988), "Cognitive abilities, factors ande processes", *Intelligence*, vol. 12, núm. 2, pp. 101-109.

—— (1993), *Human cognitive Abilities: A Survey of Factor Analytic Studies*, Cambridge, Cambridge University Press.

—— (1994), "Constructing a Theory from Data", en D. K. Detterman (ed.), *Current Topics in Human Intelligence, vol. 4. Theories of Intelligence*, Norwood, New Jersey, Ablex.

Cattell, J. M. (1890), "Mental Tests and Measurements", *Mind*, núm. 15, pp. 373-80.

Cattell, R. B. (1971), *Intelligence: Its Structure, Growth and Action*, Boston, Houghton-Miflin.

Chevallard (1991), *La transposition didactique-Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Clements, M. A. (1998b), *Visualisation and Mathematics Education*, Barcelona, TIEM.

Clements, D. H. y M. T. Battista (1989), "Learning of Geometric Concepts in a Logo Environment", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 20, núm. 5, pp. 450-467.

—— (1990), "The Effects of Logo on Children's Conceptualizations of Angle and Polygons", *Journal for Research in Mathematics Education, vol.* 21, núm. 5, pp. 356-371.

—— (1992), "Geometry and Spatial Reasoning", en D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and learning*, NCTM,: MacMillan Pub. Company, pp. 420-464.

Clements, D. H., S. Swaminathan, M. A. Z. Hannibal y J. Sarama (1999), "Young Children's Concepts of Shape", *Journal of Research in Matehematics Education,* vol. 30, núm. 2, pp. 192-212.

Connor, J. M. y L. A. Serbin (1985), "Visual-Spatial Skill: Is it Important for Mathematics? Can it be Taught?", en S. F. Chipman, L. R. Brush y D. M. Wilson (eds.), *Women and Mathematics,* Hilsdale, N. J., Lawrence Erlbaum, pp. 151-174.

Cooper, L. A. y R. N. Shepard (1973), "Chronometric studies of the rotation of mental images", en W. G. Chase (ed.), *Visual Information Processing,* Academic Press.

Cossio, J. (1997), *Diagnosis de la habilidad de visualizar en el espacio 3D con estudiantes de Bachillerato (BUP) del Bilbao metropolitano,* Lejona, Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.

Cox, J. W. (1928), *Mechanical aptitude,* Londres, Methuen.

Fennema, E. (1979), "Women and Girls in Mathematics-Equity in Mathematics Education", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 10, pp. 389-401.

Fennema, E. y J. Sherman (1977), "Sex-related Differences in Mathematics Achievement, Spatial Visualization and Affective Factors", *American Educational Research Journal, vol.* 14, núm. 1, pp. 51-71.

Fennema, E. y L.A. Tartre (1985), "The Use of Spatial Visualization in Mathematics by Girls and Boys", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 16, núm. 3, pp. 184-206.

Fischbein, E., D. Tirosh y P. Hess (1979), "The Intuition of Infinity", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 10, pp. 3-40.

Galton, F. (1869), *Hereditary Genius,* Londres, Jualian Fiedmann Publishers (1978).

Guay, R. B. y E. D. Mcdaniel (1977), "The Relationship between Mathematics Achievement and Spatial Abilities Among Elementary School Children", *Journal for Research in Mathematics Education,* núm. 8, pp. 211-215.

Guilford, J. P. (1967), *The Nature of Human Intelligence,* Nueva York, McGraw-Hill.

Guillen, G. (1997), *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje,* Universidad de Valencia.

Gustaffson, J. E. (1988), "Hierarchical Models of Individual Differences", en R. J. Sternberg (ed.), *Advances in the Psychology of Human Intelligence,* Hillsdale, New Jersey, Erlbaum, vol. 4.

—— (1985), "Measuring and interpreting 'g'", *Behavioral and Brain Sciences,* núm. 8, pp. 231-232.

Gutiérrez, A. (1998), *Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización,* Barcelona, TIEM.

Gutiérrez, A., A. Jaime y J. M. Fortuny (1991), "An Alternative Paradigm to Evaluate the Acquisition of the Van Hiele Levels", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 22, núm. 3, pp. 237-251.

Herschkowitz, R., B. Parzysz y J. Van Dormolen (1996), "Space and Shape", en A.Bishop *et al.* (eds.), *International Handbook of Mathematics Education.*

Hidalgo, S., A. Maroto y A. Palacios (1999), "Evolución de las destrezas básicas para el cálculo y su influencia en el rendimiento escolar en Matemáticas", *Suma,* núm. 30, pp. 37-45.

Horn, J. L. (1985), "Remodeling Old Models of Intelligence", en B. B. Wolman (ed.), *Handbook of Intelligence: Theories, Measurement and Applications,* Nueva York, John Wiley and Sons.

Jaime, A. y A. Gutiérrez (1996), *El grupo de las isometrías en el plano,* Madrid, Síntesis.

Juan Espinosa, M. (1997), *Geografía de la inteligencia humana,* Madrid, Pirámide.

Kelley, T. L. (1928), *Crossroads in the Mind,* Stanford, Stanford University Press.

Kosh, S. C. (1923), *Intelligence Measurement,* Nueva York, Macmillan.

Kosslyn, S. M. (1980), *Image and Mind,* Cambridge, Massachusets, Harvard University Press.

Krutetski, V. A. (1976), *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren,* Chicago, University of Chicago Press.

Lahrizi, H. (1984), *Etude de l'habilité a visuiliser des relations geomètriques dans trois dimensions chez les élèves-proffeseurs au Maroc,* Quebec, Université de Laval.

Lean, G. y M. A. Clements (1981), "Spatial ability, Visual Imagery, and Mathematical Performance", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 12, pp. 267-299.

Lohman, D. F. y P. C. Kyllonen (1983), "Individual Differences in Solution Strategy on Spatial Tasks", en Dyllon y Schemeck (eds.), *Individual Differences in Cognition,* Academic Press, vol. 1.

Lohman, D. F., J. W. Pellegrino, D. L. Alderton y J. W. Regian (1987), *Dimensions and Components of Individual Differences in Spatial Abilities,* pp. 253-312.

Mcfarlane, M. (1925), "A Study of Practical Ability", *British Journal of Psychology, Monograph Supplement,* núm. 8.

Mcfarlane Smith, I. (1964), *Spatial Ability: Its Educational and Social Significance,* Londres, University of London Press.

Mcgee, M. G. (1979), "Human Spatial Abilities: Psychometric Studies and Environmental, Genetic, Hormonal, and Neurological Influences", *Psychological Bulletin,* vol. 86, núm. 5, pp. 889-918.

Metzler, J. y R. W. Shepard (1974), "Transformational Studies of the Internal Representation of Three-Dimensional Objects", en R. L. Solso (ed.), *Theorie in Cognitive Psychology: The Loyola Symposium,* Potomac, Lawrence Erlbaum.
Mitchelmore, M. C. (1980), "Thre-Dimensional Geometrical Drawing in Three Cultures, *Educational Studies in Mathematics,* núm. 11, pp. 205-216.
Murray, J. E. (1949), "Analysis of Geometric Ability", *Journal of Educational Psychology,* núm. 40, pp. 118-124.
National Council of Teachers of Mathematics (1989), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics,* Reston, Va, N. C. T. M.
Noss, R. (1987), "Children's Learning of Geometrical Concepts Through Logo", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 18, núm. 5, pp. 343-362.
Piaget, J. y B. Inhelder (1956), *La conception de l'espace chez l'enfant.,* París, Presse Universitaires de France.
Piaget, J., B. Inhelder y A. Szeminska (1960), *The Child's Conception of Geometry,* Londres, Routledge.
Prigge, G. R. (1978) "The Differential Effects of the Use of Manipulative Aids on the Learning of Geometric Concepts by Elementary School Children", *Journal for Research in Mathematics Education,* núm. 9, pp. 361, 367.
Presmeg, N. (1986), "Visualisation and Mathematical Giftedness", *Educational Studies in Mathematics,* núm. 17, pp. 297-311.
Schmeck, R. S. (1988), *Learning strategies and learning styles,* Nueva York, Plenum Press.
Shepard, R. N. (1975), "Form, Formation, and Transformation of Internal Representations", en R. L. Solso (ed.), *Information Processing and Cognition: The Loyola Symposium.*
Sowell, E. (1989), Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 20, núm. 5, pp. 498-505.
Spearman, C. (1904), General intelligence, objectively determined and measured. *American Journal Of Psychology,* núm. 15, pp. 72-101.
Spearman, N. C. (1927), *The Abilities of Man.* London: Macmillan.
Stenquist, J. L. (1922), *Mechanical aptitude tests.* Nueva York, World Book.
Sternberg, R. J. (1985), *Beyond IQ: A triarchic theory of human intelligence,* Cambridge, Cambridge University Press.
—— (1988), *Las capacidades humanas,* Madrid, Labor.
—— (1999) *Estilos de pensamiento,* Barcelona, Paidós.
Suwarsono, S. (1982), *Visual Imagery in the Mathematical Thinking of Seventh Grade Students, tesis de doctorado inédita,* Melbourne, Monash University.

Suydam, M. N. (1985), "The shape of instruction in geometry: Some highlights from research", *Mathematics Teacher, núm. 78, pp. 481-486.*
Tartre, L. A. (1990), "Spatial orientation skill and mathematical problem solving", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 21, núm. 3, pp. 216-229.
Terman, L. M. y M. A. Merrill (1916), *Measuring Intelligence,* Boston, Houghton-Miflin.
Thurstone, L. L. (1938), *Primary Mental Abilities,* Chicago, University of Chicago Press.
Usiskin, Z. (1987), "Resolving the continuing dilemmas in school geometry", en M. M. Lindquist y A. P. Shulte (eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12: 1987 Yearbook,* Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 17-31.
Van Hiele, P. M. (1986), *Structure and Insight,* Orlando, Academic Press.
Vernon, P. E. (1950), *The Structure of Human Abilities,* Nueva York, Wiley.
Wrigley, J. (1958), "The factorial nature of ability in elementary mathematics", *British Journal of Educational Psychology,* núm. 1, pp. 61-78.
Young, C. D. y J. P. Becker (1977), "The Interaction of Cognitive Aptitudes with Sequencies of Figural and Symbolic Treatments of Mathematical Inequalities", *Journal for Research in Mathematics Education,* núm. 10, pp. 24-36.
Yuste, C. (1997), *Manual de IGF-inteligencia general y factorial,* Madrid, TEA.

DATOS DEL AUTOR

Modesto Arrieta
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad del País Vasco, España
teparilm@sc.ehu.es

Opinión de los estudiantes de QFB sobre la importancia de las matemáticas en su formación profesional

José Luis Pinedo Vega, Armilde Rivera Huizar y Analeni Presbítero Perales

Resumen: A nivel superior, el aprendizaje de las matemáticas comprende una problemática especifica de cada licenciatura o programa universitario y, como tal, merece una atención especial. En este trabajo retomamos el enfoque de *matemáticas significativas* para dar relevancia a la pertinencia de las matemáticas en las ciencias experimentales y, en particular, en la formación profesional del Químico Farmacéutico Biólogo (QFB). Posteriormente presentamos un análisis de la percepción sobre la importancia, concepción y problemas del aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de QFB de la Universidad Autónoma de Zacatecas, México.

Palabras clave: Aprendizaje, matemáticas significativas, ciencias experimentales.

Abstract: At undergraduate level, the process of learning mathematics involves a particular set of problems, depending on the branch of science and technology being the subject of the bachelor studies, and this is the reason why each of them deserves special attention. In this paper we retrieve the *significative mathematics* approach in order to highlight the relevance of mathematics in experimental science, and particularly in those branches like Chemistry, Pharmacology and Biology. Afterwards, we analyze the students point of view about mathematics teaching problems at QFB program of the Universidad Autónoma de Zacatecas, México.

Keywords: Learning, significative mathematics, experimental sciences.

INTRODUCCIÓN

En el momento en que hay que definir la orientación de un bachillerato o una carrera profesional, se pone de manifiesto el hecho de que existen en los estu-

Fecha de recepción: diciembre de 2001.

diantes diferentes niveles de aceptación por las ciencias y en particular por las matemáticas. A las licenciaturas de Matemáticas, Física e Ingeniería llegan, sin duda, los estudiantes que ostentan los mayores niveles de aceptación; actitud que no elimina problemas de aprendizaje, simplemente significa una menor resistencia. Mientras tanto, en licenciaturas como Químico, Farmacéutico, Biólogo, la resistencia es tal que se traduce en bajos rendimientos y causa de deserción.

El aprendizaje de las matemáticas no se reduce sólo al análisis de los obstáculos que se le presentan, sino sobre todo a la búsqueda de una buena apropiación del conocimiento por estudiantes destinados a desarrollarse en un mundo de resultados experimentales. Como sabemos, las ciencias experimentales han alcanzado un nivel de matematización impresionante gracias a la formación teórica de científicos, la cual les permite visualizar la conjugación de las matemáticas con diversos fenómenos naturales. En consecuencia para estar acorde con la ciencia actual, la educación tiene que plantearse como objetivo mínimo la formación de profesionistas con capacidad de entender la matematización de las ciencias experimentales.

En este trabajo, retomamos las matemáticas desde el punto de vista de su *efectividad*. Bajo esta óptica, se definen *las matemáticas significativas,* que expresan con mucha nitidez la riqueza de las matemáticas, su papel motriz en el desarrollo del conocimiento, su vinculación con otras disciplinas científicas y su importancia en la enseñanza.

Posteriormente, enfocamos nuestro análisis sobre los problemas de la enseñanza de las matemáticas en los estudiantes de QFB de la Universidad Autónoma de Zacatecas. En la búsqueda de una aproximación al problema, hemos diseñado una encuesta con la que pretendemos conocer la percepción de las matemáticas que tienen los estudiantes y definir la naturaleza de los obstáculos del aprendizaje en los diferentes niveles de la carrera.

LA EFECTIVIDAD DE LAS MATEMÁTICAS

A primera vista, las matemáticas aparecen como un conjunto de símbolos regidos por reglas precisas. Sin embargo, los símbolos que los matemáticos escriben en un papel no son otra cosa que traducciones de ideas que resultan de sus reflexiones. Se puede, entonces, distinguir las matemáticas escritas o formales del pensamiento matemático que constituye la fuente de las matemáticas formales.

Pero esta distinción no parece ser suficiente. Hay que tener en cuenta el hecho de que hay matemáticas que permiten resolver problemas complicados, hay matemáticas que comprenden en sí métodos e ideas generadoras de teorías matemáticas –ejemplo de ellas sería la teoría de funciones, la teoría de nudos, los números complejos, etc.–, y hay matemáticas que, por extensión o generalización artificial, generan teorías matemáticas ya conocidas. Justamente Jean Dieudonné ha formulado esta distinción, dando el nombre de *matemáticas significativas* a las matemáticas fecundas (las dos primeras) y *matemáticas vacías* a las matemáticas redundantes, por decirlo de alguna manera (Dieudonné, 1982, pp. 15-38).

El éxito de la física clásica y después de la relatividad y de la mecánica cuántica hicieron evidente la efectividad de las matemáticas, concepto que paulatinamente se ha extendido a otras disciplinas de las ciencias naturales (véase Murray, 1989) e incluso de las ciencias humanas.

Este concepto de efectividad fue definido desde 1960 (Wigner, 1960). Una teoría matemática completamente eficaz es aquella dotada de capacidad: *retrodictiva, predictiva, explicativa y generativa* (Lambert, 1999, pp. 48-55).

- La capacidad *retrodictiva* esta relacionada con la reproducción de resultados y su organización en torno a un formalismo matemático o modelo; tal es el caso del ajuste de puntos experimentales mediante alguna técnica de ajuste, como mínimos cuadrados, regresión lineal, etcétera.
- La capacidad *predictiva* se manifiesta cuando las matemáticas sugieren la realización de un experimento u observación y se prevén resultados numéricos. Un buen ejemplo de ello fue la predicción de Einstein, en 1913, mediante la teoría general de la relatividad, de la desviación de la luz al pasar cerca de un astro cualquiera por el efecto de la gravedad. Este efecto se comprobó en mayo de 1919, cuando se hizo evidente el cambio de posición aparente, durante un eclipse, de las estrellas cuya luz pasa en la vecindad del sol.
- La capacidad *explicativa* radica en la posibilidad de explicar fenómenos. *Predecir no es explicar* (Thom, 1991). Para que una teoría sea verdaderamente eficaz en ciencias, debe aportar una explicación al fenómeno del que se trate. Un ejemplo de ello fue la explicación, también de Einstein, del efecto fotoeléctrico.
- La capacidad *generativa* radica en la posibilidad de engendrar ideas o conceptos o teorías potencialmente importantes.

No se puede esperar que toda teoría matemática reúna estas cuatro capacidades; simplemente es más efectiva en la medida en que reúne el máximo de capacidades. La teoría del campo unificado, formulada por Hermann Wyl en 1918, no fue completamente eficaz en relación con sus predicciones experimentales; sin embargo, fue el punto de partida de la física de partículas.

Para que una matemática sea eficaz, es necesario que el dominio estudiado exhiba invariantes naturales asociadas a relaciones, transformaciones, etc. La física es matemáticamente eficaz, puesto que se establece sobre numerosas invariantes –energía, momentum, momento angular, etcétera.

Así, la relatividad general es eficaz para describir la gravitación, en parte porque se funda sobre un formalismo y describe invariantes –el cálculo tensorial–. La mecánica cuántica es eficaz, porque se funda sobre ciertas matemáticas significativas –la teoría del álgebra de operadores, la teoría de los espacios de Hilbert–, pero también porque explica resultados experimentales –inicialmente los espectros de Balmer y Rydberg–.

En general, la eficacia de las matemáticas se alcanza paulatinamente a través de las infiltraciones empíricas que adaptan progresivamente ciertas partes de esas matemáticas en la descripción de fenómenos.

EL QUEHACER MATEMÁTICO Y SU TRANSPOSICIÓN AL APRENDIZAJE

Evidentemente, el quehacer matemático no está al alcance de toda clase de especialistas, ni de todos los científicos, ni siquiera de todos los matemáticos. La profundidad que alcanzan hoy en día las matemáticas es tal, que los propios matemáticos dedican prácticamente su atención en campos muy específicos. Por otra parte, una cosa es el aprendizaje de las matemáticas, otra el trabajo de un matemático y una mas, el establecimiento de una matemática eficaz. Como en toda disciplina, el establecimiento de una matemática eficaz difícilmente puede ser trabajo de una sola persona.

Una distinción más que hay que subrayar es que una cosa es el aprendizaje de una disciplina y otra, su desarrollo. Una cosa es el quehacer de la matemática y otra, su aprendizaje. Las matemáticas tienen un carácter múltiple, al mismo tiempo que proveen de herramientas a un estudiante, tienen un carácter formativo, etc., etc. Sin embargo, esta óptica es invisible a los estudiantes. Un gran número de ellos no tiene la mínima disposición de escuchar nada sobre la potencialidad de las matemáticas, lo majestuoso de su estructura, etc. La actitud hacia el aprendizaje es un problema real.

Podría pensarse que el aprendizaje de las matemáticas no tendría ningún obstáculo, si fueran valoradas, entre otras cosas, por su espléndida y elegante arquitectura, o bien, si se pone al estudiante en un buen ambiente donde las facilidades pedagógicas sean prioritarias. De hecho, ambas expectativas, que han sido llamadas *la ilusión lírica* y *la ilusión romántica* respectivamente, tuvieron eco en los años setenta (Joshua y Dupin, 1993). La realidad ha sido otra; es evidente hoy día que la enseñanza de disciplinas complejas y altamente estructuradas escapa a la pedagogía. Los rendimientos en el aprendizaje son relativamente bajos, lo que hace pensar que falta mucho por saber sobre la naturaleza del conocimiento y las condiciones de su apropiación.

Sabemos que el conjunto de símbolos articulados mediante reglas precisas, llamado matemáticas, se adapta al mundo experimental. Lo que también sabemos es que esa adaptación ha sido producto del trabajo de científicos con una sólida formación. Siendo las matemáticas un conjunto de símbolos abstractos articulados por reglas precisas, poseedoras de una enorme capacidad de adaptación a un mundo de resultados experimentales y, no estando en condiciones de abordar el problema desde el punto de vista del ¿cómo es que las matemáticas han logrado...?, nuestro problema fundamental viene a ser el de buscar la mejor apropiación de conocimientos por estudiantes destinados a desarrollarse en ese mundo de resultados experimentales.

Es conveniente destacar el enfoque estrictamente didáctico de este planteamiento. Desde el punto de vista de la didáctica, el contenido de una disciplina que se va a enseñar debe corresponder a la actualidad del conocimiento; en ese contenido debe estar manifiesto el interés institucional y la utilidad social y, en el proceso de aprendizaje, interesan los mayores rendimientos. Así, la matemática no puede impartirse sólo de manera simbólica, tampoco es admisible atiborrar de matemáticas a un estudiante de una formación profesional en ciencias. Esto da relevancia al diseño de los contenidos de cada asignatura. Para la didáctica es inadmisible que se sacrifique o deforme el contenido de una disciplina en aras de facilitar su aprendizaje.

En las últimas décadas, la enseñanza de las ciencias y las matemáticas ha merecido una atención singular en unos países más que en otros. La preocupación por la enseñanza tiene muchos móviles, uno de ellos es la eficacia desde el punto de vista costo-beneficio. Evidentemente, si se traduce a costos, son importantes el numero de grupos, de profesores, de aulas, pero no es menos importante la calidad del proceso didáctico, la interacción estudiante-profesor-contenido. Ante la imperiosa necesidad de las optimizaciones y racionalizaciones múltiples, todo lo que suene a reforma tiene posibilidades de ser bienvenido. De ahí que existan múltiples intenciones para reformar planes de estudio, contenidos, métodos de enseñanza, etc. Por supuesto, la eficiencia de cualquier reforma puede quedar en entredicho mientras no se atiendan de raíz los obstáculos del aprendizaje.

COMPETENCIA MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DE LOS QUÍMICOS FARMACÉUTICOS Y BIÓLOGOS

Independientemente de cualquier reforma curricular, la realidad es que existe una resistencia enorme por parte de los estudiantes a invertir en el aprendizaje. Antes de entrar en este tema, establezcamos algunos elementos en relación con la competencia de las matemáticas para el QFB.

Las funciones de varias variables se encuentran en dominios o campos muy diversos de la formación de un estudiante de QFB. Existen ejemplos desde elementales hasta muy complicados. Las funciones de varias variables aparecen en equilibrio químico, termodinámica, mecánica estadística, mecánica cuántica, farmacología, etc. Los siguientes constituyen ejemplos aislados:

- La ley general de los gases ideales

$$V = V(P,T): \frac{V_1P_1}{T_1} = \frac{V_2P_2}{T_2}$$

- En termodinámica, el cambio en la *energía interna* (U), *la energía libre de Gibbs* (G) la *entalpía* (H) y la *energía libre de Helmholtz* (A) de un sistema termodinámico son funciones de los componentes del sistema (n_1, n_2, n_3) y de P, V, T y S. Esto es: dU

$$dU = TdS - pdV + \sum \mu_i dn_i$$
$$dG = -SdT + Vdp + \sum \mu_i dn_i$$
$$dH = TdS + Vdp + \sum \mu_i dn_i$$
$$dA = SdT - pdV + \sum \mu_i dn_i$$

el *cambio de energía* de un sistema está dado por:

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_V dT$$

- En la Mecánica cuántica, l*a ecuación de Schrödinger* independiente del tiempo -de donde surgen los orbitales y las configuraciones electrónicas- es una ecuación diferencial parcial, que describe mediante una función de onda ψ la posición de una partícula de masa m -tal como el electrón- en un potencial V con energía total E:

$$\frac{h}{4\pi m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi$$

- Las ecuaciones diferenciales son ineludibles en la descripción de la cinética: de las reacciones químicas, del metabolismo de un fármaco o un radiofármaco, o de la eliminación de un contaminante.
- Etcétera.

Todo ello expresa la pertinencia de las matemáticas en la formación de los químico farmacéutico biólogos. Así las cosas, en el plan de estudios, están plenamente justificadas las asignaturas de cálculo, ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, estadística, etcétera.

Evidentemente se trata de matemáticas efectivas.

LAS ACTITUDES DE LOS ESTUDIANTES DE QFB FRENTE A LAS MATEMÁTICAS

Sin ignorar que el análisis sobre la extensión y contenido de los programa de matemáticas en el currículo de los estudiantes de QFB merece una atención muy especial, es evidente que no puede estar en discusión la necesidad de las matemáticas.

En la licenciatura en QFB de la UAZ se imparten cinco cursos de matemáticas: álgebra lineal, cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales, probabilidad y estadística y programación y computación, que corresponden en total a 40 créditos de 477 que comprende la licenciatura completa. El plan de estudios o la intención curricular no está, pues, en cuestionamiento. Sin embargo, es ineludible interrogarnos sobre cuáles son los niveles de aceptación de las matemáticas de los estudiantes de QFB.

Para conocer esta respuesta, hemos diseñado una encuesta que aplicamos a 132 de los 384 estudiantes de la carrera de QFB (44 de nuevo ingreso, 21 de 3er semestre, 15 de 4º semestre, 20 de 5º semestre, 10 de 6º semestre y 22 de 9º semestre). La encuesta se aplicó en agosto de 2001, al inicio del semestre. Los grupos nones corresponden a estudiantes regulares, mientras que los grupos pares son de estudiantes desfasados y repetidores.

La encuesta ha tenido como objetivo principal recuperar la percepción de las matemáticas que tienen los estudiantes, para luego tratar de acotar la naturaleza de los obstáculos del aprendizaje y la posible evolución a lo largo de la carrera (cuadro 1).

Se hicieron preguntas sobre tres rubros, *uno* la importancia que el estudiante concede a las matemáticas en las diferentes profesiones, *dos* el carácter que el estudiante les concede dentro de su formación profesional y su trabajo profesional y *tres* las dificultades de aprendizaje de las matemáticas propias de la relación *estudiante-maestro-conocimiento*. Para ello, la encuesta, sin mencionarlo, contiene tres bloques de preguntas, de la pregunta 1 a la 9 se interroga sobre la importancia que el estudiante concede a las matemáticas; de la 10 a la 14 sobre la concepción de éstas y de la 15 a la 21 sobre los obstáculos que el estudiante encuentra en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Los resultados de la encuesta se presentan en el cuadro 2.

Se puede observar que los estudiantes otorgan un buen nivel de importancia a las matemáticas en el ámbito social y en el nivel profesional. Sorprendentemente, se concede una importancia singular en medicina y biología, calificadas en promedio con 7.1 y 6.9 respectivamente.

En relación con la concepción de las matemáticas –preguntas 10 a 14– está claro que, para los estudiantes, la matemática no se reduce a variables, números y ecuaciones, sino que permiten construir cosas útiles y desarrollar la capacidad de razonamiento del individuo y no aparecen en los programas como relleno en la tira de materias. Aunque se puede observar que los alumnos de los semestres desfasados consideran en mayor proporción a las matemáticas como relleno.

Cuadro 1 Percepción de las matemáticas que tienen los estudiantes de QFB (Encuesta)

Califique de 0 a 10 su coincidencia con las siguientes aseveraciones:
(0 = no coincide en nada 10 = totalmente de acuerdo)
Escriba con pluma, sin borrar

1.	Las matemáticas tienen importancia *exclusivamente* cultural.
2.	Las matemáticas son importantes en la vida de toda persona.
3.	Las matemáticas son importantes en la sociedad.
4.	Las matemáticas son importantes para los físicos.
5.	Las matemáticas son importantes para los ingenieros.
6.	Las matemáticas son importantes para los químicos.
7.	Las matemáticas son importantes en medicina.
8.	Las matemáticas son importantes para los farmacobiologos.
9.	Las matemáticas son importantes para los biólogos.
10.	Las matemáticas se reducen a variables, números y ejercicios.
11.	Las aplicaciones de las matemáticas permiten construir cosas útiles.
12.	El estudio de las matemáticas permite desarrollar la capacidad de razonamiento del individuo.
13.	Las matemáticas aparecen en los programas como relleno en la tira de materias.
14.	Las matemáticas deben erradicarse de las carreras de biología.
15.	El problema del aprendizaje de las matemáticas se debe a que no se ve su utilidad.
16.	El problema del aprendizaje de las matemáticas se debe a los malos maestros.
17.	El problema del aprendizaje de las matemáticas se debe a los malos métodos de enseñanza.
18.	El problema del aprendizaje de las matemáticas se debe a la falta de libros.
19.	El problema del aprendizaje de las matemáticas se debe a la falta de dedicación de los alumnos.
20.	El problema del aprendizaje de las matemáticas se debe a la falta de motivación.
21.	El problema del aprendizaje de las matemáticas se debe al lenguaje (fórmulas, ecuaciones, símbolos, operaciones, reglas, etcétera).

Cuadro 2 Resultados de la encuesta sobre la imagen de las matemáticas en los estudiantes de QFB de la FCQ-UAZ

Pregunta	Tema		Grupo							
			1° A	1°B	3°	4°	5°	6°	9	Promedio
1	Importancia	Excl. cultural	3.5	3.3	2.9	1.3	0.5	4.0	2.3	2.5
2		Personal	10	10	8.6	9.3	9.5	10	8.2	9.4
3		Social	8.5	9.2	8.2	10	8.5	9.0	8.6	8.9
4		en Física	9.5	10	10	10	10	9.0	9.1	9.7
5		Ingenierías	10	10	10	10	10	9.0	9.5	9.8
6		Química	10	10	10	9.3	9.5	8.0	9.1	9.4
7		Medicina	8.0	8.3	6.2	7.9	7.0	4.0	8.6	7.1
8		Farmacobiología	10	10	8.6	9.3	9.0	7.0	9.1	9.0
9		Biología	6.5	8.3	7.1	8.0	7.0	3.0	8.2	6.9
10	Concepción	Mecánica	5.0	5.0	4.3	2.7	4.5	6.0	5.0	4.6
11		Lógico constructiva	10	9.6	10	8.7	9.5	10	9.1	9.6
12		Formal	10	9.6	9.5	8.7	9.5	9.0	9.1	9.3
13		Es un relleno curricular	1.5	1.7	1.9	2.7	3.0	4.0	1.4	2.3
14		Erradicarse	4.5	2.5	3.3	3.3	1.0	2.0	4.5	3.0

15		No se ve su utilidad	4.5	5.8	7.1	7.3	6.5	6.0	4.1	5.9
16		Malos maestros	4.0	3.8	4.8	6.0	6.0	9.0	6.4	5.7
17	Problemas de aprendizaje	Malos métodos de enseñanza	6.0	7.1	7.1	6.7	7.0	9.0	7.7	7.2
18		Bibliografía	2.5	0.80	3.8	2.0	2.0	3.0	3.2	2.5
19		Dedicación	9.5	9.6	9.0	10	8.5	6.0	7.3	8.6
20		Motivación	7.5	8.8	8.1	9.3	8.0	9.0	8.6	8.5
21		Lenguaje	7.0	9.6	4.3	5.3	4.5	3.0	5.5	5.6

En resumen, los estudiantes encuestados, en conjunto, tienen una concepción muy buena de las matemáticas y les conceden una gran importancia en diversas profesiones. Esto significa que el estudiante está consciente del papel de las matemáticas. Pero ¿por qué entonces los bajos rendimientos? La explicación parece estar expresa en el tercer bloque de respuestas.

En relación con los problemas de aprendizaje, la respuestas exhiben una cierta dispersión; lo que puede ser indicativo de las diferentes percepciones sobre las dificultades del aprendizaje. Aun así, se pueden apreciar ciertas tendencias:

- las respuestas más contundentes están en relación con las preguntas 19, 20 y 17, cuyas notaciones son 8.6, 8.5 y 7.2 respectivamente. Ello significa que los estudiantes encuestados señalan su falta de dedicación y la falta de motivación como los problemas principales de su aprendizaje y en seguida cuestionan los métodos de enseñanza (pregunta 17).
- una notación de 5.9 a la pregunta 15 puede ser indicativa de que lo que se ve en los cursos de matemáticas no se aplica en los cursos de las otras disciplinas.
- el problema de los malos maestros (pregunta 16), aunque en promedio se le asigna una calificación de 5.7, visto en detalle muestra que los estudiantes de nuevo ingreso son los que menos culpan a los maestros; en contraste, los del 6º semestre (repetidores) son quienes más los culpan;
- algo que puede resultar significativo son precisamente las respuestas de los alumnos de 6º semestre, que señalan a los malos maestros, los métodos de enseñanza y la falta de motivación como los problemas principales en su aprendizaje; este grupo no reconoce la falta de dedicación en la misma proporción que los demás;
- y no señalan como problema la bibliografía (pregunta 18).

Por otro lado, no se puede concluir gran cosa con relación a si los estudiantes cambian de opinión a lo largo de sus estudios.

Es necesario subrayar que los resultados no pueden extrapolarse a estudiantes de otras entidades.

Parece claro, en esta población muestral, que el problema del rendimiento se ubica en el ámbito de la dimensión afectiva del estudiante hacia las ciencias, donde tiene una importancia vital la motivación como parte formadora de la actitud. De ahí que el papel del profesor siga siendo relevante, aunque evidentemente no depende de él una solución completa. Propiciar un cambio de actitud implica modificar los elementos en los que se sustenta una conducta. Por principio, la actitud es una decisión personal que, para ser modificada, requiere convencimiento. El papel de la educación –en este caso la superior– tiene que incidir, entre otras cosas, en presentar a la ciencia como un vehículo cultural y social. Evidentemente, en el caso de las matemáticas esa función no solo compete a los profesores de matemáticas. Los profesores de otras disciplinas deben desempeñar también un papel importante en mostrar la efectividad de la matemática en su disciplina.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Dieudonnée, J. (1982), "Mathematiques vides et mathematiques significatives", en *Penser les mathématiques*. Seminaire de philosofie et mathématiques de l'Ecole normal supérieure, París, Seuil, pp. 15-38.

Joshua, S. y J. J. Dupin (1993), *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques,* Presses Universitaires de France, p. 1.

Lambert, D. (1999), "L'incroyable efficacité des Mathematiques", *La Recherche,* núm. 316, pp. 48-55.

Murray, J. D. (1989), *Mathematical Biology,* Berlín, Springer-Verlag.

Thom R., *Predire n'est pas explilquer,* París, EsHel, 1991.

Wigner, E. P. (1960), "The unreasonable effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", *Communication on Pure and Applied Mathematics,* vol. XII, pp. 1-14.

DATOS DE LOS AUTORES

José Luis Pinedo Vega
Centro de Ciencias Químicas y Centro Regional de Estudios Nucleares.
Universidad Autónoma de Zacatecas, México
jlpinedo@cantera.reduaz.mx

Armilde Rivera Huizar
UAEP de la Universidad Autónoma de Zacatecas, México
ariverah@cantera.reduaz.mx

Analeni Presbítero Perales
Estudiante de QFB en la Universidad Autónoma de Zacatecas, México
analeni3@yahoo.com.mx

Cualidades psicométricas de una prueba de competencia imaginativa

María Virginia Rapetti e Hilda Difabio de Anglat

Resumen: Se estudia la validez de constructo y la confiabilidad, la potencialidad discriminativa y el nivel de dificultad de los ítems de un instrumento diseñado para medir la habilidad para imaginar y realizar movimientos mentales de figuras. La prueba se aplicó a 118 alumnos de 14 años de edad en promedio.

Palabras clave: Imaginación, *test*, validez, confiabilidad, adolescencia.

Abstract: The psychometric properties of an instrument designed to measure the ability to imagine and to perform mental movements of figures are studied. The test has been applied to 118 students of an average age of 14.

Keywords: Validity, reliability, test, imagination, adolescence.

En este trabajo se estudia la validez y confiabilidad de un instrumento diseñado con el objetivo de evaluar la habilidad para imaginar y realizar movimientos mentales de figuras. Nos interesamos en esta habilidad porque es especialmente necesaria para resolver problemas geométricos y, por tanto, su ejercicio es importante en el proceso de aprendizaje de la matemática.

Sin embargo, esta habilidad no es privativa del área matemática. En el aprendizaje de las ciencias, Vosniadou y otros (2001) señalan que las representaciones mentales que los niños usan cuando tratan de comprender la información nueva parece ejercer influencia sobre los procesos de adquisición del conocimiento. Los autores utilizan el constructo de “modelo mental” para describir dichas representaciones individuales del mundo físico, se refieren a una representación analógica y generativa que puede manipularse mentalmente para dar explicaciones causales del fenómeno. Se supone que la mayoría de los modelos mentales son creados para tratar con las demandas de situaciones específicas.

En el área de la educación física, Overly *et al.* (1998) afirman que en los programas de entrenamiento de muchos atletas se incorporan las imágenes menta-

Fecha de recepción: diciembre de 2001.

les. Investigaciones sobre su efectividad han demostrado su poder para mejorar el desempeño motriz. El efecto de las imágenes en el conocimiento, en un nivel general, se refiere al uso de estrategias anticipatorias globales, tales como imaginar todos los posibles ángulos de retorno de la pelota después de un saque. Del mismo modo, los maestros de danza las integran en varios aspectos del entrenamiento de los bailarines. A menudo, utilizan imágenes metafóricas indirectas para obtener respuestas cualitativas importantes (por ejemplo: "cruce el salón como si estuviera moviéndose a través del agua", para obtener un movimiento suave y sostenido).

Paivio (1985) ha desarrollado una perspectiva teórica para el estudio de las imágenes mentales y del movimiento. Se dice que las imágenes mentales tienen un rol motivacional y cognoscitivo en la mediación de la conducta. Estos roles operan tanto en un nivel general como en uno específico.

El efecto de las imágenes en la motivación, en un nivel general, se refiere al grado de aprestamiento psicológico y a la emoción; por ejemplo, las imágenes mentales se usan para reducir la ansiedad en la preparación para una tarea. En un nivel específico, se refiere a respuestas orientadas hacia una meta puntual, como ganar una competencia.

Antonietti y Colombo (1996-1997) investigaron la ocurrencia espontánea de imágenes mentales en la vida ordinaria. Observaron que su uso es afectado por el tipo de estudio (los sujetos de disciplinas científicas puntuaron más alto que los que pertenecen a disciplinas socioeconómicas o humanísticas) y varía según el sexo: los varones informaron un uso más frecuente de la visualización que las mujeres, sobre todo cuando las imágenes se construyen intencionalmente (por ejemplo, para comprender cómo trabaja algo, para hacer evaluaciones y tomar decisiones o para planificar); lo contrario ocurre cuando las imágenes se educen espontáneamente por estímulos o se incluyen en el ensueño y la fantasía.

Por otra parte, los datos convergen sugiriendo que las imágenes autónomas y de fantasía se distinguen de las imágenes implicadas en el razonamiento dirigido. Como los datos han mostrado que esta última clase de imágenes ocurre con rara frecuencia, se puede suponer que el sujeto no puede aprovecharse deliberadamente de la construcción de imágenes mentales para facilitar los procesos cognoscitivos. Más precisamente, el individuo parece considerar poco la posibilidad de emplear imágenes mentales para procesar información abstracta o verbal y para producir más visualizaciones articuladas. Esto refleja su conocimiento metacognitivo del uso de las imágenes; en efecto, cree que las imágenes son útiles sobre todo para tratar con elementos que son originariamente visuales o espaciales, pero no con aquellos que deben recodificarse en un formato visoespacial. Así, a fin de inducir un uso de la visualización más eficiente e intencional, debe enseñársele al sujeto a crear imágenes mentales, aun cuando no tienda a hacerlo espontáneamente.

Piaget (1978, pp. 295-296), al referirse a las operaciones lógico-matemáticas, sostiene que éstas "proceden de las acciones más generales que podemos ejercer sobre los objetos [...] los actos de reunir o disociar, de ordenar o cambiar de orden, etc. consisten inicialmente en movimientos reales efectuados materialmente o imaginados en el pensamiento [...]"; la curva del desarrollo de los entes matemáticos sigue una dirección "originada en la coordinación de las acciones que el sujeto ejerce sobre el objeto y se aleja cada vez más de este objeto inmediato, pero sigue conservando el poder de reunirse con él y lo reencuentra en realidad en todos los niveles de profundidad o extensión a los que puede conducir su análisis físico".

Esta particular función "constructiva" de la imaginación ha sido tematizada por la filosofía realista, tanto clásica como contemporánea. Tomás de Aquino (I, q.84 a.7) al referirse a la abstracción dice: "Todos pueden experimentar en sí mismos que, cuando se quiere entender algo, se forman ciertas imágenes a modo de ejemplares, en los que podemos contemplar, por así decirlo, lo que nos proponemos entender." Y agrega más adelante: "Por consiguiente, para que el entendimiento entienda en acto su objeto propio, es necesario que recurra a las imágenes de la fantasía, a fin de descubrir la naturaleza universal existiendo en un objeto singular." Este texto se ubica en el contexto de la discusión sobre el origen del conocimiento intelectual y el rol de la sensibilidad en él. Aquí podríamos encontrar en el texto un elemento importante de lo que queremos decir cuando hablamos de la representación como "mediador" cognitivo: dicha mediación no se limitaría al momento de constitución de los conceptos geométricos, sino que se extendería al momento del "uso" de dichos conceptos.

Antonietti (1990), en una experiencia donde a la libre elaboración de imágenes mentales le sigue la resolución de un problema, observa que dicha elaboración produce una flexibilidad general de la estructura cognoscitiva ligada al problema. Confirma la función heurística que tiene la elaboración de tipo espacial-figurativa en la solución, haciendo a la situación problemática más disponible a la restructuración.

DESCRIPCIÓN DEL INSTRUMENTO

Nuestro interés se centra en evaluar la habilidad para realizar transformaciones mentales, no en distinguir entre "visualizadores" (los que poseen un estilo cognoscitivo por el que tienden a usar la imagen visual en la realización de una tarea intelectual) o "verbalizadores" (los que recurren habitualmente a una estrategia verbal). Nos ocupamos de detectar esa habilidad para poder emplearla como una estrategia de aprendizaje que facilite la asimilación y uso de los conceptos.

Existen distintos tests cuya aplicación como instrumentos de evaluación en el aula provoca ciertos inconvenientes, ya sea por su nivel elevado o por su extensión. Entre ellos podemos citar: *Purdue Spatial Visualization Test* (Guay, 1976), *Differential Aptitude Tests- SR* (Bennet y otros, 1949), *Rompecabezas impresos* (Yela, 1974), etc. Otros autores han utilizado cuestionarios o autoinformes para evaluar el uso de la imaginación durante distintas actividades (Overly y otros, 1998; Giorgetti y Antonietti, 1992).

El instrumento que presentamos consta de 12 ejercicios[1] (se adjunta en el apéndice), que consisten en:

I.1. Recomponer dos columnas con seis fragmentos desordenados.

I.2. Reconocer, entre cuatro representaciones de objetos, las tres que representan el mismo objeto en distintas posiciones.

I.3. Asociar el desarrollo de un cubo con su correspondiente cubo armado.

I.4 y I.5. Contar las caras y las aristas de un cuerpo que se obtienen al efectuar cortes en cada uno de los vértices de un cubo de modo que queden formados triángulos.

I.6. Recomponer un marco de un cuadro a partir de seis partes (sólo cuatro encajan correctamente).

I.7 y I.8. Para formar un cubo se emplean veintisiete cubitos y se pinta su exterior. Contar cuántos cubitos tienen pintadas sólo dos caras y cuántos ninguna.

I.9. Calcular de cuántas formas distintas se pueden unir cuatro cuadrados por los lados. No se deben tener en cuenta las mismas formas en distinta posición.

I.10. Se colocan cuatro engranajes uno al lado del otro, determinar en qué

[1] Los ejercicios se extrajeron de distintas fuentes:

- 1, 3 y 6 se tomaron de revistas de entretenimiento,
- 2 de Gorgorió (1998),
- 4, 5, 7, 8 y 9 de problemas para las Olimpíadas Matemáticas,
- 10 del DAT – Razonamiento Mecánico,
- 11 de Gorgorió y otros (2000).

dirección gira el último de la derecha si el primero de la izquierda gira en sentido antihorario

I.11. Determinar cuáles de los ocho dibujos corresponden a una casa observada desde cuatro puntos de vista distintos.

I.12. Dibujar cada una de las tres banderas después de girar 90º hacia la izquierda (sentido antihorario), teniendo como centro el punto señalado. Dibujar cada una de las tres banderas después de girar 90º hacia la derecha (sentido horario), teniendo como centro el punto señalado.

Los ejercicios 1, 2, 6, 10 y 12 requieren *rotaciones mentales* para llegar a la respuesta, ya sea que se trate de mover figuras en el plano para ver si encajan (1, 2, 6 y 10) o que se requiera dibujar (12).

El núm. 3 se resuelve armando "mentalmente" el desarrollo plano del cubo y comparándolo con los modelos que se presentan. El núm. 9 requiere, además, una rotación de figuras en el plano para reconocer las formas similares de un esquema que contemple todas las combinaciones posibles. Para resolver el núm. 11 es necesario ubicarse "mentalmente" en las posiciones que se señalan e imaginar la vista que desde allí se tiene de la casa, luego se debe reconocerlas entre los modelos que se muestran. Los números 4, 5, 7 y 8 exigen contar elementos no visibles y, en consecuencia, deben imaginarse.

MUESTRA

Nuestra población comprende a los alumnos de 2º año de enseñanza secundaria (que tienen entre 14 y 15 años de edad) de tres colegios de turno matutino, representativos de instituciones de gestión privada de Capital Federal y Gran Buenos Aires, Argentina.

La muestra es estratégica u ocasional, seleccionada en función del fin principal de la investigación: probar un instrumento diseñado *ad hoc* y *explorar* sus cualidades psicométricas específicas para su uso particular (la evaluación de la competencia imaginativa en alumnos de esa edad, nivel de escolaridad y nivel sociocultural).

Está compuesta por cuatro cursos, que corresponden a distintas modalidades de enseñanza (uno de bachillerato mercantil, otro de bachillerato pedagógico y dos de un colegio técnico). Los dos primeros pertenecen a dos escuelas de Capital Federal y los otros, a una del Gran Buenos Aires.

Tiene un tamaño de 118 sujetos.

La aplicación de la prueba fue colectiva y duró aproximadamente 50 minutos.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

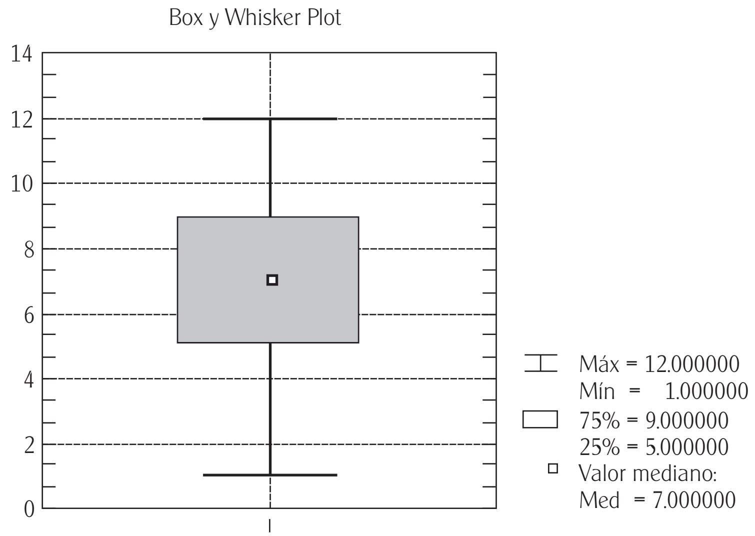
Los datos de la muestra fueron sometidos a diversos tipos de análisis: descripción de la variable "imaginación", determinación de la validez de constructo y de la confiabilidad, estudio de la potencialidad discriminativa y del nivel de dificultad de los ítems.

A) DESCRIPCIÓN DE LA VARIABLE I Y DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LOS ÍTEMS

Con I representamos la variable "imaginación" y la definimos como el número de ítems (o ejercicios) de la prueba bien resueltos. Como cada respuesta correcta se evalúa con 1 punto, el rango de la puntuación es de 0 a 12. Al ejercicio 9 se le asigna un punto si se reconocen tres de las cuatro vistas correctas y al ejercicio 10 si se dibujan correctamente 4 de las 6 banderas. La media de I = 6.92 y su desviación estándar = 2.75

El gráfico 1 muestra un rango extendido, ya que abarca del puntaje 1 al 12. También manifiesta que el 50% central de los datos (representados en el bloque rectangular) está comprendido entre los valores 5 y 9.

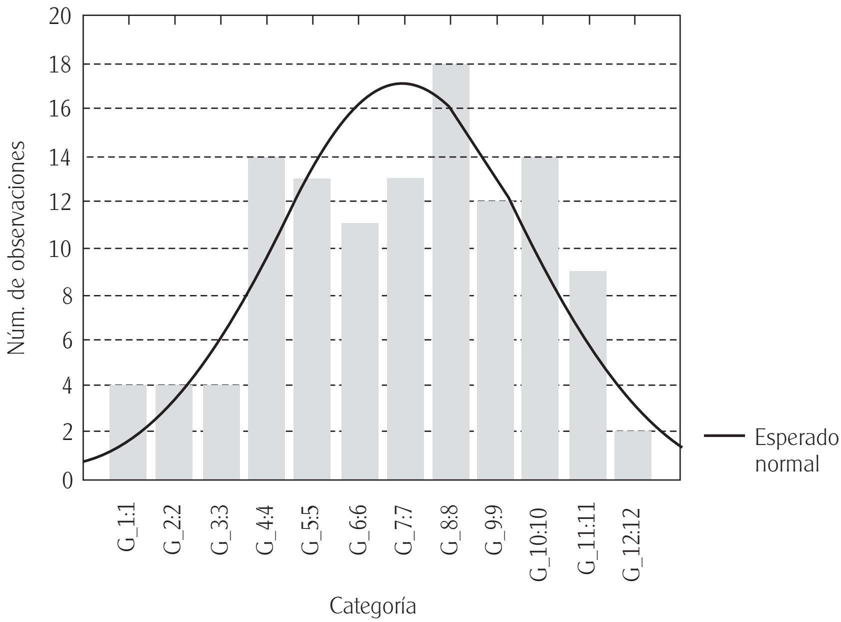
Gráfico 1 Box-plot de I



Cuadro 1 Distribución de frecuencias

	Frecuencia	Porcentaje		Frecuencia	Porcentaje
G_1:1	4	3.38	G_7:7	13	11.01
G_2:2	4	3.38	G_8:8	18	15.25
G_3:3	4	3.38	G_9:9	12	10.16
G_4:4	14	11.86	G_10:10	14	11.86
G_5:5	13	11.01	G_11:11	9	7.62
G_6:6	11	9.32	G_12:12	2	1.69

Gráfico 2 Distribución de la variable I



El gráfico 2 (de barras) muestra que los valores menos frecuentes de la variable I son 1, 2, 3 y 12, lo que está indicando que son pocos los sujetos que resolvieron bien un número pequeño de ítems o toda la prueba.

Cuadro 2 Promedio de aciertos por ejercicio

Ítem	Media	DS
I 1	0.81	0.39
I 2	0.55	0.49
I 3	0.73	0.44
I 4	0.59	0.49
I 5	0.35	0.48
I 6	0.88	0.31
Ítem	Media	DS
I 7	0.14	0.35
I 8	0.27	0.45
I 9	0.38	0.48
I 10	0.90	0.29
I 11	0.54	0.50
I 12	0.72	0.45

B) ESTUDIO DE LA VALIDEZ DE CONSTRUCTO

La homogeneidad de los ítems, relación entre cada ítem y el puntaje de la prueba, puede servir para determinar la validez de construcción del instrumento por el método de la consistencia interna. Para hacerlo, se puede calcular la correlación biserial entre "correcto o incorrecto" en cada ejercicio y la puntuación total del test y sólo se retienen los elementos que arrojen correlaciones significativas. El test, cuyos elementos son seleccionados por este método, muestra consistencia interna, puesto que cada elemento se diferencia en el mismo sentido que el test entero (Anastasi, 1973, p. 122).

Cuadro 3 Correlación entre cada ejercicio y la puntuación total del test

Ítem	Correlación biserial
I 1	0.46
I 2	0.56
I 3	0.45
I 4	0.57
I 5	0.60
I 6	0.49
I 7	0.45
I 8	0.65
I 9	0.53
I 10	0.28
I 11	0.62
I 12	0.58

Todos los coeficientes son significativos estadísticamente en el nivel de significación de 0.05.

c) Confiabilidad

Para calcular la confiabilidad, se aplicaron dos métodos de determinación de la consistencia interna: alpha de Cronbach y división por la mitad, en cuanto requieren una sola administración del instrumento. Arrojan un índice que oscila entre 0 (confiabilidad nula) y 1 (confiabilidad máxima).

El alpha de Cronbach es 0.76. Luego, según este estadístico (el "preferido" en la investigación cuantitativa contemporánea, según lo evidencian las publicaciones periódicas), se considera que el instrumento tiene una confiabilidad *relativamente buena,* porque la teoría psicométrica establece el índice de 0.70 como la confiabilidad mínima aceptable.

Cuadro 4 Método de la subdivisión

	Primera mitad	Segunda mitad
Núm. de ítems	6	6
Media	2.97	3.94
Suma	351	466
DS	1.53	2.21
Alpha de Cronbach	0.595	0.614

Correlación entre la primera y la segunda parte = 0.64
Confiabilidad por el método de mitades = 0.784
Confiabilidad del test con el doble número de ítems = 0.878

El coeficiente de correlación de 0.878 suministra una estimación de la confiabilidad de la prueba completa en la que la correlación de las medias pruebas alcanzó un valor de 0.784. Este procedimiento estima la confiabilidad de todo el instrumento, basada en la confiabilidad obtenida para la mitad, que se calculó mediante la "fórmula de profecía " o de "predicción " de Spearman-Brown.

El principal supuesto de este método es que los dos nuevos tests son razonablemente equivalentes y, luego, el resultado obtenido suele llamarse también *coeficiente de equivalencia*, porque se basa en dos formas parciales del instrumento. En este caso, arroja un índice de confiabilidad que la teoría psicométrica llama *considerable*.

Según Anastasi (1973, p. 89), la diferencia entre los coeficientes que resultan de estos dos métodos de determinación de la confiabilidad puede servir como indicador aproximado del grado de homogeneidad del test, ya que, a menos que los elementos de éste sean extremadamente homogéneos, el alpha de Cronbach será inferior a la correlación entre las mitades, como ocurre con nuestro instrumento.

d) Estudio de la potencialidad discriminativa de los ítems

Para determinarla, se empleó el procedimiento de ordenar los resultados en la muestra total en forma decreciente, computar el porcentaje de respuestas correctas por ítem en 27% superior y en 27% inferior y establecer los coeficientes de correlación biserial.

Cuadro 5 Índices de discriminación

Ítem	Correlación biserial
I 1	0.46
I 2	0.71
I 3	0.42
I 4	0.66
I 5	0.78
I 6	0.36
Ítem	Correlación biserial
I 7	0.60
I 8	0.94
I 9	0.74
I 10	0.30
I 11	0.68
I 12	0.55

Es difícil establecer un límite medio aceptable para el índice de discriminación pero, para tests de escolaridad, se emplea el siguiente (Vianna, p. 232): un coeficiente menor de 0.19 se considera deficiente; entre 0.20 y 0.29, marginal; entre 0.30 y 0.39, bueno y de 0.40 o más, muy bueno. Por consiguiente, la totalidad de nuestro instrumento tiene una potencialidad discriminativa de nivel bueno o muy bueno.

E) ESTUDIO DE LA DIFICULTAD DE LOS ÍTEMS

Para la determinación del grado de dificultad de los ítems, se divide la muestra –desde la mediana– en grupo superior e inferior; se determina el porcentaje de respuestas correctas en cada ítem (*p* para el grupo superior y *p*' para el inferior). El nivel de dificultad (ND) resulta de promediar *p* y *p*'.

Cuadro 6 Nivel de dificultad de los ítems

Ítem	ND
I 1	0.79
I 2	0.53
I 3	0.71
I 4	0.55
I 5	0.31
I 6	0.88
Ítem	ND
I 7	0.12
I 8	0.25
I 9	0.35
I 10	0.90
I 11	0.50
I 12	0.69

Según Yela (1958), los límites aproximados de los ND son: de 0.75 a 0.95, muy fáciles; de 0.55 a 0.74, fáciles; de 0.40 a 0.54, medios; de 0.25 a 0.39, difíciles y de 0.05 a 0.24, muy difíciles. Luego, en nuestro caso, se obtuvieron:

- tres ítems muy fáciles (el 1, el 6 y el 10);
- tres ítems fáciles (el 3, el 4 y el 12);
- dos ítems medios (el 2 y el 11);
- tres ítems difíciles (el 5, el 8 y el 9);
- un ítem muy difícil (el 7).

En consecuencia, la mayor parte de la prueba presenta una dificultad media; sólo tres ítems resultan muy fáciles y uno, muy difícil. Nuestro instrumento, entonces, evidencia el nivel de dificultad deseable, porque según Vianna (1983, p. 231), la experiencia recomienda, y los estudios estadísticos lo confirman, que en un test de uso escolar se empleen ítems cuyo intervalo de dificultad se ubique entre 0.2 y 0.8 (para que el instrumento pueda establecer los distintos niveles de rendimiento de los alumnos), con un *índice medio* de 0.5. También Lindeman (1971, p. 113) aconseja: "En todos los tests deben incluirse algunos ítems fáciles para estimular al alumno de escasa capacidad y también es necesario que haya algunos ítems relativamente difíciles, que constituyan un desafío para los más capaces. Sin embargo, para lograr que el instrumento de medición tenga la máxima calidad y utilidad, la mayoría de los ítems incluidos debe presentar un nivel medio de dificultad."

A MODO DE CONCLUSIÓN

Si bien existen algunos tests para evaluar competencia imaginativa, su aplicación en el aula de enseñanza media se ve dificultada por su nivel elevado o por su longitud. Y una meta educativa de importancia requiere un procedimiento apropiado de evaluación. En este sentido, según Oakland y Eu (1993), el interés creciente por el desarrollo de pruebas con cualidades psicométricas comprobadas, especialmente de elaboración local, se funda en la preocupación internacional por la *calidad educativa,* en la cual el test desempeña un importante papel.

De allí que el juicio acerca del valor de un instrumento para un propósito particular sólo debería emitirse una vez determinadas, de manera objetiva y tan exacta como fuera posible, dichas cualidades psicométricas, porque este conocimiento es necesario para que tanto el nuevo instrumento como los datos obtenidos con él puedan utilizarse significativamente. En nuestro caso, lo hemos empleado como preprueba para juzgar la incidencia de una experiencia pedagógica que buscaba promover la competencia imaginativa.

El análisis estadístico efectuado manifestó que el instrumento presenta validez de construcción adecuada, evaluada a través del índice de homogeneidad de los ítems: cada ejercicio parece diferenciarse en el mismo sentido que el instrumento en su totalidad.

En segundo lugar, respecto del llamado "análisis cuantitativo de los ítems", la totalidad del instrumento tiene una potencialidad discriminativa de nivel bueno o muy bueno, y el intervalo de dificultad recomendado por la teoría estadística.

Parece, entonces, un *instrumento potente* en cuanto que, por un lado, evalúa una competencia unitaria y, por el otro, resulta sensible a distintos niveles de logro en la capacidad imaginativa de alumnos de 2º año de enseñanza secundaria.

En tercer lugar, manifiesta una confiabilidad cercana o superior a 0.80 según el procedimiento empleado (alpha de Cronbach y método de mitades, respectivamente), coeficiente que la teoría psicométrica juzga "considerable".

Finalmente, resulta de ágil aplicación y calificación, ambas cualidades de importancia en el ámbito escolar.

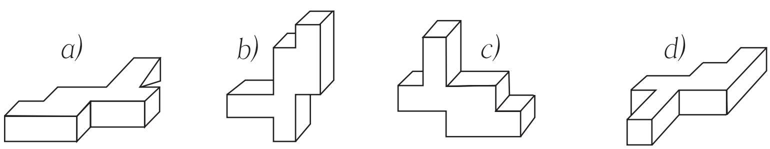
Sería de interés, objetivo de un futuro trabajo, establecer la validez de criterio de la prueba correlacionando estos resultados con el rendimiento de los alumnos en geometría; también ampliar la muestra para incluir otras edades e investigar empíricamente si el sexo es en nuestra población un factor diferencial de la capacidad imaginativa.

APÉNDICE

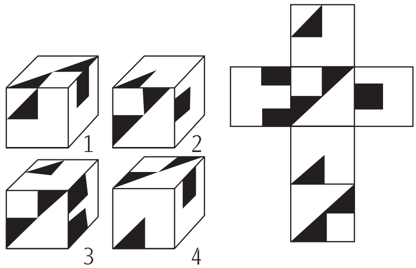
Prueba de competencia imaginativa

1.1 Recompone con estos fragmentos desordenados 2 columnas.

1.2 Entre estas figuras, hay 3 que representan el mismo objeto en distintas posiciones. ¿Cuáles son?



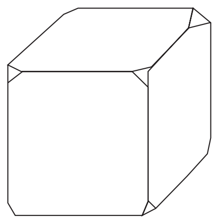
1.3 A la derecha encontramos un cubo desarmado ¿Cuál es el correspondiente cubo armado?



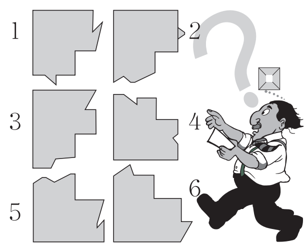
En un cubo se efectuaron cortes en cada uno de los vértices de modo que queden formados triángulos, como muestra la figura. El cuerpo obtenido tiene 24 vértices.

1.4 ¿Cuántas caras tiene?

1.5 ¿Cuántas aristas tiene?



1.6 Se presentan a modo de rompecabezas, diversas partes de distintos marcos de cuadros.
Sólo 4 de ellas se ajustan perfectamente entre sí para formar un marco. ¿Cuáles son?

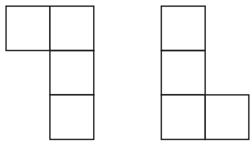


Para formar un cubo se usan 27 cubitos y se pinta el exterior del cubo.

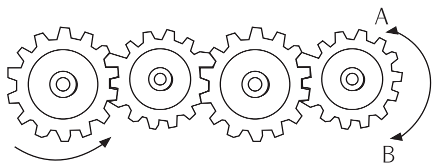
1.7 ¿Cuántos cubitos tienen sólo dos caras pintadas?

1.8 ¿Cuántos cubitos no tienen caras pintadas?

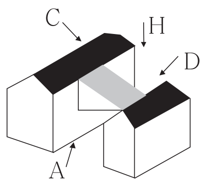
1.9 ¿De cuántas formas se pueden unir cuatro cuadrados por los lados? El dibujo muestra una de ellas. No han de tomarse en cuenta las misma formas en distinta posición, como la que aparece a la derecha del dibujo, que es exactamente igual a la de la izquierda. Cuenta sólo las formas diferentes.

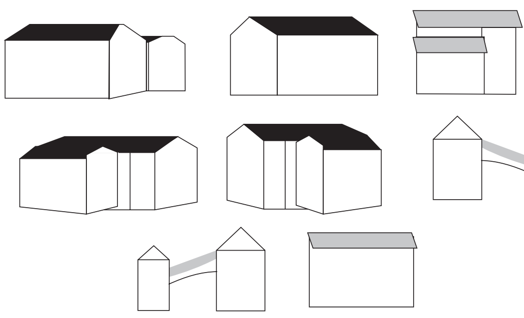


1.10 En que dirección, A o B, gira el engranaje de la derecha cuando el engranaje de la izquierda gira en la dirección indicada?



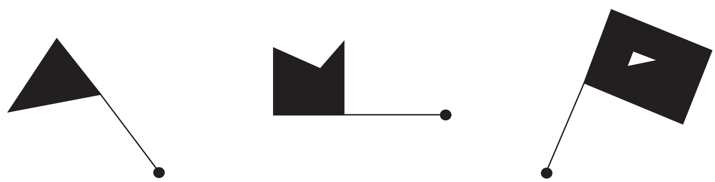
1.11 Indica en los dibujos de la derecha, cuáles corresponden a la casa vista desde el punto A, desde el punto B, desde el punto C y desde el punto D.





1.12 Dibuja cada una de las banderas después de girar 90° hacia la izquierda, teniendo como centro el punto señalado.

Dibuja cada una de las banderas después de girar 90° hacia la derecha teniendo como centro el punto señalado



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anastasi, A. (1973), *Tests psicológicos*, Madrid, Aguilar.

Antonietti, A. (1990), "Libera elaborazione di immagine mentali e soluzione di problemi", *Orientamenti Pedagogici,* vol. 37, núm. 5, 221, pp. 992-1007.

Antonietti, A. y B. Colombo (1996-1997), "The Spontaneous Occurrence of Mental Visualization in Thinking", *Imagination, Cognition and Personality,* vol. 16, núm. 4, pp. 415-428.

Battista, M., G. Wheatley y G. Talsma (1989), "Spatial Visualization, Formal Reasoning, and Geometric Problem-Solving Strategies of Preservice Elementary Teacher", *Focus on Learning Problems in Mathematics,* vol. 11, núm. 4, pp. 17-30.

Bennet,G., H. Seashore y A. Wesman (1949), *Differential Aptitude Test,* Nueva York, Psychological Corp.

Giorgetti, M. y A. Antonietti (1992), "'Verbalizzatori' e 'visualizzatori': Strumenti di identificazione", *Orientamenti Pedagogici,* vol. 39, 229, pp. 71-96.

Gorgorió, N. (1998), "Exploring the Functionality of Visual and Non-Visual Strategies in Solving Rotation Problems", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 35, núm. 3, pp. 207-231.

Gorgorió, N. *et al.* (2000), "Proceso de elaboración de actividades geométricas ricas: un ejemplo, las rotaciones", *Suma*, vol. 33, pp. 59-71.
Guay, R. (1976), *Purdue Spatial Visualization Test*, Purdue Research Foundation.
Lindeman, R. (1971), *Tratado de medición educacional*, Buenos Aires, Paidós.
Oakland, T. y S. Hu (1993). "The Top 10 Tests Used with Children and Youth Worldwide", *Bulletin of the International Test Commission*, vol. 19, núm. 1, pp. 99-120.
Overly, L., C. Hall e I. Haslam (1998), "A Comparison of Imagery Used by Dance Teachers, Figure Skating Coaches, and Soccer Coaches", *Imagination, Cognition and Personality*, vol. 17, núm. 4, pp. 323-337.
Paivio, A. (1985), "Cognitive and Motivational Functions of Imagery in Human Performance", *Canadian Journal of Applied Sport Sciences*, vol. 10, pp. 22-28.
Piaget, J. (1978), *Introducción a la epistemología genética. 1 El pensamiento matemático*, 2a. ed., Buenos Aires, Paidós.
Tomás de Aquino (1959), *Suma teológica*, Madrid, B.A.C.
Vianna, H. (1983), *Los tests en educación*, Pamplona, Universidad de Navarra.
Vosniadou, S., Ch. Ioannides, A. Dimitrakopoulou y E. Papademetriou (2001), "Designing Learning Environments to Promote Conceptual Change in Science", *Learning and Instruction*, núm. 11, pp. 381-419.
Yela, M. (1958), *Psicometría y estadística*, Madrid, Apuntes del Curso de la "Escuela de Psicología y Psicotecnia" de la Universidad de Madrid, revisados por el autor.
—— (1974), *Rompecabezas impresos*, Madrid, TEA.

DATOS DE LAS AUTORAS

María Virginia Rapett
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y
Centro de Investigaciones en Antropología Filosófica y Cultural (CIAFIC),
Capital Federal, Argentina
virginiarapetti@hotmail.com

Hilda Difabio de Anglat
Centro de Investigaciones Cuyo (CIC), Universidad Nacional de Cuyo,
Mendoza, Argentina
ganglat@tutopia.com

Rol que le asignan los docentes a los ejercicios y problemas en las clases de aritmética. Un trabajo exploratorio

Virginia Montoro, Martha Ferrero y Cristina Ferraris

Resumen: Se trata de un trabajo exploratorio, basado en observaciones de clases de aritmética, en San Carlos de Bariloche, provincia de Río Negro (Argentina). El análisis y la discusión se centran en los ejercicios y problemas utilizados por los docentes en el tratamiento del tema y se determinan categorías respecto al uso que de éstos hacen los docentes.

Palabras clave: Rol, problemas, aritmética, docentes, matemática.

Abstract: This is an exploratory work, based on observation of arithmetic classes in San Carlos de Bariloche, Rio Negro, Argentina. The analysis and discussion focus on exercises and problems used by the teachers during the development of the theme, determining categories on the use they make of them.

Key words: Role, teachers, problems, arithmetic, mathematics.

INTRODUCCIÓN

Con origen en un movimiento que tiene por pionero al matemático G. Polya y basándose fundamentalmente en sus trabajos *How to solve it* (1945/1957); *Mathematics and Plausible Reasoning* (1954) y *Mathematical Discovery* (1962-1965/1981), desde comienzos de la década de los ochenta parece haber un acuerdo general en cuanto a que la resolución de problemas debe desempeñar un papel importante en la matemática escolar.

Hoy resulta un objetivo aceptado de la instrucción matemática convertir a los estudiantes en resolutores competentes de problemas. Sin embargo, la expresión "resolución de problemas" ha sido usada con múltiples significados que van desde "trabajar sobre ejercicios" hasta "hacer matemática como un profesional".

Schoenfeld (1992) distingue dos polos en la interpretación de esta expresión. El primero se refiere al sentido de ésta como ha sido usado tradicionalmente en

Fecha de recepción: abril de 1999.

la instrucción matemática; son más bien *ejercicios rutinarios* organizados como práctica en una técnica matemática particular que ha sido recientemente mostrada a los estudiantes. El otro extremo se refiere a la resolución de problemas como los que encuentra un matemático en su actividad de construcción del conocimiento (a estos problemas Schoenfeld los llama de la "clase perpleja").

Sobre la base de una revisión histórica acerca de la utilización de la resolución de problemas, Stanic y Kilpatrick (1988) resumen las referencias encontradas en tres grandes temas: *como contexto* (medio para lograr otros objetivos); *como habilidad* y *como arte*.

Para estos autores, lo tradicional en la enseñanza es que la resolución de problemas sea vista *como medio para lograr otros objetivos*. Esto sucede cuando los problemas son empleados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares (en el sentido de tareas requeridas para ser resueltas). De acuerdo con estos objetivos, los autores identifican cinco clases:

a) Como *una justificación para la enseñanza de la matemática*. Algunos problemas relacionados con las experiencias de la vida real pueden convencer a docentes y estudiantes del valor de la Matemática.
b) Como *motivación específica para los tópicos de la disciplina*. Los problemas son usados para introducir tópicos con el entendimiento implícito o explícito de que, "una vez que has aprendido la lección que sigue, serás capaz de resolver problemas de este tipo".
c) Como *recreación*. Los problemas recreativos son propuestos como motivación en un sentido más amplio que en (b). Muestran que "la Matemática puede ser divertida".
d) Como *un medio de desarrollar nuevas destrezas*. Los problemas cuidadosamente secuenciados pueden introducir a los estudiantes en un nuevo tema de la disciplina y proveer un contexto para las discusiones de las técnicas de éste.
e) Como *práctica*. Se les muestra una técnica a los estudiantes y luego se les dan problemas para practicar, hasta que hayan dominado la técnica.

En cualquiera de estos roles, los problemas son vistos más bien como entidades que permiten lograr uno de los objetivos antes mencionados. Es decir, la resolución de problemas no se ve generalmente como un objetivo en sí mismo, pero resolver problemas es visto como facilitador para el logro de otros objetivos. La resolución de problemas tiene una interpretación minimal: trabajar las tareas que han sido presentadas e ilustrar el uso que puede darse a los conceptos.

En el segundo rol que, según estos autores, puede adquirir la resolución de problemas, ésta es vista como una habilidad en sí misma, que debe ser enseñada de manera independiente. Así, se constituye en una jerarquía de destrezas que serán adquiridas por los estudiantes, tendencia educativa que se manifiesta en forma explícita a partir de la década de los ochenta.

El tercer rol al que hacen referencia estos autores, y que da una visión en fuerte contraste a las dos previas, sostiene que la verdadera resolución de problemas (esto es, trabajar los problemas de la clase "perpleja") es la actividad matemática central. En esta visión, los grandes problemas que han permanecido sin resolver por décadas y cuya solución da a los resolutores una notoriedad significativa, difieren sólo en escala de los problemas encontrados día a día en la actividad matemática y, por ello, las experiencias matemáticas de los estudiantes deberían prepararlos para enfrentar tales desafíos.

Por otra parte, cabe mencionar que las teorías de Didáctica de la Matemática correspondientes a la corriente francesa toman como la actividad matemática esencial la resolución de problemas y la reflexión sobre ellos. Según Charnay (1988), las nociones matemáticas se hacen aparecer como herramientas para resolver problemas a través de las cuales los alumnos construyen el sentido de esos saberes y, sólo después, estas herramientas podrán ser estudiadas por sí mismas. Es decir se le asigna a la resolución de problemas el muy importante rol de dar sentido a los saberes matemáticos.

En cuanto a las diversas posiciones que el docente puede adoptar respecto al rol y el lugar que asigna a la actividad de resolución de problemas, Charnay (1988) resume:

a) *El problema como criterio del aprendizaje*: como mecanismos se utilizan lecciones (adquisición) y ejercicios (ejercitación) y el sentido del problema es la utilización de los conocimientos por parte del alumno y de control para el docente.
b) *El problema como móvil del aprendizaje*: Se motiva al estudiante a través de una situación basada en lo cotidiano. Los mecanismos usados son aporte de conocimiento, práctica, ejercicios. Los problemas atienden a la resignificación de la situación.
c) *El problema como recurso de aprendizaje*: La resolución de problemas como fuente, lugar y criterio de la elaboración del saber.

Este trabajo centra su atención en el rol que le asignan los docentes a las tareas que podemos llamar ejercicios o problemas en una situación de clase, tomando como base para el análisis la clasificación provista por Stanic y Kilpatrick (1988). El mismo se encuadra en un proyecto más amplio cuyo objetivo general es "identificar estrategias de enseñanza utilizadas por docentes en el tratamiento inicial de la aritmética[1] en la escuela media".

Se trata de una exploración, que no pretende resultados generalizables, sino más bien un primer acercamiento al uso que los docentes dan en sus clases de todos los días a los ejercicios o problemas. Nuestra intención es llamar la atención sobre procesos, circunstancias y tendencias que, por cotidianos, podrían pasar inadvertidos.

METODOLOGÍA

Se realizaron registros de observaciones etnográficas de 20 clases correspondientes a tres docentes, elegidos entre aquéllos a cargo de los cursos donde se tratan los temas de aritmética y que, contactados en los respectivos colegios, mostraron disponibilidad e interés en colaborar con esta investigación.

Las observaciones de las clases fueron realizadas durante el periodo en el que los docentes desarrollaron el tema de nuestro interés, en los cursos que ellos eligieron y basándose en sus propias planificaciones.

Los registros se llevaron a cabo por dos de las autoras simultáneamente, con toma de notas, copia de lo realizado en el pizarrón y grabación. Cabe aclarar que las intervenciones generales de los alumnos en las puestas en común fueron tenidas en cuenta particularmente, pero no se tomaron registros de las actividades individuales de éstos (carpetas o evaluaciones), ya que el estudio se centra en la gestión docente. Las clases fueron transcriptas en su totalidad, siguiendo las notas y recurriendo a las grabaciones sólo en caso de dudas.

Para el análisis de los datos, se realizó una primera lectura de todas las clases tomando nota de los aspectos más relevantes; a partir de los cuales se confeccionó una plantilla que serviría de guía para una segunda lectura. Ésta se realizó consignando en la plantilla, para cada ejercicio o problema, las apreciaciones de las investigadoras respecto al rol asignado por los docentes a los ejercicios y problemas, para ello se adoptó el punto de vista descrito por Stanic y Kilpatrick (1988), adaptándolo a nuestro estudio de casos.

[1] Entenderemos por aritmética el estudio de los números enteros respecto a los siguientes temas: divisibilidad, números primos, algoritmo de la división; máximo común divisor; números coprimos; mínimo común múltiplo; teorema fundamental de la aritmética.

Luego se procedió a la discusión conjunta de cada una de las plantillas, en busca de un consenso en las categorizaciones, que sólo llevó a ajustes menores, ya que se dieron en general pocas diferencias.

Por último se realizó la discusión de éstas a fin de llegar a las conclusiones generales.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

La totalidad de las tareas observadas son utilizadas *como medio para lograr otros objetivos*. En ningún caso se proponen problemas como arte y tampoco se enseña específicamente a resolver problemas.

Entre estos fines hemos encontrado:

1. Como *motivación específica para los tópicos de la disciplina,* 2 casos.

Ejemplo: En el momento de introducir el concepto de MCD, se propone la siguiente consigna: Agrupar las fichas de esta manera:

1) colocar el mayor número de fichas en cada grupo.
2) cada grupo debe tener fichas de la misma forma.
3) cada grupo debe contener la misma cantidad de fichas
   ¿Cuántas fichas deben colocar en cada grupo?

La profesora entrega primero el material (figuras geométricas de cartulina) y luego dicta la consigna. Propone un cuadro para organizar la información. Hace una síntesis de lo que revelan los cuadros formulando los resultados en un lenguaje conjuntista y utilizando el concepto de divisor. Establece que el resultado es MCD(16,28). Luego del desarrollo de este ejemplo establece la definición de máximo común divisor.

2. Como *un medio de desarrollar nuevas destrezas,* 12 casos.

Ejemplo: A fin de ilustrar el algoritmo "Criba de Eratóstenes", la profesora propone leer una fotocopia donde se cuenta una breve historia de él y se explica, paso a paso, cómo se construye. Propone la consigna: "Confeccionar la criba de Eratóstenes para hallar los primos menores que 100" para ser realizada en grupos. En la clase siguiente se hace una puesta en común donde la profesora va realizando en el pizarrón cada paso enunciado en la fotocopia. Discute con los alumnos sobre algunos casos particulares, como por ejemeplo, 49 y dice: ¿49 es múltiplo de qué número? Y luego lo tacha. Anotan en el pizarrón los primos encontrados. Se detienen en 100, porque era lo que pedía el enunciado, mostrando que esta técnica provee un método para encontrar primos.

3. Como *práctica,* 35 casos

Ejemplo: Esta tarea se propone luego de institucionalizar el concepto de mínimo común múltiplo; es realizada por los alumnos en el pizarrón, siguiendo la estrategia propuesta por la profesora (hallar los primeros múltiplos de cada número, resaltar los comunes y buscar el menor).

Hallar el m.c.m. de

a) m.c.m. (135, 150, 45) = d) m.c.m. (6,5, 15,10) =
b) m.c.m. (121, 77, 22) = e) m.c.m. (18,42,6) =
c) m.c.m. (410, 287) = f) m.c.m. (25, 8) =

4. *Recreación,* 1 caso (fue propuesto pero no desarrollado en clase).

Ejemplo: Curiosidad numérica: Toma un número cualquiera de tres cifras. Escríbelo dos veces consecutivas. Comprueba que el número es divisible por 7, 11 y 13. Pues 7.11.13 = 1001 y un número ABC multiplicado por 1001 no es otra cosa que ABCABC.

El siguiente cuadro muestra estos mismos datos consignados por el profesor.

	Motivación específica	Desarrollar nuevas destrezas	Práctica	Recreación	Total
Profesor I	2	5	9	0	16
Profesor II	0	2	13	0	15
Profesor III	0	4	14	1	19
Total	2	11	36	1	50

Vemos cómo, en la amplia mayoría de los casos, se toman los ejercicios o problemas como *práctica,* es decir, un uso centrado exclusivamente en los contenidos por tratar. Si bien hay 11 casos en los cuales se utilizan para desarrollar nuevas destrezas, éstas, en su mayoría, se tratan de algoritmos de cálculo.

En el caso de dos profesores, la mayoría de los ejercicios (12 de 16 y 11 de 15) podemos considerarlos como ejercicios rutinarios (Schoenfeld, 1992), es decir, responden al siguiente esquema: el profesor muestra las nociones, las introduce, provee ejemplos y propone los problemas de aplicación. Mientras que en el tercer profesor encontramos que sólo dos ejercicios se ajustan a este esquema, en cuanto que no proveía un ejemplo modelo, resultando más activa la participación de los alumnos. Es de destacar que ésto se desprende del análisis de las observaciones, ya que los enunciados de los problemas propuestos por los tres profesores no difieren en sintaxis o dificultades respecto de los requerimientos a los alumnos.

CONCLUSIONES

Como dijimos, no pretendemos en este trabajo resultados generalizables, sino un primer acercamiento al uso que los docentes dan en sus clases a tareas que podemos llamar ejercicios o problemas. Si bien no consideramos que los docentes observados constituyan una muestra representativa, no tenemos motivos para pensar que se trata de casos raros ni excepcionales, por lo que creemos que pueden aportar datos para llamar la atención sobre procesos, circunstancias y tendencias que, de otro modo, podrían pasar inadvertidos. Somos conscientes de que se trata de una primera discusión de estos resultados que, sin duda, deja abierta la posibilidad de una mayor profundización.

Pensamos que el rol de la actividad matemática en la escuela es contribuir no sólo a la adquisición de las herramientas conceptuales propias de la disciplina, sino a la de su metodología de utilización y comprensión de su potencialidad en la resolución de problemas. En este sentido, la Educación Matemática debe apuntar a que los estudiantes lleguen a ser capaces de trabajar con el método matemático, desarrollando habilidades relacionadas con la comprensión de conceptos, el razonamiento lógico y el descubrimiento de relaciones, especialmente a través de la resolución de problemas. El proceso de construir el conocimiento matemático involucra buscar soluciones, no sólo memorizar algoritmos o reproducir lo hecho por el docente; explorar modelos, no sólo memorizar fórmulas; formular conjeturas, no sólo hacer ejercicios.

Encontramos que, en la mayoría de los casos estudiados, los docentes se centran principalmente en ellos como práctica de los conceptos recién enseñados. Esta situación parecería responder a lo que Charnay (1988) llama modelo "normativo": centrado en el contenido y donde el docente elige lecciones y ejercicios para trasmitir un conocimiento ya construido. Sin embargo, esta forma de trabajo es aceptada socialmente, ya que valora el conocimiento, permite clases ordenadas y hace fácil la evaluación, pero encierra peligros como el de no permitir que los alumnos elaboren estrategias convenientes, el de poner énfasis en la reproducción de los contenidos y que se estereotipen las guías de trabajos prácticos con su correspondiente falta de motivación en los alumnos (Hanfling y Savón, 1997).

Nuestras conclusiones parecen estar de acuerdo con un trabajo de D. Lerner (1992), en el cual se menciona que la mayoría de los docentes de matemática entrevistados afirmó que enseñar matemática consiste en explicar, y aprenderla es ejercitar lo enseñado y llegar a reproducirlo.

Esta modalidad muestra a la Matemática como producto acabado, que puede ser trasmitido y memorizado para ser reproducido, no como oportunidad de encontrar buenos problemas, buscar buenas soluciones, establecer conjeturas, sentir la necesidad de justificar los razonamientos, reflexionar sobre lo hecho.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bressan A. M. (1997), "¿Por qué? ¿Cuál? Hacia una mejor comprensión de los CBC de Matemática para la EGB", en *Los CBC y la enseñanza de la matemática,* AZ editora.

Bressan A. y B. Costa de Bogisic (1997), "Matemática", en *Diseño Curricular. EGB 1 y 2. Versión 1.1,* Consejo Provincial de Educación. Provincia de Río Negro, Argentina.

Butts, T. (1980), "Posing problems properly", en S. Krulik (ed.), *Problem Solving in School Mathematics,* Yearbook of NCTM, Reston.

Charnay, R. (1988), "Aprender (por medio de) la resolución de problemas", en Parra y Saiz (comps.), *Didáctica de matemática. Aportes y reflexiones,* Paidós, Educador, Argentina, 1994.

Polya, G. (1962), *Mathematical Discovery,* Princeton, N. J., Princeton University Press.

—— (1945), *How to solve it.* Princeton, N.J., Princeton University Press.

—— (1954), *Mathematics and Plausible Reasoning.* Princeton, N. J., Princeton University Press.

Schoenfeld, A. H. (1992), "Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics", en The University of Ca-

lifornia, Berkeley, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* NTCS, Macmillan, Nueva York, 1992, pp. 334-370.
—— (1985), *Mathematical Problem Solving,* Orlando, Fl., Academic Press.
—— (1989), "Teaching Mathematical Thinking and Problem Solving", en L. B. Resnick y L. E. Klopfer (comps.), *Toward the Thinking Curriculum: Current Cognitive Research. 1989 ASCD Yearbook,* USA: Association for Supervision and Curriculum Development, pp. 83-103.
Stanik, G. y J. Kilpatrick (1988), "Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum", en R. Charles y E. Silver (eds.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving,* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp. 1-22.

DATOS DE LAS AUTORAS

Virginia Montoro
Departamento de Matemática, Centro Regional Universitario Bariloche,
Universidad Nacional de Comahue, Argentina
vmontoro@crub.uncoma.edu.ar

Martha Ferrero
Grupo de Investigación en Educación Matemática, Departamento de Matemática,
Centro Regional Universitario Bariloche, Universidad Nacional de Comahue, Argentina
mferrero@crub.uncoma.edu.ar

Cristina Ferraris
Departamento de Matemática, Centro Regional Universitario Bariloche,
Universidad Nacional de Comahue, Argentina
cferrari@crub.uncoma.edu.ar

Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la integral definida utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (PCS) *DERIVE*

Matías Camacho Machín y Ramón Depool Rivero

Dedicado al Dr. Nácere Hayek Calil, en su 80º cumpleaños.

Resumen: A fin de contribuir a mejorar la enseñanza y aprendizaje del cálculo, se presenta un programa de utilidades (PU) diseñado con el Programa de Cálculo Simbólico (PCS) *DERIVE*, para ser utilizado por estudiantes de Cálculo I de un primer curso de ingeniería. Este PU es el núcleo del material curricular utilizado en un proyecto de investigación más amplio que se desarrolla en la actualidad, uno de cuyos objetivos consiste en analizar las potencialidades y dificultades que surgen con la introducción de *DERIVE* como recurso didáctico en los cursos de iniciación al cálculo. El PU ha sido elaborado partiendo del problema clásico de las cuadraturas, esto es, se calcula el área limitada por una curva con el eje de las abscisas en el sentido de distintas aproximaciones (Riemann-Darboux, regla de los trapecios...), para posteriormente introducir el concepto de integral definida, previo al estudio del cálculo de primitivas (integral indefinida). Se introduce, consecuentemente, el concepto de integral definida desde una perspectiva gráfica y numérica, desglosando paso a paso los distintos procedimientos de aproximación del área limitada por una curva y el eje de las abscisas. Se incluyen en este artículo algunas aportaciones didácticas que han sido obtenidas empíricamente después de utilizar el PU en un estudio exploratorio que realizamos actualmente con un grupo de 14 estudiantes.

Palabras clave: Educación matemática, enseñanza y aprendizaje del cálculo, programas de cálculo simbólico, *DERIVE*, integral definida.

Abstract: With the aim of improving the teaching and learning of calculus a Utility File (UF) designed with the Computer Algebra System (CAS) *DERIVE* is presented to be used by first year engineering students taking Calculus I. The UF is the

Fecha de recepción: junio de 2002.

core of the curricular material used in a wider research project that is currently being developed. One of the objectives of this project consists in analyzing the potential and difficulties arising when *DERIVE* is introduced as a didactic resource in the introductory calculus course. The UF has been designed beginning the classic problem of the quadratures, that is the area limited by a curve with de x-axis is calculated using different approximations (Riemann-Darboux-Cauchy, trapezoidal rule...). This approach enables us to introduce the concept of definite integral before the study of the antiderivate (indefinite integral). Consequently, the concept of definite integral is presented from a graphical and numerical perspective, analyzing different approaches step by step in order to obtain the area limited by a curve and the x-axis. In addition, some didactical consequences empirically obtained in an ongoing exploratory study of the UF with a group of 14 students are included.

Keywords: Mathematics education, teaching and learning of calculus, computer algebra system, *DERIVE,* definite integral.

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza y aprendizaje de los conceptos de cálculo infinitesimal posee una problemática que surge paralelamente con su aparición en los programas de la enseñanza media y primeros cursos universitarios. El cálculo siempre ha sido considerado un tema difícil de enseñar, a la vez que complejo.

El trabajo que se presenta forma parte de una investigación que se realiza conjuntamente entre la Universidad de La Laguna (España) y la Universidad Nacional Experimental Politécnica Antonio José de Sucre Unexpo (Venezuela), mediante la cual se pretenden analizar las potencialidades y dificultades que surgen con la introducción del software *DERIVE* en los cursos de cálculo para los estudiantes de ingeniería. Se ha elegido como tópico concreto el concepto de integral definida y se elaboró para tal efecto un programa de utilidades (PU) sustancialmente diferente al que viene incorporado en *DERIVE,* con el objetivo de introducir el concepto de integral definida partiendo del problema clásico de las cuadraturas y mostrando cómo aproximar el área limitada por una curva. Se pretende con ello, por una parte, que el estudiante asimile tanto la perspectiva gráfica como numérica del concepto de integral definida y, por otra, que el cálculo de la integral definida de una función (continua o no) no sea visto exclusivamente como la diferencia de una primitiva evaluada en los extremos del intervalo de integración. $\left(\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad F(x) \text{ primitiva}\right)$, tal y como se muestra en algunas investigaciones (Orton, 1983, pp. 1-18; Eisenberg y Dreyfus, 1991, pp. 25-37).

Resultan frecuentes las incoherencias que surgen en los estudiantes al tener que resolver la integral definida de una función de la que no puede encontrar su primitiva. Se pretende, con la utilización de prácticas de laboratorio basadas en el PU elaborado, que el estudiante comprenda el significado de la integración aproximada como un medio para encontrar respuestas a situaciones que modelizan la realidad (Weigand y Weller, 1998, pp. 251-267), las cuales son susceptibles de ser resueltas mediante el cálculo de integrales definidas.

ANTECEDENTES

Desde la inclusión de las materias de cálculo en las carreras de ingeniería ha habido diferentes enfoques de los métodos para enseñarlo, aunque existe una predisposición al uso casi exclusivo de procedimientos algorítmicos para la resolución de los diferentes problemas que se plantean. Una gran cantidad de libros de texto favorecen esa concepción de la enseñanza, ya que, en general, dedican a la resolución de ejercicios rutinarios una parte importante –entre 30 y 50%– tal y como señala Tall (Tall, 1997, pp. 289-325).

A partir de los años ochenta, con la rápida evolución de las nuevas tecnologías informáticas, empiezan a aparecer en el mercado un tipo de programas para ordenadores personales, tales como el MACSYMA, MUMATH, etc. –denominados manipuladores simbólicos–, que son capaces de resolver fácilmente los ejercicios rutinarios que de otro modo requerirían de una instrucción en técnicas de cálculo muy laboriosas. Comenzó a partir de entonces, principalmente en Estados Unidos y Canadá, un replanteamiento sobre qué y cómo debe ser enseñado el cálculo en los últimos cursos de secundaria y primeros cursos de universidad. En una sociedad, donde cada vez más la computadora desempeña un papel fundamental, la enseñanza del cálculo debe plantearse sin obviar esta realidad.

En la década de los noventa y con la aparición de algunos programas más específicos, con más capacidades tanto simbólicas como gráficas (MAPLE, MATEMÁTICA, MATLAB, MATHCAD, *DERIVE*, etc.), el uso de los PCS (Programas de Cálculo Simbólico) se ha ido extendiendo, aunque en ningún caso el manejo de estos puede considerarse como generalizado. Los libros de texto empiezan en estos últimos años a incluir problemas específicos que, para su resolución, necesitan utilizar tales programas, y usan gráficas sugerentes construidas haciendo uso de este software (Thomas y Finney, 1992; Edwards y Penney, 1996; Bradley y Smith, 1998; Stewart, 1999). Ahora bien, el uso de estos PCS queda reducido, en general, a desarrollar cálculos directos de las primitivas de funciones, de desarrollos de Taylor de representaciones de funciones, y no suelen ser utilizados como herramientas de enseñanza y aprendizaje que permitan construir a los estudiantes los conceptos básicos del cálculo.

Quizás uno de los PCS que, por sus propias características (fácil manejo, economía de memoria, etc.), ofrece más posibilidades didácticas es el *DERIVE*. Este programa permite, tal vez de modo más elemental que otros, debido principalmente a su concepción con fines educativos:

- Realizar operaciones de cálculo simbólico, entre las que se cuentan: operaciones con vectores, matrices y determinantes; resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones; cálculo de derivadas e integrales (definidas e indefinidas), sumas de series, cálculo de límites, obtención de los polinomios de Taylor de una función; representación gráfica de funciones en forma explícitas, implícitas, paramétrica y en coordenadas polares.
- Programar funciones que usen las distintas capacidades del programa antes mencionadas, es decir, definir una serie de funciones que combinen las operaciones básicas que vienen implementadas en *DERIVE*.
- Utilizar ficheros con funciones (programa de utilidades-PU) definidas por otros usuarios para propósitos diversos como: resolver ecuaciones diferenciales, trabajar con álgebra lineal, etcétera.

La incorporación de *DERIVE* como apoyo para la enseñanza de las matemáticas en los últimos cursos de secundaria y primeros cursos de universidad, comienza a ser una realidad. Se han desarrollado diferentes proyectos de investigación subvencionados por las instituciones académicas responsables que han tratado de extender el uso de este software (Artigue y otros, 1995; Drijvers y otros, 1997, pp. 118-123; Heugl, 1997 pp. 142-148), y han arrojado resultados bastante alentadores.

El PU que describiremos fue utilizado por un grupo de 14 estudiantes (7 de nuevo ingreso y 7 repetidores) de Cálculo I en la Unexpo-Barquisimeto (Venezuela) en el mes de julio de 1999, como parte de las actividades programadas para un estudio exploratorio previo a un trabajo más amplio que se proyecta. En su desarrollo, se logró observar la fácil adaptación de los estudiantes en cuanto a la manipulación de las sentencias del programa, así como también su efectivo desempeño en los sistemas de representación gráfico y numérico, lo cual se requería para el estudio del concepto de la integral definida partiendo de la aproximación al cálculo del área limitada por una curva y el eje de abscisas.

2. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA DE UTILIDADES (PU)

Se describe primeramente la función que se relaciona con la integral definida que viene incorporada en el software original; seguidamente, la descripción del PU con el que se ha desarrollado el trabajo de formación de los estudiantes, y finaliza con una aplicación del PU a un problema planteado en un texto de cálculo.

La versión 4 de *DERIVE* posee un programa de utilidades (PU) que se encuentra incorporado en la carpeta MATH del software original, donde se hace alguna referencia al cálculo de la integral de Riemann, es el archivo Misc.mth, en él aparece definida la siguiente función:

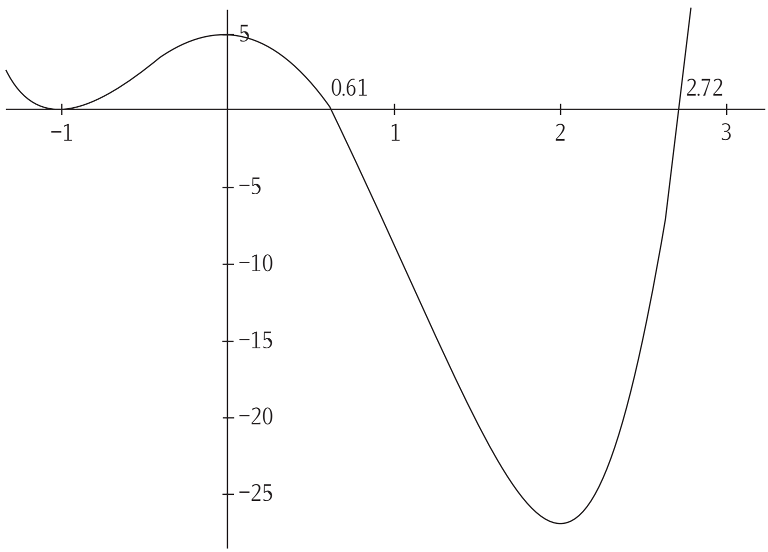
$$\mathrm{LEFT\_RIEMANN}(u, \mathrm{x}, a, b, n) := \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{\mathrm{k\_}=0}^{n-1} \lim_{\mathrm{x} \to a+(b-a)\cdot k\_/n} u$$

Esta función solamente proporciona resultados numéricos de aproximación para la integral en el sentido de Riemann. Los aspectos gráficos no aparecen en ningún momento. Por ello, con el PU que hemos diseñado –que constituye el núcleo básico utilizado en el proceso de formación de los alumnos– tratamos de que el alumno asimile el concepto, atendiendo principalmente a sus aspectos gráficos y numéricos e interpretando la integral definida como un proceso del cálculo aproximado de áreas.

El programa (véase anexo) tiene 58 sentencias, de la sentencia núm. 1 a la núm. 37 se denomina programa base (PB) y de la núm. 38 a la núm. 58 es el programa que llamamos ejecutable (PE).

En el programa base se definen las distintas funciones que se utilizan en el programa ejecutable. Este último es el que deberán trabajar los estudiantes cuando resuelvan las actividades. En él se puede seguir el procedimiento de cálculo del área aproximada de una manera gráfica y numérica en el sentido de Riemann-Darboux, es decir, utilizando rectángulos superiores o inferiores y tomando el punto medio de la base de cada rectángulo; así como por el método de los trapecios y también mediante porciones de parábolas (regla de Simpson). La metodología utilizada en el aula es la siguiente: se proporciona al estudiante un material

Figura 1 Gráfica de la curva



escrito (práctica de enseñanza) que incluye las actividades por desarrollar, secuenciadas de tal manera que los estudiantes construyan distintos procedimientos de aproximación del área limitadas por la curva. Al finalizar cada experiencia de aprendizaje, los estudiantes pueden analizar tanto el marco gráfico como el numérico de cada aproximación. Cada práctica incluye al final una evaluación de la práctica y una autoevaluación para el estudiante.

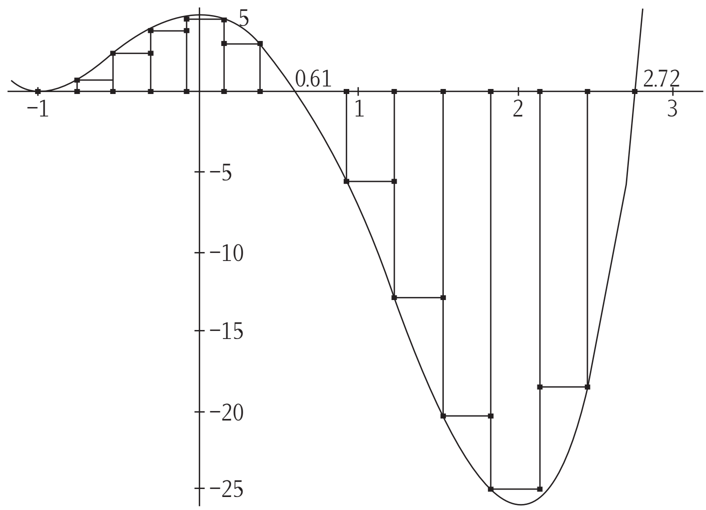
Vamos ahora a detallar el proceso que debe seguir el estudiante cuando utiliza el programa de utilidades. Para ello, se desarrolla a continuación un problema similar a los trabajados en el aula por los estudiantes, a fin de exponer los resultados de aplicación de nuestro programa de utilidades.

El problema consiste en calcular el área limitada por la grafica de la función $f(x)=3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ mediante distintas aproximaciones

Una vez definida la función: $F(x)$: $=3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$, lo primero que se debe hacer es representarla gráficamente y obtener los puntos de corte con el eje de las abscisas (figura 1).

La gráfica tendrá una parte "sobre" el eje OX para el intervalo [−1,0.612574], y otra "bajo" el eje OX en [0.612574,2.72075] (figura 1). Se trata ahora de visualizar las distintas aproximaciones.

Figura 2 Rectángulos inferiores



Grafiquemos 7 rectángulos inferiores en cada región. Para tal efecto, se procede así: se calcula la matriz que representa los 7 rectángulos inferiores (en el sentido de Darboux) "sobre" el eje OX en[-1,0.612574], utilizando la sentencia núm. 38,

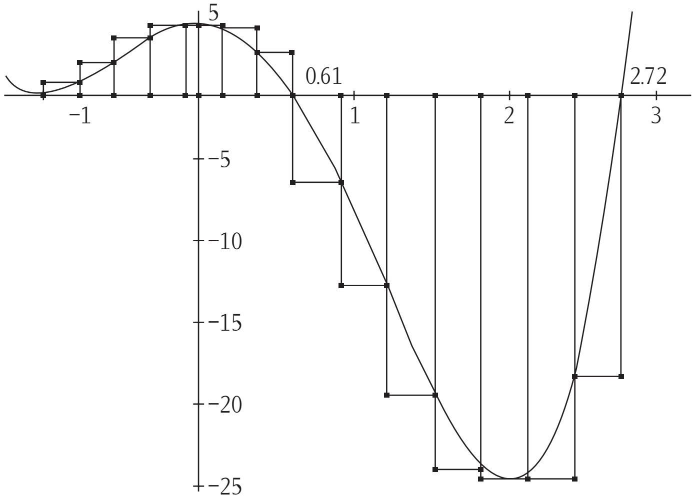
RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X(*a*,*b*,*n*),

sustituir (*a*,*b*,*n*) por los valores (−1,0.612574,7) y graficando se obtiene lo requerido (figura 2). Esta sentencia del PE está en correspondencia con la sentencia núm. 12 del PB,

RECT_INF_EL_EJE_X(*a*,*b*,*n*):=VECTOR(RECTANGULO(*a*+iH(*a*,*b*,*n*), *a*+(*i*+1)H(*a*,*b*,*n*),FMIN(*a*,*b*,*n*)),*i*,0,*n*−1)

Resulta pertinente destacar que el nombre de cada función del PE (y del PB) expresa lo que se hace. En este caso "representa gráficamente los rectángulos inferiores para la parte de la función que está sobre el eje OX", donde se conocen los extremos del intervalo, el número de figuras deseadas; el lado derecho de la

Figura 3 Rectángulos superiores



sentencia núm. 12 expresa la matriz de rectángulos inferiores construida a partir de los extremos de la base de cada uno (lo cual resulta de subdividir el intervalo en *n* subintervalos) y su respectiva altura. Sentencias similares permiten trabajar con el resto de las aproximaciones. Estas sentencias constituyen el marco gráfico del procedimiento.

De la misma manera, la sentencia núm. 40,

RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X(*a,b,n*),

la utilizamos para la parte donde la función es negativa (el intervalo [0.612574, 2.72075]) y, graficando la matriz obtenida para 7 intervalos, tendremos la aproximación inferior para el área limitada por la función y el eje OX (figura 2).

A continuación presentamos los diferentes gráficos que el estudiante puede construir siguiendo la práctica de enseñanza. Rectángulos superiores, tomando el punto medio de cada intervalo (figuras 3 y 4), trapecios (figura 5) y porciones de parábolas (figura 6).

La figura 7 presenta todas las aproximaciones.

Este proceso se puede realizar para un número mayor de subdivisiones de los intervalos, con lo cual se logra visualizar cómo, a medida que se aumenta el

Figura 4 Rectángulos punto medio

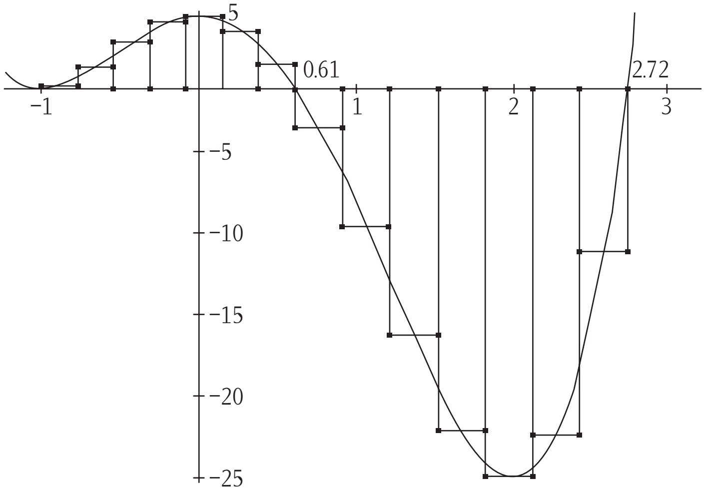


Figura 5 Trapecios

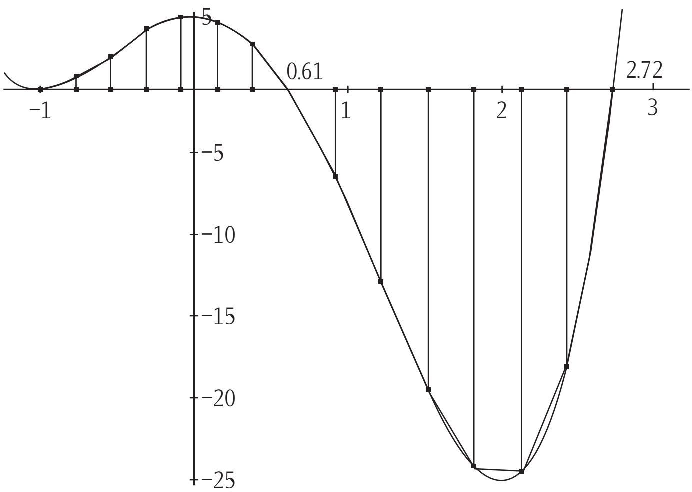


Figura 6 Regla de Simpson

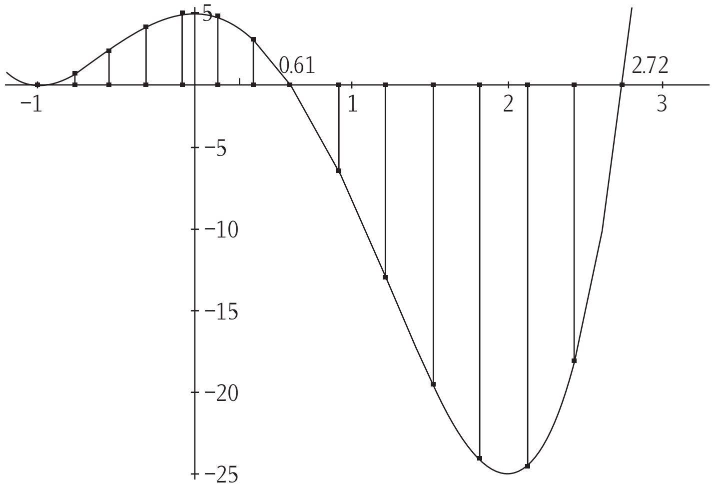
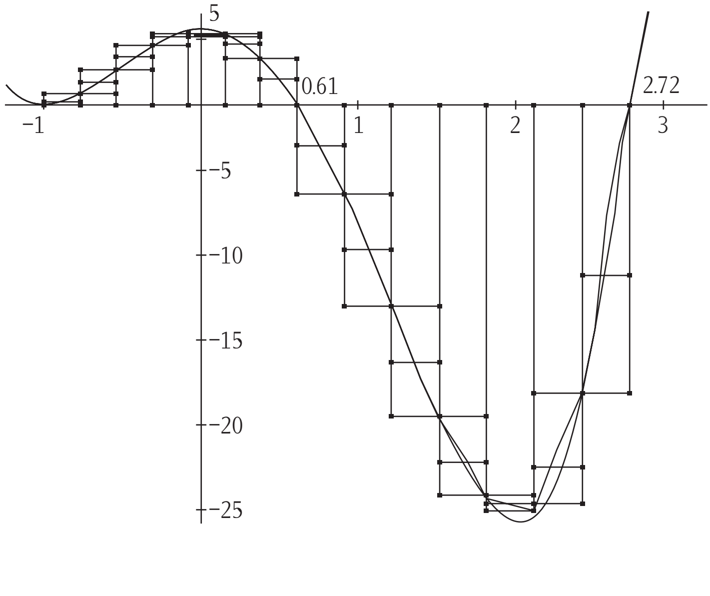


Figura 7 Rectángulos, trapecios y Simpson



número de elementos de aproximación (trapecios, rectángulos y parábolas), éstos van "llenando" la superficie tanto "bajo" la curva (parte positiva de la función), como "sobre" la curva (parte negativa de la función); cuando esto sucede, puede dar la impresión de que la superficie puede cubrirse en su totalidad, el estudiante puede creer que con un número determinado de figuras es suficiente para llenar la superficie, sin embargo, utilizando el zoom que incorpora *DERIVE* podrá observarse que necesitaría un número cada vez mayor de elementos de aproximación para lograr recubrir toda la superficie (figuras 8 y 9).

Conviene señalar, que el programa de cálculo simbólico MAPLE, en su versión V (Release 5), contiene en el paquete "student" algunas sentencias relacionadas con el cálculo de la integral definida. Para la integral de Riemann, aparecen de-

Figura 8

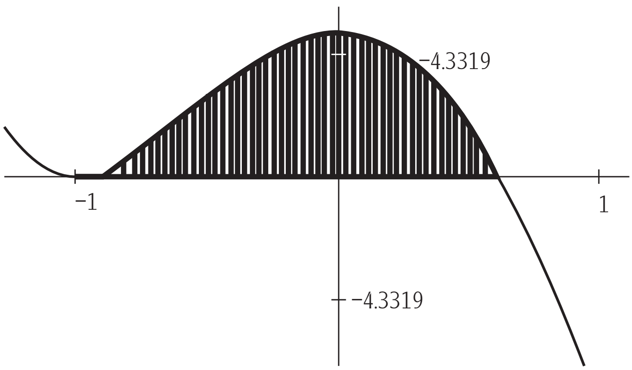
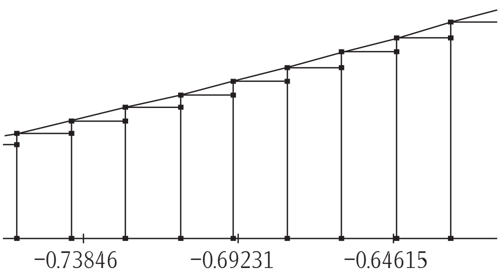


Figura 9



finidas las órdenes “leftbox”, “rightbox” y “middlebox”, que representan gráficamente los rectángulos de altura, las imágenes de los extremos inferiores, superiores y el punto medio de los subintervalos de integración, respectivamente. Nuestro programa de utilidades complementa estas aproximaciones gráficas con la incorporación de trapecios y porciones de parábolas (en el sentido de Simpson), además, es capaz de representar las distintas figuras en un mismo gráfico, con lo que se puede facilitar la comparación entre ellas.

Para establecer el marco numérico del trabajo con el PU, hemos definido las funciones núm. 21 al núm. 37 en el PB y que se reducen en el PE a las sentencias núm. 47 al núm. 58, tanto si el área por calcular está sobre el eje OX o bajo el eje OX. Sin perder generalidad, escogimos calcular el área en el intervalo [-1,0.612574], cuya área se encuentra sobre el eje OX, utilizando 7 rectángulos inferiores. De manera análoga, se puede proceder utilizando rectángulos superiores, tomando el punto medio de cada subintervalo, trapecios o porciones de parábolas (regla de Simpson).

Utilizando la sentencia núm. 47,

$$\text{AREA\_RECT\_INF\_SOBRE\_EL\_EJE\_X}(a,b,n),$$

que está en correspondencia con la sentencia núm. 21,

$$\text{AREA\_RECT\_INF\_SOBRE\_EL\_EJE\_X}(a,b,n) := \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_RECT}(\text{FMIN}(a,b,n),\ \text{H}(a,b,n))$$

y sustituyendo (a, b, n) por los valores (−1,0.612574,7) en núm. 47 obtenemos el valor del área 3.44589.

Análogamente, con la sentencia núm. 48,

$$\text{AREA\_RECT\_INF\_BAJO\_EL\_EJE\_X}(a,\ b,\ n),$$

que está en correspondencia con la sentencia núm. 22,

$$\text{AREA\_RECT\_INF\_BAJO\_EL\_EJE\_X}(a,b,n) := \left| \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_RECT}(\text{FMAX}(a,b,n),\ \text{H}(a,b,n)) \right|$$

y sustituyendo los valores (a, b, n) por (0.612574,2.72075,7) obtenemos el área de la segunda región que es: 25.60203.

De manera análoga, se utilizarían, en su caso, las sentencias correspondientes para las demás aproximaciones (punto medio, trapecio, Simpson).

Con la finalidad de comparar las distintas aproximaciones que se obtienen, se utilizan las sentencias núm. 56,

APROX_DEL_AREA_SOBRE_X(a, b, j, k, m)

y núm. 57,

APROX_DEL_AREA_BAJO_X(a, b, j, k, m),

para las dos partes de la curva, respectivamente, donde a y b son los extremos del intervalo de integración, j y k, la cantidad de subintervalos, y m, la variación de estas cantidades; se obtiene así una matriz donde, de izquierda a derecha se tienen la cantidad de figuras, aproximación con rectángulos inferiores, aproximación con punto medio, aproximación con trapecios, regla de Simpson y aproximación con rectángulos superiores. Esto le permite al estudiante comparar las diferentes aproximaciones con el valor exacto y poder determinar cuál es la mejor. Sustituyendo (a, b, j, k, m) por (−1,0.612574, 20, 50, 10) respectivamente obtenemos,

N.F.	R. INF	R. PTO. M	TRAP	SIMPSON	R. SUP.
20	4.243295639	4.658808640	4.645431180	4.654349487	5.047566721
30	4.381918849	4.656328914	4.650386531	4.654348120	4.918852413
40	4.450578153	4.655461879	4.652119910	4.654347890	4.853661667
50	4.491664689	4.655060719	4.652922043	4.654347827	4.814179396

Donde N.F. significa número de figuras; R. INF., rectángulos inferiores; R. PTO. M., rectángulos punto Medio; TRAP., Trapecios; R. SUP., rectángulos superiores.

Se procede a continuación a calcular el valor exacto del área, utilizando la sentencia núm. 58, sustituyendo los valores de "a, b" por −1 y 0.612574 respectivamente, y se obtiene

límite rect. inf	límite pto. medio	límite trapecio	límite simpson	límite rect. sup
4.654347783	4.654347783	4.654347783	4.654347783	4.654347783

En esta matriz, el estudiante puede observar, por una parte, que al tomar el límite en cualquiera de los casos el valor es el mismo; y, por otra, puede comparar ésta con la matriz de aproximaciones y determinar cuál aproximación es la mejor.

Introducido el concepto de integral definida desde la perspectiva anterior, el estudiante tendrá claro, por un lado, cuál es el problema real que da lugar al cálculo integral, la cuadratura de curvas o, lo que es lo mismo, el cálculo de áreas limitadas por ciertas curvas, y por el otro, la importancia de la aproximación gráfica y numérica para la resolución del problema.

Nuestra propuesta de enseñanza continuaría ahora desde el punto de vista habitual, esto es, se trabaja con el cálculo de primitivas, para posteriormente conectar la integral definida con la indefinida mediante el Teorema Fundamental del Cálculo.

Desde el punto de vista numérico, las órdenes "leftsum", "rigthsum" y "middlesum, simpson" y "trapezoid", de MAPLE, hacen los cálculos de la aproximación numérica. Nuestro PU complementa estos cálculos con la presentación de una matriz de aproximaciones que puede facilitar la comparación de las aproximaciones numéricas, tomando distintas cantidades de figuras.

3. RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Es sabido que las aplicaciones de la integral nos permiten calcular longitudes de arcos de curvas, calcular volúmenes de sólidos, tanto de revolución como por secciones, etcétera.

La idea de introducir el concepto de integral definida de esta manera nos lleva a afirmar que algunas situaciones problemáticas pueden ser resueltas de manera natural por los estudiantes. Veamos a continuación un ejemplo.

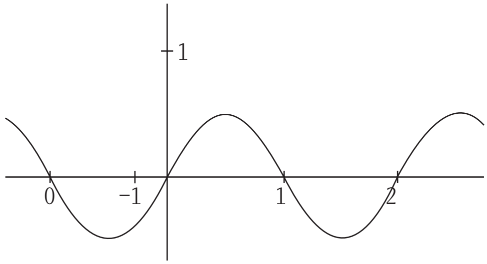
El siguiente problema ha sido extraído de un texto clásico de cálculo (Edwards y Penney, 1996, pp. 370-371);

Un fabricante necesita hacer hojas de metal corrugado de 36 pulgadas (90 cm) *de ancho con secciones transversales con la forma de la curva* (figuras 10 y 11)

$$y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi x, \qquad 0 \leq x \leq 36$$

Figura 10 Lámina de metal

Figura 11 Gráfica de $y = \frac{1}{2}$ sen πx



¿Qué ancho deben tener las hojas originales extendidas para que el fabricante produzca estas hojas corrugadas?

Teniendo en cuenta que la longitud de un arco de curva entre dos puntos cualesquiera *a* y *b* viene dada por la fórmula

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

se tiene en este caso (véase la figura 11)

$$S(x) = \int_0^{36} \sqrt{\left(1+\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2 \pi x\right)}\,dx = 36\int_0^1 \sqrt{\left(1+\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2 \pi x\right)}\,dx \qquad (4)$$

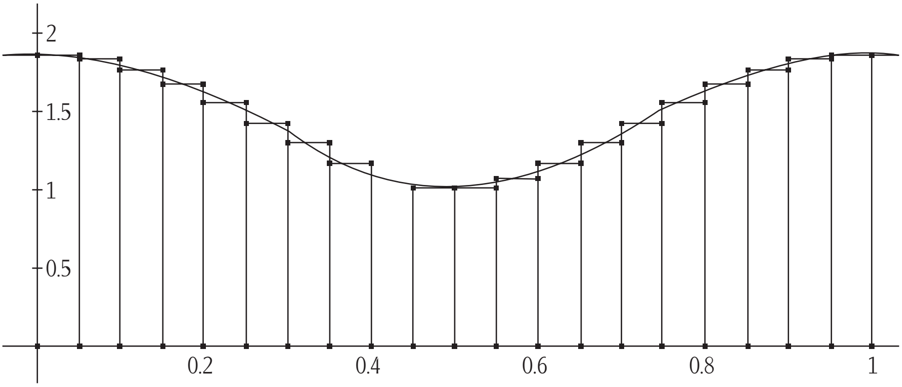
En el texto mencionado se señala *Estas integrales* no pueden ser evaluadas en términos de funciones elementales (p. 370) para remitir al lector a otro capítulo del libro donde se trata la integración numérica. Presenta entonces la siguiente solución:

$$\int_0^1 \sqrt{1+\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2 \pi x}\,dx = 1.46$$

Por lo tanto, la solución del problema es: 36 (1.46) = 52.56 pulgadas (131.4 cm).

Con la secuencia de enseñanza desarrollada por los estudiantes para el estu-

Figura 12 Gráfica con rectángulos punto medio



dio del concepto de integral definida vista como el cálculo de áreas limitadas por una curva, no necesitamos darle solamente una solución numérica, tal y como se hace en el texto, sino que podría obtenerse dicha solución desde el punto de vista gráfico y numérico. Para lo cual bastaría con considerar la función:

$$F(\mathrm{x}) := \sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2 \pi\,\mathrm{x}}$$

que, al graficarla (figura 12), nos permite observar que es una función positiva. El PU servirá ahora para resolver el problema; se pueden observar en la figura los distintos rectángulos y el "llenado" de la superficie limitada con el eje de las abscisas.

Utilizando la matriz con 10, 20 y 30 subintervalos en la que aparecen las diferentes aproximaciones tenemos que la integral es aproximadamente 1.46369.

$$\begin{bmatrix} 10 & 1.377485726 & 1.463695629 & 1.463695315 & 1.463695524 & 1.549904904 \\ 20 & 1.420590677 & 1.463695472 & 1.463695472 & 1.463695472 & 1.506800266 \\ 30 & 1.434958942 & 1.463695472 & 1.463695472 & 1.463695472 & 1.492432002 \end{bmatrix}$$

Concluimos, en definitiva, que el fabricante debe utilizar hojas extendidas de aproximadamente 36 (1.46369) ≈ 52.69 pulgadas de ancho, lo que equivale a 131.73 centímetros de ancho, que es la solución buscada.

4. ALGUNAS APORTACIONES DIDÁCTICAS

Después de llevar al aula esta experiencia y, aunque nuestras observaciones no se encuentran aún sistematizadas, nos encontramos en disposición de señalar que:

- Con la introducción del concepto de integral definida desde esta perspectiva gráfica y numérica con el uso del software *DERIVE*, se consigue que los estudiantes descubran que existen procedimientos aproximados que, en muchas ocasiones, permiten resolver problemas que en otros casos serían demasiado complicados.
- El PU proporciona una herramienta efectiva en el momento de calcular integrales definidas, donde el integrando esta constituido por funciones cuyas primitivas no pueden ser expresadas mediante funciones elementales.
- El PU puede ser incorporado como complemento de las actividades de los textos que incluyen problemas específicos en cuya resolución se utilizan, implícitamente, programas como éstos.
- El PU contribuye a formar una imagen del concepto de integral definida más flexible, ya que el estudiante tiene la posibilidad de observar paso a paso el desarrollo de todo el proceso de construcción de la integral como área, evitando así que los conocimientos se impartan utilizando exclusivamente procedimientos algorítmicos.
- Se observó empíricamente cómo los estudiantes pueden comprender el sentido de la aproximación con una adecuada utilización del software matemático, lo que siempre resulta complicado sin el uso de estos recursos. Los estudiantes constataron como *DERIVE* brinda la posibilidad de crear sencillos programas para abordar problemas que modelizan situaciones de la vida real.
- Se ha confirmado además que la posibilidad de presentar los procedimientos de resolución paso a paso en los sistemas de representación gráfico y numérico proporcionan una ventaja considerable en comparación con procedimientos utilizados en las clases habituales, donde una representación pormenorizada de los conceptos requerirían un tiempo y un nivel de comprensión considerablemente mayores.

ANEXO

PROGRAMA BASE (PB)

```
#1:  F(x) :=
#2:  AREA_RECT(c, d) := c·d
#3:  AREA_TRAP(c, d, h) := (c + d)·h / 2
#4:  RECTANGULO(a, b, h) := [a 0; a h; b h; b 0]
#5:  TRAPECIO(a, α, b, β) := [a 0; a α; b β; b 0]
#6:  H(a, b, n) := (b − a) / n
#7:  FMIN(a, b, n) := MIN(F(a + i·H(a, b, n)), F(a + (i + 1)·H(a, b, n)))
#8:  FMAX(a, b, n) := MAX(F(a + i·H(a, b, n)), F(a + (i + 1)·H(a, b, n)))
#9:  XL(a, b, n) := a + (i − 1)·H(a, b, n)
#10: XR(a, b, n) := a + i·H(a, b, n)
#11: XM(a, b, n) := a + (i − 0.5)·H(a, b, n)
#12: RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n) := VECTOR(RECTANGULO(a + i·H(a, b, n), a + (i + 1)·H(a,
       b, n), FMIN(a, b, n)), i, 0, n − 1)
#13: RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n) := VECTOR(RECTANGULO(a + i·H(a, b, n), a + (i + 1)·H(a,
       b, n), FMAX(a, b, n)), i, 0, n − 1)
#14: RECT_SUP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n) := VECTOR(RECTANGULO(a + i·H(a, b, n), a + (i + 1)·H(a,
       b, n), FMAX(a, b, n)), i, 0, n − 1)
#15: RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n) := VECTOR(RECTANGULO(a + i·H(a, b, n), a + (i + 1)·H(a,
       b, n), FMIN(a, b, n)), i, 0, n − 1)
#16: RECT_PTO_MEDIO(a, b, n) := VECTOR(RECTANGULO(a + i·H(a, b, n), a + (i + 1)·H(a, b, n),
       F(a + (2·i + 1)·H(a, b, n)/2)), i, 0, n − 1)
#17: TRAPECIOS(a, b, n) := VECTOR(TRAPECIO(a + i·H(a, b, n), F(a + i·H(a, b, n)), a + (i +
       1)·H(a, b, n), F(a + (i + 1)·H(a, b, n))), i, 0, n − 1)
```

$$\#18:\quad \text{PARAB\_SIM}(a,\ b,\ n) := \text{VECTOR}\left(\left[\text{FIT}\left[\begin{array}{cc} x & p\cdot x^{2} + q\cdot x + r \\ \text{XL}(a,\ b,\ n) & \text{F}(\text{XL}(a,\ b,\ n)) \\ \text{XM}(a,\ b,\ n) & \text{F}(\text{XM}(a,\ b,\ n)) \\ \text{XR}(a,\ b,\ n) & \text{F}(\text{XR}(a,\ b,\ n)) \end{array}\right]\right],\ i,\ 1,\ n\right)$$

$$\#19:\quad \text{SEGMENTOS\_SIM}(a,\ b,\ n) := \text{VECTOR}\left(\left[\begin{array}{cc} \text{XL}(a,\ b,\ n) & \text{F}(\text{XL}(a,\ b,\ n)) \\ \text{XL}(a,\ b,\ n) & 0 \\ \text{XR}(a,\ b,\ n) & 0 \\ \text{XR}(a,\ b,\ n) & \text{F}(\text{XR}(a,\ b,\ n)) \end{array}\right],\ i,\ 1,\ n\right)$$

$$\#20:\quad \text{CURVA\_SIM}(a,\ b,\ n) := \text{VECTOR}(\text{CHI}(\text{XL}(a,\ b,\ n),\ x,\ \text{XR}(a,\ b,\ n))\cdot\text{ELEMENT}(\text{PARAB\_SIM}(a,\ b,\ n),\ i),\ i,\ 1,\ n)$$

$$\#21:\quad \text{AREAS\_RECT\_INF\_SOBRE\_EL\_EJE\_X}(a,\ b,\ n) := \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_RECT}(\text{FMIN}(a,\ b,\ n),\ \text{H}(a,\ b,\ n))$$

$$\#22:\quad \text{AREAS\_RECT\_INF\_BAJO\_EL\_EJE\_X}(a,\ b,\ n) := \left|\sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_RECT}(\text{FMAX}(a,\ b,\ n),\ \text{H}(a,\ b,\ n))\right|$$

$$\#23:\quad \text{AREAS\_RECT\_SUP\_SOBRE\_EL\_EJE\_X}(a,\ b,\ n) := \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_RECT}(\text{FMAX}(a,\ b,\ n),\ \text{H}(a,\ b,\ n))$$

$$\#24:\quad \text{AREAS\_RECT\_SUP\_BAJO\_EL\_EJE\_X}(a,\ b,\ n) := \left|\sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_RECT}(\text{FMIN}(a,\ b,\ n),\ \text{H}(a,\ b,\ n))\right|$$

$$\#25:\quad \text{AREAS\_PTO\_MEDIO\_SOBRE\_EL\_EJE\_X}(a,\ b,\ n) := \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_RECT}\left(\text{F}\left(a + (2\cdot i + 1)\cdot\frac{\text{H}(a,\ b,\ n)}{2}\right),\ \text{H}(a,\ b,\ n)\right)$$

$$\#26:\quad \text{AREAS\_PTO\_MEDIO\_BAJO\_EL\_EJE\_X}(a,\ b,\ n) := \left|\sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_RECT}\left(\text{F}\left(a + (2\cdot i + 1)\cdot\frac{\text{H}(a,\ b,\ n)}{2}\right),\ \text{H}(a,\ b,\ n)\right)\right|$$

$$\#27:\quad \text{AREAS\_TRAP\_SOBRE\_EL\_EJE\_X}(a,\ b,\ n) := \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_TRAP}(\text{F}(a + i\cdot\text{H}(a,\ b,\ n)),\ \text{F}(a + (i + 1)\cdot\text{H}(a,\ b,\ n)),\ \text{H}(a,\ b,\ n))$$

$$\#28:\quad \text{AREAS\_TRAP\_BAJO\_EL\_EJE\_X}(a,\ b,\ n) := \left|\sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_TRAP}(\text{F}(a + i\cdot\text{H}(a,\ b,\ n)),\ \text{F}(a + (i + 1)\cdot\text{H}(a,\ b,\ n)),\ \text{H}(a,\ b,\ n))\right|$$

$$\#29:\quad \text{ÁREA\_SIMP}(a,\ b,\ n) := \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\text{H}(a,\ b,\ n)\cdot(\text{F}(\text{XL}(a,\ b,\ n)) + 4\cdot\text{F}(\text{XM}(a,\ b,\ n)) + \text{F}(\text{XR}(a,\ b,\ n)))}{6}\right|$$

$$\#30:\quad \text{APROX\_DEL\_ÁREA\_SOBRE\_X}(a,\ b,\ j,\ k,\ m) := \text{VECTOR}([n,\ \text{AREAS\_RECT\_INF\_SOBRE\_EL\_EJE\_X}(a,\ b,\ n),\ \text{AREAS\_PTO\_MEDIO\_SOBRE\_EL\_EJE\_X}(a,\ b,\ n),\ \text{AREAS\_TRAP\_SOBRE\_EL\_EJE\_X}(a,\ b,\ n),\ \text{ÁREA\_SIMP}(a,\ b,\ n),\ \text{AREAS\_RECT\_SUP\_SOBRE\_EL\_EJE\_X}(a,\ b,\ n)],\ n,\ j,\ k,\ m)$$

#31: APROX_DEL_ÁREA_BAJO_X(a, b, n, j, k, m) := VECTOR([n, AREAS_RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n), AREAS_PTO_MEDIO_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n), AREAS_TRAP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n), ÁREA_SIMP(a, b, n), AREAS_RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)], n, j, k, m)

#32: $$\text{LIM\_RECT\_INF}(a, b) := \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_RECT}(F(a + (i + 1)\cdot H(a, b, n)), H(a, b, n)) \right|$$

#33: $$\text{LIM\_RECT\_SUP}(a, b) := \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_RECT}(F(a + i\cdot H(a, b, n)), H(a, b, n)) \right|$$

#34: $$\text{LIM\_PTO\_MEDIO}(a, b) := \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_RECT}\left(F\left(a + (2\cdot i + 1)\cdot\frac{H(a, b, n)}{2}\right), H(a, b, n)\right) \right|$$

#35: $$\text{LIM\_TRAP}(a, b) := \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA\_TRAP}(F(a + i\cdot H(a, b, n)), F(a + (i + 1)\cdot H(a, b, n)), H(a, b, n)) \right|$$

#36: $$\text{LÍMITE\_SIMP}(a, b) := \lim_{n\to\infty} \text{ÁREA\_SIMP}(a, b, n)$$

#37: $$\text{LÍMITE\_SUMAS\_RIEMANN}(a, b) := \begin{bmatrix} \text{límite rect.inf} & \text{límite pto Medio} & \text{límite trapecio} & \text{límite simpson} & \text{límite rect. sup} \\ \text{LIM\_RECT\_INF}(a, b) & \text{LIM\_PTO\_MEDIO}(a, b) & \text{LIM\_TRAP}(a, b) & \text{LÍMITE\_SIMP}(a, b) & \text{LIM\_RECT\_SUP}(a, b) \end{bmatrix}$$

PROGRAMA EJECUTABLE (PE)

```
#38: RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#39: RECT_SUP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#40: RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#41: RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#42: RECT_PTO_MEDIO(a, b, n)
#43: TRAPECIOS(a, b, n)
#44: PARAB_SIM(a, b, n)
#45: CURVA_SIM(a, b, n)
#46: SEGMENTOS_SIM(a, b, n)
#47: AREAS_RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#48: AREAS_RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#49: AREAS_RECT_SUP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#50: AREAS_RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#51: AREAS_PTO_MEDIO_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#52: AREAS_PTO_MEDIO_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#53: AREAS_TRAP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#54: AREAS_TRAP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#55: ÁREA_SIMP(a, b, n)
#56: APROX_DEL_ÁREA_SOBRE_X(a, b, j, k, m)
#57: APROX_DEL_ÁREA_BAJO_X(a, b, n, j, k, m)
#58: LÍMITE_SUMAS_RIEMANN(a, b)
```

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Proyecto de Investigación de la DGIBXX2000-0069.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M., M. Abboud, P. Drouhard y J. B. Lagrange (1995), *Une recherché sur le logiciel DERIVE,* Cahier de DIDIREM núm. 3 (número especial), IREM, París, p. 7.
Bradley, G. y K. Smith (1998), *Cálculo de una variable,* Madrid, Prentice Hall.
Edwards, C. y D. Penney (1996), *Cálculo,* México, Prentice Hall.
Eisenberg, T. y T. Dreyfus (1991), "On the reluctance to visualize in Mathematics", en W. Zimmermann y S. Cunnigham (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics,* Washington, MAA, pp. 25-37.
Drijvers, U., A. Verweij y E. Winsen (1997), "Mathematics Lessons with DERIVE. Developed by the CAVO working group", *ZDM,* núm. 4, pp. 118-123.
Heugl, H. (1997), "Experimental and Active Learning with DERIVE" *ZDM,* vol. 4, núm. 4, pp. 142-148.
Orton, A. (1983), "Students' understanding of integration" *Educational Studies in Mathematics,* vol. 14, núm. 1, pp. 1-18.
Stewart, J. (1999), *Cálculo,* México, Thomson.

DATOS DE LOS AUTORES

Matías Camacho Machín
Departamento de Análisis Matemático, Universidad de la Laguna, Islas Canarias, España
mcamacho@ull.es

Ramón Depool Rivero
Universidad Politécnica "Antonio José de Sucre", UNEXPO, Venezuela
rdepool@unexpo.edu.ve

Tall, D. (1997), "Function and Calculus", en Bishop *et al.* (ed.), *International Handbook of Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 289-325.

Thomas, G. y R. Finney (1992), *Calculus and Analytic Geometry,* Nueva York, Addison Wesley.

Weigand, H. G. y H. Weller (1998), "Modelling Real-life Problems Involving Periodic Processes with Computer Algebra", *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education,* vol. 5, núm. 4, pp. 251-267.

Ejemplos del uso de la hoja de cálculo como herramienta didáctica

Cristianne Butto Zarzar, Joaquín Delgado y Jerónimo Zamora

Resumen: El presente trabajo expone algunas reflexiones acerca del uso de la hoja de cálculo como ejemplo concreto del lenguaje como herramienta psicológica. Se origina en un curso de capacitación de docentes en el uso de la Hoja de Cálculo y del ambiente Mathematica® ofrecido por los autores y dirigido a profesores del nivel medio superior y del primer año del nivel superior. La discusión se centra en la hoja de cálculo, porque su uso en la enseñanza de estos cursos ha sido poco explorado. Se presentan ejemplos y se discuten algunas dificultades.

Palabras clave: Hoja de cálculo, herramienta psicológica, zona de desarrollo próximo (ZDP).

Abstract: This paper poses some reflections around the use of the spreadsheet as a concrete exampe of psicological tool. It is motivated upon a training course for teachers on the use of the spreadsheets and the Mathematica® offered by the authors addressed to lecturers teaching Calculus in the last semesters of highschool and first years of graduate level. The discussion is focused on the spreadsheet since its usage in this kind of courses has been little explored. We present some examples and discuss some difficulties.

Keywords: Spreadsheet, psicological tool, zone of proximal development (ZPD).

INTRODUCCIÓN

Una de las grandes dificultades de los estudiantes que se inician en una nueva disciplina del currículo radica en el uso del lenguaje propio de la disciplina. El alumno debe interpretar, traducir a su propio diccionario social, conceptualizar y demostrar competencia en el manejo de símbolos, de sus relaciones lógicas, y de carácter de implicado a implicante, y en su nivel de generalización. El caso que

Fecha de recepción: febrero de 2000.

nos compete hace referencia a los primeros cursos de cálculo diferencial e integral; normalmente situados en el currículo dentro del nivel medio superior (preparatoria o bachillerato) y superior básico (primer año.) Estas dificultades no son exclusivas de esta disciplina, pues lo mismo ocurre en la práctica docente de la química, la lengua española y la física, y forman parte del mismo fenómeno abstracto de interpretación de símbolos -ya sea en el terreno de la semiótica (Saussure, 1998), en el uso del lenguaje como herramienta psicológica (Kozulin, 1995). En el caso particular del cálculo, las dificultades epistemológicas son evidentes desde sus orígenes: la noción del continuo como contraposición a lo discreto; del movimiento en contradicción aparente con lo estático; de la preservación de propiedades verificables en un número finito de argumentaciones al paso al continuo, todas las cuales se pueden resumir matemáticamente en las dificultades inherentes al concepto de número en un campo completo. En el proceso de transposición didáctica[1] del campo matemático para la esfera didáctica pedagógica, gran parte de esta dificultad se oculta en la manera eminente lógica de su presentación en el aula. El diseño curricular pone especial atención en la ilación lógica de los conceptos antecedentes y subsecuentes. Éste es el caso del concepto clásico de continuidad,

$$\textit{función} \quad \Rightarrow \quad \textit{límite} \quad \Rightarrow \quad \textit{continuidad}$$

que naturalmente se refleja en el manejo de símbolos

$$(y = f(x),\, x \in \mathrm{Dom}\, f) \Rightarrow (\lim_{x \to x0} f(x)) \Rightarrow (\lim_{x \to x0} f(x) = f(x_0)\ \&\ x_0 \in \mathrm{Dom}\, f)$$

sin embargo, históricamente los conceptos de límite, continuidad y función surgen interrelacionados, asociados a la idea de completez de los números reales

$$\textit{función} + \textit{límite} + \textit{continuidad} \quad \Rightarrow \quad \textit{número real,}$$

[1] Chevallard (1985) denomina “de transposición didáctica” al conjunto de transformaciones que sufre el saber científico antes de ser enseñado. Este proceso va desde escoger el saber a ser enseñado hasta su adaptación al sistema didáctico, incluye todo un proceso generador de deformaciones, que va desde el establecimiento de la coherencia hasta la creación de nuevos conocimientos, y concluye con el saber escolar.

De acuerdo con (Cockroft, 1982), lenguaje es una parte esencial de la formación y expresión de las ideas matemáticas y, por ello, es importante que los alumnos sean estimulados a expresar sus concepciones y justificar sus estrategias y representaciones.

La necesidad de presentar una teoría matemática, en este caso el cálculo, dentro de una estructura lógico-formal es innegable y surge de la exigencia de minimizar las contradicciones lógicas en todo sistema formal, o en todo caso hacerlas evidentes (el teorema de Gödel, la geometría de Lovachevski, por ejemplo).

En este sentido, el uso de la herramienta electrónica proporciona nuevas maneras de construir significados matemáticos, *e.g.*, procesos repetitivos que den origen a un supuesto inductivo, una conjetura geométrica o analítica a partir de ejemplos particulares. La computadora ofrece la posibilidad de establecer un lenguaje común a los actores del proceso de enseñanza-aprendizaje, esto es, una plataforma común de transmisión de símbolos mediante la sintaxis –lenguaje de programación– propia del ambiente computacional.

La importancia del lenguaje como herramienta psicológica ha sido señalado ampliamente por Vygotsky (Kozullin, 1986; Mason *et al.*, 1985). En este contexto, la computadora se puede considerar en parte como una herramienta más del lenguaje, no sólo por su carácter externo como herramienta "manipulable", sino también por su influencia psicológica, pues conlleva al usuario a la reflexión de su propia capacidad de pensar y de procesar el conocimiento, produciendo uno diferente. Para que ello sea posible, según la teoría vygotskiana, se requiere un andamiaje mínimo de conocimientos y signos o símbolos que permitan a los participantes de la propuesta inducir a la reflexión para una posterior evolución conceptual de los contenidos. Esto, sin duda también requiere operativamente de un rediseño curricular de los perfiles de los actores (profesores y alumnos), proporciona diversas alternativas de trabajo pedagógico. Requiere, concretamente, un uso eficiente como un elemento más del lenguaje.

El uso de la computadora para la enseñanza de las matemáticas ofrece una alternativa pedagógica distinta y novedosa en temas que tradicionalmente ofrecen dificultades conceptuales o mecánicas, construyendo una realidad capaz de ser "tocada" desde la interfase del ambiente computacional propio, ya sea mediante listas, gráficos, controles de parámetros, de la animación virtual o con el acercamiento al proceso lógico-formal de la herramienta.[2]

Al combinar el uso de ambientes computacionales con la discusión en el salón de clases como metodología de trabajo, se pueden explotar aspectos tales como las diversas interacciones entre estudiantes, profesor y canal mediatizador (discurso, computadora); el contexto del conocimiento matemático, las funciones cognitivas

[2] Inclusive en la simulación de procesos de pensamiento o decisión más elaborados, como lógica difusa, borrosa o sistemas expertos.

y comunicativas como escuchar y hablar. De acuerdo con Balacheff y Laborde, (1984), en el proceso del habla construimos significados, reconstruimos lo que decimos, y las contradicciones, una vez superadas, cambian el entendimiento.

La incorporación de la computadora a la enseñanza se puede lograr desde distintos modelos de discurso, *vgr.*, 1) Modelo para la mediación en pareja, 2) Aprendizaje colaborativo, 3) Modelo tutorial en pareja (O'Donnell y King, 1999). Para esto, no basta sólo con tener diversos ambientes conformados con la presencia de una computadora y los *software* destinados especialmente a los temas que se pretenden aprender y enseñar. El aula deberá convertirse en un ambiente adaptado y adaptable a los nuevos requerimientos de quienes participan en el proceso de aprendizaje y a los objetivos de los modelos que se utilizarán.

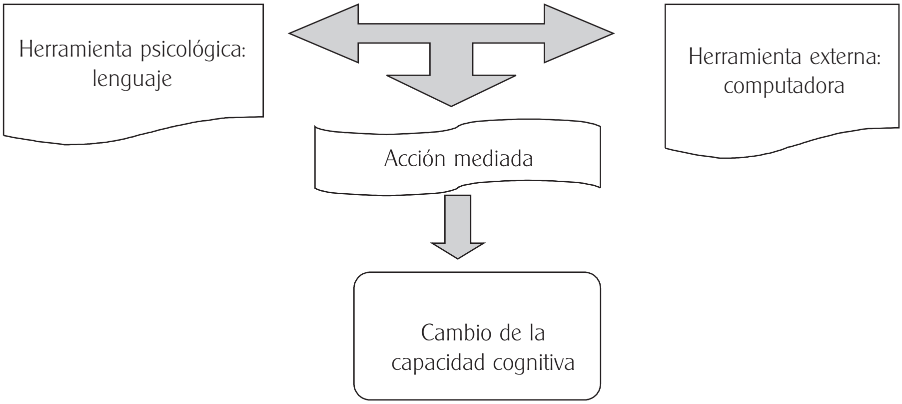
MARCO TEÓRICO

De acuerdo con Kozulin y Presseisen (1995), para Vygotsky las funciones superiores son exclusivas de los seres humanos y están mediadas por herramientas y sistemas de signos: el lenguaje, la escritura o los sistemas de numeración, entre otros. Al referirnos a la perspectiva vygotskiana, tomaremos solamente la relación entre pensamiento y lenguaje, que se explica mediante la relación entre herramienta externa (la computadora en este caso) y herramienta psicológica (lenguaje). Desarrollaremos brevemente esta idea para comentar posteriormente cómo el lenguaje computacional puede potencializar habilidades matemáticas y un lenguaje más cercano al lenguaje formal matemático.

Una de las propiedades de las herramientas psicológicas es definir niveles de desarrollo que son progresivamente más complejos, así como la explicitación de su naturaleza social. Aquí ocurre también lo que denominamos *acción mediada,* que parte de la acción humana general y se concreta en herramientas externas y herramientas psicológicas (lenguaje). La mediación se da a través de la inclusión de signos, la incorporación de los instrumentos externos y la inclusión de las herramientas psicológicas que influyen en las funciones mentales y determinan la estructura de un nuevo acto instrumental, mediante las relaciones entre pensamiento y lenguaje, conforme lo ilustra la figura 1.

Ciertamente, asumir la actividad cognitiva como una actividad socialmente mediada por herramientas externas y psicológicas implica necesariamente considerar el lenguaje y su uso como un instrumento en el cual desempeñan un papel importante, por ejemplo, los sistemas de signos y el uso de los ambientes

Figura 1



Un signo es siempre, originalmente, un instrumento usado para fines sociales, un instrumento para influir en los demás, y sólo más tarde se convierte en un instrumento para influir en uno mismo.

Vygotsky

computacionales. De éste, su propia estructura obliga a replantear o crear nuevas estrategias de solución de un problema o un concepto dado. En suma, el uso de la herramienta modifica el propio proceso de pensamiento.

EL USO DE AMBIENTES COMPUTACIONALES

De manera más precisa, un ambiente computacional es un conglomerado de programas interconectados que conforman:

1. una interfase (intérprete de comandos),
2. un lenguaje de alto nivel compatible con el ambiente,
3. un asistente (menú de ayuda),
4. rutinas de graficación, y
5. un editor de texto.

La elección de un ambiente computacional es importante desde el punto de vista didáctico y operativo. Al principio, conviene distinguir entre ambientes computacionales y de calculadora: por definición, el primero tiene una interfase gráfica de alta calidad de definición y color y es capaz de soportar distintos sistemas operativos e intérpretes con ayuda de software, y es de uso general; en contraposición, el ambiente de calculadora soporta, a lo más, módulos que amplían un módulo básico; el lenguaje computacional es de mediano nivel y no es estándar, sino que depende del fabricante; es de uso específico. El costo no es ya la mayor ventaja de un ambiente de calculadora sobre uno computacional y es mera cuestión de objetivos, costos y funcionalidad.

Entre la variedad de programas y ambientes computacionales disponibles comercialmente, hemos tomado la hoja de cálculo Excel para ejemplificar concretamente su utilidad como herramienta del lenguaje: además de su uso común en el trabajo administrativo y de contabilidad, disponible dentro del paquete MSOffice© y es de bajo costo relativo. Aquí exploramos sus posibilidades, porque en muchas ocasiones no se dispone de paquetes más sofisticados, y una hoja electrónica es de fácil acceso si se cuenta con una computadora de tipo comercial. Así, es posible contar con una hoja de cálculo a partir de plataformas de hardware basadas en procesadores 386 o superiores. Esto también presenta la viabilidad de un proyecto de enseñanza o capacitación basado tan solo en equipo reciclado y de bajo costo.

BREVE DESCRIPCIÓN DE LA HOJA DE CÁLCULO

La hoja de cálculo es un arreglo de filas, numeradas consecutivamente, y columnas, ordenadas en orden alfabético (A, B, C). Una fila y un renglón determinan una celda, a cuyo contenido se tiene acceso desde su dirección, por ejemplo, B3, A25. Las celdas pueden contener texto, números o fórmulas, que pueden hacer referencia a funciones que dependen de una o más celdas a partir de su referencia. Las fórmulas se distinguen por el símbolo "=" en la ventana de estado. Las referencias a las celdas pueden ser absolutas o relativas; \$B\$3 es una referencia absoluta, B3 es una referencia relativa, y \$B3 es una referencia mixta. Esta diferencia entre referencias es una de las características más importantes y a ella debe su eficiencia la hoja de cálculo; aquélla, a la vez, presenta un primer obstáculo de lenguaje: por un lado la sintaxis está muy alejada de la notación funcional más común de matemáticas (veremos más adelante cómo puede superarse esta dificultad con el uso de nombres); por otro, el signo "=" tiene un significado asimétrico: "asigne la expresión al contenido de la celda". Expresiones largas pueden ser difíciles de leer, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Expresión funcional	Expresiones equivalente en hoja de cálculo	Observación
$\sqrt{\dfrac{Cxy}{x^2+y^2}}$	=RAIZ(C1*A1*B1/(A1*A1+B1*B1))	C1 contiene el valor constante C
$\sum_{k=0}^{10} q^k$	=1 =A1*C1 Ctrl-c; Ctrl-v (copiar y pegar) =suma(A1:A10)	C1 contiene el valor de la razón *q*. El valor 1 se guarda en la celda A1.

Las referencias absolutas en una fórmula apuntan al contenido de la celda referida en relación con un origen absoluto (digamos la celda A1), en tanto que una referencia relativa apunta al contenido de una celda referida a la posición relativa con otras celdas. Esta estructura sintáctica basada en celdas y referencias, constituye la base de la hoja de cálculo, la cual está enriquecida por elementos o funciones colaterales que complementan esta funcionalidad: estructuras de control e inclusión de objetos como gráficos o texto.

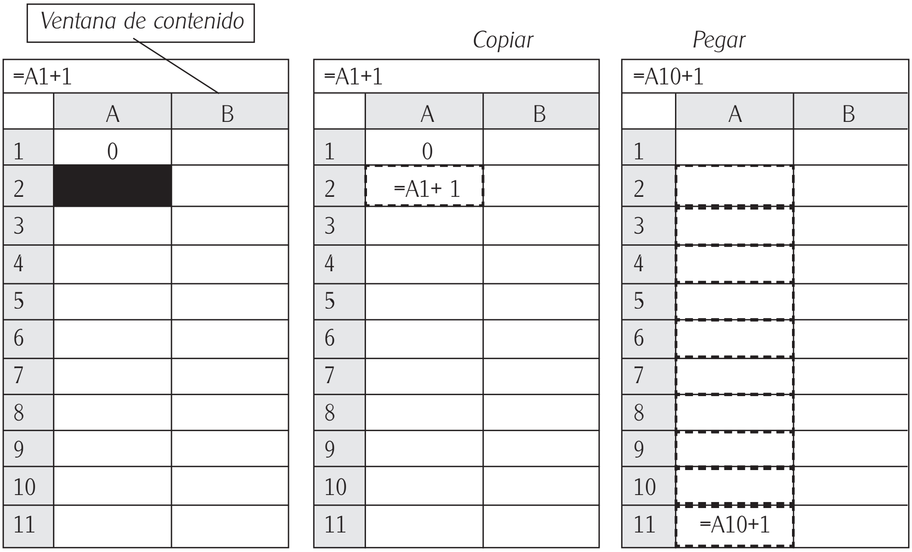
Los siguientes ejemplos muestran desde los aspectos más elementales del uso básico del simbolismo de Excel hasta los más complejos que mimetizan la notación funcional clásica mediante el uso de *nombres* en Excel. Preferimos hacer una discusión más específica a partir de ejemplos que plantear un análisis general de la simbología de la hoja de cálculo.

EJEMPLOS

1. Caída libre

Encontrar la distancia recorrida por un objeto en caída libre, durante los primeros 10 segundos, si inicialmente se parte del reposo.

La fórmula de Galileo afirma que si d es la distancia recorrida y t el tiempo entonces $d = {}^1/_2\, g\, t^2$, donde $g = 9.81$ m/seg^2. La columna A contiene el tiempo en intervalos de 1 segundo hasta diez. La celda A2 continene la fórmula que incrementa en uno la celda A1 (referencia relativa). Al copiar y pegar en la columna B, la referencia A1 se actualiza y tiene el significado de variable "valor de la celda inmediata superior relativa a la celda actual". Esto puede verse claramente si se observa el contenido de la celda A11 en la ventana de contenido



La primera distancia recorrida se calcula en la celda B1, introduciendo la fórmula (= 0.5*C1*A1). La celda C1, referida absolutamente aquí, significa el valor constante de *g*. El significado de Al en la fórmula de la celda B2, cuando se copia y pega en el resto de la columna B, adquiere el significado de "valor de la celda inmediata a la izquierda de la celda actual", en este caso el tiempo (véase p. 145).

La acción de "copiar y pegar" en Excel equivale a resolver explícitamente una relación de recurrencia con dato inicial. Aquí aparece una primera dificultad en el uso de la hoja de cálculo, pues antes de experimentar con una relación funcional $y = f(x)$, es necesario definir las relaciones de recurrencia $x_{n+1} = \xi(x_n)$, $y_{n+1} = \eta(y_n)$, éstas pueden ser tan elementales como una serie aritmética: $x_{n+1} = a + r\, x_n$, por ejemplo para definir el dominio de la variabe $x \in [a,b]$, para después disponer de los valores $y_n = f(x_n)$.

Distancia inicial

=0.5*C1*A1			
	A	B	C
1	0		9.81
2	1		
3	2		
4	3		
5	4		
6	5		
7	6		
8	7		
9	8		
10	9		
11	10		

Copiar

C=0.5*C1*A1		
A	B	C
0		9.81
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Pegar

C=0.5*C1*A10		
A	B	C
1		9.81
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
	10	
11	=0.5*$C $1*A10	

Discusión

El ejemplo de la caída libre ilustra una de las ventajas pocas veces explorada de la hoja de cálculo: el uso de nombres y el simbolismo funcional. Un *nombre* es una cadena que representa el contenido de toda una columna o fila. La asignación de un nombre se hace marcando la(s) columna(s) o fila(s) e incluyendo al principio de la(s) fila(s) o columna(s) el nombre de ésta(s), y seleccionando del menú principal: Insertar → Nombre → Crear. En la ventana de diálogo se pedirá confirmar si las primeras filas o columnas se tomarán como los nombres de las columnas.

En el ejemplo de caída libre se asignan el nombre *t* a la columna que contienen el tiempo ($A1:$A11) y el nombre *g* a la celda C1. En la celda B1, donde se calcula la distancia inicial, se puede usar ahora la fórmula (= 0.5*g*t*t), que se copia y pega en el resto de la columna B (p. 146).

El uso de *nombres*, además de acercar al alumno a la notación funcional matemática clásica, le permite construir su propio significado de *variable*; los *nombres* son ahora objetos que representan columnas (o renglones) completos, independientemente de cómo se hayan generado y la relación entre variables se expresa mediante una relación algebraica 1 a 1 que incluye constantes, variables y parámetros, en vez de posiciones relativas de celdas.

=0.5*g*t*t			
	A	B	C
	t		g
1	0		9.81
2	1		
3	2		
4	3		
5	4		
6	5		
7	6		
8	7		
9	8		
10	9		
11	10		

2. El triángulo de Pascal

Como es bien conocido, el desarrollo binomial de $(a+b)^n$ admite la fórmula general

$$\left(a+b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} = a^k b^{n-k}$$

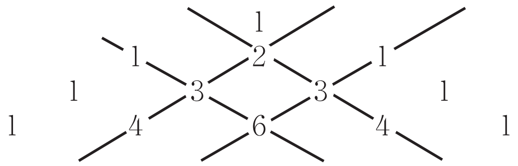
donde

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

son los coeficientes binomiales. La fórmula que se usa para generar la tabla se basa en la propiedad

$$C_{n,k} = C_{n-1,k-1} + C_{n-1,k} \qquad (1)$$

Los coeficientes arreglados en forma de triángulo se verían así:



Donde las líneas marcan la relación recursiva (1). Este arreglo se puede "traducir" en la hoja de cálculo como un arreglo de filas y columnas, como se muestra enseguida:

= A2+B1				
	A	B	C	D
1	1	1	1	1
2	1			
3	1			
4	1			

	A	B	C	D
1	1	1	1	1
2	1	2	3	4
3	1	3	6	10
4	1	4	10	20

El contenido de la celda marcada B2 se puede calcular ahora sumando el contenido de las celdas vecinas, usando la fórmula de Excel (= A2+ B1). Si se usan referencias relativas, es muy fácil completar la tabla, pues entonces basta copiar la celda B2 en el resto de la tabla.

Después de haber completado la tabla, se hace evidente la simetría respecto de la diagonal. Esta observación es fácilmente comprobable para un número razonablemente grande de casos, y esta es la ventaja principal de haber usado la hoja de cálculo, lo que nos permite conjeturar la relación

$$C_{n,\,k} = C_{n,\,n-k.}$$

Traducida en la identidad

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Discusión

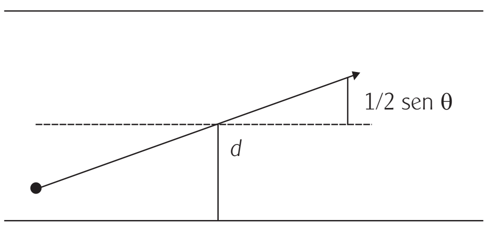
Varios autores han enfocado el uso de la hoja de cálculo hacia el descubrimiento de patrones numéricos (Mason *et al.*, 1985; Kieran, 1999) como una ruta hacia el pensamiento algebraico; en este ejemplo se usa en el mismo sentido, pero en un nivel preuniversitario, es decir, como antecedente a la idea de *inducción matemática*.

3. La aguja de Bufon

Se hace una simulación del experimento clásico de Bufon: se lanza repetidamente una aguja sobre un enrejado de líneas paralelas. Calcular la probabilidad de que la aguja cruce una de las líneas del enrejado.

Planteamiento: Se supone que la aguja y la separación entre las líneas horizontales es una unidad. El espacio de eventos se puede parametrizar por *d*, la distancia de la línea más cercana al punto medio de la aguja, y θ, el ángulo que forma la aguja con la horizontal.

Figura 2



El espacio de eventos se representa por

$$E = \{ (\theta, d) \in [0,\pi] \times [0,1/2]\}.$$

(en este caso son indistinguibles la punta y la cola de la aguja).

El conjunto de eventos favorables viene dado por el conjunto

$$F = \{ (\theta, d) \in [0,\pi] \times [0,1/2] \mid d \leq {}^{1}/_{2} \text{ sen } (\theta)\}.$$

Luego la probabilidad es

$$P = \text{Área } (F)/\text{Área } (E).$$

Ya que

$$\text{Área }(F) = \int_0^{\pi} 1/2 \,\text{sen}(\theta) d\theta = 1, \qquad \text{Área }(E) = \pi/2,$$

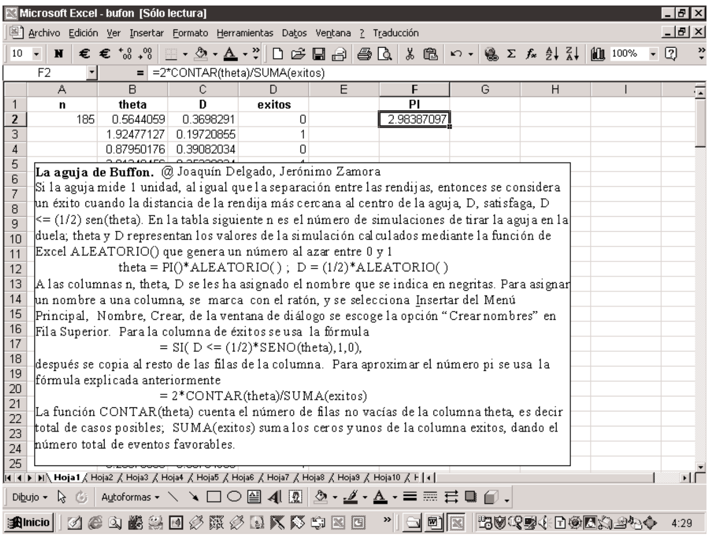
se sigue que

$$\pi = 2/P.$$

Esta última relación se puede usar para "redescubrir" el número π probabilísticamente, *vgr.* a partir de la noción de probabilidad clásica y de la noción de área. Un camino obvio conduce a reproducir el experimento, y éste puede ser muy provechoso, pues se presta a asignar tareas o combinar estrategias; por ejemplo, un alumno puede arrojar la aguja, mientras otro llevar el conteo, situaciones críticas donde un "evento favorable" no sea claro (por ejemplo, si la aguja cae entre las rendijas, o "casi la toca"). La otra opción es usar la hoja electrónica, y se puede comparar el tiempo para realizar una simulación y el experimento.

Para codificar el programa, Excel dispone de la función RANDOM, que genera números aleatorios (pseudoaleatorios en un sentido matemático estricto, pero para fines prácticos se pueden considerar así), y la función lógicas SI que permiten distinguir un evento favorable. En la figura 3, se muestra una sesión en Excel sin muchos detalles, donde se usaron *nombres* y funciones de librería como CONTAR o SUMAR.

Figura 3



Discusión

La discusión de este problema presupone una "plataforma común de conocimiento", como se menciona en la teoría vygotskiana, en este caso, la noción de área entre regiones curvilíneas y la de probabilidad clásica trigonométrica. Las ventajas de la simulación de un número arbitrariamente grande de experimentos es, sin lugar a dudas, una ventaja que permite motivar desde un enfoque distinto el concepto de número, de área y de probabilidad. Este ejemplo cae propiamente en el terreno de la *modelación matemática* (véase también Molyneux *et al.*, 1999, donde se propone un modelo de difusión molecular). Ya de inicio, el concepto de espacio muestral presenta dificultades epistemológicas profundas, pues existen paradojas que surgen de asociar diversos espacios muestrales al mismo experimento; así, ante esta reflexión más profunda, la hoja de cálculo no ofrece una respuesta definitiva, pero sí la posibilidad de experimentar rápidamente con el modelo.

4. El modelo de crecimiento logístico

Una población de tamaño x_n (densidad de población) crece en unidades discretas de tiempo n a una tasa de crecimiento autorregulada siguiendo el modelo logístico

$$x_{n+1} = m\,(1 - x_n)\,x_n.$$

Estudiar el comportamiento cualitativo de la evolución de la población conforme al parámetro m.

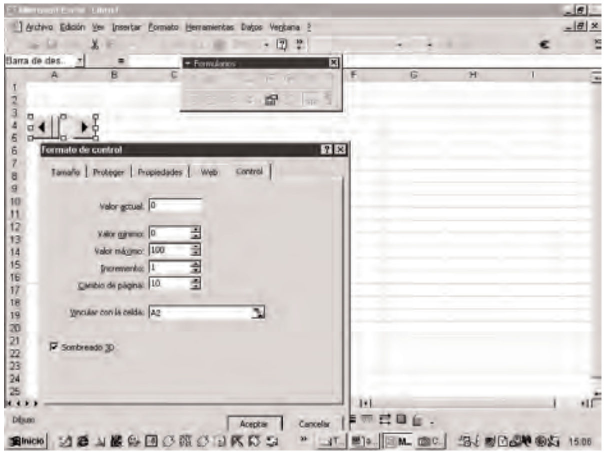
Éste es uno de los primeros ejemplos de sistemas dinámicos que han sido estudiados y presentan distintos tipos de comportamiento, monótono, desde periódico hasta caótico en el rango $1 < m < 4$ (Devaney).

El uso de controles

Los controles son botones o barras de desplazamiento (técnicamente llamados controles Active X) que permiten modificar el contenido de una celda. Cuando el contenido de una celda controlado por un botón Active X es el valor de un parámetro, es posible rehacer rápidamente un cálculo o simulación completa, si la hoja de cálculo contiene referencias relativas ligadas al parámetro.

Figura 4

=A2*0.1		
	A	B
1	=A2*0.1	
2		



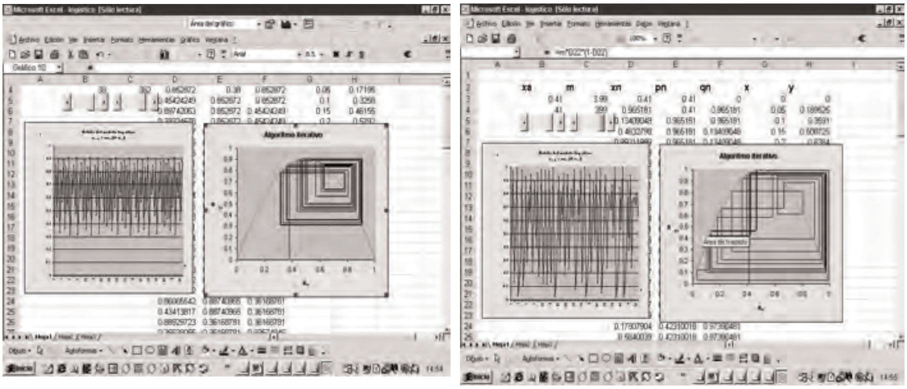
La sucesión x_n se puede construir mediante una fórmula recurrente, al igual que en el cálculo de la distancia recorrida en el ejemplo de caída libre. Si el valor del parámetro *m* está referido a la celda A1, por ejemplo mediante una celda auxiliar, ésta se liga primero a una celda auxiliar, digamos A2, para controlar la sensibilidad del botón, es decir el incremento y valor inicial del parámetro. El contenido de la celda A2 se puede entonces controlar con un botón ActiveX mediante el *Menú de Formularios* de la barra de herramientas.

En la simulación presentada en la figura 4, se ha hecho uso de controles para modificar el valor del parámetro *m* del modelo. Es interesante ver cómo un simple deslizamiento de la barra permite dar una idea general del comportamiento del sistema dinámico en relación con el parámetro. Los gráficos se han hecho con base en los menús de gráficos propios de Excel.

Discusión

Este ejemplo muestra las posibilidades de alcanzar un nivel de comprensión razonable, aun para un primer encuentro, del concepto de sistema dinámico, de sucesión y convergencia (por ejemplo, con las gráficas a la izquierda en las pantallas que aparecen en la figura 5), estabilidad y atracción. La importancia de los puntos fijos $f(x) = x$ de la aplicación logística $f(x) = m\,(1 - x)\,x$, se resalta con los grá-

Figura 5



ficos de "telaraña" (a la derecha en las pantallas que aparecen en la figura 5); y como la estabilidad depende del valor de la derivada en el punto fijo, sin mayor dificultad el alumno podría realizar el diagrama correspondiente para los doblemente periódicos como puntos fijos de la aplicación $f^2(x) \equiv f(f(x))$ y el proceso de *bifurcación*, es decir, del mecanismo de aparición de dos puntos periódicos cuando se varía el parámetro *m*. Por supuesto que estos conceptos se deben definir, y las propiedades que se puedan conjeturar se deben probar rigurosamente.

El mapeo logístico fue uno de los primeros en ser estudiados, pues presenta el fenómeno de caos en sistemas determinísticos. La hoja de cálculo ofrece la posibilidad de estudiar otros sistemas, como los definidos por un "mapeo tienda" (su gráfica presenta un solo máximo en el intervalo [0,1], sin ser necesariamente diferenciables), que se puede definir mediante una función lineal a trozos, por ejemplo. Los conceptos de órbita, punto fijo, punto periódico y estabilidad pueden muy bien ilustrarse mediante cualquiera de los dos gráficos: el de telaraña o el de la sucesión x_n.

El interés pedagógico de este ejemplo se da también en dos direcciones por un lado, se presenta el problema de cómo definir una sucesión recurrente para calcular una órbita, cómo variar sólo el valor del parámetro, cómo ejecutar la secuencia de comandos necesarios para realizar el despliegue gráfico, así como el modo de hacer la simulación eficiente (con el uso de botones). En la otra dirección, el interés radica en cómo interpretar los resultados de la hoja de cálculo: ¿cómo distinguir un punto periódico a partir de la secuencia numérica o del gráfico?; ¿cómo distinguir una solución "caótica"?; ¿de qué características geométricas de la gráfica de $f(x)$ depende la estabilidad?, etc. En suma, se presenta al estudiante el reto de construir un andamiaje mínimo conceptual de un sistema dinámico.

RESULTADOS

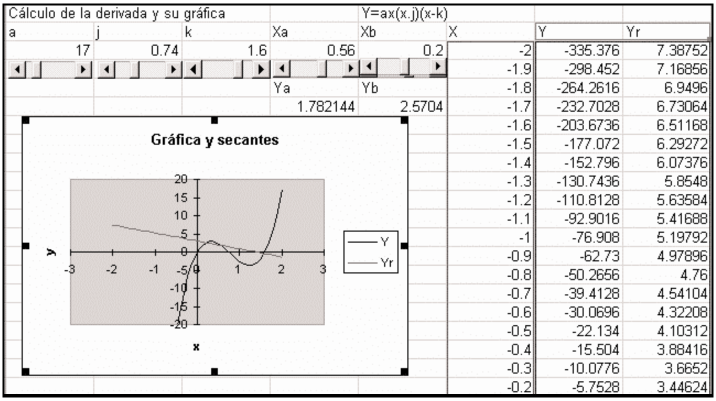
Algunas de las prácticas en el ambiente de la hoja de cálculo fueron presentadas en un curso de diplomado orientado a profesores de enseñanza media superior (CEBTIS) y superior de los primeros trimestres (UAM-I, UPN), encargados de la enseñanza de cursos básicos como Cálculo Diferencial e Integral, Ecuaciones Diferenciales, o Farmacología. El interés principal de los participantes fue la capacitación orientada a la preparación de material didáctico en dos ambientes específicos: la hoja de cálculo y *Mathematica*. En este trabajo, se han discutido solamente los aspectos relevantes de la hoja de cálculo, reflexiónando sobre su uso como lenguaje en el sentido de herramienta psicológica, así como algunos aspectos técnicos poco discutidos en la literatura. La aceptación de los participantes fue buena, sobre todo entre los docentes de ciencias experimentales (farmacología y carreras técnicas), para quienes el uso de la hoja de cálculo se orienta frecuente y principalmente al cálculo numérico. Los participantes de cursos iniciales de Cálculo Diferencial y Ecuaciones Diferenciales mostraron una preferencia marcada por el ambiente que ofrece *Mathematica*, principalmente por las sintaxis funcional y la organización lógica de los documentos (*Notebooks*) disponibles en distintos estilos.

Presentamos dos ejemplos del tipo de prácticas que los participantes realizaron como proyecto final en ambiente de hoja de cálculo.

LA DERIVADA COMO LÍMITE DE RECTAS SECANTES

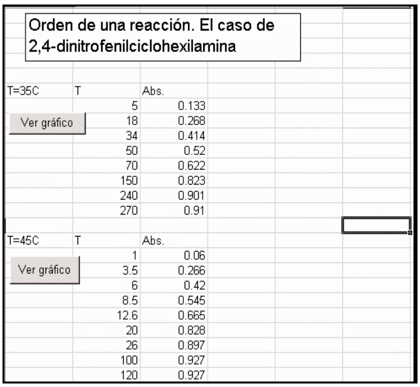
En esta práctica se ilustra la derivada como límite de rectas secantes para una familia de funciones de la forma $y = ax(x - j)(x - k)$. Se incluyeron botones de control para modificar los valores de las raices j, k así como el factor de escala a. La recta secante se traza a partir de los puntos con abscisas x_a, x_b que también se pueden controlar. La práctica se muestra en la figura 6 y fue elaborada por uno de los participantes del nivel superior.

Figura 6



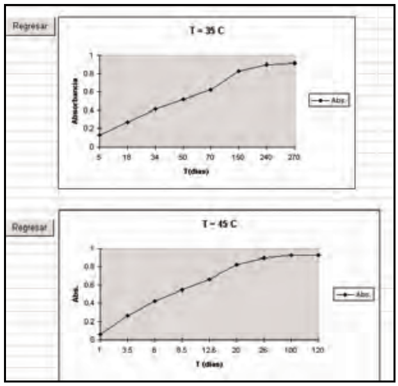
Cálculo de la derivada y su gráfica				Y=ax(x.j)(x-k)			
a	j	k	Xa	Xb	X	Y	Yr
17	0.74	1.6	0.56	0.2	-2	-335.376	7.38752
					-1.9	-298.452	7.16856
			Ya	Yb	-1.8	-264.2616	6.9496
			1.782144	2.5704	-1.7	-232.7028	6.73064
					-1.6	-203.6736	6.51168
					-1.5	-177.072	6.29272
					-1.4	-152.796	6.07376
					-1.3	-130.7436	5.8548
					-1.2	-110.8128	5.63584
					-1.1	-92.9016	5.41688
					-1	-76.908	5.19792
					-0.9	-62.73	4.97896
					-0.8	-50.2656	4.76
					-0.7	-39.4128	4.54104
					-0.6	-30.0696	4.32208
					-0.5	-22.134	4.10312
					-0.4	-15.504	3.88416
					-0.3	-10.0776	3.6652
					-0.2	-5.7528	3.44624

Figura 7



Orden de una reacción. El caso de 2,4-dinitrofenilciclohexilamina

T=35C	T	Abs.
	5	0.133
Ver gráfico	18	0.268
	34	0.414
	50	0.52
	70	0.622
	150	0.823
	240	0.901
	270	0.91
T=45C	T	Abs.
	1	0.06
Ver gráfico	3.5	0.266
	6	0.42
	8.5	0.545
	12.6	0.665
	20	0.828
	26	0.897
	100	0.927
	120	0.927



Orden de reacción. El caso de la 2,4-dinitrofenilciclohexilamina

En esta práctica se grafican datos experimentales de absorbencia de cierto fármaco a ciertas temperaturas, de donde, a partir de la pendiente de la gráfica, se puede determinar el orden de la reacción. El autor introdujo ligas de hipertexto de los datos a los gráficos correspondientes que, dentro de la práctica, están situados en distintas hojas de trabajo.

AGRADECIMIENTOS

Los autores fueron apoyados por los siguientes proyectos: Cristianne Butto fue apoyada por el proyecto de grupo: "La incorporación de nuevas tecnologías a la cultura escolar: la enseñanza de las ciencias y las matemáticas en la escuela secundaria", financiado por Conacyt Ref. G-263385. Becaria Imexci de la SRE; Joaquín Delgado fue apoyado por el proyecto Conacyt 400200-5-32167.

DATOS DE LOS AUTORES

Cristianne Butto Zarzar
Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, Instituto Politécnico Nacional
cristianne_butto@hotmail.com

Joaquín Delgado Fernández
Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa
jdf@xanum.uam.mx

Jerónimo Zamora Carrillo
Departamento de Matemáticas, UAM-Iztapalapa
zacj@oso.uam.mx

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Devaney, R.L. (1982), *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems,* Menlo Park, CA, Benjamin/Cummings.

De Saussure, F. (1998), "Objeto de la Lingüística", en *Curso de Lingüistica General,* Fontamara, vol. 25, cap. 3, pp. 33-44.

Kieran, C. (1992), "The Learning and Teaching of School Algebra", en D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teching and Learning,* Nueva York, MacMillan, pp. 390-419.

Kozulin, A. y B. Z. Presseisen (1995), "Mediated Learning Experience and Psychological Tools: Vigotsky's and Feuerstein's Perpectives in a Study of Student Learning", *Educational Pshycologist,* vol. 30, núm. 2, pp. 67-75.

Kozulin, A.(1998), "El concepto de actividad psicológica", en *Instrumentos psicológicos. La educación desde una perspectiva cultural. Cognición y pensamiento humano,* Paidós, cap. I, pp. 23-49.

Kozullin, A. (ed.) (1986), *Vigotsky, L.S. Thought and Languaje* (ed. rev.), Cambridge, Ma.-The MIT Press.

Mason, J., A. Graham, D. D. Pimm y N. Grower (1985), *Routes of Roots of Algebra,* Gran Bretaña, The Open University Press.

Molyneux-Hodgson, S., S. Rojano, R. Sutherland y S. Ursini (1999), "Mathematical Modelling: The Interaction of Culture and Practice", *Educations Studies in Mathematics,* núm. 39, pp. 167-183.

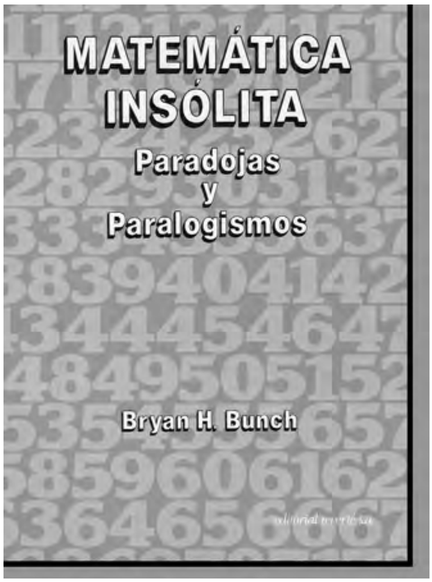
O'Donnell, A. y A. King (1999), *Cognitive Perspectives on Peer Learning,* LEA Lawrence Erlbaum Associates Publishers, cap. 2.

Vigotsky, L. S. (1934), *Pensamiento y lenguaje,* Ediciones Quinto Sol, 2a. reimpresión, 1999.

Matemática insólita. Paradojas y Paralogismos, de Bryan H. Bunch

Reseñado por Santiago Valiente

EN EL MUNDO DE LAS CONTRADICCIONES MATEMÁTICAS



Pocos libros, cuyo contenido trate las paradojas, se pueden tener a la mano, por lo menos en nuestra lengua. Conocidísimo es el libro, *Paradojas Matemáticas de Northrop* (Breviario núm. 18/18a de UTEHA, México, 1968). Más reciente, ameno y bien tratado es el libro que hoy nos ocupa *Matemática Insólita,* cuya ficha completa aparece arriba. En su Prefacio se dan los lineamientos de la obra, que está compuesta de ocho capítulos, los cuales paso a desarrollar.

Prefacio. Según detalla el autor, "Este libro es una colección y un análisis de las más interesantes paradojas y falacias de la matemática, la lógica, la física y el lenguaje. También trata de importantes resultados matemáticos que están basados en las paradojas, especialmente el teorema de Gödel de 1931 y los problemas de decisión general". En los tres primeros capítulos se dan ejemplos acerca de falacias matemáticas comúnmente aceptadas por los especialistas. En los capítulos 4 al 8 se muestran ejemplos de desarrollos en los que aparecen contradicciones, pero en los que no hay un consenso de explicación. El libro puede ser leído por el lector medio, pues, para la comprensión cabal de la mayoría de sus contenidos, sólo se requiere un álgebra y una geometría de bachillerato.

Capítulo 1. Razonamiento erróneo sobre ideas sencillas. A partir de la verdad universal de que todo mundo comete errores en matemáticas, se hace ver la diferencia entre el error como una equivocación y la falacia como el error que resulta de un razonamiento que parece correcto. A partir de esta idea, se nos presentan ejemplos de falacias en las que, por procedimientos incorrectos, se llega a resultados correctos y otros ejemplos en los que aparecen errores por suponer que un razonamiento puede repetirse para una situación diferente pero relacionada. También se puede ver que, cuando el razonamiento matemático y la experiencia se contradicen, aparece una falacia y, mientras ésta no sea explicada, se tiene una paradoja. Estas paradojas pueden ser de tipo matemático o del uso inadecuado del razonamiento o del lenguaje. En el caso de las falacias matemáticas, éstas aparecen, con frecuencia, por la violación de alguna regla matemática.

A continuación, el autor nos presenta cuatro apartados en los que se van mostrando ejemplos de paradojas que resultan interesantes. En "Ver para creer", se muestra la paradoja del recorrido que hacen dos puntos ubicados, cada uno en sendas monedas, una pegada a la otra, y que se desplazan sin resbalar sobre una superficie plana. Aquí la paradoja es la de mostrar como válido que las circunferencias que describen las monedas, que tienen diferentes radios, son iguales; en "Pasos inaceptables" muestra paradojas sobre razonamientos falsos entre los que se incluyen la división entre cero; en "Eliminación de paradojas por definición" se incluyen casos que se refieren al uso arbitrario de conceptos matemáticos que deben estar muy bien definidos. Tales son los casos para $\sqrt{x^2} = |x|$, especialmente para cuando aparece el caso $\sqrt{-1}$, $\sqrt{|a|}$ y $\sqrt{x}\sqrt{y}$, cuando la x y la y no son negativas; en "Una paradoja inesperada", el autor hace el análisis de las contradicciones que se observaron un parte emitido por la radio sueca en la Segunda Guerra Mundial:

> Un ejercicio de defensa civil se realizará esta semana, con objeto de confirmar que las unidades de defensa civil están convenientemente preparadas, nadie sabrá con anterioridad el día en que tendrá lugar este ejercicio.

Capítulo 2. Razonamiento erróneo sobre el infinito. En este capítulo se hace el análisis de diversos casos en los que aparece el concepto de infinito, en diversas acepciones matemáticas. Tiene cuatro apartados. El primero es "Las dificultades que origina"'... y así sucesivamente"', en la que el autor aborda el estudio de relaciones para obtener sucesiones numéricas y llegar al concepto de término general y el de *infinito numerable*; en "El infinito paso a paso", siguiendo con las sucesiones, se abordan casos en los que éstas se forman sumando términos de otra sucesión y se agrega cada vez un término más, a fin de obtener una nueva sucesión. Estas expresiones, al final de cuentas, acaban por resolverse mediante la inducción matemática, a fin de realizar demostraciones finitas para cubrir un número infinito de casos, pues no pueden trabajarse con las herramientas del álgebra cotidiana, ya que la sucesión de términos al infinito (*y así sucesivamente*) expresan una infinidad numerable de ecuaciones; en "Sobre una suma", se trabaja en casos individuales que tienen una infinidad contable de términos; en "Una paradoja para un jugador obstinado", se presenta la discusión de un ejemplo en el que un razonamiento correcto lleva a una paradoja. Es la *paradoja de Petersburgo,* la que analiza con suficiencia, apoyado en sumas infinitas de dinero, que son infinidades numerables y que permiten fácilmente razonar incorrectamente a partir de series que no contienen sumas.

Capítulo 3. Utilización de una idea falsa para hallar la verdad. Consta de cinco apartados. En "Dibujemos una recta interior", el autor trabaja en tres demostraciones que llevan a contradicciones que se pueden dar a través de propiedades de la geometría del triángulo y que incluye la llamada demostración indirecta por *reducción al absurdo* a partir de la ley del tercero excluido. En "Existencia y no existencia", se presentan ejemplos de demostraciones de *existencia* y de *no existencia*. Entre las primeras, maneja la demostración: "nadie tiene más de mil millones de pelos en su cabeza" (¡interesante!), y entre las segundas, aborda una demostración directa y enseguida una indirecta para establecer que la diagonal de un cuadrado y su lado son inconmensurables. En "Quién afeita esta paradoja", da el enunciado planteado por Bertand Russell: "Un señor de Sevilla es afeitado por el Barbero de Sevilla si y sólo si el señor no se afeita a sí mismo. ¿Se afeita a sí mismo el Barbero de Sevilla?" Otra más: "Supongamos que un país declara que cada ciudad del país debe tener un alcalde. Sólo hay dos lugares donde al alcalde se le permite vivir, (y debe vivir sólo en uno de ellos). O el alcalde vive en la ciudad que gobierna o en la Ciudad de los Alcaldes, una ciudad construida especialmente para aquellos alcaldes que no viven en la ciudad que gobiernan. Puesto que la Ciudad de los Alcaldes es una ciudad, debe tener un alcalde. ¿Dónde debería vivir", y esta otra más: "Un bibliotecario imprime una bibliografía de todas las bibliografías de su biblioteca que no se citan a sí mismas. ¿Debería la nueva bibliografía citarse a sí misma?". En "Parece realmente cierto", el autor hace ver que la ley del tercero excluido no ha presentado fallas en el mundo físico, cosa que no ocurre en la realidad matemática. Al trabajar con ciertas intuiciones matemáticas se puede asegurar la existencia de determinados entes matemáticos, aunque éstos no estén demostrados. Caso de ello es la *conjetura de Goldbach,* que establece que cualquier número natural par mayor que 2 es la suma exacta de dos números primos, la que hasta ahora sigue como conjetura, y de utilidad matemática pues permite definir a algunos números naturales. En "La Lógica al revés", se maneja la *paradoja de Hempel* que establece que en un conjunto finito suficientemente grande, si la probabilidad de obtener una condición aumenta con cada nuevo elemento que tiene esa condición, ello no garantiza que un siguiente elemento no la cumpla, pero da expectativas creciente de su generalización, sin que ello represente una demostración.

Capítulo 4. Un lenguaje ambivalente. Se compone de siete apartados en los que se hace el análisis de enunciados verbales que llevan a contradicciones. En "Colección de contradicciones", se dan ejemplos y el análisis de los grados de autocontradicción de algunas sentencias como: *el juicio que estoy haciendo es falso*. En "El mentiroso", se hace el estudio de la versión aristotélica de la expresión "*Esta sentencia es falsa*", la que ha generado diversas presentaciones respecto de la original. En "No llamar la atención sobre uno mismo", se hace el análisis de expresiones paradójicas cuya explicación se funda en eliminar las sentencias que originan la paradoja. En "Vicioso, vicioso, vicioso", se hace referencia a la sentencia dada en *El Quijote* cuando Sancho Panza gobierna la isla de Barataria, lugar en el que todo el que llega debe decir el motivo de su presencia: si dice verdad se le pone en libertad, en cambio, si dice mentira, se le cuelga. Un cierto viajero dice: "Estoy aquí a que me cuelguen". En "Una paradoja impertinente", se maneja la paradoja de *Quine*, para la que no existe elemento externo que la lleve a contradicción, sino que la contradicción está en ella misma. En "En torno a las palabras", se hace alusión a los adjetivos que son autológicos (que se autodescriben) y a los heterológicos. A partir de esto, "si heterológico se describe a sí mismo, es autológico, por lo tanto no se describe. Si no se describe a sí mismo, entonces es heterológico, por lo tanto se describe a sí mismo". En "¿Existe Pegaso?", el autor se refiere a paradojas que, siendo del lenguaje, también lo son de la matemática.

Capítulo 5. Paradojas que cuentan. En este capítulo, el autor comienza haciendo una breve descripción histórica respecto del cuidado que los matemáticos han tenido al utilizar el concepto de infinito. Se desarrolla el capítulo en ocho partes. En "Una buena cuenta", a partir de la correspondencia *uno a uno* entre dos colecciones de objetos, se establece el número de elementos de un conjunto (o de los dos), esto es, se cuentan. Cuando esta idea se lleva a los conjuntos infinitos se establecen paradojas como la que, en contra de la intuición, establece que el número de números naturales es igual al número de números pares, y no el doble. De la misma manera, se puede "demostrar" que existe el mismo número de puntos en dos segmentos de recta, aunque uno de ellos es de doble longitud del otro. En "Paradoja incorporada", se muestra, a partir del rumbo que siguieron los trabajos de Georg Cantor, que "la característica que distinguía a los conjuntos infinitos era precisamente que en ellos se presentaba la paradoja. Se podría decir que un conjunto infinito es aquel en el que el todo no es igual a la suma de sus partes. Más técnicamente, es aquel en el cual una parte del conjunto que no contiene a todos sus elementos puede ser puesta en correspondencia uno a uno con el conjunto total". Lo mismo ocurre con los números enteros, y con mayor complejidad, con los racionales; sin embargo, aunque se pensara que esta situación siguiera con los números reales, Cantos probó que no es así, y para ello usó un nuevo método indirecto de demostración: *método diagonal de Cantor*. En "Conjuntos de conjuntos", se establece el criterio de Cantor de que para conjuntos finitos con n términos el número de subconjuntos es 2^n. Cuando hay n términos en el conjunto, se extiende, como notación, al caso en que n es infinito. Con esta idea, llega a los conjuntos llamados *cardinales transfinitos*. En "Orden en el infinito", se trata de la *hipótesis del continuo,* por la que el cardinal del conjunto de los números reales es el mismo que el número de maneras en que puede ser ordenado el conjunto de los números naturales. En "Las cosas van mal", en la demostración de que el número de subconjuntos es mayor que el número de elementos de un conjunto, se hace ver que este ordinal puede no estar en la serie de los números ordinales, cosa que es una contradicción. En "Reparemos el daño", se aclara que, para evitar estas contradicciones, Poincaré introdujo el concepto de definiciones impredicativas, las que no deberían ser usadas en matemáticas. Sin embargo, muchos conceptos y definiciones de la matemática básica se basaban en este tipo de definiciones. En "Un programa formal", se muestra el intento por llegar a eliminar las paradojas en una teoría formal matemática. Para ello, David Hilbert, en 1920, intenta probar la consistencia de la matemática y recurrió a un programa en el que desasociaba las matemáticas de la realidad, esto es, prescindía de las interpretaciones físicas. Ese intento se basaba en establecer cuidadosamente las reglas, se podrían evitar las paradojas y avanzar en el conocimiento matemático válido. Ese programa fue el *formalismo* matemático, contrario al *intuicionismo*. Con la teoría axiomática de conjuntos se ha avanzado considerablemente, pues no rechaza ninguna parte no paradójica de la matemática, aunque en cualquier momento pueden surgir nuevas paradojas.

Capítulo 6. ¿Tiene límites el pensamiento? Se desarrolla en cinco apartados. Aunque hacia 1930 se pensaba que el programa de Hilbert parecía adecuado para mostrar que las matemáticas, convenientemente formuladas, estaban libres de contradicciones a pesar de las paradojas, poco después era evidente que no llevaría al éxito. En "Una representación de sí mismo", se muestran los intentos de Gödel por avanzar en el proceso de sistematización de la matemática, a partir del concepto de representación (aplicación). Esto es, para un sistema matemático formal, caso de la teoría axiomática de conjuntos, se puede entender como una colección de reglas que permiten trabajar símbolos. Esto llevó a la idea de construir enunciados verbales que expresaran ideas precisas acerca de una situación matemática especial, pero que podría ser aplicado en otro contexto usando las variables pertinentes. Un ejemplo de esto son los axiomas de construcción de los números totales (naturales con el cero), de Peano:

1. El cero es un número total.
2. Si un número es total, su sucesor es total.
3. *a.* Si dos sucesores son iguales, los números son iguales
   b. Si dos números son iguales, sus sucesores son iguales.
4. El cero no es sucesor de ningún número.
5. Si el cero tiene una propiedad, y cuando un número la tiene su sucesor también la tiene, todo número total tiene la propiedad.

En "El mentiroso matemático", se muestra cómo el sistema desarrollado por Gödel se puede aplicar en la *paradoja de El Mentiroso*, pues es deducible de los axiomas del sistema de los números totales. Si no puede ser demostrada una proposición, quizá sí lo pudiera ser su negación, pero si puede ser demostrada la negación de la negación de la proposición, ello implica que podría ser demostrada una proposición falsa en el sistema axiomático de referencia y, entonces, el sistema axiomático sería inconsistente. En esto deriva el *teorema de Gödel*, o *teorema de incompletitud de Gödel*. De éste, se puede ver que el programa de Hilbert no tendría éxito, pues un sistema axiomático, consistente para deducir de él la aritmética, tendría la misma incompletitud que la aritmética. En "Decisiones, decisiones", se muestra que los esfuerzos de Gödel y otros matemáticos iban encaminados a determinar decisiones para un problema o conjunto de problemas, pues no vale perder el tiempo en la búsqueda de soluciones donde éstas no existen. En "Un problema de palabras", se hace ver que, dado un alfabeto finito y un diccionario de sinónimos finitos, no existe un método recursivo para determinar si dos palabras son o no equivalentes, esto es, es irresoluble el problema de la palabra para semigrupos, pues no se puede determinar, para todo par de palabras, si son equivalentes o no lo son, aunque para algunas parejas de palabras sí es posible esa determinación. En "Un problema de continuidad", se describen los caminos que siguió el problema de la *hipótesis del continuo*, enunciada por Cantor, y enunciado por Hilbert, en 1900, como uno de los primeros problemas por resolver por los matemáticos.

Capítulo 7. Malentendidos sobre el espacio y el tiempo. "A la vez que los matemáticos hacían valiosos esfuerzos para eliminar las paradojas de la teoría de conjuntos (las paradojas de Burali-Forti, de Cantor, de Russell), aceptaban las limitaciones del sistema de axiomas. En realidad, el estudio de estas limitaciones había venido a ser una rama de las matemáticas con activas y penetrantes investigaciones sobre el problema de la decisión en varios sistemas. La mayor parte de este trabajo está basado en mayor o menor grado en la teoría axiomática de conjuntos que, de forma específica, eliminaba las paradojas conocidas, o al menos pretendía hacerlo". En "Paradojas de los modelos", se dice que algunas explicaciones matemáticas aplicadas a modelos no ayudan a construir el modelo para ver las propiedades que éste tiene, sino que, además, no garantizan la existencia matemática del modelo. En "El axioma de elección", se menciona el *axioma de elección,* considerando que éste asegura la existencia de un subconjunto, en situaciones precisas, sin que se establezca cómo se han seleccionado los elementos que forman al subconjunto y cómo es un axioma independiente de otros axiomas de la teoría de conjuntos. En "Círculos (y esferas) muy extraños", se dan ejemplos concretos sobre la medición. Se llega a la conclusión de que diversos conceptos sobre la medición se prestan a duda, y ello aparece cuando se establece un apoyo axiomático. Después, el autor nos presenta tres paradojas: la primera referida a las complejidades en el concepto del área de una superficie curva y dos referidas a la teoría de conjuntos. En "Cómo permanecer joven", se explica la paradoja que surge del hecho de vivir en un espacio tetradimensional de Minkoswski, para el que la distancia más larga entre dos puntos es la línea recta. En una gráfica en que se diagrama el tiempo de un punto quieto en el eje x, se ve que es el tiempo más rápido que puede existir, pues representa el punto que se mueve por el tiempo mediante su línea Universo y cualquier desviación de la vertical causará un acortamiento del tiempo y, para ello, debe moverse por el eje x. Esta idea lleva a la *Paradoja de los gemelos*: "si uno de los gemelos permanece en casa y el otro sale a pasear, cuando se junten otra vez el gemelo paseante será más joven que el que se quedó en casa. De hecho, si el paseo ha sido hecho a una velocidad cercana a la de la luz, la diferencia de edad será notable".

Capítulo 8. En marcha contra el infinito. Este capítulo incluye cinco apartados y una conclusión. Se analizan minuciosamente cada una de las paradojas conocidas del filósofo griego Zenón de Elea, aunque se supone que llegó a construir cerca de 40. La base de la argumentación de Zenón está en considerar que "el mundo real está construido a partir de elementos que corresponden a 'puntos matemáticos-posición' sin tamaño". Entonces demuestra que esta suposición implica contradicciones con lo que la gente percibe en la vida real. Las paradojas a las que hace referencia el autor son "Montones de arena", "La dicotomía", "Aquiles y la tortuga", "La flecha" y "El estadio", que sugerimos al lector lea con cuidado y gusto, ya que el espacio aquí destinado llevaría a otra reseña. En "Conclusión", se hace ver que los sutiles razonamientos de Zenón han tenido mayor atención ahora que antes de 1900 y han servido de referencia para revisar conceptos acerca de la teoría cuántica. Los matemáticos han aprendido a tener reservas y a buscar mayor precisión en sus definiciones, especialmente cuando aparece el concepto o situaciones referidas al infinito y han llegado, incluso, a suponer situaciones distinta a nuestra realidad física, a fin de ver cómo se comportaría la matemática en esa otra "realidad".

DATOS DEL LIBRO

Bryan H. Bunch (1987)
Matemática insólita. Paradojas y paralogismos.
Barcelona, Editorial Reverté, 198 p.

Leer y escribir en la escuela: lo real, lo posible y lo necesario, de Delia Lerner

Reseñado por David Block Sevilla[1]

¿Qué puede aportar la didáctica de las matemáticas a la enseñanza de otras disciplinas? Un ejemplo de transposición a la didáctica de la lengua.

Hay varias razones por las cuales me parece que este libro es de gran importancia para quienes nos dedicamos a la enseñanza. En primer lugar, por las orientaciones de una gran riqueza didáctica, fundamentadas en varios años de trabajo, para la organización del currículum, para el diseño de actividades didácticas y, sobre todo, para la formación de maestros. En segundo lugar, por marcar con tal claridad el problema de la insuficiencia de los referentes teóricos clásicos, la lingüística, la psicolingüística, para comprender la problemática de la enseñanza escolar de la lectura y la escritura, y por destacar la necesidad de una didáctica de la lengua. Finalmente, por la forma audaz, y al mismo tiempo cuidadosa, de

retomar y adaptar algunos de los aportes de la didáctica de las matemáticas de la escuela francesa, al campo de la lengua. Puede decirse que esto constituye, a final de cuentas, una forma de transposición del saber, con el efecto de enriquecimiento que estos procesos pueden llevar consigo cuando se hacen bien.

[1] Estos comentarios se presentaron en la mesa redonda "VII Congreso Latinoamericano. Desarrollo de la lectura y la escritura", Puebla, octubre de 2002.

Voy a hacer dos comentarios sobre el segundo punto.

SOBRE LA PERTINENCIA DE UNA DIDÁCTICA DE LA LENGUA

Cito a continuación algunos fragmentos del capítulo V del libro que expresan de manera especialmente vívida la problemática de los referentes teóricos y lo que significa abrir la perspectiva didáctica:

> Deslumbrados ante todo por los impactantes resultados de las investigaciones psicogenéticas ...( )... ávidos luego por incorporar los aportes psicolingüísticos referidos al acto de la lectura y al acto de la escritura ...( )... impresionados más tarde por los avances de la lingüística textual ...( )..., los capacitadores no pudimos sustraernos a la *tentación* de poner en primer plano los contenidos psicológicos y lingüísticos; esos contenidos que –desde nuestra perspectiva– constituían los fundamentos imprescindibles para la enseñanza de la lectura y la escritura, los pilares a partir de los cuales era posible empezar a pensar la acción didáctica.
>
> Felizmente –aunque llevó tiempo entender las causas y descubrir que se trataba de una circunstancia feliz, la perspectiva de los maestros no coincidía exactamente con la nuestra.
>
> Si bien ellos se sentían muy sorprendidos por el caudal de conocimientos infantiles que empezaban a detectar y que hasta ese momento había permanecido oculto tras la aparente ignorancia de sus alumnos ...( )... de todos modos pensaban –y nos lo hacían saber de diversas maneras– que estos conocimientos no eran de ningún modo suficientes para dar respuesta a los problemas que ellos debían afrontar en su tarea cotidiana ...( )...
>
> Nos hacían preguntas o pedidos como éstos: “explíquenos mejor cómo es la actividad que hay que hacer para que los niños aprendan este contenido específico ...( )... ¿cuál es la intervención adecuada si los chicos cometen determinado error?
>
> Y nosotros nos preguntábamos: ¿por qué nos piden recetas? ¿Por qué esperan que les demos todo resuelto en lugar de construir ellos mismos las “implicaciones didácticas”?
>
> Todavía no sabíamos escuchar a los maestros de la misma manera que lo hacíamos con los niños ...( )... No habíamos descubierto aún lo que tan claramente señala Brousseau (1994) en relación con la investigación didáctica y que nosotros podemos aplicar parafraseándolo a la capacitación: cuando muchos maestros plantean los mismos problemas, lo mínimo que tiene que hacer el capacitador es preguntarse por qué los plantean e intentar entender cuáles son y en qué consisten los problemas que están enfrentando. (pp. 167 y 168)

La problemática de los referentes está lúcidamente planteada. Como bien sabemos, muchos educadores hemos compartido esta "tentación" de la que nos habla la autora, ésta fue el efecto de una concepción pedagógica que prevaleció en la enseñanza básica durante más de veinte años (y todavía...), no solamente en el área de la lectura y la escritura, hay que ver cuántas cosas no se dijeron y ocurrieron en matemáticas, por ejemplo, con respecto a la enseñanza de la noción de número. "Tentaciones" colectivas como ésta tienen, yo creo, un carácter epistemológico (quizás de obstáculo), en el sentido de que son parte del proceso de constitución de un conocimiento, aquí, del conocimiento didáctico. Es decir, en este relato de la autora, puede mirarse también un aspecto de la historia de la didáctica.

La misma didáctica francesa, si bien nació deslindando su objeto de estudio del de la sicología, al mismo tiempo, en un principio, heredó de ésta algunas de sus inquietudes, de sus propósitos y de sus métodos. Las primeras investigaciones didácticas de Brousseau apartaban al maestro de la problemática estudiada. La atención se centró en ese momento "adidáctico", en el que el maestro propicia las interacciones de los alumnos con un medio, pero enseguida se mantiene al margen.

La incorporación del maestro a la problemática estudiada ha sido lenta, y empezó, según dice el mismo Brousseau, de una manera parecida a la que la autora relata que ella vivió: dejando de mirar las desviaciones que ocurrían en los montajes experimentales como faltas de comprensión de los maestros y reconociendo en ellas la expresión de fenómenos didácticos que requerían ser estudiados, tematizados, teorizados.

Fue así como se creó, por ejemplo, la importante noción de "institucionalización", que recupera el papel de los saberes culturales, institucionales, y que de hecho distingue a la didáctica Brousseauniana de los constructivismos radicales (según los cuales el niño construye todo él solo, sin necesidad de ninguna comunicación por parte del maestro). La autora retoma claramente esta perspectiva Brousseauniana cuando afirma: "el maestro sigue teniendo la última palabra... pero es importante que sea la última, no la primera".

Cabe decir que la incorporación del maestro en la teoría didáctica no ha terminado. El estudio de clases no experimentales por la didáctica es relativamente reciente. Se enfrentan ahí nuevos problemas metodológicos y teóricos, por ejemplo: ¿cómo utilizar conceptos didácticos que se crearon originalmente en torno al estudio de situaciones experimentales, para lograr una comprensión más profunda de lo que ocurre en las clases comunes, sin caer en una especie de "check list" de lo que el maestro hace o no conforme a un ideal didáctico? ¿Cómo ir más allá y tratar de desentrañar las dificultades, las sujeciones, los momentos propicios, en suma, las fuerzas subyacentes que presionan y encauzan el trabajo del maestro en las clases reales?

Es probable, por ejemplo, que no conozcamos todavía lo suficiente los medios para que los maestros puedan integrar a sus prácticas algunos de los aportes fundamentales de la didáctica.

Todo esto para decir que puede ser bueno poner en perspectiva la "tentación sicologisita" de la que nos habla la autora, para dejar bien claro que no se trata de errores de algunos individuos, sino de un proceso que está en juego, el de la construcción de la didáctica.

SOBRE LA CUESTIÓN DE "LO DESEABLE Y LO POSIBLE"

Entre los dos referentes de la didáctica francesa que la autora recupera en su trabajo, el de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau y el de la Antropología Didáctica de Chevallard, hay una sutil discusión: Chevallard (1992), "el hijo rebelde" de la escuela francesa, dice, jugando un poco, pero sin ocultar cierto mensaje, que, a diferencia de Brousseau, quien se empeña en estudiar las formas de ideales de enseñanza, él busca (primero) comprender las formas posibles, es decir, busca comprender por qué existen las formas que existen, qué las hace ser como son y no de otra manera... busca conocer las sujeciones que operan sobre el conocimiento cuando éste vive en el régimen escolar, a fin de tener mejores posibilidades para determinar qué cambios tienen cierta posibilidad de ser integrados con buenos beneficios. En síntesis, dice: "una situación, antes que ser buena, tiene que ser posible".

En un texto más reciente, parafraseando a Vigotsky, Chevallard afirma: "Se trata de determinar cuál es la zona de desarrollo próximo del desarrollo curricular" Es decir, la zona en la que ciertas acciones sobre el currículum podrían sobrevivir y podrían tener algún efecto (Chevallard, 1998).

No es difícil estar de acuerdo con estas consideraciones, habida cuenta de tantos intentos frustrados de cambios en la escuela. El problema "gordo" es determinar cuál es esa zona de desarrollo próximo. Cabe preguntar si en el caso de la enseñanza de las matemáticas, la hemos hallado.

Delia Lerner, en su texto, proporciona numerosos ejemplos de estas sujeciones escolares: la selección y el recorte de los conocimientos, su secuenciación temporal, la evaluación y la necesidad de control que la acompaña, entre otras.

Coherente con ello, identifica aspectos clave susceptibles de ser modificados en el currículum, con beneficios importantes, propone por ejemplo: establecer objetivos por ciclo y no por grado; acordar a los objetivos generales prioridad absoluta sobre los específicos; evitar correspondencias término a término entre objetivos y actividades.

Algunas veces, sin embargo, me quedó la sensación de que no es claro cómo podrían vivir algunas de las propuestas que la autora hace, en las sujeciones escolares que ella misma destaca, o, dicho de otro modo, en qué medida algunas de sus propuestas se ubicarían en la zona de lo factible.

Un ejemplo es el de la actualización de maestros: ¿es factible un programa en el que los maestros se actualizan con expertos en procesos de acompañamiento de dos años?

La principal dificultad es contar con la cantidad de expertos que se necesitaría. No obstante, coincido en que, aunque esta no pueda ser la estrategia dominante hoy en día, puede convertirse en la mejor estrategia en el mediano plazo.

Otro ejemplo es el de la evaluación: por una parte, la autora atinadamente destaca que la evaluación y la necesidad de control que trae consigo, constituye uno los mecanismos más perniciosos para la enseñanza y para el aprendizaje. Propone flexibilizar este control y muestra las bondades formativas que tendría hacer participar en los procesos de evaluación a los mismos alumnos. Pero, por otra parte, la exigencia social de evaluación es cada vez más fuerte y en cada vez más países (México inclusive); cada vez más se pide a las escuelas que demuestren públicamente lo que sus alumnos han aprendido. En muchos países los programas contienen ya metas evaluables y criterios de evaluación, incluso, en algunos, se pretende condicionar a ello los financiamientos. La pregunta aquí es: ¿debemos seguir luchando contra esta tendencia?, o bien, ¿debemos responder a ella ayudando a determinar los criterios para la evaluación, procurando que éstos obstaculicen los menos posible los procesos de enseñanza que consideramos deseables o, incluso, que los favorezcan? ¿Es esto posible?[2]

Un último comentario: en muchas partes del libro me sentí identificado con el recorrido de Delia, con sus cuestionamientos, sus inquietudes y sus planteamientos. El libro, sin menoscabo de las consideraciones sobre la difícil y reacia realidad, es optimista y creativo. Me gustó.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chevallard, Y. (1998), *Análisis de prácticas de enseñanza y didáctica de las matemáticas: una aproximación antropológica,* Université de la Rochèlle.

Chevallard, Y. (1992), "Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apporteés par une approche anthropologique", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 12, núm. 1, pp. 73-112, París, La Pensée Sauvage.

[2] Al escuchar este comentario, la autora mencionó que ha realizado un estudio importante sobre el diseño de pruebas acordes con el enfoque didáctico que maneja.

DATOS DEL LIBRO

Delia Lerner (2001)

Leer y escribir en la escuela: lo real, lo posible y lo necesario

México, Fondo de Cultura Económica, 191 p.

La comprensión del cerebro. Hacia una nueva ciencia del aprendizaje, OCDE

Reseñado por Guillermina Waldegg

BASES NEUROLÓGICAS DEL APRENDIZAJE

A pesar de los innegables avances que ha tenido nuestra comprensión del aprendizaje humano durante la segunda mitad del siglo veinte, todavía es difícil afirmar que las teorías del aprendizaje se ajustan a los cánones mínimos de fundamentación y rigor científico. Estamos todavía lejos de poder predecir y controlar los aprendizajes, y lejos también de poder capacitar a nuestros maestros de una manera más eficiente que la basada simplemente en el relato de casos exitosos o en la norma del "debe ser" del docente. Éste es uno de los grandes retos de la educación para este siglo.

Las teorías del aprendizaje han avanzado en la caracterización de conductas, prácticas y comportamientos y han propuesto algunas maneras de explicar la adquisición de conocimientos; sin embargo, estas explicaciones se han basado en evidencias empíricas limitadas y de corto alcance, las cuales reducen las posibilidades de reproducir las prácticas y conductas deseadas o de evitar las indeseadas. El hecho de que exista una gama tan extensa de teorías para explicar los mismos fenómenos y que sigan apareciendo más día con día, es una muestra clara de la fragilidad, mayor o menor según sea el caso, de estos enfoques.

No obstante, durante los últimos años, en este panorama se comienza a vislumbrar una nueva manera de fundamentar nuestras hipótesis sobre el aprendizaje humano, basada en "datos duros" acerca del funcionamiento del cerebro. Cada vez es más evidente que la psicología cognoscitiva y las neurociencias tienen que interaccionar para resolver un problema que les es común: el aprendizaje humano.

> ¿Cómo aprende la gente? ¿qué ocurre en el cerebro cuando adquirimos conocimiento (nombres, fechas, fórmulas) o aptitudes (leer, bailar, dibujar) o actitudes (autoconfianza, responsabilidad, optimismo)? Preguntas como éstas han interesado a los seres humanos durante siglos. Hoy los científicos comienzan a entender cómo se desarrolla el cerebro joven y cómo aprende el cerebro maduro. Distintas disciplinas contribuyen a este avance del conocimiento. La establecida en fechas más recientes, y probablemente la más importante, es la neurociencia cognoscitiva. (OCDE, 2003, p. 39.)

La comprensión del cerebro. Hacia una nueva ciencia del aprendizaje tiende un puente inicial entre las teorías vigentes del aprendizaje y la nueva neurociencia cognoscitiva. Ésta no es una tarea fácil, se trata de vincular dos áreas diferentes del conocimiento, cuyas comunidades tienen prácticas, técnicas de observación, criterios de validación, tradiciones y lenguajes distintos. Sin embargo, el libro permite visualizar el gran potencial de esta vinculación. Mediante un lenguaje accesible en ambas direcciones (para los educadores y para los neurobiólogos), el libro logra plantear, de manera clara, los problemas que atañen a ambos campos del conocimiento, permitiendo vislumbrar un camino común en un futuro próximo.

La neurociencia cognoscitiva parte de la premisa de que incorporar cualquier aprendizaje nuevo, de largo plazo, al cerebro requiere la modificación de su anatomía. El aprendizaje es alcanzado ya sea mediante el crecimiento de nuevas sinapsis (conexiones interneuronales), o mediante el fortalecimiento o debilitamiento de las ya existentes. A partir de esta premisa, los neurocientíficos cognoscitivistas han emprendido la búsqueda de variaciones morfológicas y funcionales en el cerebro cuando el sujeto desarrolla alguna actividad de aprendizaje.

Uno de los puntos cruciales para lograr grandes avances en las neurociencias ha sido el desarrollo de técnicas no invasivas para la observación y el análisis del cerebro, que permiten visualizar la ubicación espacial y los cambios temporales que ocurren en la actividad cerebral durante los procesos de aprendizaje. Algunas de estas técnicas no invasivas son: las imágenes por emisión de positrones, las de resonancia magnética, o la de estimulación magnética temporal que, aunadas a las técnicas tradicionales, como el electroencefalograma, permiten hacer mediciones precisas tanto en actividades cognoscitivas prolongadas como en aquellas que ocurren en lapsos tan pequeños como milisegundos (pp. 65-68).

Los resultados de la investigación de los neurobiólogos desmienten muchos de los mitos que prevalecen en la educación: por ejemplo, el mito de que una segunda lengua se aprende de la misma manera que la lengua materna, es decir, sin conocimientos previos de gramática (argumento común en las escuelas de idiomas). La investigación ha demostrado que, cuanto más tarde se aprende la gramática, más activo se muestra el cerebro: en lugar de procesar la información gramatical únicamente con el hemisferio izquierdo, como ocurre con la lengua materna, quienes aprenden tarde procesan la misma información con ambos hemisferios. El cambio en la activación cerebral indica que el retraso en la exposición a la lengua hace que el cerebro use estrategias diferentes cuando procesa la gramática. Estudios confirmatorios muestran, además, que los sujetos que tuvieron esta activación bilateral en el cerebro enfrentan mucha más dificultad para utilizar la gramática de manera correcta (pp. 75-76).

Otro mito muy difundido se refiere a la disminución en la capacidad de aprendizaje que sufren las personas mayores. Los neurocientíficos saben que el cerebro sufre cambios significativos a lo largo de la vida; sin embargo, esta flexibilidad para responder a las demandas del medio ambiente permite a los investigadores entender mejor el papel de la formación de nuevas sinapsis en el cerebro adulto. Si bien hay una disminución en la conectividad del cerebro adulto, ésta no repercute en la reducción de la capacidad cognitiva. Por el contrario, los modelos de redes neuronales han mostrado a los investigadores que la adquisición de habilidades se deriva de cancelar algunas conexiones y, al mismo tiempo, reforzar otras. La capacidad del cerebro de mantenerse flexible, alerta, sensible y orientado a la búsqueda de soluciones se debe a su plasticidad durante toda la vida. En cierto momento, se pensó que sólo los cerebros infantiles eran plásticos; sin embargo, los datos encontrados durante las dos últimas décadas confirman que el cerebro mantiene su plasticidad durante toda la vida (pp. 86-93).

En cuanto al aprendizaje de las matemáticas, las investigaciones recientes en la psicología cognoscitiva y en la neurociencia cognoscitiva han demostrado que el cerebro involucra diferentes regiones para cumplir tareas matemáticas distintas; por ejemplo, los actos de identificar el 3 (escrito como numeral), el tres (escrito como una palabra) y una relación del tipo "3 es mayor que 1" activan áreas distintas del cerebro (p. 77). La discalculia (incapacidad de calcular), por ejemplo, se puede explicar en razón de la formación de redes neuronales desorganizadas que no permiten integrar estas tres regiones. De la misma manera, muchas de las dificultades en el aprendizaje de la matemática podrían ser explicadas en función de una falta de coordinación entre las zonas cerebrales involucradas.

Otro resultado que parece prometedor

–y que de alguna manera la intuición docente ya lo había caracterizado, pero que ahora tiene fundamentos neurológicos– es que el aprendizaje se ve afectado por factores emocionales como el autocontrol y los rasgos de personalidad. Si bien hace falta investigación neuropsicológica sobre la regulación emocional, los científicos han establecido los componentes biológicos de la expresión emocional. El sistema límbico, localizado dentro del cerebro, también llamado el "cerebro emocional", tiene conexiones con la corteza frontal. Cuando estas conexiones fallan, por tensión o miedo, el juicio social y el desempeño cognoscitivo se ven alterados. Con la investigación en curso, los neurocientíficos pueden demostrar que el procesamiento emocional puede impulsar o impedir el proceso educativo (pp. 80-82).

Otras investigaciones han mostrado que el sistema límbico también tiene conexiones con el lóbulo occipital, relacionado con las percepciones. Un hallazgo importante, encontrado gracias a las neuroimágenes, es que el acto de imaginar o de visualizar activa muchas de las áreas del cerebro que se ponen en acción con la percepción y que, por tanto, están también conectadas con el sistema límbico (pp. 82-83).

El estudio del cerebro no es una panacea para resolver todos los problemas de la educación, pero la comprensión del aprendizaje desde la perspectiva de las neurociencias permitirá, sin duda, a los especialistas en la educación tomar decisiones más informadas. Cuando tenemos la certeza de que una dificultad de aprendizaje se debe a un "problema en el cerebro", solemos considerar que su remedio no está en los recursos didácticos ni en los sistemas educativos. Sin embargo, gracias a los estudios de la neurociencia, se logra entender la separación de una habilidad en sus distintos pasos de procesamiento de la información y en sus módulos funcionales, y se pueden visualizar programas correctivos más eficientes.

DATOS DEL LIBRO

OCDE (2003)
La comprensión del cerebro. Hacia una nueva ciencia del aprendizaje
México, Santillana, 167 p.

Notas y noticias

CONGRESO CONJUNTO PME Y PME NA, HONOLULÚ

En Honolulú, Hawai, se llevó a cabo el congreso conjunto de las sociedades PME y PME NA. Como es costumbre en las reuniones de estas dos asociaciones, el programa estuvo compuesto por conferencias plenarias, presentaciones, presentaciones cortas, sesión de carteles y sesiones de grupos de trabajo y de grupos de discusión.

El lugar de la reunión ayudó a su éxito.

El contenido académico del congreso fue muy variado e interesante. La investigación en Matemática Educativa es un proceso dinámico que está constantemente en evolución y enriqueciéndose a través de las numerosas investigaciones que se llevan a cabo en diferentes lugares del mundo.

La temática general del congreso fue la relación entre la investigación en enseñanza de las matemáticas y la práctica docente. Por ello, comparado con los congresos de los años anteriores de estas asociaciones, destacó en esta reunión un aumento notable en las investigaciones relacionadas con la función del profesor en la clase de matemáticas en los distintos niveles educativos, con mayor énfasis en los niveles básicos.

El número de ponencias presentadas sobre el tema de la enseñanza de las matemáticas a nivel universitario aumentó también considerablemente, aunque todavía representan la proporción más pequeña de los distintos rubros de investigación. La temática de las investigaciones en este contexto se ha enriquecido mucho. En congresos anteriores, la mayor parte de las investigaciones en esta área tenía relación con la enseñanza del cálculo; en esta ocasión, aunque todavía se presentaron estudios muy interesantes relacionados con la enseñanza del cálculo, hubo varias presentaciones relativas al álgebra lineal, a la lógica matemática y a las ecuaciones diferenciales.

Respecto a la enseñanza del álgebra, un tema bastante tratado en estos congresos, también se notaron diferencias importantes. En particular, el número de trabajos relativos a la enseñanza del álgebra a nivel elemental, o como se le suele llamar últimamente, la pre-álgebra, aumentó considerablemente.

El congreso fue muy exitoso en términos de asistencia y mostró evidencias de la dinámica y el vigor que ha adquirido la disciplina a lo largo de los años.

ESCUELA DE VERANO DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Cada dos años, los investigadores de Didáctica de las Matemáticas en Francia se reúnen durante diez días en la Escuela de Verano de Didáctica de las Matemáticas por iniciativa de la Asociación para la Investigación en Didáctica de las matemáticas (ARDM, por sus siglas en francés). En ella, se proponen cursos y conferencias destinados a la enseñanza de alto nivel de los resultados y las problemáticas actuales en dicha disciplina. Los participantes trabajan en cursos y talleres, y tienen la oportunidad de discutir con los equipos de trabajo que han hecho contribuciones importantes.

La escuela de verano de este año tuvo lugar en Corps, Francia, del 19 al 29 de agosto. Las temáticas de trabajo elegidas en esta ocasión fueron el estudio de un problema abierto que trató sobre la generalidad y la especificidad de las teorías didácticas, el estudio de una problemática actual en la que se intentó dar respuesta a la pregunta ¿por qué es importante modelar el conocimiento? y el estudio de un problema curricular que abordó la enseñanza de la estadística. Además de estos temas, tratados en cursos y talleres, los participantes tuvieron la oportunidad de asistir a seminarios de investigación en los que tuvieron la oportunidad de tratar asuntos distintos a los incluidos en las temáticas generales y ampliar sus perspectivas.

Entre las teorías utilizadas para la modelación de conocimientos se presentaron los últimos avances teóricos en la teoría de situaciones, en la teoría antropológica, en la teoría cKc, todas ellas elaboradas por investigadores franceses y se dio un espacio para la presentación de la teoría APOE desarrollada por un grupo internacional de investigadores.

La discusión de la especificidad y generalidad de las teorías didácticas permitió hacer una comparación entre los conceptos fundamentales de las teorías en didáctica de las matemáticas y sus resultados y lo que ha sucedido en áreas tan diferentes como la enseñanza de la educación física y de la lingüística. Fue interesante escuchar a investigadores de otras disciplinas que se han servido de algunos de los conceptos desarrollados dentro del ámbito de la didáctica de las matemáticas para hacer contribuciones a sus disciplinas de estudio.

Dentro del tema de estadística se abrieron problemas que requieren estudio y que, si bien en algunos casos han sido bastante estudiados por investigadores de otros países, no han sido tratados con profundidad utilizando la metodología de la didáctica de las matemáticas francesa.

La reunión se desarrolló en un ambiente muy cordial que propició intercambios de opinión muy fructíferos. La participación de investigadores hispanoamericanos en esta ocasión fue, además, más nutrida que de costumbre. Chilenos, argentinos, mexicanos y españoles tuvieron oportunidad de exponer lo que se está haciendo en sus países y mostraron que en ellos se han hecho contribuciones de gran calidad a la didáctica de las matemáticas.

María Trigueros G.

EVENTOS POR REALIZAR

2004

- Coloquio "Los procesos de conceptualización en debate: homenaje a Gérard Vergnaud"
  28-31 de enero de 2004 cerca de París
  Informes: line.numa-bocage@libertysurf.fr
  Maryvonne Merri
  Secrétaire de l'ARDECO
  289 Boulevard CHAVE
  13004 Marseille, France
- ICMI 14 (International Commission on Mathematical Instruction)
  Estudio No. 14: "Applications and Modelling in Mathematics Education"
  13-17 de febrero de 2004, en Dortmund, Alemania
  Contacto: Profr. Dr. Werner Blum, Chair, International Programme Committee
  blum@mathematik.uni-kassel.de
  http://www.brocku.ca/mathematics/ICMI/study14/
- NCTM Annual Meeting
  21-24 de abril de 2004, en Filadelfia, Pensilvania, Estados Unidos
  Pre-sesión de investigación: Filadelfia, Pensilvania, 19-21 de abril de 2004
  http://www.nctm.org/meetings/philadelphia/index.htm
- ICME 10 (The 10th International Congress on Mathematical Education)
  4-11 de julio de 2004, en Copenague, Dinamarca.
  http://www.icme-10.dk/

- PME28 (28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education)
  14-18 de julio de 2004, en Bergen, Noruega
  http://www.pme28.org/
- IOWME (International Association for Women in Mathematics Education at ICME 10)
  4-11 de julio de 2004, en Copenague, Dinamarca
  Fecha límite: 31 de enero de 2004
  Email:. joboaler@stanford.edu y megan.clark@mcs.vuw.ac.nz

Árbitros 2002-2003

Nombre	Apellido(s)	Institución	País
Silvia	Alatorre	Universidad Pedagógica Nacional	México
Javier	Alfaro	ITAM	México
Alejandra	Ávalos	Escuela Normal Superior de México	México
Carmen	Azcárate	Universidad Autónoma de Barcelona	España
Pilar	Azcárate Goded	Universidad de Cádiz	España
Hugo	Balbuena	Secretaría de Educación Pública	México
Edgar	Becerra	Ceneval	México
Miguel Ángel	Campos	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Yolanda	Campos	Universidad Pedagógica Nacional	México
Cristóbal	Cárdenas	Universidad Iberoamericana	México
Guadalupe	Carmona	University of Purdue	Estados Unidos
Alicia	Carvajal	Universidad Pedagógica Nacional	México
José María	Chamoso	Universidad de Salamanca	España
José	Contreras Francia	University of Southern, Mississipi	Estados Unidos
Francisco	Cordero	Depto. de Matemática Educativa, Cinvestav	México

Nombre	Apellido(s)	Institución	País
José Luis	Cortina	Peabody College, Vanderbilt University	Estados Unidos
César	Cristóbal	Universidad de Quintana Roo	México
Eugenio	Díaz Barriga	Depto. de Matemática Educativa, Cinvestav	México
José Ángel	Dorta	Universidad de La Laguna	España
Fortino	Escareño	Subsecretaría de Educación Básica y Normal	México
Hugo	Espinosa	Depto. de Ed. Especial, SEP	México
Juan Manuel	Estrada Medina	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Daniel	Eudave	Universidad Autónoma de Aguascalientes	México
Catalina	Ferat Toscano	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Alfinio	Flores	Arizona State University	Estados Unidos
Ángel Homero	Flores Samaniego	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Dilma	Fregona	Universidad de Córdoba	Argentina
Irma Rosa	Fuenlabrada Velásquez	DIE-Cinvestav	México
Grecia	Gálvez	Ministerio de Educación	Chile
María Ester	Gambetta Chuk	Benemérita Universidad Autónoma de Puebla	México
Fredy	González	Instituto Pedagógico de Maracay	Venezuela
Marcela	González	ITAM	México
Hernán	González Guajardo	Universidad de Santiago de Chile	Chile

Nombre	Apellido(s)	Institución	País
José	Guzmán	Centro de Investigación y de Estudios Avanzados	México
Nelson	Hein	Universidad Regional de Blumenau	Brasil
Rubén	Hernández	ITAM	México
Fernando	Hitt	Centro de Investigación y de Estudios Avanzados	México
Glinda	Irazoque	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Richard	Kitchen	Universidad de Nuevo México	Estados Unidos
Eduardo	Lacués	Universidad Católica del Uruguay	Uruguay
Víctor	Larios	Universidad Autónoma de Querétaro	México
Juan	Leove Ortega	DIE-Cinvestav	México
Gonzalo	López Rueda	Escuela Normal Superior de México	México
Bertha Alicia	Madrid	Universidad Iberoamericana	México
Armando	Martínez	Universidad del Sur de California	Estados Unidos
Jorge	Martínez	Universidad Iberoamericana	México
Rafael	Martínez	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Rosa	Martínez	Universidad Nacional de Comahue	Argentina
Patricia	Martínez Falcón	Dirección General de Servicios de Cómputo Académico, UNAM	México
Rafael	Martínez	Universidad de Puerto Rico Panell	Puerto Rico
José Humberto	Mondragón	Universidad Iberoamericana	México

Luis	Moreno	Depto. de Matemática Educativa, Cinvestav	México
Marco Antonio	Murray Lasso	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Rocío	Nava	Instituto de Educación del Estado de México	México
Claudia	Navarro	Dirección de Educación Especial	México
Ana María	Ojeda	Centro de Investigación y de Estudios Avanzados	México
Asuman	Oktac	Cinvestav	México
Esnel	Pérez Hernández	Escuela Normal Superior de México	México
Ricardo	Quintero	Centro de Investigación y de Estudios Avanzados	México
Luis	Radford	Université Laurentienne	Canadá
Margarita	Ramírez V.	Secretaría de Educación Pública	México
Araceli	Reyes	ITAM	México
Ángel	Ruiz	Universidad de Costa Rica	Costa Rica
Luisa	Ruiz	Universidad de Jaén	España
Ana Isabel	Sacristan	Cinvestav	México
Jorge	Sagula	Universidad Nacional de Luján	Argentina
Irma	Saiz	Consejo Gral. de Educación-Corrientes	Argentina
Mariana	Sáiz Roldán	Universidad Pedagógica Nacional	México
María	Salett	Universidad Regional de Blumenau	Brasil
Gabriel	Sánchez	UNAM	México

Nombre	Apellido(s)	Institución	País
Ernesto	Sánchez	Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav	México
Vicente	Sánchez Moreno	Escuela Nacional de Maestros	México
Gabriel	Sánchez Ruiz	Universidad Nacional Autónoma de México	México
María Guadalupe	Savorío Morales	Escuela Nacional de Maestros	México
Mónica	Schulmaister	Secretaría de Educación Pública	México
Patrick	Scott	University of New Mexico	Estados Unidos
Ana	Serradó	Universidad de Cádiz	España
Diana	Solaris	Secretaria de Educación Pública	México
Raciel	Trejo Reséndiz	Escuela Normal Superior de México	México
Ana María	Vázquez Vargas	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Mónica	Villarreal	Universidad de Córdoba	Argentina
Francisco Miguel	Yáñez	Escuela Normal Superior	México
Gonzalo	Zubieta	Cinvestav	México

Política editorial

La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA es una publicación internacional arbitrada que ofrece un foro interdisciplinario para la presentación y discusión de ideas, conceptos y modelos que puedan ejercer una influencia profunda en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La revista aparece tres veces al año y publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática.

OBJETIVOS

EDUCACIÓN MATEMÁTICA se propone:

- Actuar como un foro de discusión internacional en lengua española en el que se discutan las problemáticas asociadas a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- Facilitar la comunicación entre investigadores y maestros de matemáticas.
- Promover la investigación en educación matemática.
- Alentar acercamientos multidisciplinarios.
- Buscar una comprensión profunda de la naturaleza, teoría y práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

LECTORES

EDUCACIÓN MATEMÁTICA está dirigida a investigadores y teóricos de la educación matemática, maestros en formación y en ejercicio, estudiantes de posgrado, diseñadores, evaluadores, directivos, administradores y cuadros técnicos vinculados con la educación matemática.

TEMÁTICAS

El contenido de EDUCACIÓN MATEMÁTICA se centra en los siguientes temas:

1. Investigaciones sobre educación matemática en el nivel básico
   1.1. Aprendizaje, cognición y desempeño de los alumnos
   1.2. Conocimientos, concepciones, formación y prácticas de los maestros
   1.3. Saber matemático
      1.3.1. Aritmética
      13.2. Geometría
      1.3.3. Probabilidad y estadística
      13.4. Preálgebra y álgebra
      1.3.5. Trigonometría
   1.4. Materiales, textos y otros recursos de apoyo a la enseñanza
   1.5. Diseño, desarrollo y evaluación curricular
   1.6. Uso de la tecnología
   1.7. Interacciones en el aula
   1.8. Evaluación
   1.9. Enseñanza experimental
   1.10. Educación de adultos
2. Investigaciones sobre educación matemática en el nivel preuniversitario
   2.1. Aprendizaje, cognición y desempeño de los alumnos
   2.2. Conocimientos, concepciones, formación y prácticas de los maestros
   2.3. Saber matemático
      2.3.1. Álgebra
      2.3.2. Geometría
      2.3.3. Probabilidad y estadística
      2.3.4. Cálculo
      2.3.5. Razonamiento matemático
   2.4. Materiales, textos y otros recursos de apoyo a la enseñanza
   2.5. Diseño, desarrollo y evaluación curricular
   2.6. Uso de la tecnología
   2.7. Interacción en el aula
   2.8. Evaluación
   2.9. Enseñanza experimental
3. Investigaciones sobre educación matemática en el nivel universitario
   3.1. Aprendizaje, cognición y desempeño de los alumnos

- 3.2. Conocimientos, concepciones, formación y prácticas de los maestros
- 3.3. Saber matemático
  - 3.3.1. Álgebra lineal
  - 3.3.2. Geometría
  - 3.3.3. Probabilidad y estadística
  - 3.3.4. Cálculo de una o varias variables
  - 3.3.5. Análisis
  - 3.3.6. Ecuaciones diferenciales
  - 3.3.7. Variable compleja
- 3.4. Materiales, textos y otros recursos de apoyo a la enseñanza
- 3.5. Diseño, desarrollo y evaluación curricular
- 3.6. Uso de la tecnología
- 3.7. Interacciones en el aula
- 3.8. Diagnósticos y evaluación
- 3.9. Enseñanza experimental

4. Estudios sobre la historia y la epistemología de las matemáticas y de la educación matemática
   - 4.1. Usos de la historia en la enseñanza y en la formación de maestros
   - 4.2. Análisis histórico y epistemológico de conceptos y procesos matemáticos
   - 4.3. Análisis de textos y acercamientos didácticos en las distintas épocas
5. Estudios sobre el sistema educativo
   - 5.1. Políticas
   - 5.2. Instituciones
   - 5.3. Asociaciones
   - 5.4. Evaluación
6. Estudios sobre la investigación en educación matemática
   - 6.1. Teorías y marcos referenciales
   - 6.2. Métodos de investigación
   - 6.3. Validación
   - 6.4. Instituciones y organizaciones
   - 6.5. Historia

Serán considerados para su publicación los artículos sobre estos temas que no excedan las 30 cuartillas a doble espacio (alrededor de 10 000 palabras), incluidas tablas, gráficas y figuras.

Los editores de EDUCACIÓN MATEMÁTICA considerarán sugerencias para la publicación de números especiales monotemáticos.

GUÍA PARA AUTORES

- La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica artículos de investigación y otras contribuciones en español.
- Todo manuscrito debe ir acompañado de una carátula que indique que el material es original e inédito y que no se encuentra en proceso de revisión para otra publicación. Debe mencionarse explícitamente si el material ha sido presentado previamente en congresos o publicado en otro idioma.
- Todos los manuscritos son arbitrados. El Comité Editorial se reserva el derecho de aceptar o rechazar un material o hacer sugerencias para su publicación.
- El Comité Editorial y Editorial Santillana tendrán los derechos de publicación de los artículos aceptados, para lo cual el autor debe firmar una *licencia de publicación no exclusiva* como la que se podrá encontrar en la página Web www.santillana.com.mx.
- Es responsabilidad del autor el contenido y la mecanografía del artículo. El Comité Editorial se reserva el derecho de modificar el título cuando lo considere conveniente, previa notificación al autor.

PREPARACIÓN DEL MANUSCRITO

- El manuscrito deberá estar preparado electrónicamente, en Microsoft Word o algún otro procesador compatible.
- Deberá tener un máximo de 30 cuartillas a doble espacio (alrededor de 10 000 palabras), incluidas notas, referencias bibliográficas, tablas, gráficas y figuras.
- Deberá evitarse el uso de siglas, acrónimos o referencias locales que no sean familiares a un lector internacional.
- Las referencias dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas (Freudenthal, 1991, pp. 51-53). Al final del artículo se debe incluir la ficha bibliográfica completa de todas las referencias citadas en el texto de acuerdo con el siguiente modelo:

  Ávila, A. y G. Waldegg (1997), *Hacia una redefinición de las matemáticas en la educación básica de adultos*, México, INEA.

Block, D. y M. Dávila (1993), "La matemática expulsada de la escuela", *Educación Matemática,* vol. 5, núm. 3, pp. 39-58.

Kaput, J. (1991), "Notations and Representations as Mediators of Constructive Processes", en Von Glasersfeld (ed.), *Constructivism and Mathematical Education,* Dordretch, Kluwer Academic Publishers, pp. 53-74.

- Si la lengua materna del autor no es el español, el artículo debe ser revisado por un experto en redacción y ortografía españolas antes de ser enviado a la revista.
- Las ilustraciones, diagramas y figuras deben incluirse en el texto electrónico y enviarse también en archivos separados. Para la publicación del artículo se debe incluir una copia impresa de alta resolución de las figuras, fotografías e ilustraciones.
- La impresión del artículo debe hacerse a doble espacio, por un solo lado de la hoja y con márgenes amplios. Las páginas deben ir numeradas de manera consecutiva.

ENVÍO DEL MANUSCRITO

- El manuscrito deberá ser enviado en original y tres copias, con los archivos electrónicos correspondientes, un resumen en español de entre 100 y 150 palabras, la versión en inglés o francés del resumen, y un mínimo de 5 palabras clave.
- El nombre, filiación y domicilio completo del autor o los autores (incluyendo código postal, teléfono, fax y dirección electrónica) deberán aparecer claramente escritos sólo en la carátula. Las copias deben contener el título del trabajo pero ninguna referencia al autor, para facilitar el proceso de revisión anónima.
- La carátula debe contener los siguientes puntos:
  - Título y tema central del artículo.
  - Explicación de por qué el artículo es importante en el campo y por qué debe publicarse en la revista.
  - Nominación de cuatro expertos reconocidos en el campo con los datos siguientes:

    - Nombre, título, institución, domicilio postal y electrónico, teléfono y fax.
    - Campo de especialidad.
    - Relación entre ellos y con el autor.
- Declaración de que el artículo contiene material original inédito y que no es enviado a ninguna otra revista para su publicación.

Las contribuciones deben enviarse a la siguiente dirección electrónica:
revedumat@yahoo.com

O a la siguiente dirección postal
Revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Apartado postal 86-521
México, D.F., 14391, México

Para mayores detalles, consúltese la **Guía del Autor** en www.santillana.com.mx

PROCESO DE ARBITRAJE

Todos los manuscritos recibidos están sujetos al siguiente proceso:

El Comité Editorial hace una primera revisión del manuscrito para verificar si cumple los requisitos básicos para publicarse en EDUCACIÓN MATEMÁTICA. Esta revisión interna toma entre 1 y 3 semanas, en este término se le notificará por correo electrónico al autor si su manuscrito será enviado a evaluadores externos. En el caso en el que el manuscrito no se considere adecuado para ser evaluado externamente, se le darán las razones al autor.

Las contribuciones que cumplan los requisitos básicos serán enviadas para un arbitraje ciego de 2 o 3 expertos en el tema. Este segundo proceso de revisión toma entre 2 y 3 meses. Después de este periodo, el autor recibirá los comentarios de los revisores y se le notificará la decisión del Comité Editorial (aceptado, aceptado con cambios menores, propuesta de cambios mayores y nuevo arbitraje, y rechazado). El autor deberá contestar si está de acuerdo con los cambios propuestos (si éste fuera el caso), comprometiéndose a enviar una versión revisada, que incluya una relación de los cambios efectuados, en un periodo no mayor de 3 meses.

Para mayores detalles, consúltese la **Guía de Arbitraje** en www.santillana.com.mx

NOTAS DE CLASE

EDUCACIÓN MATEMÁTICA considera para su publicación un número limitado de notas de clase, consistentes en propuestas originales de presentación de un tema, acercamientos novedosos que hayan sido probados en clase, lecciones, prácticas, ejercicios y, en general, cualquier producto de la experiencia en el aula que el profesor considere valioso compartir con sus colegas, siempre y cuando se incluya el soporte bibliográfico correspondiente. Las notas de clase no deberán exceder las 10 cuartillas a doble espacio (aproximadamente 4 000 palabras), incluyendo tablas, gráficas y figuras, y deberán enviarse en formato Word o RTF con los mismos lineamientos de presentación que los artículos. Las notas de clase se someten a un proceso de arbitraje interno y su contenido matemático y originalidad es revisado por un árbitro externo.

RESEÑAS

EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica también reseñas de libros especializados, libros de texto, software y tesis de posgrado relacionados con las temáticas de la revista. Estas reseñas no excederán las 5 cuartillas a doble espacio (aproximadamente 2 000 palabras) y deberán enviarse igualmente en formato Word o RTF. Las reseñas deben incluir la ficha completa del texto o software reseñado; el nombre, la filiación y el correo electrónico del autor; en el caso de las reseñas de tesis de posgrado, se incluirá también el grado, institución, director de tesis y fecha de defensa.