Versión electrónica ISSN: 2448-8089

Contenido

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

NOTAS DE CLASE

RESEÑAS

De libros

Dirección editorial: Antonio Moreno Paniagua
Editora responsable: Alicia Ávila Storer
Cuidado editorial: Susana Moreno Parada
Corrección de estilo: Ofelia Arruti Hernández
Diagramación: Moisés Arroyo Hernández
Fotomecánica electrónica: Gabriel Miranda Barrón

Certificado de reserva de derechos al uso exclusivo:
04-2002-111517075100-102

Certificado de licitud de contenido: 10070
Certificado de licitud de título: 12499

Fecha de edición: diciembre de 2004.

Miembro de la Cámara Nacional
de la Industria Editorial Mexicana.

Impreso en México/Printed in Mexico.

Editorial

La intención de considerar las problemáticas de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas desde perspectivas teóricas más globales, integradoras, que den cuenta en mayor medida del funcionamiento del sistema didáctico en su nivel macro y que asuman la dimensión social y cultural que lo cruza, ha dado lugar a una tendencia que se abre paso en el campo de la investigación en educación matemática. Ésta se puede observar en la decisión cada vez más frecuente de conjugar distintos acercamientos teóricos en el estudio de los procesos de enseñanza y de aprendizaje y en la emergencia de nuevas teorías que buscan recuperar la dimensión sociocultural de dichos procesos. El lector encontrará en el presente número de *Educación Matemática* distintas manifestaciones de ambos fenómenos.

Un ejemplo lo constituye la *teoría antropológica de lo didáctico* (TAD), cuya consolidación se manifiesta en la diversidad de problemáticas que son estudiadas hoy en día mediante los conceptos que ofrece. Esta teoría, cuyo antecedente es la transposición didáctica, aparece como una alternativa para articular los niveles micro y macro de lo didáctico. El objeto de esta teoría, explica M. Artigue al exponer un panorama sucinto pero apasionante de algunos desarrollos actuales de la didáctica de las matemáticas en Francia, no es el sujeto que aprende (como lo fue en los desarrollos iniciales de la didáctica, según el paradigma piagetiano) ni la situación didáctica (como lo es en la teoría de las situaciones didácticas), es la *institución* en la que están insertos. Los saberes, agrega, no existen sino a través de *prácticas* situadas institucionalmente. La investigadora ofrece un ejemplo donde el origen de las dificultades de aprendizaje de un grupo de alumnos se logra explicar al considerar ciertas diferencias entre su institución de origen y la institución a la que se incorporan, diferencias en la relación *institucional* con los conocimientos. Por su parte, L. M. Aguayo ofrece una introducción a algunos conceptos de la TAD y muestra su fecundidad al analizar prácticas de formación de maestros. El autor problematiza el deslinde entre el estudio de lo matemático y de lo didáctico, destaca deslizamientos de un ámbito al otro, identifica dificultades específicas en el tratamiento de cada ámbito, a la vez que introduce categorías sugerentes para el análisis.

La tendencia mencionada anteriormente puede apreciarse también en los esfuerzos por dar cuenta de manera más integral de la complejidad real del trabajo del maestro, teniendo en cuenta, además de su dimensión didáctica, su carácter histórico y social y, señaladamente, el carácter de construcción *in situ* de los conocimientos relativos a su profesión. Nuevamente, Artigue hace un breve esbozo de la evolución en la didáctica francesa de las conceptualizaciones sobre las prácticas del maestro, de figura transparente o prácticamente ausente en los inicios de la didáctica, a su creciente problematización. En respuesta a ello, algunos investigadores se han esforzado por ampliar los alcances de la teoría didáctica disponible y otros han apelado a los aportes de otras disciplinas sociales. Comenta, por ejemplo, algunas investigaciones que recurren a un *doble enfoque*, en el que se conjuga el análisis didáctico con el ergonómico (análisis de procesos cognitivos en situación de trabajo). Por su parte, A. Carvajal ofrece otro ejemplo en la misma dirección, al conjugar cierto nivel de análisis didáctico con un acercamiento de corte etnográfico para conocer características de las prácticas de enseñanza de cuatro maestras de primer grado. La autora logra hacer visibles ciertos *sentidos* que determinadas actividades asumen, tanto para los alumnos como para la maestra, sentidos que "no necesariamente se definen de manera directa por los contenidos matemáticos".

Así, la combinación de enfoques y la construcción de acercamientos teóricos más amplios e integradores son un signo visible de las investigaciones contemporáneas en educación matemática. No obstante, debe avanzarse con cautela: las investigaciones de calidad sobre aspectos específicos, que amplían y profundizan los alcances de las teorías *locales* disponibles, siguen siendo pertinentes y necesarias, la importación de conceptos de otras teorías, destinada a enriquecer nuestra comprensión de los fenómenos didácticos, también podría tener el efecto contrario, oscurecerla, si obramos con precipitación y sin el rigor requerido. Esto parece advertir Brousseau en el discurso que pronunció al recibir la medalla Felix Klein cuando, después de subrayar la necesidad de integrar la enorme cantidad de resultados sobre aspectos muy puntuales, dispersos en los acervos de la investigación en el campo, dijo: "[debe considerarse] la importancia que tiene para los miembros de la comunidad conjugar una mayor precisión en su trabajo con la ambición de miradas más generales, pero también la importancia de combatir medios mágicos o ideológicos con los cuales se le identifica con demasiado frecuencia".

El Comité Editorial

Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos?*

Michèle Artigue

Resumen: La enseñanza de la matemática atraviesa actualmente un periodo de crisis y debe afrontar diferentes desafíos. En este texto, me pregunto qué puede aportar la didáctica de la matemática hoy para pensar la solución de estos problemas y afrontar sus desafíos. Intento mostrar que las evoluciones recientes del campo didáctico son en ese sentido prometedoras; me refiero en particular a tres cuestiones: la evolución de los enfoques teóricos y la articulación que favorece entre los diferentes niveles de análisis en didáctica, la evolución de la mirada sobre los docentes y, por último, la evolución de la mirada sobre las herramientas de trabajo matemático y la sensibilidad creciente a las cuestiones de instrumentación.

Palabras clave: matemática, didáctica, teoría de las situaciones, teoría antropológica, praxeologías matemáticas, praxeologías didácticas, transposición didáctica, transición institucional, álgebra, prácticas docentes, formación de profesores, representaciones semióticas, tecnología, génesis instrumental, instrumentación, calculadoras simbólicas.

Résumé: L'enseignement des mathématiques traverse aujourd'hui une période de crise et doit faire face à différents défis. Dans cet article, nous nous interrogeons sur ce que peut apporter la didactique des mathématiques pour penser la solution des problèmes rencontrés et affronter les défis actuels. Nous essayons en particulier de montrer que les évolutions récentes du champ didactique sont de ce point de vue prometteuses, en abordant successivement trois points: l'évolution des cadres théoriques et l'articulation que cette évolution favorise entre les différents niveaux d'analyse didactique, l'évolution du regard porté sur l'enseignant, l'évolution enfin du regard porté sur les instruments du travail mathématique et la sensibilité croissante aux questions d'instrumentation.

Mots clés: mathématiques, didactique, théorie des situations, théorie anthropologique, praxéologies mathématiques, praxéologies didactiques, transposition

* Traducción del francés de Amalia Bergé.

didactique, transition institutionnelle, algèbre, pratiques enseignantes, formation des professeurs, représentations sémiotiques, technologie, genèse instrumentale, instrumentation, calculatrices symboliques.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la matemática, objeto de expectativas y de discursos poco coherentes con las decisiones políticas que se toman, sometida a las tensiones profundas que atraviesa el mundo de la educación, está hoy día en un periodo de desequilibrio.

Por ejemplo, si bien en nuestras sociedades parece ser cada vez más compartida la idea de que es necesaria una cultura matemática y científica sólida para que todos los individuos puedan ejercer sus responsabilidades ciudadanas, esas mismas sociedades se han organizado para funcionar sobre la base de una cultura matemática y científica poco profunda. Y todavía hoy día muchos de nuestros dirigentes políticos, económicos y culturales siguen declarando, casi con orgullo, no comprender nada de matemática.

Se afirma con frecuencia que la cultura matemática que necesita actualmente el ciudadano va mucho más allá del tradicional "contar" (parte integrante de la trilogía básica: saber leer, escribir y contar), pues esta cultura debe permitirle razonar en las situaciones de riesgo e incertidumbre, descifrar y saber analizar de manera crítica la avalancha de informaciones codificadas que recibe (Steen, 2002). Pero, al mismo tiempo, en muchos países se reduce la cantidad de horas dedicadas a la enseñanza de la matemática.

Paralelamente, el fenómeno de masificación de la enseñanza, que en numerosos países alcanza ahora a la universidad, obliga a hacer frente a nuevos públicos, menos sincronizados culturalmente con los valores tradicionales de la escuela, y a hacer frente a una mayor heterogeneidad. Además, independientemente de ese fenómeno, la evolución de las relaciones sociales entre niños, jóvenes y adultos desestabiliza las bases de las relaciones didácticas tradicionales, volviendo aún más problemática la posición del docente.

Al mismo tiempo, la institución escolar debe adaptarse a una evolución tecnológica cuyos tiempos son mucho más cortos que los suyos. Aun si es consciente de las nuevas posibilidades que la tecnología informática ofrece a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática, la escuela apenas si consigue sacar provecho de la integración de calculadoras y programas de geometría dinámica, aun cuando las tecnologías de la información y de la comunicación ya se han generalizado, modificando profundamente el contexto tecnológico.

Todos esos fenómenos se producen en un mundo donde la imagen de la ciencia se ha degradado fuertemente, donde ya no se asocian sistemáticamente el desarrollo del conocimiento científico y el progreso, y donde los estudios científicos atraen cada vez menos a los estudiantes. Se producen en un mundo cada vez más rico y productivo, pero en el que las desigualdades no se reducen y son, con la evolución de las tecnologías de la información y la comunicación, cada vez más visibles e insoportables. Se producen, en fin, en un mundo donde la educación se presenta como un valor fundamental, un derecho humano, pero donde, cada vez más, tiende a concebírsela como un mercado igual a otros y, se le concibe a someter los sistemas educativos a las normas de rentabilidad de los mercados.

La enseñanza de la matemática debe entonces remontar nuevos desafíos y hacer frente a nuevos problemas. La investigación didáctica, que ha tenido un desarrollo importante en el mundo entero en los últimos 30 años, ¿qué puede aportarnos para afrontarlos? Ésa es la pregunta que deseo abordar en este texto. Mi propósito no es trazar un balance esquemático de los avances de las investigaciones, sino mostrar cómo algunas evoluciones recientes del campo didáctico nos permiten hoy día abordar de manera renovada –y espero, más eficaz– estos desafíos. Me apoyo para ello, principalmente, en los trabajos que conozco mejor: los de la didáctica francesa, pero deseo subrayar que las evoluciones que voy a puntualizar superan ampliamente el marco de esta didáctica. Vemos en las obras didácticas, en formas diferentes y teniendo en cuenta la diversidad de las culturas didácticas, evoluciones similares en la investigación, donde sea que ésta se lleve a cabo.

En un texto, es necesario hacer elecciones y he hecho las siguientes: me centraré en un pequeño número de evoluciones, de avances que me resultan particularmente característicos:

- Una mejor articulación de lo microdidáctico y de lo macrodidáctico a través de enfoques teóricos parcialmente renovados.
- Una nueva mirada sobre ese actor esencial de la relación didáctica que es el docente.
- Una mayor atención a las herramientas materiales y simbólicas de la actividad matemática, a su papel en los aprendizajes y una mirada más lúcida sobre la evolución tecnológica y sus posibles efectos.

LA EVOLUCIÓN DE LOS ENFOQUES TEÓRICOS

De manera universal, la investigación en didáctica de la matemática se desarrolló inicialmente centrándose en el sujeto que aprende, rechazando el hecho de verlo como un simple receptor de conocimientos y saberes, preocupada más bien por tener en cuenta sus concepciones y el modo en que éstas modelan los aprendizajes y son transformadas por ellos; en una palabra: restituyendo a quien aprende una dimensión epistemológica. Esto constituyó, sin duda, un primer paso en el abordaje de la realidad que nos preocupa –la enseñanza de la matemática–, pero no fue más que un primer paso. En el clásico triángulo que vincula profesor, alumnos y saberes, la investigación introducía un desequilibrio evidente, centrándose en uno de los polos. Aun la didáctica francesa, en el seno de la cual la teoría de situaciones creaba *a priori* un foco de atención diferente, no escapó a ese desequilibrio ni a sus efectos, como veremos en seguida.

Efectivamente, en la teoría de las situaciones didácticas (cf. Brousseau, 1996, para una visión sintética), el objeto fundamental no es el sujeto que aprende, sino la situación en la que ese sujeto interactúa con otros y con la matemática. El análisis se organiza alrededor de la situación, ya que ésta –debido a las restricciones y potencialidades que ofrece al reencuentro con el saber– nos permite conocer lo que *a priori* puede ser aprendido. A través del juego que se ejerce sobre las variables didácticas de esta situación, se puede esperar -en un sentido por precisar- optimizar el aprendizaje. La teoría de situaciones didácticas nos ha permitido comprender mejor los mecanismos fundamentales del juego didáctico y construir ingenierías didácticas (Artigue, 1989, 2002) apoyadas en esta comprensión, en este conocimiento. Los trabajos pioneros de G. Brousseau sobre el aprendizaje del número en la escuela elemental ofrecen, sin duda, el mejor ejemplo, pero los ejemplos de ingenierías didácticas desarrolladas por los investigadores sobre la base de esta teoría son muchísimos, desde la escuela maternal hasta la universidad.

Muy rápidamente, la teoría de la transposición didáctica, iniciada por Y. Chevallard (Chevallard, 1985) contribuyó a reforzar este enfoque sistémico de la didáctica francesa, proporcionándonos, esta vez, los medios para cuestionar los saberes escolares, para interrogarnos sobre sus fuentes de legitimidad, sobre su economía y su ecología. Así como el alumno no podía ser visto como un experto "en miniatura", el saber escolar no podía ser considerado simplemente como una copia débil del saber sabio que lo legitimaba. El saber escolar obedecía a una lógica propia, vivía su vida según el designio de las instituciones didácticas; y a través de un proceso complejo -el de la transposición didáctica– nos mostraba en la vida real de las clases, objetos a menudo muy alejados de los que se suponía que eran, pero explicables y comprensibles para el investigador.

Aun si todas estas construcciones ayudaron a hacerse cargo de la complejidad de los sistemas estudiados y sus dinámicas –incluso mejor que otras en su época–, sus límites permanecían muy visibles. En el trabajo dentro de la teoría de las situaciones didácticas, la intensidad de la mirada puesta sobre los actores clave de la relación didáctica -alumno y docente- era profundamente asimétrica. Y la relación que se podía establecer entre los niveles microdidácticos de análisis del funcionamiento del alumno o de la clase y el nivel macrodidáctico de análisis del funcionamiento de los sistemas didácticos quedaba limitada.

En la didáctica francesa, el desarrollo de la teoría antropológica, también iniciada por Y. Chevallard (Chevallard, 1991), ha desempeñado, sin lugar a dudas, un papel decisivo en la articulación de lo micro y lo macrodidáctico, como lo ha hecho en otras culturas didácticas la transición hacia enfoques socioculturales inspirados en los trabajos de Vigotsky (Sierpinska y Lerman, 1996). Para este enfoque, el objeto de base no es el sujeto que aprende ni la situación didáctica, sino la institución en la que están insertos. Los saberes no existen sino como emergentes de prácticas[1] situadas institucionalmente. Esas instituciones, a través de las prácticas que reconocen y valoran, crean sistemas de valores y normas en relación a los saberes, y saber alguna cosa –las fracciones, el álgebra, las funciones– sólo puede tener un sentido relativo. Para una institución dada, es poder producir ciertos comportamientos, discursos acordes con las normas y valores institucionales, lo que Y. Chevallard llama "relaciones institucionales". En las instituciones, las expectativas relativas a los saberes, los papeles que se ejercen, dependen fuertemente de las posiciones institucionales ocupadas, la del alumno no es la del docente, y se diferencian sutilmente a partir de esas dos importantes categorías. Ciertamente, no se trata más que de un esquema trazado rápidamente pero, espero, suficiente para permitir comprender cómo la perspectiva didáctica se ve modificada. Ya no se concibe pretender entender los fenómenos de enseñanza y aprendizaje en sus relaciones mutuas sin tener en cuenta estas características de los sistemas estudiados.

Añadiré algo que me parece importante. Para nosotros, no se trataba de susti-

[1] Chevallard utiliza, para tener en cuenta estas prácticas, la noción de praxeología. Una praxeología matemática está formada por un tipo de tarea, por una técnica que permite resolver esta tarea, por una tecnología (discurso que sirve para explicar y justificar esta técnica) y, finalmente, una teoría que, pudiendo permanecer implícita, fundamenta esta tecnología.

tuir un paradigma por otro, sino más bien de integrar estas diferentes aproximaciones teóricas en una construcción global y coherente, donde cada una tenga su lugar, su función, y en donde se organicen de manera más eficaz las relaciones entre las diferentes centraciones posibles en las investigaciones didácticas y entre los diferentes niveles de análisis, del microdidáctico al macrodidáctico. Voy tratar de ilustrarlo mediante un ejemplo.

Un ejemplo ilustrativo

El ejemplo elegido es la investigación de una de mis estudiantes, B. Grugeon (Grugeon, 1995). Ella elaboró una tesis, defendida en 1995, que constituye sin duda un trabajo pionero en esta articulación. Esta investigación surgió de un problema institucional: el relativo fracaso de las clases de adaptación creadas en Francia para permitir que los mejores alumnos que salían de los liceos profesionales se unieran a la enseñanza general.[2] Los alumnos empezaban motivados, seguros de sí, pero en pocos meses muchos de ellos empezaban a fracasar y a perder confianza en sí mismos. El centro del fracaso era el álgebra. En el nivel de las explicaciones de la disfunción, se habían desarrollado razonamientos muy tentadores, como el siguiente: la orientación de esos alumnos hacia la enseñanza profesional se debía mayoritariamente a su fracaso en la enseñanza general; entonces, no era sorprendente que algunos años más tarde, a pesar de ciertos éxitos locales, fueran alumnos cognitivamente incapaces de seguir una enseñanza general. Inclusive las investigaciones en didáctica del álgebra podrían haberse puesto directamente al servicio de los argumentos en ese momento, puesto que permitían proponer a los alumnos un buen repertorio de tareas, de relacionar sus respuestas con categorías bien definidas y de interpretarlas en términos de concepciones y de niveles de conceptualización, para constatar la debilidad de estos últimos.

¿En qué ha cambiado en esta investigación el hecho de adoptar un enfoque antropológico?

Lo que este enfoque ha cambiado es la problemática de la investigación en sí misma, proyectando el problema encontrado en una categoría mayor de pro-

[2] Existen en Francia dos tipos de liceos: los de enseñanza general y tecnológica, donde se cursa el bachillerato general o tecnológico en tres años, y los de enseñanza profesional, que preparan primero en dos años para el BEP (diploma de estudios profesionales) y luego para el bachillerato profesional (dos años más). En los liceos profesionales, la enseñanza es mucho más práctica y ligada al aprendizaje de profesiones particulares.

blemas: los problemas de transición institucional, pues lo que estaba en juego en principio era la transición entre dos instituciones: el liceo profesional y el liceo de enseñanza general. La teoría antropológica nos conducía a postular que estas dos instituciones habían desarrollado relaciones institucionales diferentes con el dominio del álgebra, reconocido por ambas como dominio de enseñanza. Por eso, pasar de una institución a otra sólo necesita un cambio de cultura algebraica y se debía preguntar: ¿Cómo lo manejaba el sistema?

Las diferencias en las relaciones institucionales pueden ser de naturaleza diversa. Ciertos objetos pueden existir en una institución y no en otra. Por ejemplo, en la institución liceo profesional existen contenidos que involucran nociones de matemática financiera: fórmulas vinculadas al cálculo de tasas, de devoluciones de préstamos, que no están en el programa de la enseñanza general. Asimismo, en un nivel similar, ciertos saberes sobre las funciones están en el programa de enseñanza general y no en el de enseñanza profesional. Pero no son éstas las diferencias más problemáticas, sino las más visibles. Mucho más problemáticas son las diferencias de relación institucional sobre los objetos comunes, porque se piensa que se habla de la misma cosa, que se esperan las mismas cosas, en otros términos, que no cambia el contrato didáctico, pero no es así. Esas diferencias son la fuente esencial de los malentendidos de la transición institucional.

A ésta se une otra dificultad también inherente a las transiciones institucionales. Los conocimientos matemáticos que desarrollamos están fuertemente contextualizados –otros dirían situados–, asociados a ciertas experiencias matemáticas, a ciertos episodios de vida. Sólo una pequeña porción de esos conocimientos es descontextualizada bajo la forma de saberes. Los docentes lo saben bien, aun si no lo explicitan y ese conocimiento se manifiesta en las estrategias que desarrollan para ayudar a los alumnos a movilizar los conocimientos necesarios, evocando un momento, un episodio de la historia de la clase. Toda transición institucional impide estas estrategias de evocación, pues no hay más historia que compartir y el establecimiento de conexiones que permite la movilización de conocimientos -que pasa a estar bajo la responsabilidad del alumno– se vuelve mucho más aleatorio.

Postular la existencia de estos fenómenos antes de haber buscado identificarlos con precisión conducía a reproblematizar la investigación. ¿Era legítimo atribuir el fracaso en álgebra de estos alumnos en proceso de transición institucional solamente a sus debilidades cognitivas? Incluso si existían ciertas debilidades, ¿no podía plantearse la hipótesis de que este fracaso era debido, en parte, y reforzado, por las diferencias sutiles de la relación institucional? Generadoras de malentendidos, impedirían a los alumnos comprender las expectativas de los docentes y reinvertir sus conocimientos para hacerles frente y, en sentido inverso, impedirían a los docentes reconocer los conocimientos de sus alumnos y ayudarles a movilizarlos. ¿Y no podía pensarse que era más razonable y constructivo para entender y quizás para ayudar a resolver este problema institucional, investigar primero las diferencias de relaciones institucionales y sus efectos posibles en términos de malentendidos?

Ése fue el proyecto de investigación que emprendió B. Grugeon, enfocándose en el problema de la transición en álgebra entre el liceo profesional y el liceo general, y rechazando el hecho de caer en las primeras interpretaciones tan tentadoras. Para estudiar las relaciones institucionales con el álgebra desarrolladas por ambas instituciones, así como las relaciones personales hacia este dominio desarrolladas por los alumnos, ella construyó inicialmente una herramienta metodológica: una malla multidimensional de análisis de la competencia algebraica que se suponía, *a priori,* independientemente de tal o cual dependencia institucional. Construyó esa malla, apoyándose, ciertamente, en los múltiples trabajos existentes en didáctica del álgebra y esto la condujo a organizar esta estructura alrededor de cuatro dimensiones de naturaleza cualitativa con vistas a determinar las coherencias curriculares o las coherencias en el funcionamiento de los alumnos:

- Una dimensión aritmética-álgebra (con vistas a situar la posición en relación con la transición aritmética-álgebra).
- Una dimensión formación y tratamiento de expresiones algebraicas.
- Una dimensión funcionalidad del álgebra y racionalidad algebraica.
- Una dimensión articulación entre marcos y registros susceptibles de intervenir en el trabajo algebraico.

A estas dimensiones se añadió una dimensión cuantitativa más clásica. A cada dimensión se asociaron diferentes criterios, a cada criterio valores posibles, y la herramienta se fue volviendo más fina a medida que la investigación avanzaba. Esta malla de análisis, aplicada al estudio de las relaciones institucionales a través de diferentes corpus (programas, manuales, textos de evaluación, cuadernos de alumnos) confirmó la existencia de diferencias en las relaciones institucionales relativas a objetos comunes, y su poca visibilidad en los programas y textos oficiales. Asociada a una veintena de tareas de diagnóstico, sirvió también para estudiar las relaciones personales desarrolladas por los alumnos y para obtener, para cada uno de ellos, un perfil, poniendo en evidencia no solamente un grado de destreza en relación con las principales categorías de tareas algebraicas, sino también coherencias de funcionamiento que permiten identificar mecanismos posibles para su progreso en ese campo del álgebra. Esto mostró otro punto de vista mucho más constructivo sobre los alumnos. También puso en evidencia que, para estos alumnos, surgidos de la enseñanza profesional en la que la cultura algebraica estaba organizada principalmente alrededor del mundo de las fórmulas –y no como en el liceo general, alrededor del mundo de las ecuaciones y de las funciones–, eran posibles otros procesos de evolución que pasan especialmente por enriquecer el trabajo sobre las fórmulas, por volverlo técnicamente más complejo de manera progresiva y envolverlo en un pensamiento variacional y, en una segunda etapa, por relacionar este mundo de las fórmulas que les es familiar con el mundo funcional. Esto ha permitido realizar, en otra etapa de la investigación, una ingeniería didáctica mejor adaptada a estos alumnos y obtener, al cabo de dos años, resultados si no milagrosos, al menos sorprendentes.

Quiero señalar, para terminar con este ejemplo, que la herramienta metodológica construida fue adaptada a continuación al estudio de la transición *collège-lycée*[3] en álgebra, y que el modelo de competencia algebraica asociado ha sido considerado de interés por investigadores en inteligencia artificial. De allí han surgido nuevos proyectos: el proyecto PEPITE, que condujo a la elaboración de un test de diagnóstico informatizado y a la automatización parcial del diagnóstico, a continuación y más recientemente, el proyecto LINGOT, una de cuyas ambiciones es asociar una versión dinámica del test con familias de situaciones de aprendizaje en álgebra, parametrizables a nivel de variables didácticas de tareas, de medios de resolución y de control y también de interacción didáctica. Se proponen al docente familias de situaciones y elecciones de parámetros en esas familias –en términos del perfil diagnosticado– para ayudarlo en su tarea de frente a un público cada vez más heterogéneo (Artigue *et al.*, 2001; Delozanne *et al.*, 2002).

UNA NUEVA MIRADA SOBRE EL DOCENTE

El segundo punto que abordaré es el de la mirada sobre el docente. Como he dicho anteriormente, al comienzo el docente no fue considerado un actor problemático de la relación didáctica como lo fue el alumno. Éste ya no es el caso hoy día; se han multiplicado las investigaciones que tratan sobre los docentes,

[3] Secundaria-bachillerato.

sus concepciones y representaciones, sus modos de acción y de decisión, sus conocimientos y competencias. Síntesis como la de Thompson (1992) muestran que, en un comienzo, como en el caso de los alumnos, lo que estuvo en el foco de las investigaciones fue el estudio de concepciones, representaciones y creencias de los docentes, motivado por las dificultades encontradas en la articulación entre teoría y práctica, especialmente las dificultades encontradas para asegurar la difusión de construcciones didácticas elaboradas por los investigadores, aun teniendo pruebas de su eficacia en el terreno experimental. La hipótesis hecha en ese momento era que la distancia entre investigadores y docentes en relación con la matemática, su enseñanza y aprendizaje constituían un obstáculo para esta difusión. En Francia, el campo de la didáctica se ha inspirado en trabajos de psicología social (como Abric, 1987) para explicar la formación y la estructura de esas representaciones. Sin embargo, muy rápidamente los lazos entre representaciones y acción didáctica se revelaron como muy complejos y se planteó, entonces, la cuestión de los determinantes de la acción didáctica y del papel exacto que desempeñaban las representaciones de los docentes sobre la matemática y el aprendizaje entre esos determinantes. Otras investigaciones se desarrollaron con vistas a comprender el funcionamiento del docente en un sentido amplio, sus tomas de decisión en la clase y fuera de ella, y aquello que gobierna estas decisiones, con vistas a identificar las diferentes acciones profesionales del docente y los conocimientos que subyacen, con un objetivo más amplio: identificar los conocimientos y competencias necesarias para el ejercicio de esta profesión y el modo en el que se desarrollan (Margolinas y Perrin, 1997).

En las investigaciones francesas, los principales marcos teóricos existentes han ofrecido sus contribuciones. En la teoría de situaciones didácticas, se han explotado especialmente los trabajos sobre la estructuración del *milieu,* haciendo posible identificar diferentes posiciones y papeles para el docente. La estructuración inicial del *milieu* descendente ha sido completada con una estructuración ascendente, y ha sido posible tener en cuenta el trabajo del docente fuera de la clase en la dimensión de alguien que concibe situaciones de enseñanza (Margolinas, 2002). En la teoría antropológica, se ha realizado un trabajo sistemático para identificar las acciones profesionales del docente y encontrar los medios de describir, caracterizar y evaluar las praxeologías didácticas, definidas de manera paralela a las praxeologías matemáticas, en términos de tareas didácticas y técnicas didácticas que permiten realizar esas tareas, técnicas que permanecen bajo el control de tecnologías didácticas, esto es, de discursos que permiten explicar y justificar las técnicas y, en algunos casos, de teorías didácticas (Chevallard, 1999).

Por otra parte, se han desarrollado construcciones más específicas, como el "doble enfoque" desarrollado por A. Robert y J. Rogalski (Robert, 2001), doble enfoque porque se sitúa en la convergencia de dos campos: el campo de la ergonomía cognitiva, que analiza los procesos cognitivos en situación de trabajo, y el campo de la didáctica de la matemática. En este doble enfoque, el docente es considerado como un individuo que ejerce su oficio en un ambiente a la vez dinámico y abierto. El caracter dinámico no necesita, pienso, explicaciones; abierto significa que no se trata de un sistema dinámico aislado, sino de un sistema que tiene permanentes relaciones con su exterior. Como lo han mostrado los ergónomos, estas dos características –dinámico y abierto– hacen un trabajo profesional particularmente difícil y exigente en competencias.

El objetivo de este enfoque es contribuir al análisis y a la comprensión de las prácticas de los docentes, tanto desde el punto de vista de lo que pueden engendrar en términos de aprendizaje de los alumnos, como desde el punto de vista de las normas y coerciones profesionales a las que responden, en relación con el propio docente, no sólo en relación con sus alumnos.

Desde este doble enfoque, por ejemplo, las sesiones de clase son analizadas, desde un comienzo, según tres dimensiones: la primera se vincula con los contenidos trabajados en clase y la distribución de las actividades previstas entre el docente y los alumnos, la segunda, se refiere a las formas de trabajo de los alumnos durante las sesiones y la tercera concierne a la interacción con el docente. Estos análisis conducen a una lectura de las prácticas del docente según dos componentes: el componente "cognitivo", que resulta del análisis de lo que es planificado por el profesor para actuar sobre los conocimientos matemáticos de los alumnos, y el componente de "mediación", que informa sobre la organización del docente en su clase a propósito de las mediaciones entre él y los alumnos o entre los alumnos. A continuación, a fin de obtener las regularidades en las prácticas de un mismo profesor o entre profesores y de precisar el margen de maniobra realmente empleado por los docentes, se consideran otros dos componentes: el componente "social", relativo a las restricciones institucionales y sociales que pesan sobre las prácticas docentes, y el componente "personal", ligado a las concepciones del profesor en cuanto al saber y a su oficio, su tolerancia en materia de correr riesgos, su necesidad de confort... Finalmente, los diferentes análisis se cruzan para reconstruir lo que se hace visible en las sesiones de clase del sistema complejo y coherente que constituyen las prácticas de los profesores estudiados.

Es evidente que estos trabajos de investigación que nos brindan un acceso más realista al trabajo del docente influyen en nuestra percepción de la relación entre teoría y práctica, y de la formación, elemento crucial en el establecimiento de esa relación. El docente es considerado menos como un guía sabio o como un ingeniero de la educación, y más como un profesional que trabaja en ambientes complejos y cambiantes a los que debe adaptarse sin cesar. Las acciones de formación que se apoyan en estos trabajos se tornan más respetuosas de la realidad de las prácticas, de sus modos de elaboración y de evolución, de las restricciones diversas del oficio del docente. La evolución de las prácticas es vista como un proceso de largo plazo que debe tener en cuenta las coherencias de cada docente, su estilo. La distancia entre lo antiguo y lo nuevo es visto en la dinámica de esta evolución como una variable crítica.

Como en la parte precedente, me gustaría ilustrar este discurso general con algunos ejemplos. He elegido dos. Se trata de dos tesis recientemente defendidas dentro de mi grupo de investigación, el equipo DIDIREM, uno de cuyos polos fuertes es la investigación sobre las prácticas docentes. Se trata de las tesis de E. Roditi (Roditi, 2000) y de A. Lenfant (Lenfant, 2001).

La tesis de E. Roditi: el análisis de prácticas de docentes comunes

Esta tesis trata sobre el análisis de prácticas de docentes comunes y se apoya en el doble enfoque mencionado anteriormente. El tema estudiado es la multiplicación de números decimales; la investigación se llevó a cabo en un momento en el que un cambio curricular hizo pasar la enseñanza de esa multiplicación del último año de la enseñanza elemental al primer año de la enseñanza secundaria. En un primer momento, E. Roditi estudia las cuestiones didácticas vinculadas a la enseñanza de ese tema, apoyándose en las numerosas investigaciones existentes en ese dominio, y analiza varias ingenierías didácticas, producto de la investigación sobre la extensión del campo de números enteros al de los decimales, que constituyen recursos para esos aprendizajes. Roditi estudia y compara, a continuación, las prácticas de cuatro docentes experimentados que utilizan el mismo manual y trabajan en ambientes escolares comparables. El enfoque utilizado, como lo hemos señalado antes, conduce a postular la coherencia de esas prácticas y a tratar de identificarlas.

El análisis llevado a cabo revela restricciones habituales fuertes ligadas a las prescripciones de la institución escolar y al ejercicio del oficio. Estas restricciones explican, sin duda, la gran convergencia de los cuatro proyectos observada en el nivel global y contribuyen, ciertamente, al débil impacto que han tenido sobre esos proyectos los trabajos didácticos existentes. Pero la investigación muestra también que, más allá de esas restricciones, subsiste un margen de maniobra que los docentes revisten de una lógica personal que explica, más localmente, la diversidad de las prácticas observadas. Los escenarios previstos se distinguen por la estrategia de enseñanza, tanto por las tareas propuestas como por la gestión de la institucionalización. Según los docentes, las actividades de los alumnos varían sensiblemente entre objetivos de construcción de conocimientos y de simple aplicación de técnicas; sus intervenciones en clases varían tanto como sus interacciones con el profesor.

Pero sean cuales sean las diferencias identificadas, se nota en el trabajo de los cuatro docentes observados una organización didáctica de sesiones de clase constituidas por episodios cortos, de modo que cada uno permite marcar lo que E. Roditi llama un éxito de etapa. Una organización tal, que parece totalmente estable para esos docentes, se sitúa en las antípodas de las organizaciones didácticas elaboradas por los investigadores en el marco de las ingenierías didácticas mencionadas anteriormente, y no nos sorprendemos de verlas tan poco explotadas. La distancia entre las dos organizaciones didácticas es demasiado grande, la asimilación es imposible. Otro fenómeno absolutamente interesante, revelado por este estudio tan minucioso, es la cantidad de incidentes que intervienen durante las sesiones. E. Roditi le da a esta noción un sentido amplio: llama *incidente* a todo suceso en el que interviene una distancia entre las expectativas de la enseñanza y la realidad de la clase y esto, incluso si esa distancia es esperada por el docente (por ejemplo, cuando plantea una pregunta y espera ver aparecer tal o cual respuesta errónea), casi conscientemente provocada. El promedio de tales incidentes es del orden de 40 incidentes por sesión de clase. Lo que nos interesa de ese número, más que su valor, es que nos muestra la incertidumbre asociada al ejercicio de ese oficio y la importancia que revisten las tomas de decisión en la acción, características que han sido, durante mucho tiempo, subestimadas por la investigación didáctica, aun habiendo efectos evidentes en la relación entre teoría y práctica.

La tesis de A. Lenfant: la construcción de la profesionalidad docente en álgebra

La tesis de A. Lenfant trata sobre el paso de la posición de estudiante a la posición de docente y el desarrollo de competencias profesionales entre docentes debutantes. Ha sido elegido un dominio matemático, el álgebra elemental, por varias razones: su importancia curricular y el hecho de que la entrada en el álgebra supone dificultades conocidas por ser particularmente resistentes, la riqueza de las investigaciones didácticas en este dominio, el hecho de que los docentes están todos –mal o bien– involucrados en este aprendizaje. La transición se estudia a través del seguimiento de profesores residentes durante su año de formación profesional en el IUFM,[4] año durante el cual tienen a su cargo seis horas por semana de clases. Mediante este estudio se hizo el seguimiento de profesores residentes de diferentes niveles –de primero a quinto año de la escuela secundaria–, pero la tesis se centra en cuatro de ellos: docentes que ejercen su residencia en el tercer año de la escuela media, esto es, el primer año de liceo. El estudio tiende a responder, en particular, a las siguientes preguntas: ¿Cómo construir y evaluar la visión de la apuesta de la enseñanza del álgebra, su visión de los alumnos y las dificultades encontradas por estos últimos? ¿Cómo elaboran los docentes sus estrategias de enseñanza y cuáles son sus prioridades en este dominio?

En el plano teórico, la investigación se apoya en el doble enfoque didáctico y ergonómico ya citado, y en el enfoque antropológico. Para sus análisis, se apoya, además, en una malla multidimensional de análisis de competencias profesionales en álgebra, una elección metodológica inspirada en el trabajo de B. Grugeon. Esta malla, organizada alrededor de las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica, no se pensó como un instrumento normativo que resume las expectativas de la formación profesional, sino más bien como una referencia para el análisis que permite centrar la atención en el estudio de concepciones de profesores residentes y en ciertos puntos clave de sus prácticas identificados por las investigaciones didácticas:

- Ruptura aritmética-álgebra (estatuto de las letras y de las expresiones, estatuto de la igualdad), sentido de las escrituras algebraicas… (dimensión cognitiva).
- Conocimiento e interpretación de documentos curriculares, utilización hecha de recursos didácticos existentes, de tecnologías informáticas… (dimensión didáctica).
- Representación del álgebra y de su funcionalidad matemática… (dimensión epistemológica).

[4] IUFM: Instituto Universitario de Formación Profesional. Los IUFM aseguran la formación profesional inicial de los docentes que son elegidos para la enseñanza secundaria a través de un concurso nacional, que se prepara después de haber obtenido una licenciatura en matemática en la universidad.

Una vez más, la investigación ha puesto de relieve regularidades importantes en la constitución y evolución de la relación de los profesores residentes estudiados con el álgebra:

- Una visión inicial del álgebra ligada al álgebra universitaria de estructuras –propia de la posición de estudiante– y un establecimiento, en general rápido, de la postura de docente, con un estilo de enseñanza que ya se percibe.
- La pronta sensibilización a ciertos errores de los alumnos, pero una progresión muy lenta en la elaboración de sistemas de interpretación de esos errores y una sensibilidad más difícil de armar para con los problemas ligados al sentido de las escrituras algebraicas.
- Al comienzo, una visión limitada sobre la funcionalidad del álgebra, centrada en el mundo de las ecuaciones, que parece difícil de superar.
- Una organización dinámica bien pensada y relativamente rica del trabajo algebraico en sus competencias más técnicas, pero dificultad de articular lo antiguo y lo nuevo, actividades introductorias e institucionalización del curso, de entregar verdaderas responsabilidades a los alumnos y escasísima utilización de calculadoras y programas...

Sin embargo, la investigación muestra igualmente una cierta diversidad de los perfiles profesionales y de sus evoluciones. Varios factores contribuyen a explicarlo, especialmente las condiciones de trabajo de los profesores residentes, su nivel de reflexión, sus representaciones sobre la matemática y a su enseñanza, ciertos incidentes críticos que, finalmente, tienen lugar en sus clases. Se ve entonces que se desprenden de este estudio cuatro perfiles de docentes con sus propias características y coherencias. Por último, esta investigación, a través del dispositivo experimental utilizado para estudiar las reacciones y análisis de los profesores residentes analizados, cuenta con extractos de videos realizados en sus respectivas clases, poniendo de relieve la potencia de esos objetos para la formación.

En cierto sentido, la evolución de nuestra mirada sobre la enseñanza es lo que ha motivado estas investigaciones, pero desearía resaltar, para concluir esta parte, cuánto han aportado estas investigaciones, modificando nuestra mirada sobre los docentes, sobre las relaciones entre teoría y práctica y sobre la formación de docentes.

LA ATENCIÓN CRECIENTE PUESTA EN LAS HERRAMIENTAS DE LA ACTIVIDAD MATEMATICA Y EN LOS PROCESOS DE INSTRUMENTACIÓN ASOCIADOS

El tercero y último aspecto que deseo abordar es el de la atención creciente a la cuestión de las herramientas de la actividad matemática y a sus efectos.

El estudio de las investigaciones en didáctica de la matemática muestra, en efecto, un aumento en la atención puesta en las herramientas materiales y simbólicas de la actividad matemática. La evolución de los enfoques teóricos hacia los paradigmas de naturaleza sociocultural y antropológica sin duda no son extraños a esto (Sierpinska y Lerman, 1996); tampoco lo es la evolución tecnológica que conduce a la enseñanza de las matemáticas a herramientas cada vez más sofisticadas. Esta atención se manifiesta de diferentes maneras. En los trabajos franceses de didáctica de los diez últimos años, las investigaciones de R. Duval (Duval, 1995) sobre las representaciones semióticas y los trabajos de Y. Chevallard y M. Bosch (Bosch y Chevallard, 1998) sobre los ostensivos son, sin duda, los ejemplos más significativos, y las construcciones teóricas que les fueron asociadas han sido ampliamente retomadas por los investigadores.[5] Las representaciones semióticas no están para representar ni comunicar una conceptualización ya presente, sino que son constitutivas de la conceptualización. Duval expresa esto de manera muy sintética diciendo que no hay “noesis sin semiosis”. En los trabajos de Chevallard y Bosch, sin embargo, no es la cuestión de la conceptualización lo que está primero, sino la dialéctica entre lo ostensivo y lo no ostensivo.

Precisemos qué se entiende por estos términos. Los objetos matemáticos son objetos no ostensivos: no se los puede ver, manipular, tocar, en el sentido físico de estos términos. El trabajo sobre estos objetos pasa, en efecto, por la manipulación de ostensivos de naturaleza diversa: escrituras simbólicas, dibujos y esquemas, lenguaje natural, gestos, artefactos diversos... Las relaciones entre ostensivos y no ostensivos son relaciones dialécticas: los no ostensivos surgen de praxeologías matemáticas que ponen en juego los ostensivos, pero, en sentido inverso, conducen la manipulación de estos ostensivos y les dan sentido.

[5] Señalemos que esta atención a las herramientas del trabajo matemático no es exclusiva, tal como lo hemos señalado anteriormente, de la didáctica francesa y, por citar solamente un ejemplo, nos parece bien ilustrada por los trabajos actuales de ciertos investigadores italianos que evocan a Vigotski y las teorías de la actividad, poniendo el acento en la función de mediación semiótica de estas herramientas (cf. por ejemplo Bartolini *et al.*, 1999). Podemos también mencionar la teoría de las funciones semióticas, desarrollada por Godino (Godino, 2002).

Por supuesto, lo anterior indica claramente que la atención a las herramientas materiales y simbólicas del trabajo matemático es necesaria para el alumno y/o para el que enseña, cualquiera que sea el ambiente de trabajo donde sea considerado. Pero quisiera evocar, en particular, la manera en la que esta atención nos condujo a repensar las cuestiones de integración de entornos informáticos en la enseñanza de las matemáticas y a desarrollar un punto de vista de estas cuestiones, conocido actualmente con el nombre de enfoque instrumental (Guin y Trouche, 2002; Artigue, 2002).

Este punto de vista surge de un cierto número de investigaciones dirigidas a la integración en la enseñanza secundaria de entornos de cálculo formal, en principio, según la forma de programas de computación (en particular, el programa DERIVE), a continuación bajo la forma de calculadoras simbólicas, en la década de 1990, a pedido del Ministerio de Educación Nacional. Como he explicado antes (Artigue, 2002), las primeras investigaciones llevadas a cabo habían puesto en evidencia un claro contraste entre el discurso sostenido y publicado de las potencialidades de estos programas para el aprendizaje de las matemáticas, por una parte, y por otra, la realidad del funcionamiento de las clases observadas, aun cuando se trataban de clases de expertos. Una constante en los discursos había llamado particularmente nuestra atención: la afirmación de que el trabajo en esos ambientes (de trabajo) liberaba al alumno de las tareas técnicas, favoreciendo un trabajo en matemática de naturaleza conceptual. Esta afirmación era contradictoria con las observaciones realizadas, que mostraban, por una parte, que el trabajo técnico, si bien modificado, no desaparecía y, por otra parte, que la actividad matemática en estos ambientes obedecía a una economía que no favorecía necesariamente a un trabajo que se podía calificar de conceptual, esto por diversas razones. La diversidad y el costo débil de las acciones posibles, comparado al costo cognitivo de la interpretación de las retroacciones del software (programa), podían favorecer métodos por ensayo y error poco estructurados; la descomposición de acciones matemáticas en una sucesión de comandos podía esconder su coherencia global; la utilización reducida que los alumnos tenían de estos programas no permitía, en general, una familiaridad suficiente con estas herramientas y, cuando se les había dado una cierta autonomía, diversos problemas técnicos venían a perturbar la actividad matemática de muchos de ellos.

Esto es lo que nos ha conducido, en el segundo proyecto llevado a cabo en clases del liceo en las que los alumnos contaban durante un año con calculadoras TI92, a interesarnos particularmente en las relaciones entre el trabajo técnico y conceptual, por una parte, y la instrumentación de esas herramientas, por otra.

En el plano teórico, esa investigación se apoyó, a la vez, en la teoría antropológica de Y. Chevallard, que sostuvo el marco general, y en las investigaciones en ergonomía cognitiva de investigadores como P. Rabardel (Rabardel, 1995), que han ayudado a considerar la complejidad de los procesos de instrumentación. En efecto, esos investigadores que estudiaron los aprendizajes en situación de trabajo tienen, por encima de los investigadores en didáctica de la matemática, la costumbre de trabajar sobre aprendizajes, situarse en entornos tecnológicos complejos e integrar especialmente componentes informáticos. Por tanto, han sido llevados a pensar las cuestiones de instrumentación, distinguiendo marcadamente el artefacto (en este caso, la calculadora) del instrumento que utilice tal o cual actor –aquí el alumno o el docente–, a través de un proceso de génesis instrumental complejo que ocurre especialmente por la elaboración o la apropiación de esquemas de acción instrumentada.

Los estudios precisos que se han llevado a cabo sobre la determinación de límites (Trouche, 1996) o sobre las variaciones de funciones (Defouad, 2000) han mostrado la complejidad insospechada de esta génesis instrumental y la imbricación de conocimientos técnicos sobre el artefacto y los conocimientos matemáticos que ponía en juego. Han mostrado también que una buena parte de esos conocimientos son ajenos al currículo oficial, en el que, aun si figura el uso de calculadoras y programas, los contenidos y valores permanecen definidos en relación con el ambiente cultural tradicional del trabajo matemático en la escuela: el ambiente de "lápiz y papel". Para comprender este fenómeno y la medida de sus consecuencias didácticas, un enfoque antropológico como el desarrollado por Chevallard, es muy valorado, pues, según ese punto de vista, las cuestiones de normas y valores y las cuestiones de legitimidad son vistas como esenciales. Son consideradas en sus dependencias institucionales y, así, se ve aparecer una cuestión esencial: la de la legitimidad real de la tecnología informática. Ciertamente estas tecnologías son social y científicamente legítimas, pero en el nivel de la escuela, esas legitimidades no son suficientes para asegurar su integración, pues no se busca que la enseñanza forme alumnos aptos para funcionar matemáticamente con esas herramientas –lo que sería el caso, por ejemplo, de una formación de carácter profesional– se busca mucho más. Efectivamente, lo que se espera en esencia de esas herramientas es que permitan aprender más rápidamente, mejor, de manera más motivante, una matemática cuyos valores son pensados independientemente de esas herramientas. Lo que se necesita, entonces, es asegurar la legitimidad pedagógica de estas herramientas, y eso es muy distinto de asegurar su legitimidad científica o social. Esto, como hemos mostrado, genera un círculo vicioso que encierra la formación en un esquema de militancia y proselitismo poco adecuado para otorgar herramientas que permitan a los docentes hacer frente a las dificultades que inevitablemente van a encontrar, que les permitan identificar las necesidades matemáticas y técnicas de las génesis instrumentales y responderlas eficazmente; poco adecuado también para permitirles la necesaria superación de una visión ingenua de la tecnología como remedio a las dificultades de la enseñanza.

El enfoque antropológico también nos ha sido útil por el acento que pone sobre las instituciones. Aun si nos interesamos en el aprendizaje de los alumnos, no podemos hacer abstracción del hecho de que estos aprendizajes se desarrollan en instituciones particulares y son moldeados por ellas. Las génesis instrumentales personales no pueden ser analizadas sin tener en cuenta la gestión institucional que se hace de la actividad instrumentada dentro de la clase. Las observaciones y análisis que hemos llevado a cabo han mostrado las debilidades de esta gestión institucional y las consecuencias de esas debilidades en el ámbito de las génesis personales desarrolladas por los alumnos. Han mostrado también que, mientras estemos conscientes de estos problemas y ayudemos a los docentes a asumir su papel necesario en esta gestión institucional de la actividad instrumentada, obtenemos resultados sensiblemente diferentes.

Finalmente, el enfoque epistemológico nos ha sido útil al ayudarnos a repensar la relación con la técnica y superar las oposiciones habituales entre lo técnico y lo conceptual. Partiendo del principio de que una técnica posee un valor pragmático que corresponde a las potencialidades que ofrece para producir resultados, y también un valor epistémico, en el sentido de que nos ayuda a comprender los objetos que pone en juego. Nos interesan las modificaciones introducidas en el vínculo entre esos dos valores debido a la introducción de herramientas informáticas tales como calculadoras y programas. Estas modificaciones, por lo general, van en el sentido de un debilitamiento del valor epistémico y de un refuerzo del valor pragmático.

Tomemos un ejemplo simple para ilustrar este fenómeno: el de la división euclideana de enteros. Su valor epistémico es indiscutible. Al repetir el acto de la división, se va a percibir la necesaria periodicidad del desarrollo decimal de números racionales y se va a empezar a comprender la razón. Si se utiliza una calculadora, la “inmediatez” del resultado obtenido vuelve invisible el valor epistémico de la técnica de la división. Para restaurar este valor, que nos parece esencial para la legitimación de una técnica en la enseñanza, se debe operar sobre otros mecanismos. Se podrá, por ejemplo, sacar provecho del refuerzo del valor pragmático, para producir en un tiempo muy corto una gran cantidad de comienzos de desarrollos decimales y emitir conjeturas, y se podrá, fundamentalmente, sacar provecho de ciertos redondeos o de la cantidad limitada de dígitos que muestra la máquina para cuestionar las primeras convicciones adquiridas y plantear un verdadero trabajo matemático. Y quizá será posible, gracias a la máquina, ir mucho más lejos, interrogarse sobre la longitud de los periodos, las invariancias constatadas por un denominador dado...

Hemos hecho la hipótesis de que los docentes, aun si no lo explicitan, perciben el valor epistémico de las técnicas de lápiz y papel y perciben también la reducción de este valor inducido por la implementación informática de las técnicas. La investigación debe entonces encontrar los medios de reforzar, mediante la elección de situaciones adecuadas, el valor epistémico de las técnicas instrumentadas, si desea contribuir a asegurar su legitimidad dentro de las instituciones educativas. Esto conduce a menudo, como lo hemos mostrado, a construir situaciones que no tengan su equivalente en lápiz y papel y, por tanto, son menos imaginables. A esto contribuye también el acompañar ese trabajo sobre las técnicas instrumentadas con un discurso tecnológico (en el sentido praxeológico de Chevallard), pero no un discurso puramente descriptivo, sino un discurso que ayude a avanzar en la comprensión matemática de los objetos subyacentes.[6] Todo esto está muy lejos de ser una tendencia natural en la enseñanza, como lo hemos mostrado, no solamente en lo que se refiere a los programas de cálculo formal, sino también, por ejemplo, en lo que concierne a las planillas de tipo Exel, programas que comparten con los precedentes la particularidad de no haber sido concebidos en un principio como productos destinados a la educación.

No insistiré más sobre esta dimensión, pero me gustaría haber convencido al lector, o al menos haber empezado a convencerlo, de que una vez más la evolución de la investigación didáctica en este dominio (para un metaanálisis de las problemáticas de los trabajos concernientes a las tecnologías informáticas en las investigaciones en educación matemática, consúltese Lagrange *et al.*, 2001) es una evolución que nos permite hoy día aproximar las cuestiones difíciles de integración de estas tecnologías en la enseñanza de la matemática, de manera renovada y, esperamos, más eficaz.

[6] Remitimos al lector a la cita (Guin y Trouche, 2002) antes mencionada, donde estas ideas son desarrolladas y ejemplificadas.

CONCLUSIONES

Al comienzo de este texto, resaltaba que la enseñanza desestabilizada de la matemática en la actualidad debe hacer frente a diversos problemas y desafíos, y me preguntaba sobre la capacidad de la investigación en didáctica para proveer armas para enfrentar esos desafíos. Desde mi punto de vista, esta capacidad es real y algunas direcciones en las que evoluciona la investigación son promisorias desde esta perspectiva. Obligada a elegir entre la gran cantidad de investigaciones y de evoluciones, he privilegiado tres direcciones: la evolución de los marcos teóricos, la evolución de las miradas sobre el docente y la evolución de las miradas sobre las herramientas de la actividad matemática.

La primera dirección es sin duda esencial, pues ya sea implícita o explícitamente, las aproximaciones teóricas tienen influencia sobre las problemáticas de investigación, sobre la manera en que estas problemáticas son trabajadas y, por tanto, sobre los resultados que la investigación es capaz de producir. Desde ese punto de vista, he deseado destacar que la evolución de los marcos teóricos, desde un constructivismo cognitivo dominante por largo tiempo hacia aproximaciones antropológicas y sociocuturales, permite un mejor acceso a la complejidad de la realidad didáctica, facilitando una mejor articulación de las diferentes escalas de análisis de los fenómenos necesariamente en juego en el trabajo didáctico, de lo micro a lo macrodidáctico.

La segunda dirección también es esencial por otras razones. Ya nadie duda, hoy día, de que los docentes son el eslabón clave de cualquier evolución de la enseñanza de la matemática. No es por azar que uno de los últimos estudios planteados por la Comisión Internacional de Enseñanza de la Matemática concierne al docente y a la formación de docentes. Pero considerar al docente como un elemento clave del sistema no es suficiente si ese docente no es problematizado como verdadero actor, si no se intenta comprender sus prácticas y aquello que las determinan, las restricciones a las que está sujeto y sus márgenes de maniobra, los conocimientos disciplinares y otros que hacen su competencia profesional y el modo en que se construyen. En ese sentido, también me parece que las evoluciones recientes de la investigación didáctica son particularmente prometedoras.

La tercera dirección, finalmente, es la de las herramientas. Ésta también se impuso, naturalmente, de alguna manera. Por mucho tiempo, la atención prestada a estas herramientas –pese a ser esenciales para el trabajo matemático, como en cualquier otro trabajo– ha permanecido marginal. Lo esencial estaba más allá, en el trabajo mental de los alumnos, en el estudio de sus concepciones y errores. Ya no es ése el caso hoy día y, como lo he mencionado, se puede ver el efecto de una doble evolución: evolución de los enfoques teóricos, evolución tecnológica.

Para cada una de estas dimensiones, he intentado señalar ciertas evoluciones e ilustrarlas con ejemplos, refiriéndome a los trabajos que mejor conozco. La visión dada es ciertamente parcial y no muy objetiva, refleja mi cultura, mis propias experiencias. Otros habrían elegido, ciertamente, otras dimensiones o habrían descrito en otros términos las evoluciones, aun si hubieran elegido las mismas dimensiones. Pero en el punto que espero haber convencido al lector, incluso a través de esta visión parcial, es de la riqueza de los aportes de la investigación en didáctica para ayudarnos a pensar los problemas que encontramos, para darnos la fuerza de afrontar los desafíos.

La investigación puede y debe ayudarnos a pensar, ayudarnos a desconfiar de las soluciones ingenuas y tentadoras, ayudarnos a tener en cuenta la medida de la complejidad de los problemas que debemos administrar, proponernos senderos, a la vez ambiciosos y realistas, para abordarlos, ayudarnos a acompañar las acciones y a evaluar sus efectos. Pero yo no tendría la ingenuidad de creer que la investigación puede hacer mucho más que eso. Los sistemas de decisión se le escapan y obedecen a menudo a lógicas en las cuales la investigación no sabría reconocerse. Pero cualesquiera que sean los límites de su acción, estoy profundamente convencida de que su desarrollo, tanto en su dimensión fundamental como en la aplicada, es indispensable y útil.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abric, J.C. (1987), *Coopération, compétition et représentations sociales,* Suiza, Editions del Val.

Artigue, M. (2002), "Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work", *International Journal of Computers for Mathematical Learning.*

Artigue, M., T. Assude, B. Grugeon y A. Lenfant (2001), "Teaching and Learning Algebra: Approaching Complexity through Complementary Perspectives", en H. Chick, K. Stacey y J. Vincent, (eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra,* Proceedings of 12 th ICMI Study Conference, Australia, The University of Melbourne, 9-14 de diciembre de 2001, pp. 21-32.

Bartolini Bussi, M., M. Boni, F. Ferri y R Gainti (1999), "Early Approach to Theoretical Thinking. Gears in Primary Schools", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 39, núms. 1-3, pp. 67-87.

Bosch, M. y Y. Chevallard (1999), "La sensibilité de l'activité mathématiqueaux ostensifs. Objet d'étude et problématique", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 19, núm. 1, pp. 77-124.

Brousseau, G. (1996), *Theory of Didactic Stituations,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique,* Grenoble, La Pensée Sauvage.

—— (1992), "Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 12, núm. 1, pp. 77-111.

—— (1999), "L'analyse des pratiques enseignantes en anthropologie du didactique", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 19, núm. 2, pp. 221-265.

Defouad, B. (2000), *Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation d'une calculatrice symbolique en classe de première S.,* Tesis de doctorado, Universidad de París 7.

Delozanne, E., B. Grugeon, M. Artigue y J. Rogalski (2002), "Modélisation et mise en oeuvre d'environnements informatiques pour la régulation de l'apprentissage, le cas de l'algèbre avec le projet LINGOT", *Réponse à l'appel à Projet Cognitique 2002, École et sciences cognitives: Les apprentissages et leurs dysfonctionnements.*

Duval, R. (1995), *Semiosis et pensée humaine,* París, Peter Lang.

Godino, J. (2002), "Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 22, núm. 2-3, pp. 237-284.

Grugeon, G. (1995), *Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement: BEP et Première G.,* Tesis de doctorado, Universidad de París 7.

Guin D. y L. Trouche (eds.) (2002), *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique, un problème didactique,* Grenoble, La Pensée Sauvage.

Lagrange, J.B. *et al.* (2001), "A Meta Study on IC Technologies in Education", en M. van den Heuvel-Panhuizen, *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 1, pp. 111-122, Utrecht, Freudenthal Institute.

Lenfant, A. (2002), *De la position d'étudiant à la position d'enseignant: l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires,* Tesis de doctorado, Universidad de París 7.

Margolinas, C. (2002), "Situations, milieux, connaissances – Analyse de l'activité du professeur", en, J.L. Dorier *et al.* (eds.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques,* Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 141-156.

Margolinas, C. y M.J. Perrin-Glorian (eds.) (1997), "Recherches sur la modélisation de l'enseignant", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 17, núm. 3.

Rabardel, P. (1995), *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains,* París, Armand Colin.

Robert, A. (2001), "Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 21, núms. 1-2, pp. 57-80.

Roditi, E. (2001), *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Etude des pratiques ordinaires,* Tesis de doctorado, Universidad de París 7.

Sierpinska, A. y S. Lermann (1996), "Epistemologies of Mathematics and Mathematics Education", en Bishop *et al.* (eds.), *Handbook of Research in Mathematics Education,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 827-876.

Steen, L. (ed.) (2002), *Mathematics and Democracy. The Case for Quantitative Literacy,* The National Council on Education and the Disciplines.

Thompson, A. (1992), "Teachers' Beliefs and Conceptions. A Synthesis of the Research", en D. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* Nueva York, Macmillan, pp. 127-142.

Trouche, L. (1997), *A propos de l'apprentissage de fonctions dans un environnement de calculatrices, étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation,* Tesis de doctorado, Universidad de Montpellier.

DATOS DE LA AUTORA

Michèle Artigue

Université Paris 7, Denis Diderot, París, Francia

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

artigue@math.jussieu.fr

El “saber didáctico” en las escuelas normales. Un análisis de las praxeologías de formación

Luis Manuel Aguayo Rendón

Resumen: En este artículo presentamos un análisis de las prácticas de tres formadores de profesores de la escuela primaria y su objetivo es revisar la manera en la que éstos transmiten el saber didáctico referido a los números racionales. Para nuestro análisis, utilizamos los conceptos de la teoría antropológica didáctica (Chevallard, 1997, 1998, 2000, 2001), desde la que se considera al formador como *director del proceso de estudio* que realizan sus alumnos respecto de determinadas praxeologías didácticas. La actividad del formador se describe en términos del sistema de *tareas* que debe cumplir para dirigir la reconstrucción de dicha praxeología y de las *técnicas* que utiliza para gestionar los diferentes momentos didácticos ligados al proceso de estudio. Particularmente, mostramos las *técnicas* que los formadores utilizan para gestionar los diferentes momentos didácticos relativos al estudio de una praxeología didáctica.

Palabras clave: formación, praxeología didáctica, praxeología de formación, momento didáctico, técnica de formación.

Résumé: Dans cet article, nous présentons une analyse des pratiques de trois formateurs de professeurs de l’école primaire et son l’objectif est de réfléchir á la manière de transmettre les savoirs didactiques liés aux nombres rationaux. Par notre analyse, nous utilisons les concepts de la théorie anthropologique didactique (Chevallard, 1997, 1998, 2000, 2001), dans ce cadre, le formateur est considéré comme le *directeur du processus d’étude* que réalisent ses élevés en relation avec certaines *praxéologies didactiques*. L’activité du formateur peut s’expliquer en termes du système des *taches* qu’il doit accomplir pour diriger la reconstruction de cette praxéologie et des *techniques* qu’il utilise pour gérer les différents moments didactiques liées au processus d’étude. Nous montrons particulièrement les *techniques* qui utilisent les formateurs pour gérer les différents moments didactiques relatifs á l’étude d’une praxéologie didactique.

Mots-clés: formation, praxéologie didactique, praxéologie de la formation, moment didactique, technique de formation.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se inscribe en un proyecto de investigación más amplio cuyo objetivo es analizar la manera en la que los saberes relativos a la didáctica de las matemáticas son incluidos en los programas de estudio de las escuelas normales y las estrategias que utilizan los formadores para hacerlos *vivir* en las aulas. Para ello, hemos tomado como marco teórico la *teoría antropológica didáctica* (Chevallard, 1997, 2000, 2001, 2002a, 2000b), desde la que se asume que las investigaciones en el campo de la didáctica de las matemáticas han producido un saber *didáctico* que es necesario transmitir a los futuros profesores y que el proceso de transmisión (o transposición) de estos saberes es un objeto de estudio que requiere analizarse desde una perspectiva didáctica.

REFERENTES TEÓRICOS

Una vez situados dentro de la teoría antropológica didáctica (en adelante TAD) y teniendo en cuenta que nuestro interés es estudiar la *práctica didáctica* del formador, en lo que sigue presentaremos algunos elementos teóricos que sustentan nuestro trabajo.

LA DIDÁCTICA COMO CIENCIA DEL *ESTUDIO*

Un principio básico de la TAD sostiene que: “... lo *didáctico* se identifica con el simple hecho de que *alguien (x) estudie alguna cosa (o)...”* (Chevallard, 1998, p. 19). Visto así, el *estudio* alude a las acciones que se llevan a cabo en una institución para realizar las tareas matemáticas que se plantean en ella, aunque el estudio no se circunscribe al ámbito escolar, hay estudio en todas las instituciones de la sociedad donde se manipula un saber establecido o en vías de establecerse.

En el caso de las matemáticas, el estudio engloba los conceptos de enseñanza y aprendizaje, puesto que la actividad de un investigador, la de un alumno que aprende matemáticas o la de un profesor que las enseña describen el proceso de estudio de un saber matemático y, por lo mismo, deben ser un objeto de estudio de la didáctica. Si bien el investigador estudia y plantea problemas para construir un nuevo conocimiento que les dé solución, el profesor y sus alumnos estudian matemáticas (ya conocidas) para reconstruir un conocimiento importante para ciertas instituciones de la sociedad.

Por lo general, el estudio es una actividad colectiva; por ejemplo, en los casos del investigador y del profesor y sus alumnos, es necesaria la ayuda de uno o varios directores de estudio y la existencia de un plan que puede ser un programa de investigación o un currículo escolar. Así, en todo proceso de estudio, el profesor aparece solamente como el director de la actividad, es sólo uno de los actores del proceso y no el protagonista principal, como ha sido visto desde la cultura escolar dominante.

La dualidad del conocimiento matemático. La actividad y el producto

Otro principio básico de la TAD sostiene la dualidad del conocimiento matemático; a este respecto se afirma que el saber matemático se construye para dar respuesta a ciertas cuestiones problemáticas,[1] pero también es el producto del proceso de estudio que forma parte de la actividad matemática, es decir, existe una estrecha relación entre la actividad matemática (proceso de estudio) y el saber matemático (producto). Por esta razón, desde la TAD se asume que las matemáticas son una actividad y un producto de dicha actividad, esto es, son objetos construidos y también actividades institucionales de manipulación de dichos objetos.

El conocimiento matemático como producto. La praxeología matemática

Cuando se considera a las matemáticas como producto, frecuentemente se piensa que la construcción del conocimiento matemático sólo se realiza mediante la solución o el planteamiento de ciertos tipos de problemas; sin embargo,

> el matemático no aspira únicamente a plantearse buenos problemas y resolverlos, sino que pretende, además, caracterizarlos, delimitar y clasificar los problemas en "tipos de problemas", entender, describir y caracterizar las *técnicas* que utiliza para resolverlos hasta el punto de controlarlas y normalizar su uso; se propone establecer las condiciones con las que éstas funcionan o dejan de

[1] Cabe aclarar que, desde esta postura, se considera que hacer matemáticas no siempre es resolver problemas, por ejemplo: "... se pueden usar matemáticas de manera rutinaria sin que aparezca problematicidad o estudio..." (Bosch *et al.*, 2003, p. 84).

ser aplicables y, en última instancia, aspira a construir argumentos sólidos y eficaces que sostengan la validez de sus maneras de proceder (Bosch *et al.,* 2003, p. 85).

Así, cuando el trabajo del investigador ha concluido, al menos en lo que se refiere a un cierto tipo de problemas, el conocimiento matemático aparece estructurado en dos niveles: el de la *praxis,* donde se incluyen los tipos de *tareas* y las *técnicas* que permiten resolverlas; y el del *logos,* donde se incluyen los argumentos que justifican la validez de las técnicas empleadas y los elementos *teóricos* que dan sentido a las tareas.

Estos dos niveles forman lo que Chevallard (2000) llama *praxeología, organización praxeológica* o simplemente *organización matemática* (OM). Una praxeología matemática es diferente a la "simple" práctica, porque en ella se integra el "saber hacer" (*praxis)* con el "saber" (*logos)*; por esta razón, señala este autor, lo que comúnmente se designa como "saber" no es sino una praxeología que él representa mediante el sistema $[T/\tau/\theta/\Theta]$. En éste, el bloque práctico-técnico, que designa al *saber-hacer,* se forma con los tipos de tareas (T) y las técnicas (τ) necesarias para resolverlas. El bloque tecnológico-teórico, que designa el *saber,* se forma con los discursos tecnológicos (θ) que justifican las técnicas utilizadas y los discursos teóricos (Θ) que dan sentido a las tareas planteadas.

El conocimiento matemático como actividad. Los momentos didácticos

Si tenemos en cuenta la noción de praxeología para definir el proceso de construcción matemática, podemos decir que *hacer matemáticas* es una actividad que consiste en utilizar una praxeología matemática para resolver cierto tipo de tareas y *estudiar matemáticas* es una actividad que consiste en construir (el caso del matemático) o reconstruir (el caso del alumno) ciertos elementos de una praxeología matemática que permiten dar respuesta a una tarea problemática para la que no existe o no está disponible una praxeología.

Empero, una praxeología matemática no surge de manera instantánea ni acabada para siempre, es el resultado de un proceso largo y complejo en el que se relacionan dos aspectos del trabajo matemático: el proceso de *estudio* y el producto (matemático) que resulta de dicho proceso. Estos aspectos son inseparables, porque una praxeología matemática no puede existir sin un proceso de estudio que la engendre y este último tampoco puede existir sin una praxeología en construcción. Sin embargo, lo más importante cuando se analiza la dinámica de funcionamiento de diferentes procesos de estudio es la presencia de ciertas acciones que permanecen a pesar de las diferencias temporales, culturales, sociales o individuales que caracterizan a cada proceso.

La identificación de estas acciones invariantes ha permitido construir un modelo para todo proceso de estudio basado en la noción de *momento didáctico;* esta noción no tiene una connotación cronológica, alude a las dimensiones de todo proceso de estudio, ya que dichos momentos no configuran una secuencia fija ni se desarrollan de manera aislada, cada uno puede ser planteado en distintas intensidades, tiempos, ocasiones o de manera simultánea. En opinión de Chevallard (1998), existen seis *momentos didácticos* que modelizan todo proceso de estudio, a saber:

- *El momento del estudio,* que es el primer encuentro (o rencuentro) con la organización O que está en juego. Puede tener varias maneras, una consiste en encontrar O a través de al menos uno de los tipos de tareas $T_{i,}$ constitutivas de O.
- *El momento de la exploración* de tipos de tareas T_i y de la elaboración de una técnica τ_i relativa a este tipo de tareas.
- *El momento de la constitución del entorno tecnológico-teórico* relativo a τ_i. Este momento está en relación estrecha con cada uno de los otros, por ejemplo, desde el primer encuentro se establece una relación con este entorno ya elaborado, aunque en las estrategias tradicionales se lo ubica como primer momento.
- *El trabajo de la técnica* debe mejorar la técnica volviéndola más eficaz y fiable y acrecentar la maestría que se tiene de ella.
- *El momento de la institucionalización* tiene por objeto precisar lo que es *exactamente* la OM elaborada, distinguiendo los elementos que no le hayan sido integrados y los que entran definitivamente en la OM considerada.
- *El momento de la evaluación* se articula con el de institucionalización y en él se verifica lo que *vale,* lo que se ha aprendido (Chevallard 1998, pp. 48-50).

Las praxeologías didácticas

Con base en la noción de momento didáctico, el estudio puede ser redefinido de la siguiente manera: *estudiar* matemáticas es una actividad que consiste en "vivir" los diferentes *momentos didácticos* o ayudar a los alumnos (en el caso del profesor) a "vivir" esos momentos, pero además, si tenemos en cuenta que desde la TAD,

> *toda acción procede de una praxeología*, admitiendo que esta praxeología pueda estar en curso de elaboración o que su construcción se haya detenido (...), en un estado de incompletud o de desigual desarrollo, con una técnica apenas esbozada, una tecnología incierta, una teoría inexistente (Chevallard, 1997, pp. 6-7).

Podemos decir que todo proceso de construcción matemática gira en torno de dos prácticas humanas o praxeologías, una matemática (hacer matemáticas) y una de estudio o didáctica (estudiar o ayudar a estudiar matemáticas). Así, cuando el investigador o el alumno estudian una praxeología matemática, o cuando un profesor ayuda a otra persona a estudiarla, utilizan una praxeología didáctica;[2] la del alumno es una praxeología didáctica *discente*, mientras que la que utiliza el profesor es una praxeología didáctica *docente*.

Como toda praxeología, las organizaciones didácticas (OD) se estructuran en dos niveles: el técnico-práctico, donde se incluyen los tipos de *tareas* y las *técnicas* (didácticas); y el tecnológico-teórico, donde se incluyen las *tecnologías* y las *teorías* (didácticas). Sin embargo, las OD no tienen una existencia independiente, ya que toda praxeología didáctica contiene al menos una OM de referencia y, a su vez, toda praxeología matemática está contenida en al menos una OD. Esta codeterminación entre praxeologías matemáticas y didácticas es acotada de la siguiente manera:

> ...las organizaciones "transmisoras", es decir, didácticas, se configuran de una manera vinculada a la estructura que hay que transmitir. En otros términos, las organizaciones didácticas dependen fuertemente de las organizaciones matemáticas por enseñar, por esta razón, la enseñanza de las OD debe tener

[2] Las praxeologías didácticas docentes son las más relevantes para este trabajo, por esta razón, cuando en lo sucesivo hablemos de praxeologías (u organizaciones) didácticas, nos referiremos específicamente a las praxeolgías *docentes*.

en cuenta su relación con las organizaciones matemáticas... (Chevallard, 2001, p. 3.)

En términos de las praxeologías, podemos decir que una OD puede construirse (por el investigador) o reconstruirse (por el alumno que estudia didáctica) mediante un proceso en el que aparecen dos aspectos de la *actividad didáctica,* un proceso de estudio y el producto de dicho proceso. Siguiendo la misma idea, *hacer didáctica* es una actividad que consiste en utilizar una praxeología (didáctica) para dar respuesta a una cuestión problemática (didáctica) y *estudiar didáctica* es una actividad que consiste en reconstruir varios elementos de una praxeología didáctica, a fin de resolver una tarea (didáctica) que resulta importante para una institución determinada.

Además, si ubicamos el estudio de una OD en el ámbito escolar, tendríamos lo que Portugais (1995) llama un "sistema didáctico de formación" que se constituye mediante un saber por estudiar (las praxeologías docentes), un alumno que estudia dicho saber (el profesor en formación) y un director de estudio (el formador de profesores). Sin embargo, como hemos señalado, una OD no puede existir de manera independiente, debe existir también un saber de referencia, esto es, una praxeología matemática.

A decir de Portugais (1995), la inclusión de este segundo "saber" genera el interjuego entre dos sistemas didácticos y un doble papel para el profesor en formación, esto es, cuando el formador dirige el estudio de una OM de referencia, su papel es similar al de un profesor de matemáticas y el papel del formado es similar al del alumno que las estudia. Cuando formador y formado ocupan estos papeles, señala Portugais, la actividad se desarrolla en el "sistema didáctico *stricto sensu",* pero, cuando el formador dirige el estudio de una OD, su papel es el de profesor de didáctica y el del formado, el de eventual profesor que intenta responder a ciertas cuestiones didácticas, en este caso la actividad se desarrolla en el "sistema de formación".

Con base en lo anterior, podemos decir que las praxeologías docentes son el saber didáctico que debe transponerse en la formación de profesores, también que el formado *hace didáctica* cuando utiliza una OD ya elaborada y que *estudia didáctica* cuando reconstruye una OD bajo la dirección del formador. Sin embargo, si advertimos que en el sistema de formación el director del estudio no desempeña el papel de profesor de matemáticas sino el de profesor de didáctica, tenemos una práctica humana (la del formador) que, en términos de las praxeologías, podemos llamar *praxeología de formación*. Al igual que toda praxeología, ésta se estructura mediante el bloque técnico-práctico, con sus tipos de tareas y técnicas (de formación), y el tecnológico-teórico con sus discursos tecnológicos y teóricos (de formación).

Ahora bien, habida cuenta de la juventud del saber didáctico, es difícil encontrar tipos de tareas, técnicas o discursos tecnológicos y teóricos de una praxeología de formación que hayan sido institucionalizados en el seno de la didáctica de las matemáticas. No obstante esta dificultad, asumiremos, como lo hace Chevallard (1998), que en una primera aproximación, las tareas profesorales pueden organizarse en dos categorías interdependientes:

$T_{1.1}$: Tareas relativas a la concepción de los dispositivos de estudio
$T_{1.2}$: Tareas relativas a la organización de los dispositivos de estudio
$T_{1.3}$: Tareas relativas a la gestión de los entornos para dichos dispositivos
$T_{2.1}$: Tareas de ayuda al estudio
$T_{2.2}$: Tareas de dirección de estudio y de enseñanza.

En correspondencia con estas categorías, una de las primeras tareas que debe cumplir el formado consiste en determinar las *praxeologías matemáticas escolares* (su contenido, tipos de tareas y profundidad que debe darse a los componentes técnico, tecnológico y teórico) a partir de las indicaciones del programa de estudios. Pero, además, este tipo de tareas pueden ubicarse en diferentes niveles de codeterminación didáctico-matemática: en el nivel pedagógico, el de la disciplina, de las áreas, de los sectores, de los temas y de las cuestiones puntuales.[3]

En el caso de las técnicas, la situación es similar, es difícil encontrar *técnicas de formación* institucionalizadas en el seno de la didáctica; sin embargo, un referente que nos permitirá analizar las técnicas que utilizan los formadores es lo que Kuzniak (1994) y Houdement y Kuzniak (1996) llaman *estrategias de formación*. Para estos autores, existen dos grupos de estrategias que utilizan los formadores para transmitir los saberes didácticos: las estrategias profesionales, que conciben la formación como una preparación profesional para el oficio de profesor, y las no profesionales, que no comparten este principio.[4] Entre las primeras se pueden enunciar las siguientes:

[3] En cada uno de estos niveles existen praxeologías didácticas que deben reconstruirse tomando como referencia una praxeología matemática. De ahí que, para Chevallard (2000), la formación de profesores, en reconstrucción de las OD, debe ser un objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas.

[4] Entre éstas se mencionan las "culturales", que no tienen en cuenta al saber didáctico; las "basadas en la autonomía", que brindan libertad al alumno para que reconstruya el conoci-

- *Las estrategias basadas en la acción de mostrar,* mediante la observación, ponen en contacto al estudiante con su futuro medio de trabajo, esto es, muestran la práctica que es deseable imitar. Ésta es la forma más antigua de iniciación a las prácticas profesionales, la lección modelo es un ejemplo típico de este tipo de estrategia.
- *Las estrategias basadas en la homología* se fundan también sobre un modelo de imitación pero más complejo; se caracterizan por el hecho de que los formadores enseñan de la misma manera en la que desean que el estudiante lo haga.
- *Las estrategias basadas en la transposición* se oponen a las precedentes, porque ponen el acento en el saber didáctico como saber de referencia; en este caso, los formadores asumen que existen nociones didácticas que deben transponer.

METODOLOGÍA

Para cumplir con el objetivo planteado, es necesario identificar los diferentes elementos de la praxeología de formación que los formadores utilizan para dirigir un proceso de estudio; para ello, hemos tomado como praxeología matemática de referencia los números racionales, que es un contenido del segundo curso de Enseñanza de las Matemáticas ubicado en el tercer semestre de la carrera de profesor de educación primaria.

Además, hemos observado a tres formadores que laboran en escuelas normales del estado de Zacatecas, dos en una escuela urbana y uno más en una escuela rural. La diferencia fundamental entre los formadores observados tiene que ver con su experiencia profesional, el primero (en adelante F1) tiene tres años como profesor de educación primaria y uno como formador de profesores, el segundo (en adelante F2) tiene cinco años como profesor de educación primaria y tres como formador, el último (en adelante F3) tiene 12 años como profesor de educación primaria y 16 como formador.

La observación inició con la primera sesión dedicada al estudio de los números racionales y terminó con la sesión de evaluación; cada sesión fue videograbada y transcrita, también se recogieron apuntes y trabajos de evaluación de algunos

miento por diferentes vías, y las de "investigación aplicativa", que se orientan hacia la formación para la investigación. En opinión de Houdement y Kuzniak (1996), éstas son marginales en la formación de profesores.

de los estudiantes de cada grupo y los materiales que utilizó el formador en cada una de las sesiones. Para analizar la información obtenida, cada registro de clase se dividió en "episodios", es decir se hizo "una descomposición intuitiva del proceso de estudio" (Bosch *et al.*, 2003, p. 94), considerando cada episodio como un fragmento de la clase en el que se gestiona un solo tipo de tarea, ya sea matemática o didáctica. Posteriormente, en cada episodio se analizó el *momento didáctico* dominante, el tipo de tareas que planteaba el formador, las técnicas de formación que utilizaba y los discursos tecnológicos implícitos en su práctica.

LA RECONSTRUCCIÓN DE LAS PRAXEOLOGÍAS DOCENTES

Antes de iniciar el análisis, debemos aclarar que las praxeologías que los formadores observados reconstruyen son espontáneas, es decir, utilizan técnicas que no se apoyan en saberes explícitos sistematizados *a priori*, sino en una integración de saberes venidos de distintos campos: disciplinario, didáctica o comunidad de la cual forman parte. Estos saberes, señalan Coope *et al.* (2002), viven en ciertos lugares, algunos son explícitos y se transmiten por medio de escritos, otros, compartidos por la comunidad de formadores, permanecen implícitos y se pueden transmitir oralmente. Por otra parte, debemos aclarar también que los formadores observados utilizan diferentes técnicas de formación, aunque en este caso sólo analizamos las que aparecen con mayor frecuencia en el proceso de estudio que dirige cada uno.

LA HOMOLOGÍA O *TRANSPARENCIA DEL SABER DIDÁCTICO*

Las estrategias de homología directa, señala Kuzniak (1994; p. 126), parten de una situación simple que permite tomar conciencia sobre el proceso pedagógico, pero cuando se utilizan, se corre el riesgo de que los estudiantes se resistan a ellas por la trivialidad del conocimiento matemático puesto en juego.[5] Una estrategia de este tipo es visible cuando el formador gestiona el estudio de un elemento matemático sin hacer otra referencia a las praxeologías didácticas de su propia actividad, la cual busca constituirse como modelo de dirección del estudio que

[5] La homología indirecta parte de una situación más compleja que incluye un saber matemático no trivial para los estudiantes, aunque esta novedad puede ocultar el proceso pedagógico (Kuzniak, 1994, p. 126).

el estudiante deberá imitar. Por esta razón, puede decirse que, en estos casos, la actividad se desarrolla dentro de los límites del sistema didáctico *stricto sensu*. La homología es la técnica de formación que utiliza con más frecuencia F3 y, en lo que sigue, analizaremos la manera como la gestiona.

El fragmento 1 corresponde al inicio de la homología y, como se puede apreciar (líneas 5, 6, 7, 8 y 9),[6] F3 intenta gestionar momentos del primer encuentro exploratorio mediante la devolución de la tarea;[7] sin embargo, la naturaleza de estos momentos se modifica por la institucionalización de los significados de la fracción que previamente había realizado (líneas 1y 2). Al parecer, esta modificación nos indica que el objetivo de F3 era "mostrar" uno de los significados de la fracción precisados.[8] Lo contradictorio con la homología es que, a pesar de señalar la institucionalización previa como un momento inapropiado para iniciar el estudio con niños de escuela primaria (líneas 2 y 3), F3 gestiona la institucionalización como momento inicial del proceso y, no obstante la contradicción, gestiona la tarea como un momento de exploración.

Fragmento[9] 1

1. M: Hemos visto los diferentes significados de las fracciones, en el entendido de que
2. ustedes habían visto ya muchos cursos de matemáticas, aunque eso no quiere decir
3. que ustedes deban empezar todas las clases con los niños por las definiciones,
4. ya veremos las distintas formas de abordar un tema.
5. Bien, vamos a resolver un problema (reparte siete tarjetas a cada uno), si quieren
6. hacer dibujitos en su libreta está bien. "Cinco niños se van a repartir siete pasteles, se
7. trata de que a cada quien le toque lo mismo y no quede pastel, entonces ¿cuánto le
8. toca a cada quien? (...) por parejas van a usar las siete tarjetas como pasteles ¿cómo
9. reparten los pasteles?
10. As: Uno a cada uno.
11. M: Pero no debe sobrar nada.
12. As: Le damos uno a cada niño y los otros los partimos a la mitad.
13. M: Ustedes piénsenle [los demás discuten entre sí].

[6] Los números de líneas entre paréntesis hacen referencia a los pasajes del fragmento en los que se aprecia el fenómeno que se describe.

[7] "En la didáctica moderna, la enseñanza es la devolución al alumno de una situación adidáctica, el aprendizaje es una adaptación a esa situación" (Brousseau, 1998, p. 60).

[8] Este mecanismo didáctico no es exclusivo de F3, también F1 gestiona la institucionalización de los significados de la fracción antes del primer encuentro o del momento exploratorio.

[9] En cada uno de los fragmentos utilizamos la siguiente notación: M: maestro; A: alumno indefinido; As: alumnos; A1: alumno 1; A2: alumno 2, etcétera.

Una vez que ha sido resuelta la tarea, F3 sigue la lógica de la homología; esto es, gestiona un momento tecnológico teórico en el que los estudiantes deben justificar las técnicas utilizadas. El fragmento 2 nos muestra este momento y, como se puede apreciar, es F3 quien toma a su cargo la justificación de la técnica adecuada (línea 20) y de la que no resultó útil para resolverla (línea 27); este hecho es significativo si recordamos que un medio similar al de la escuela primaria, como lo exige la homología, debería permitir a los alumnos justificar sus propias técnicas. También es relevante si se observa que el medio provee a F3 de una posible justificación empírica (los rectángulos de papel).

Fragmento 2

M: ¿Ya está? No debe sobrar nada.
As: Sí (unos), no (otros).
As: Un entero y dos quintos (luego de tres minutos).
M: ¿Un entero y dos quintos? Bien, ¿cómo lo resolvieron? A ver, aquel equipo
As: Le repartimos uno a cada niño y sobraron dos pasteles que dividimos en 5 partes cada uno y le dimos dos partes a cada niño.
M: Bien, entonces pastel completo para cada niño y otras partes. ¿Hubo quien hizo dibujitos? [señala a otro equipo] ¿qué dibujaron?
A1: Los pasteles y los niños.
M: Un pastel para cada niño y ¿qué hicieron enseguida?
A1: Los que sobraban los repartimos.
M: ¿Partieron por mitad cada pastel?
As: Sí.
M: ¿Por qué no resultó?
A1: Porque faltaban mitades para ajustar a cada niño.
M: A ver, en lugar de dividir estos pasteles en quintos ¿cuál sería otra alternativa? Piensen, rayen las tarjetas hasta que logren repartir todo el pastel, recuerden que cada parte debe ser del mismo tamaño. A ver en el primer procedimiento habíamos dicho que a cada niño le tocaba un entero $^2/_5$, ahora lo van a repartir de otra manera pero ¿a cada niño le puede tocar más de $1^2/_5$.
As: No.
M: Entonces será otra expresión equivalente y es lo que están tratando de encontrar.

Sin embargo, el intento por "mostrar" una gestión ideal del momento tecnológico fracasa, principalmente porque la tarea no representa dificultades significativas para los estudiantes; por esta razón, el momento se agota rápidamente (no hay dudas sobre la técnica) y la progresión didáctica se detiene. No obstante, el formador no reconoce estos índices de deterioro en la relación didáctica o bien considera indispensable que los estudiantes "vivan" la gestión del momento tecnológico; por esta razón, establece un mecanismo didáctico que le permite reeditar este momento; solicita la búsqueda de otras técnicas para resolver la tarea (línea 29). En su intento por asegurar una menor tasa de fracaso en el momento tecnológico reeditado, F3 negocia "a la baja" las condiciones que permitan una búsqueda menos difícil (línea 35), con dicha negociación modifica la tarea, si originalmente se pedía repartir siete pasteles entre cinco niños, ahora se trata simplemente de encontrar una fracción equivalente a un entero dos quintos.

El fragmento 3 nos muestra un pasaje del momento tecnológico reeditado; en éste, lo notable es que F3 ha *devuelto* a los estudiantes la responsabilidad de la justificación, es decir, son ellos quienes justifican la técnica (líneas 37, 38, 40 y 41) o identifican la naturaleza del error (líneas 39, 42, 44, 45, 46).

Fragmento 3

M: ¿Cuál no está bien?
A1: En este paso $^1/_5 + ^1/_5$ eran $^2/_5$, en éste eran $^4/_{20} + ^4/_{20}$ porque son 20 de uno y 20 de otro entonces le tocan $^8/_{20}$.
As: Nooo.
A2: Por ejemplo los dividí en 40 (señala el dibujo de los dos pasteles) y son 20 y 20, pero estamos tomando en general 40.
A1: Toma los 40 y es como si estuvieras tomando sólo un pastel, cada uno no está dividido en 40 partes.
A2: Pero es que les toca de a $^8/_{40}$.
A4: La regla de las fracciones dice $^4/_{20} + ^4/_{20}$ es $^8/_{20}$, entonces, cuando nos dices que $^4/_{20} + ^4/_{20}$ son $^8/_{40}$ no seguimos esta regla, ésa es la confusión.
M: A ver, les pedí que continuaran el procedimiento fraccionando los dos pasteles, ¿Podemos repartir a cada niño? No, porque son 5 niños, no nos alcanza.
A: Como no podemos repartir, tenemos que volver a dividir (divide cada pastel en cuartos) tenemos 8 pedazos, repartimos uno a cada niño (sombrea $^5/_4$).
M: La parte que le tocó a cada niño es $^1/_8$, como ya repartimos un pastel tenemos un entero y $^1/_8$ ¿cuánto se le repartió?
A: Un octavo.
As: Es un cuarto.
M: Ahí estaba la confusión, dos enteros se consideraban...
A: Como uno, entonces es $^1/_4$ más $^1/_8$.

56. M: Sí, un octavo y todavía queda un cachito. El octavo restante se divide en 5,
57. pero cada pedazo es ahora...
58. As: Un cuarentavo.
59. M: Un cuarentavo, ahora, mínimo común 40 igual a 10 + 5 + 1 = 16, pero falta
60. As: El entero, un entero $^{16}/_{40}$ ¿ya está bien? ¿sí, verdad?

Mediante este nuevo momento tecnológico, F3 pone a los estudiantes en contacto con una técnica didáctica para gestionar el momento tecnológico y, una vez que se ha construido el consenso sobre lo inadecuado de la técnica propuesta por A1, el formador institucionaliza la técnica adecuada (líneas 47, 48...60). Este momento representa la última fase de la homología.

Finalmente, respecto de los elementos tecnológicos que subyacen a la técnica de formación que utiliza F3, en primer lugar podemos decir que, a pesar de que la institucionalización previa hizo referencia a los significados de la fracción en su conjunto, el objeto de estudio específico (el significado parte-todo) no fue institucionalizado después del momento tecnológico; por esta razón, sólo aparece de manera implícita. En nuestra opinión, la no institucionalización del objeto matemático de estudio tiene que ver con el objetivo de F3 para sostener la actividad dentro de los límites del sistema didáctico *stricto sensu*. Como el reconocimiento explícito del significado parte-todo es un conocimiento propio de los profesores, su institucionalización hubiera orientado la actividad hacia el sistema de formación y el formado hubiese desempeñado el papel de eventual profesor. Al parecer, este objetivo también explica la no institucionalización de los objetos didácticos puestos en juego (el dispositivo de enseñanza y los momentos didácticos gestionados).

Así, el discurso tecnológico que orienta las decisiones de F3 parece apoyarse en un supuesto: cuando se pone en contacto al estudiante con un medio similar al que se desea que gestione, los elementos de la praxeología didáctica devienen *transparentes*, es decir, son visibles a través de la actividad que despliega el formador. En este sentido, podemos decir que, cuando el formador utiliza esta técnica de formación, lo que hace es *mostrar* a los estudiantes una praxeología didáctica que ellos deberán reconstruir en otros contextos.

El deslizamiento didáctico. Sin *praxis*, sin *logos*

Como habíamos señalado, las estrategias (o técnicas) basadas en la transposición parten de un supuesto: existe un *saber didáctico*, objetivo, cuya transposición es una tarea fundamental en la formación de profesores. Una técnica que podría considerarse como una aproximación a la transposición es la que hemos denominado *deslizamiento didáctico* en analogía con el deslizamiento cognitivo;[10] si en el segundo el verdadero objeto de saber es sustituido por los medios y las heurísticas, en el deslizamiento didáctico el estudio del objeto matemático se *desliza* hasta que un elemento didáctico ocupa su lugar, en estos casos, el deslizamiento no parece ser una acción planeada, sino el producto de ciertos mecanismos didácticos desplegados por el formador durante el momento tecnológico. El deslizamiento didáctico es la técnica de formación que utiliza con mayor frecuencia F2.

La manera como se inicia esta técnica puede apreciarse en el fragmento 4. En éste se observa que F2 inicia el episodio gestionando dos momentos propios de la homología, la exploración, que inicia con la *devolución* de la tarea (líneas 1, 2, 3 y 4) y el momento tecnológico cuyo objetivo es que los estudiantes justifiquen las técnicas que emplearon (líneas 5, 6, 7 y 8).

Fragmento 4

1. M: Anoten el siguiente problema: Tres amigos entran a un restaurante, piden dos
2. pizzas que se reparten equitativamente entre los tres. ¿Cuánto le toca a cada uno?
3. Poco después llega otro amigo. ¿Cuánto debe darle cada uno para que cada uno
4. tenga la misma cantidad? ¡Resuélvanlo como puedan!
5. A1: A cada uno de los tres le toca $^2/_3$
6. A2: A cada uno de los cuatro le toca $^1/_2$
7. A3: Se van a repartir en sextos, cada uno de los tres tendría $^4/_6$ y le va a dar $^1/_6$ al
8. que llegó o sea $^3/_6 = {}^1/_2$, $^4/_6 - {}^1/_2 = {}^1/_6$
9. M: ¿Alguien lo resolvió de una forma diferente?
10. A5: Bueno yo lo hice casi igual, partiendo de $^1/_3$ de pizza, a cada uno le toca $^2/_3$ o
11. lo que es igual $^4/_6$
12. M: Bueno, las maneras que han utilizado para resolver este ejercicio están bien,

[10] A decir de Brousseau (1998, p. 53), el deslizamiento cognitivo se caracteriza en que, cuando una actividad de enseñanza ha fracasado, el profesor puede ser conducido a justificarse y, para continuar su acción, a tomar sus propias explicaciones y sus medios heurísticos como objetos de estudio en lugar del verdadero conocimiento matemático.

13. pero hicieron mentalmente muchos procedimientos, con los niños sería importante
14. que se llevaran a cabo, porque operan un poco más lo concreto, nosotros podemos
15. comprender lo que quiere decir nuestro compañero con las operaciones que están
16. allí, pero para los niños no es fácil comprender, por eso sería necesario partir de
17. una estructura.

Como se puede apreciar también la tarea se relaciona con el significado parte-todo de la fracción y aunque es más compleja que aquellas que se sugieren para los alumnos de la escuela primaria, los formados la resuelven con relativa facilidad. Por esta razón, el momento tecnológico genera pocas oportunidades para que los estudiantes justifiquen las técnicas empleadas, como sería deseable en una homología.

Frente al agotamiento del momento tecnológico, F2 se ve obligado a precisar una de las cláusulas del contrato establecido, esto es, cuando señala la ausencia de los procedimientos que –en su opinión– se hicieron mentalmente, subraya un incumplimiento de las obligaciones implícitas en el contrato: resolver el problema con cualquier técnica pero explicitando sus fases. Además, esta acción (líneas 12, 13...17) también representa el momento que inicia el deslizamiento didáctico puesto que, cuando F2 señala las dificultades de los niños, otorga a los estudiantes el papel de eventual profesor. Pero además, este mecanismo provoca que la homología pierda su *transparencia,* ya que F2 explica la similitud entre el momento que gestiona y las tareas del eventual profesor. Esta pérdida de la transparencia aparece porque la homología no puede funcionar como un medio similar al de la escuela primaria sin los procedimientos que los estudiantes realizaron.

No obstante, lo más importante es que este mecanismo ha provocado un deslizamiento didáctico, como se puede apreciar en el fragmento 5. El estudio del objeto matemático (significado parte-todo)[11] ha sido desplazado y en su lugar aparece un objeto didáctico (la técnica para gestionar el momento tecnológico). Si bien es cierto que el deslizamiento ha sido provocado por el formador, no lo es menos que es aceptado por los estudiantes, quienes lo fortalecen a través de sus interrogantes (líneas 18, 22, 23, 26 y 24), así, con el acuerdo tácito del formador y los estudiantes, el objeto de estudio original es sustituido y la actividad se ha desplazado hacia el sistema de formación; en éste, el estudiante cumple un nuevo papel, el de eventual profesor.

[11] Una muestra de que el deslizamiento ha sido efectivo es que el significado parte-todo no aparece en los siguientes episodio de la misma clase.

Fragmento 5

18. A1: Profe, usted dice que con los niños hay que utilizar los procedimientos, ¿pero
19. uno o todos? Si los enseñamos todos, no van a saber ni qué.
20. M: Bien, voy a cambiar la pregunta, ¿vamos a propiciar que los niños encuentren
21. diferentes métodos y luego nos digan cuáles utilizaron?
25. A2: ¿No sería más viable enseñarles los procedimientos que conocemos y que
22. ellos identifiquen el que más puedan? Porque hay algunos que hacen la división
23. de una forma y algunos de otra, entonces. ¿Cómo le vamos a hacer? Enfocarnos a
24. un procedimiento. ¿Si lo entienden de otra forma hay que darles variedad?
25. A3: Es lo que se hizo aquí, se utilizaron diferentes procedimientos, confrontarlos y
26. el que se facilite más para los niños es el que se podría adoptar.
27. M: Es lo que ustedes acaban de hacer, ¿se trata de decirle al niño que lo pueden
28. resolver de cierta forma? o se trata de propiciar. Por ejemplo, yo les pongo el
29. problema. ¿Cómo lo resuelvo? Resuélvanlo como puedan, ahora sí, a ver Juanito, a
30. ver Panchito, a ver María, pásenle, así como ustedes pasaron ahorita, allí es
31. cuando encontramos diversidad de procedimientos.
32. A3: Creo sería importante precisar las equivalencias, si no se les haría muy difícil
33. resolver el problema.
34. M: Acuérdense, la consigna es que ustedes van a encontrar varias formas de
35. resolver el mismo problema.

Una vez que el deslizamiento didáctico ha sido instalado, podemos observar que en su funcionamiento no aparece una tarea problemática en la que los estudiantes prueben la eficacia de las técnicas didácticas empleadas, puesto que la tarea sólo exige sugerir una técnica cuya validez está a cargo de F2. Además, como lo advierte A3 (línea 25), la técnica que el formador desea institucionalizar es la misma que gestiona como parte de la homología; este objetivo se hace evidente cuando F2 acepta que la técnica que utiliza es la misma que deseaba reconstruir (líneas 27 y 28). Otro aspecto significativo de este deslizamiento es la ausencia de un discurso tecnológico que justifique dicha técnica, su sola presencia en la gestión de F2 es lo que, al parecer, justifica su eficacia.

Por la ausencia de una tarea problemática en la que los estudiantes prueben las técnicas didácticas construidas y la de un discurso tecnológico que justifique la técnica institucionalizada, podemos decir que el deslizamiento didáctico es una técnica de formación cuyo objetivo nada tiene que ver con la reconstrucción de una praxeología didáctica, ya que no se incluye ninguna de sus dimensiones (técnica-práctica o tecnológica-teórica). También por estas ausencias, podemos decir que el saber didáctico sólo aparece como una especie de consejos sobre la enseñanza que se justifican con base en la actividad del formador.

Ahora bien, ¿por qué F2 elige los deslizamientos en lugar de otras técnicas de formación? o, en otros términos, ¿cuál es el discurso tecnológico que orienta sus acciones? Sobre este respecto, podemos decir que, para F2, es más importante estudiar las praxeologías didácticas que las matemáticas. Su intento por ubicar la actividad dentro de los límites del sistema de formación es un indicador de este discurso tecnológico. Sin embargo, a pesar del énfasis sobre lo didáctico, este saber sólo se incluye como una especie de consejos que se justifican mediante la propia actividad del formador; este hecho da cuenta de su concepción sobre la naturaleza del saber didáctico.

La homología ampliada. La transposición del saber didáctico

La técnica de formación que llamamos *homología ampliada* es, en nuestra opinión, la que más se aproxima a las estrategias basadas en la transposición, ya que, cuando los formadores aceptan la existencia de un saber didáctico y la necesidad de transponerlo, sólo utilizan el estudio de un objeto matemático como referencia para estudiar un objeto didáctico. A diferencia del deslizamiento didáctico, en la homología ampliada se plantea una tarea de naturaleza didáctica en la que puede encontrarse el objeto didáctico de estudio. Esta técnica es la que utiliza con mayor frecuencia F1 y, en lo que sigue, analizaremos la manera como se gestiona.

Como se puede apreciar en el fragmento 6, una primera fase de esta técnica consiste en gestionar una homología que inicia con la devolución de una tarea (líneas 1, 2, 3...7) ligada al significado de medida. La devolución representa el inicio del momento del primer encuentro, puesto que, en esta tarea, es posible encontrar uno de los elementos de la OM de referencia. Por su parte, el momento de la exploración se desarrolla cuando los estudiantes intentan resolver la tarea, ya que, mediante esta acción, buscan construir una técnica adecuada para resolverla.

Fragmento 6

1. M: Voy a entregarles este problema, lo resuelven y anotan todos los procedimientos
2. que usen, el problema dice: “Un viaje interplanetario. La nave azul sale del planeta
3. azul rumbo al planeta rojo, al mismo tiempo la nave roja, un poco más lenta, sale

del planeta rojo rumbo al planeta azul, cuando se cruzan la nave azul ha recorrido $^{1}/_{5}$ más de la distancia entre los dos planetas que la nave roja. Después de este punto la nave azul tarda 8 días más en llegar a su destino. ¿Cuánto tiempo duró el viaje de cada nave?

En el fragmento 7 se observa la segunda fase de la homología, el momento tecnológico cuyo propósito es que los estudiantes justifiquen las técnicas empleadas. Como se puede apreciar en este fragmento, a pesar de que Enrique[12] intenta justificar una técnica inadecuada (líneas 9, 10, 11 y 12), F1 no interviene en la justificación cuando plantea la interrogante que obliga al alumno a precisar su respuesta (línea 13); son otros estudiantes (A1, A2 y A3) los que intervienen en la justificación.

Fragmento 7

M: Bien, vamos a ver ahora los resultados, Enrique, expliquen su procedimiento.
E: Primero hicimos una gráfica del problema, representamos los planetas con círculos y el recorrido con un rectángulo que fragmentamos en 5 partes, como no quedó claro dónde era la mitad, decidimos fragmentarla en 10 partes, y así pudimos ver dónde estaba el punto medio, en $^{5}/_{10}$, no en $^{5}/_{5}$.
M: ¿En $^{5}/_{5}$?
E: No, $^{5}/_{10}$.
A1: Son $^{5}/_{10}$, pero el problema nos dice que la nave azul recorrió más que la nave roja y el cruce es aquí en $^{6}/_{10}$.
A2: Pero en todo caso sería en $^{7}/_{10}$, porque $^{1}/_{5}$ equivale a $^{2}/_{10}$.
A3: Es que ustedes están pensando que recorrió $^{1}/_{10}$ nada más y es $^{1}/_{5}$.
A1: Más bien recorrió $^{10}/_{5}$.
A2: $^{10}/_{5}$ son 2 enteros, ¿quieres decir $^{10}/_{10}$?
A4: No, $^{7}/_{10}$.

Aunque las intervenciones de los estudiantes no permiten determinar la naturaleza del error en la técnica o la respuesta correcta, lo relevante es el intento de F1 por *devolver* a los estudiantes la responsabilidad no sólo de resolver la tarea, sino también de justificar las técnicas empleadas; por esta razón, podemos decir que F1 busca establecer una gestión adidáctica del momento tecnológico, intento que resulta significativo por su coherencia con la homología, esto es, con

[12] Enrique es un estudiante del grupo en el que F1 dirigió el proceso de estudio.

la intención de gestionar un medio similar al que se desea que gestionen los estudiantes cuando dirijan un proceso de estudio.

Otro hecho significativo que se puede apreciar en el fragmento 8 es que F1 no modifica su contrato pese a las dificultades que los estudiantes tienen para justificar sus técnicas. Cuando F1 evade la responsabilidad de justificar la respuesta (línea 27), lo que hace es sostener la devolución, sin importar que la técnica adecuada no haya surgido todavía o que su demanda de justificaciones no produzca aportes que permitan solucionar el problema. Al parecer, el problema ha sido demasiado complejo para los estudiantes, por esta razón, sus intervenciones poco aportan a la búsqueda de la técnica adecuada. Sin embargo, a diferencia de las momentos tecnológicos que se agotan rápidamente por la facilidad de la tarea, en este caso, su complejidad ha generado mayores oportunidades para una gestión adidáctica del momento tecnológico.

Fragmento 8

22. M: A ver, explica por qué $^{10}/_{5}$.
23. A1: Lo dividimos en $^{10}/_{5}$, la mitad son $^{5}/_{5}$ y la nave azul recorrió $^{1}/_{5}$ más, serían
24. $^{6}/_{5}$; éste es el punto donde se encontraron las naves. Luego, a partir de $^{6}/_{5}$, tardó 8
25. días; los dividimos en $^{4}/_{10}$, nos salen 2 días por cada décimo, entonces la nave
26. roja tardó 20 días y la azul 12 días, porque era más rápida.
27. M: ¿Qué opinan los demás? ¿Cómo supieron que eran 12?
28. A2: Es que cada quinto valía 4 días, lo dividimos en décimos y cada uno valía 2
29. días, entonces se sumaba 2, 4, 6, 8, 10, 12 (señalando los décimos), por eso le pusimos
30. 12 días y las otras suman 20.
31. A: Fíjese bien lo que dice, la nave azul tardó 8 días más.
32. A2: No.
33. A: Sí.
34. A3: Dice 8 días más del recorrido que ya lleva.
35. A: En llegar a su destino, no de recorrido, réstenle los 8 días y nos da el 12.
36. M: Vamos por puntos, $^{3}/_{5}$ es el punto de encuentro y la nave azul tarda 8 días
37. más en llegar a su destino, dividiendo en quintos podemos decir que cada quinto
38. equivale a 4 días, si en $^{2}/_{5}$ son 8 días, ¿cuántos serían en $^{3}/_{5}$?
39. As: Doce.
40. M: Ahora, salen al mismo tiempo y hacen el mismo recorrido, pero la roja es más
41. lenta, llevan 12 días cuando se cruzan y la azul tarda 8 días más en completar su
42. recorrido. ¿Cuántos días tardó en total?
43. As: 20.

44. M: Cuando se cruzan, la nave roja ha recorrido $^{2}/_{5}$ y se ha tardado 12 días.
45. ¿Cuánto se tarda en recorrer cada quinto?
46. As: Seis días.
47. M: ¿Cuánto se tardará en recorrer toda la distancia?
48. As: Treinta días.
49. A1: Entonces ese dato se pierde, ¿no?

Como ningún equipo pudo resolver el problema, la técnica y el resultado adecuados deben ser institucionalizados por F1; como se puede apreciar en el fragmento 8, la institucionalización se realiza cuando reconstruye la técnica adecuada (líneas 36, 37 y 38) y demanda la adhesión a su proyecto institucionalizador mediante preguntas de bajo nivel cognitivo (líneas 38, 42, 45 y 47). Con la institucionalización, F1 ha gestionado momentos del primer encuentro, exploratorio, tecnológico y de institucionalización y la actividad se ha desarrollado dentro de los límites del sistema didáctico *stricto sensu*; es decir, hasta aquí, el estudiante sólo ha desempeñado el papel del alumno que estudia una praxeología matemática, porque F1 sólo ha utilizado una técnica de formación basada en la homología.

Sin embargo, como se puede apreciar en el fragmento 9, F1 utiliza la pregunta de A1 (línea 49) para cruzar los límites del sistema didáctico *stricto sensu*. Esta acción se hace evidente cuando institucionaliza elementos de la OM que no corresponden a la homología (líneas 62, 64, 67 y 69), ya que no son conocimientos que requiere un alumno de la escuela primaria, aunque sí los profesores de este nivel. Si bien no hace referencia a objetos didácticos, esta acción se desarrolla en el sistema de formación, puesto que el estudiante ocupa el papel de eventual profesor.

Fragmento 9

50. M: Tocas un punto esencial de las fracciones en la recta numérica, podemos ver que
51. éste es un problema más abstracto, por eso necesitamos identificar primero la
52. relación parte-todo a través de rectángulos, de cuadrados, de círculos.
53. A2: Este problema como que está en un contexto discreto, ¿no?
54. M: Los demás ¿qué opinan?, ¿es un contexto discreto?
55. As: No, porque es una sola recta, no tenemos dos rectas.
56. M: Es una recta, la unidad es la distancia y son quintos, si fuesen dos unidades
57. implicaría fracciones impropias. ¿En qué nos apoyamos para resolver este
58. problema?

59. A1: En una recta.
60. M: ¿Qué significado o contexto de la fracción podemos encontrar?
61. As: Contexto de medición.
62. M: Contexto de medición, muy bien, y ¿qué significado?
63. A: Parte-todo.
64. M: Recuerden, es un significado relacionado con la medición y es necesario que
65. los niños identifiquen el todo y las partes.
66. A: ¿O sea, que la medida lleva incluida la relación parte-todo?
67. M: Sí, habíamos manejado dos contextos, ¿eran?
68. As: Reparto y medición.
69. M: Y magnitudes discretas y continuas.

Empero, aunque F1 ha institucionalizado elementos de la OM propios del profesor, el saber didáctico ha permanecido *transparente*, visible sólo a través de la homología; por esta razón, como se puede apreciar en el fragmento 10, se plantea una tarea que permita estudiar un objeto didáctico (líneas 70, 71 y 72) y *amplíe* la homología de referencia.

Fragmento 10

70. M: Vamos ahora a ubicar puntos en la recta, que es una de las actividades para la
71. medición que se realizan comúnmente en la escuela primaria. Carolina,[13] indícame
72. ${}^{3}/_{5}$ en la recta numérica (dibuja una recta en la que marca los puntos 1, 2, 3 ,4 5).
73. A: Ya (pone una marca en el 3).
74. M: Daniela, pasa y ubica ${}^{3}/_{5}$ (dibuja otra recta igual que la anterior).
75. D: Ya está (divide el segmento 0-1 en 10 partes y pone una marca en 5/10).
76. M: Oscar, ¡ubica ${}^{3}/_{5}$! (dibuja el segmento 0-1 dividido en 5 partes).
77. O: Ya está (divide un quinto en 5 partes y marca lo que correspondería a ${}^{3}/_{25}$).
78. As: Nooo.
79. O: (Repasa las rayas con su dedo, pero no cambia el resultado).
80. M: Maribel, ubica ${}^{3}/_{5}$ (traza el segmento 0-1 dividido en 5 partes).
81. Ma: ¿Aquí? (pone una marca en ${}^{3}/_{5}$).

De inicio, parece que ubicar fracciones en la recta numérica es una tarea matemática que se ha planteado para gestionar un momento del trabajo con la técnica o de evaluación; sin embargo, dos rasgos nos muestran su naturaleza didác-

[13] Carolina, Daniela, Óscar y Maribel, quienes aparecen en este fragmento, son alumnos del grupo en el que F1 dirigió el proceso de estudio.

tica: la referencia de F1 acerca de la recta como dispositivo de enseñanza para el significado de medida (línea 71) y la ausencia de justificaciones (del formador o los estudiantes) respecto de las técnicas para ubicar las fracciones. Como se puede observar en el fragmento 11, estos rasgos son coherentes con el objetivo que –en nuestra opinión– persigue F1, tomar las respuestas de los estudiantes como un elemento del medio que permita plantear una tarea didáctica: identificar la naturaleza de los errores cometidos en la ubicación de fracciones en la recta numérica.

Fragmento 11

82. M: Bien, ¿qué podemos observar en la primera respuesta?
83. A1: Que son 3 enteros y no $^{3}/_{5}$.
84. M: A ver: ¿$^{3}/_{5}$ es mayor o menor que la unidad?
85. As: Menor.
86. M: Aquí encontramos una de las ventajas de la recta, las fracciones rellenan los
87. huecos entre dos números enteros y una de las dificultades de los niños es igual a
88. la de Carolina. ¿Por qué pensó que ahí era $^{3}/_{5}$?
89. A2: Porque tomó 5 enteros como un entero.
90. M: Sí, por eso no podemos pasar a la suma y a la comparación de fracciones hasta
91. que no esté firme la relación parte-todo. Otra de las ventajas es que en la recta
92. aparecen con mayor naturalidad las fracciones impropias, si yo digo ubiquen $^{5}/_{4}$,
93. es más sencillo ver que se fracciona más de un entero.[14]

Ahora bien, si se analiza esta tarea considerando su dimensión matemática, podemos decir que el problema de las naves resultó un referente inadecuado para la ubicación de fracciones en la recta; las respuestas erróneas que dan los estudiantes así parecen indicarlo. Por esta razón, a pesar de que en nuestra opinión la tarea perseguía un objetivo de naturaleza didáctica, debido a las dificultades de los estudiantes, la tarea se convierte en un momento para el estudio de un objeto matemático. Si la analizamos teniendo en cuenta la dimensión didáctica, podemos decir que, a diferencia de las otras técnicas de formación analizadas, en ésta se plantea una tarea didáctica específica (identificar los errores cometidos en la ubicación de fracciones en la recta numérica) en la que los estudiantes pueden probar la eficacia de la técnica que emplean para tal identificación. La presencia de errores concretos en esta tarea (no sólo sugeridos) es un elemento que permite probar la eficacia de las técnicas empleadas.

[14] La forma que dirige el estudio de este primer error se repite en cada uno de los otros casos.

En este sentido, los estudiantes y el saber didáctico (los errores) tienen un primer encuentro a través de un tipo de tareas didácticas (identificar los errores que cometen los alumnos) relacionadas con un elemento de la OM de referencia, que les exige construir una técnica para identificar los errores y estructurar un discurso que justifique lo adecuado de la identificación realizada (línea 89). En esta técnica de formación, podemos observar la presencia de varios elementos de una praxeología docente: un tipo de tareas ligadas con un elemento didáctico (identificar los errores cometidos por los alumnos), una técnica que permitió cumplir con esa tarea,[15] un discurso tecnológico que justifica la eficacia de la técnica[16] y un objeto matemático de referencia (el significado de medida). Sin embargo, también podemos apreciar que, aunque los estudiantes son quienes tienen a su cargo la construcción y justificación de la técnica (líneas 83, 84, 85 y 89), F1 es quien introduce los elementos didácticos de naturaleza prescriptiva, él precisa las ventajas de la recta numérica como dispositivo de estudio y los saberes previos necesarios para plantear este tipo de tareas (líneas 86, 87, 90, 91, 92 y 93).

De manera general, podemos advertir que, al igual que en la homología de referencia, F1 ha gestionado momentos del primer encuentro, exploratorio y tecnológico, para un elemento didáctico específico (la detección de los errores en tareas ligadas al significado "medida"); de ahí que resulte significativo, como se puede apreciar en el fragmento 12, su intento por gestionar un momento de institucionalización didáctica.

Fragmento 12

94. M: Éstos son algunos de los errores que cometen los niños en la recta numérica y
95. las formas mediante las que podrían superarlos. También algunas ventajas de
96. trabajar con la recta numérica, ¿cuáles serían?

[15] Las técnicas didácticas que utilizan los estudiantes para identificar los errores no son tan evidentes como las que usan cuando resuelven tareas matemáticas. Por esta razón es difícil precisar la técnica específica que utilizaron en cada caso: sin embargo, coherentes con los principios de la TAD, asumimos que cuando un sujeto resuelve adecuadamente una tarea es porque ha empleado una técnica que le permite tal acción. Lo mismo sucede con los discursos tecnológicos (didácticos); éstos también aparecen sólo como justificaciones sobre lo adecuado de las respuestas emitidas frente a una tarea didáctica.

[16] El discurso teórico no se hace presente en esta praxeología; sin embargo, esta ausencia no es una constante en la práctica de F1. En dos episodios de su proceso, este formador incluye un discurso teórico a través de informes de investigación. Sin embargo, para el análisis hemos seleccionado este episodio, porque en él se puede apreciar de una manera más clara la homología ampliada.

97. A1: Lo de las fracciones impropias.
98. M: ¿Qué conocen de los números fraccionarios?
99. A2: Que están ubicados entre un número entero y otro.
100. A3: ¿Aquí no van las mixtas?
101. A4: Las fracciones equivalentes.
102. M: También pueden ser las mixtas, uno más $^1/_2$.
103. A2: También la equivalencia.
104. M: Bueno vamos a seguir trabajando un poco con las fracciones en la medición...

Aunque podemos apreciar que, en el momento de la institucionalización, las características del dispositivo de estudio (la recta numérica) terminan por ocupar el lugar de la técnica para identificar errores y de la justificación de esas técnicas, el proceso de estudio gestionado da cuenta del discurso tecnológico (de formación) que orienta las acciones de F1; esto es, en cuanto que ha gestionado diferentes momentos didácticos para *estudiar* un elemento de la praxeología docente, al parecer, F1 acepta la existencia de un saber didáctico (relativo a los errores de los alumnos) que requiere ser reconstruido durante el proceso de formación.

La inclusión de momentos para el primer encuentro (la exploración, la justificación y la institucionalización didáctica) es un indicador del discurso tecnológico (de formación) que justifica la técnica de formación empleada por F1 y de su concepción sobre la naturaleza del saber didáctico. Contra la idea de *transponer* un saber *transparente* como en la homología o una especie de consejos como en el deslizamiento didáctico, F1 intenta reconstruir una praxeología didáctica a través de un proceso de estudio en el que se "viven" varios momentos didácticos. En este sentido, F1 intenta *hacer didáctica* cuando utiliza ciertos elementos de una praxeología didáctica (los tipos de tareas, las técnicas y los discursos tecnológicos) para resolver una tarea *problemática* de formación (enseñar a los estudiantes a identificar y tratar los errores que cometen los niños en tareas ligadas al significado de medida)[17] e intenta *estudiar didáctica* cuando ayuda a los estudiantes a reconstruir ciertos elementos de una praxeología didáctica (el tipo de tarea ligado a los errores, la técnica para identificarlos y los discursos que justifican las técnicas) que son importantes para una institución que forma a futuros profesores.

No obstante los intentos, debemos decir también que las técnicas que utiliza

[17] Aunque este objetivo no aparece explícitamente en la escena pública de la clase, en nuestra opinión, es el que F1 perseguía.

F1 requieren mayor eficacia; un ejemplo de esta necesidad se advierte con la ausencia de trabajos de los niños en los que se pudieran identificar errores, otro es la dificultad para integrar un discurso teórico en el proceso de estudio.

CONSIDERACIONES FINALES

Para finalizar, podemos decir que la praxeología de formación que pone en práctica F3 es incompleta, porque no se incluyen tipos de tareas didácticas y, además, toda la actividad se desarrolla en el sistema didáctico *stricto sensu;* por esta razón, los elementos de una praxeología didáctica sólo aparecen como saber *transparente*. Utilizar la homología directa como técnica principal de formación, como lo hace F3, significa no aceptar la existencia de un saber didáctico objetivo y significa también que se ha asumido la idea de que el formado puede aprender a dirigir un proceso de estudio sólo mediante la imitación de la actividad del formador. Si a esto le añadimos las dificultades de F3 para gestionar adecuadamente los diferentes momentos didácticos, podemos deducir que el estudiante tendrá dificultades para construir técnicas didácticas que le permitan resolver las tareas problemáticas de su profesión.

Otro dato relevante es que F3 es el formador con mayor experiencia en la formación de profesores y, al parecer, la técnica que utiliza con mayor frecuencia, más que apoyarse en saberes provenientes de la didáctica, recibe una influencia de los saberes sedimentados en las escuelas normales que, al parecer, dan mayor importancia al estudio de las praxeologías matemáticas.

En el caso de F2, las características de su actividad nos permiten suponer que acepta la existencia de un *saber didáctico* que es necesario *transponer*, sin embargo, en su gestión, este saber se desliga de cualquier elemento praxeológico, esto es, no aparecen tareas didácticas en las que el estudiante pueda probar la eficacia de sus técnicas y, sin este elemento, resulta difícil gestionar adecuadamente otros momentos didácticos para un elemento didáctico. Por esta razón, lo didáctico aparece como una especie de consejos para la práctica, como técnicas sugeridas por el formador que se justifican por el uso que él hace de ellas.

En el caso de F1, quien tiene menos experiencia en la enseñaza y en la formación, resulta significativo observar que incluye un mayor número de elementos de una praxeología de formación que los otros formadores observados. De hecho, es el único que intenta gestionar diferentes momentos didácticos para el estudio del saber didáctico; un ejemplo de ello es la presencia de tareas didácticas específicas, de técnicas didácticas construidas por los formados y de momentos tecnológicos y de institucionalización para un elemento didáctico.

Sin embargo, pese a estas diferencias, lo común en los tres procesos de estudio observados es la serie de dificultades que los formadores tienen para *transponer* el saber didáctico. Una primera dificultad que hemos observado tiene que ver con aceptar o no la existencia de un saber de este tipo. Cuando no se acepta su existencia, los formadores utilizan técnicas que destacan lo matemático y dejan el estudio de lo didáctico como una mera actividad de imitación. No obstante, aun cuando se acepte la existencia de este saber, como presumimos que ocurre en el caso de F2, otra fuente de dificultades es la manera como se piensa la naturaleza de dicho saber, es decir, cuando se asume que el saber didáctico es solamente un saber especulativo sobre la práctica. Como hemos observado, las técnicas de formación priorizan los consejos sobre la práctica.

Por otra parte, aun cuando se acepte la existencia de este saber y se considere como saber objetivo susceptible de transponerse, existen dificultades ligadas a las técnicas adecuadas para realizar este proceso, es decir, establecer un equilibrio entre tareas matemáticas y didácticas, diseñar u organizar los dispositivos de enseñanza para objetos didácticos y construir técnicas adecuadas para gestionar momentos tecnológicos, teóricos y de institucionalización de un objeto didáctico, como hemos observado, son apenas algunas de las dificultades que enfrentan los formadores cuando intentan transponer el saber didáctico. Sin embargo, como lo señalan Bosch *et al*. (2003), estas dificultades son una consecuencia del carácter poco elaborado de las praxeologías de formación espontáneas y, por esta misma razón, la manera de superarlas pasa necesariamente por el desarrollo de una *teoría didáctica* que sirva como fundamento para diseñar y gestionar organizaciones praxeológicas viables.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFÍCAS

Bosch, M., L. Espinoza y J. Gascón (2003), "El profesor como director de procesos de estudio: Análisis de organizaciones didácticas espontáneas", *Recherches en didactique des mathématiques,* Grenoble, La Pensée Sauvage, vol. 23, núm. 1, pp. 79-135.

Brousseau, G. (1998), *Théorie des situations didactiques. Textes rassemblés et préparés par Nicolas Balachef, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, Virginia Warfiled,* Grenoble, La Pensée Sauvage.

Chevallard, I. (1997), "Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission: un point de vue didactique", *Communication au Colloque International Savoirs scolaires, interactions didactiques et formation des enseignants,* Marsella, 28 a 30 de abril.
—— (1998), "Familière et problématique, la figure du professeur", en C. Margolinas M. Perrin Glorian (coords.), *Cinq études sur le thème de l'enseignement,* Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 17-54.
—— (2000), "La recherche en didactique et la formation des professeurs : problématiques, concepts, problèmes", en M. Bailleul (ed.), *Actes de la X^ème^ École d'Été de didactique des mathématiques,* Houlgate, 18-25 de agosto de 1999, pp. 98-112, Caen, ARDM e IUFM de Caen.
—— (2001), "Aspectos problemáticos de la formación docente", *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM),* Huesca (en linea).
—— (2002a), "Organiser l'étude. 1. Structures et Fonctions", en J-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot y R. Floris (eds.), *Actes du 11ème École d'Été de Didactique des Mathématiques,* La Pensée Sauvage, versión electrónica.
—— (2002b), "Organiser l'étude. 3. Ecologie et Régulation", en J-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot y R. Floris (eds.), *Actes du 11ème École d'Été de Didactique des Mathématiques,* La Pensée Sauvage, versión electrónica.
Coppe, S., C. Rolet y C. Tisseron (2002), "Etude de routines et régulations dans la pratique professionnelle d'un professeur des écoles", en J-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot y R. Floris (eds.), *Actes du 11ème École d'Été de Didactique des Mathématiques,* La Pensée Sauvage, versión electrónica.

DATOS DEL AUTOR

Luis Manuel Aguayo Rendón
Escuela Normal "Manuel Ávila Camacho", Zacatecas, Zacatecas, México
l_aguo@yahoo.com.mx

Houdement, C. y A. Kuzniak (1996), "Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques", *Recherches en didactique des mathématiques,* Grenoble, La Pensée Sauvage, vol. 16, núm. 3.

Kuzniak, A. (1994), *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré,* Tesis de doctorado, IREM VII, París.

Portugais, Jean (1995), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants,* Suiza, Exploration-Peter Lang.

Validación y confiabilidad de una escala de Actitudes hacia las Matemáticas y hacia las Matemáticas Enseñadas con Computadora

Sonia Ursini, Gabriel Sánchez y Mónica Orendain

Resumen: Con el propósito de contar con un instrumento que permita obtener información acerca de las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas y las matemáticas enseñadas con computadora, se elaboró la escala AMMEC (Actitudes hacia las Matemáticas y las Matemáticas Enseñadas con Computadora). En este artículo se presentan los pasos seguidos para su validación y se proporcionan datos que demuestran su confiabilidad y validez. En estos momentos, en los que el uso de la tecnología para apoyar la enseñanza de las matemáticas es cada vez más fuerte, esta escala permite monitorear cómo van cambiando las actitudes de los estudiantes hacia esta disciplina. Se incluyen resultados preliminares relativos a las actitudes de los estudiantes.

Palabras clave: actitud, matemáticas, computadoras, tecnología, escala.

Abstract: The AMMEC scale (Attitudes towards Mathematics and Mathematics Taught with Computers) was designed with the purpose of providing a suitable instrument for obtaining information about students' attitudes towards and mathematics towards mathematics taught with computers. The steps followed to validate the scale and data showing its reliability and validity are provided. Being the use of technology to support mathematics' teaching more and more frequent, this scale allows us to monitor changes in students' attitudes toward mathematics. Preliminary results on students' attitudes are included.

Keywords: attitude, mathematics, computers, technology, scale.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la tecnología computacional que se dio en la segunda mitad del siglo pasado abrió posibilidades insospechadas de empleo de esta herramienta en los campos más diversos, entre ellos el de la educación. La presencia cada vez más fuerte de los instrumentos computacionales ha ido señalando la posibilidad y la necesidad de vincular su uso a la enseñanza de las matemáticas. En este contexto, se inscribe el proyecto de Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (EMAT), que promueve la Secretaría de Educación Pública de México con el propósito de apoyar la enseñanza de las matemáticas en las escuelas secundarias públicas del país. Se espera que este proyecto ayude a mejorar el aprendizaje de las matemáticas, así como las actitudes de los estudiantes hacia esta disciplina. Es, por lo tanto, importante monitorear ambos aspectos.

En este momento, nuestro interés es conocer cuáles son las actitudes que tienen los estudiantes que trabajan en el proyecto EMAT hacia las matemáticas y las matemáticas enseñada con el apoyo de la computadora. Se sabe que la actitud de los estudiantes hacia una disciplina desempeña un papel muy importante en el aprendizaje de ésta. Sí algo se considera agradable, resulta más fácil de aprender, lo que repercute en el desempeño (Auzmendi, 1992). Cuando se tienen sentimientos positivos hacia, por ejemplo, las matemáticas y confianza en el propio desempeño, las posibilidades de éxito aumentan (Tobías, 1993).

Hasta la fecha, ha habido en México un número muy escaso de estudios relacionados con las actitudes hacia las matemáticas o hacia las matemáticas apoyadas con tecnología. Por consiguiente, no se cuenta con los instrumentos que nos permitan llevar a cabo un estudio de este tipo. Por ello, el primer paso ha sido desarrollar un instrumento *ad hoc* para obtener la información deseada. Hemos diseñado una escala tipo Likert considerando que, junto con el diferencial semántico y el método de Guttman, es uno de los métodos más conocidos para medir, por escalas, los elementos que constituyen las actitudes. Nos referiremos a ella como la escala AMMEC (Actitudes hacia las Matemáticas y las Matemáticas Enseñada con Computadora). En este artículo presentamos el instrumento y los pasos seguidos para su validación.

ANTECEDENTES

El proyecto EMAT (Enseñanza de las Matemática con Tecnología)

El proyecto EMAT, promovido por la Secretaría de Educación Pública, se inicia en 1997 en 16 escuelas distribuidas en 8 estados de la República Mexicana con la participación de 16 profesores y 667 estudiantes. A fines del ciclo escolar 2002-2003, el proyecto EMAT se había extendido a 731 escuelas distribuidas en 17 estados de la República; 2 283 profesores ya estaban trabajando con la tecnología computacional y el número de estudiantes era ya cercano a los 200 mil. Para apoyar la enseñanza de las matemáticas en el proyecto EMAT actualmente se están usando: la calculadora TI-92, la hoja electrónica de cálculo (como apoyo para la enseñanza de la aritmética, el álgebra y la resolución de problemas), y el paquete computacional Cabri Géomètre (como apoyo para la enseñanza de la geometría).

El modelo pedagógico que sustenta el proyecto EMAT tiene algunas particularidades que se tuvieron en cuenta en el momento de diseñar la escala AMMEC. Una característica fundamental consiste, por ejemplo, en ir de la práctica y los ejemplos particulares, hacia los principios teóricos generales. Esto se pretende lograr con actividades previamente diseñadas que los alumnos resuelven en equipo, y con discusiones de grupo dirigidas por el profesor. El desarrollo de las actividades se apoya fuertemente en hojas de trabajo que guían la actividad de los estudiantes. Su propósito es convertirlos en sujetos activos para que, a través de su propia reflexión, vayan construyendo conceptos y desarrollando habilidades matemáticas. El trabajo en equipo pretende también fomentar el intercambio de ideas y motivar al estudiante a organizar, reflexionar, defender y, finalmente, modificar sus propias ideas. El papel del profesor durante el desarrollo de las actividades es el de guía que los va apoyando y auxiliando en el desarrollo de su propio trabajo. Las discusiones de grupo pretenden lograr una reflexión y un consenso acerca de los conceptos matemáticos involucrados en las actividades previamente trabajadas. Todo esto con el objetivo de lograr un aprendizaje más significativo de las matemáticas y generar una actitud positiva hacia esta disciplina.

Escalas de referencia

Para elaborar la escala AMMEC, se consideró que una actitud es una predisposición aprendida para responder de manera consistente, favorable o desfavorablemente, hacia un objeto y sus símbolos. Una actitud tiene dirección: positiva o negativa; intensidad: alta o baja; está conformada por varios elementos, tales como: cogniciones o creencias, sentimientos o afectos asociados a evaluaciones, tendencias de comportamiento; y se forma, principalmente, mediante las experiencias e inferencias o generalizaciones y con base en principios de aprendizaje.

Al diseñar la escala AMMEC, se consultaron distintas escalas de actitudes elaboradas y validadas con anterioridad por otros investigadores. Se consideró el cuestionario empleado por Morales (1998), que fue elaborado a partir del Computer Attitude Questionnaire (CAQ) (Knezek y Christensen, 1995a, 1995b). Se trata de una escala tipo Likert desarrollada en Estados Unidos con el propósito de medir las actitudes hacia la computadora y la nuevas tecnologías en estudiantes de 9º a 12º grado. Este cuestionario fue validado para la población mexicana por Morales (1998) y fue contestado por estudiantes de 3er grado de secundaria de cuatro estados de la República Mexicana dentro de un proyecto denominado "Actitudes de los escolares hacia la computadora y los medios para el aprendizaje".

Otro cuestionario que sirvió de guía fue el desarrollado en 1976 por Fennema y Sherman (1986) sobre actitudes hacia las matemáticas. Se trata de nueve escalas tipo Likert que miden distintos tipos de actitudes hacia el aprendizaje de las matemáticas. Además, cada escala puede ser utilizada de manera individual. Este cuestionario ha sido aplicado en múltiples ocasiones y se sigue usando en versiones actualizadas (Doepken *et al.*, 1993).

Finalmente, consultamos el cuestionario elaborado por Forgasz (2001), que indaga los estereotipos de género en relación con las actitudes hacia las matemáticas, la computadora y las matemáticas enseñada con computadora. Este último, publicado después de que ya habíamos elaborado y piloteado el instrumento que aquí presentamos, es quizás el que se acerca más a nuestro propósito. Pero, a diferencia del cuestionario de Forgasz, no incluimos la parte que mide las actitudes hacia la computadora, porque en el momento de diseñar la escala, la mayoría de nuestros alumnos de secundaria no tenían aún un fácil acceso a esta herramienta fuera del ámbito escolar y en éste, cuando se usaba, estaba asociada a temas curriculares específicos. Además, Morales (1998) había informado, respecto al uso masivo de las computadoras, que si bien existían grandes diferencias entre los distintos estados de la República, la gran mayoría no tenía aún acceso a este medio. En estos últimos años, sin embargo, esta situación ha ido cambiando a un ritmo acelerado y cada vez más niños tienen acceso directo a las computadoras. Podría ser interesante, por tanto, recabar también datos relativos a la actitud de los estudiantes hacia el uso de la computadora fuera del contexto de una asignatura específica. Para ello, consideramos que el instrumento empleado por Morales (1998) puede resultar muy útil.

Para elaborar las preguntas de la escala AMMEC, se consideraron además los elementos constituyentes del aula EMAT (15 computadoras y 15 calculadoras TI-92 por aula), las sugerencias didácticas formuladas a los profesores para ayudarlos a llevar adelante el proyecto (promover el trabajo en equipo, las discusiones de grupo y guiar a los alumnos) y el hecho de que se estaba trabajando con el apoyo de hojas de trabajo previamente elaboradas.

MÉTODO Y DESCRIPCIÓN DE LA ESCALA

PROCEDIMIENTO

El procedimiento para la elaboración de la escala AMMEC constó de las siguientes etapas:

1. Elaboración de la primera versión de la escala.
2. Realización de una aplicación piloto de la primera versión de la escala.
3. Diseño de una versión modificada de la escala.
4. Aplicación de la versión modificada de la escala.
5. Evaluación de la confiabilidad y la validez de la escala.
6. Elaboración de la versión final de la escala.

SUJETOS

El instrumento se aplicó a 439 estudiantes, 228 mujeres y 211 hombres, que cursaban la secundaria y cuya edad oscilaba entre 12 y 15 años de edad. Pertenecían a cuatro escuelas, ubicadas en las ciudades de Colima (Colima) y de León (Guanajuato), en las que se había estado trabajando con el proyecto EMAT desde hacía ya cuatro años. La muestra fue no probabilística e intencional e incluía alumnos con 1, 2 y 3 años de trabajo en el proyecto EMAT distribuidos de la siguiente manera:

153 estudiantes (74 niñas y 79 niños) con 1 año en el proyecto.
147 estudiantes (79 niñas y 68 niños) con 2 años en el proyecto.
139 estudiantes (75 niñas y 64 niños) con 3 años en el proyecto.

INSTRUMENTO

Primera versión de la escala AMMEC

En su primera versión, la escala, estructurada tipo Likert de cuatro puntos, consistió en 41 enunciados divididos en cuatro subescalas: 10 reactivos medían la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas (subescala 1); 21 reactivos medían su actitud hacia las matemáticas enseñada con computadora (subescala 2); 5 correspondían a una autoevaluación en cuanto a algunas habilidades y comportamientos al trabajar en la clase EMAT (subescala 3); y 5 reactivos medían el gusto por el trabajo individual y por el trabajo en equipo (subescala 4). Los enunciados se elaboraron de acuerdo con la definición conceptual formulada para cada subescala. Las opciones de respuesta para los reactivos fueron: "no", "alguna vez", "casi siempre" y "siempre".

Aplicación piloto de la primera versión

Con el propósito de detectar posibles dificultades por parte de los estudiantes para entender el lenguaje usado, así como para identificar los aspectos que requirieran alguna modificación, se realizó una aplicación piloto de la primera versión de la escala. Las 41 preguntas fueron contestadas por seis estudiantes (dos por cada grado de secundaria) de una de las escuelas donde se aplicaría posteriormente el instrumento. Estos seis estudiantes no participarían después en el estudio.

Versión modificada de la escala AMMEC

Teniendo en cuenta las dificultades presentadas por los alumnos durante la aplicación piloto del instrumento y las sugerencias hechas por la profesora que lo aplicó, se realizaron algunas modificaciones. Éstas consistieron en sustituir algunas palabras por otras de uso más corriente para los estudiantes; invertir las calificaciones para algunos reactivos; e incluir la opción "indeciso", ya que se observó que, en ocasiones, los estudiantes mostraban dificultades para definir su disposición acerca de la afirmación que se hacía en algún reactivo. La escala mantuvo una estructura tipo Likert pero de cinco puntos. Las cinco opciones de respuesta quedaron de la siguiente forma: "no", "poco", "indeciso", "sí" y "mucho", a las que se otorgaron las calificaciones 1, 2, 3, 4 y 5, respectivamente. La aplicación piloto también permitió identificar que los reactivos 2, 3, 12, 14, 15, 19, 22 y 27 (véase cuadro 4) debían calificarse invirtiendo el orden de las calificaciones, quedando de la siguiente manera: "no" (5), "poco" (4), "indeciso" (3), "sí" (2) y "mucho" (1). En la cuarta parte de la escala que medía la actitud hacia el trabajo individual y trabajo en equipo, se consideró una calificación de 4 o 5 como preferencia por el trabajo en equipo y una calificación de 2 o 1 como preferencia por el trabajo individual.

Aplicación de la versión modificada

La versión modificada del instrumento se aplicó a 439 estudiantes de cuatro escuelas que participaban en el proyecto de EMAT desde sus inicios. La administración se hizo de manera grupal. Las instrucciones fueron proporcionadas por escrito y verbalmente para asegurar que fueran conocidas por todos los estudiantes, quienes, en hojas ópticas, marcaban sus respuestas.

Evaluación de la confiabilidad y la validez de la escala

La información recogida en la aplicación del instrumento fue capturada en una base de datos y analizada mediante distintas pruebas estadísticas, utilizando el programa SPSS, que permiten determinar la confiabilidad y la validez de un instrumento de medición.

Versión final de la escala AMMEC

Con base en la evaluación de la confiabilidad y la validez de la escala, ésta se reformuló para lograr la versión final. Algunos reactivos fueron eliminados, otros fueron acomodados en otra subescala que les confería mayor validez. Finalmente, la escala quedó constituida por 29 reactivos, agrupados en tres subescalas, como se muestra en el cuadro 1.

Cuadro 1 Organización de la escala AMMEC

Subescala	Escala AMMEC Nombre	Núm. de reactivos
1	Gusto por las matemáticas	11
2	Gusto por las matemáticas enseñada con computadora	11
3	Autoconfianza al trabajar en matemáticas	7

RESULTADOS

Los criterios de confiabilidad y validez son los que definen la calidad de un instrumento de medición. En este caso, para evaluar dichos criterios, se realizó un análisis de confiabilidad *post hoc* de la estructura de los tres factores (subescalas) de la escala y un análisis de factores para conocer la confiabilidad y validez de la escala, respectivamente. A continuación se presentan en dos incisos, únicamente con propósitos de organización, los resultados obtenidos en cada análisis.

Análisis de confiabilidad

El análisis de confiabilidad de la escala se realizó calculando el coeficiente alfa de Cronbach. Éste se puede aplicar en dos modalidades: un alfa total, para examinar la consistencia interna global o total de la escala y un alfa para indicar la consistencia de las partes que conforman el instrumento, en nuestro trabajo, la estructura de los tres factores de la escala. Las dos modalidades fueron utilizadas en este trabajo.

El alfa total se aplicó en dos ocasiones. En la primera, se contabilizaron las respuestas a todos los reactivos (41) de la primera versión de la escala, y se obtuvo un alfa de 0.82. En la segunda aplicación se eligieron sólo los reactivos (29) que, según el análisis de factor, lograron mayor peso factorial y se obtuvo un alfa de 0.795. Es necesario mencionar que este valor de alfa es el importante en nuestro proceso de validación, ya que indica la confiabilidad de la versión definitiva de la escala.

Cuadro 2 Análisis de confiabilidad para los factores de la escala AMMEC

Factor	Nombre	Núm. de reactivos	Alfa
1	Gusto por las matemáticas	11	0.81
2	Gusto por las matemáticas con computadora	11	0.77
3	Autoconfianza al trabajar en matemáticas	7	0.68

También se realizó un análisis para medir la confiabilidad de cada uno de los tres factores que constituyen la escala en su versión final. El cuadro 2 contiene los resultados obtenidos. Los valores parciales obtenidos producen un alfa promedio de 0.75.

Con la única finalidad de corroborar la confiabilidad mediante distintas técnicas, tratamiento al que no se han sometido en la evaluación de la confiabilidad otras escalas, fue aplicado el método de mitades (*split-halves*) de Guttman. Éste consiste en realizar una aplicación de la medición; después, dividir en dos mitades el conjunto total de reactivos y comparar entre sí los resultados de ambas partes. Cuando el instrumento es confiable, las puntuaciones de las dos partes muestran correlación. En contraste con el método de formas alternativas, llamado también de formas paralelas, o el método de test-retest, el de mitades no necesita la aplicación de dos o más veces del instrumento, o de dos instrumentos. El coeficiente alfa obtenido, mediante el método de mitades, fue de 0.71.

En relación con la interpretación de los coeficientes de confiabilidad obtenidos, cabe decir que existen algunas discrepancias acerca de cuál es el valor adecuado para un coeficiente de confiabilidad. Autores como Nunnally (1978) afirman que una confiabilidad de 0.50 o 0.60 puede ser aceptable; sin embargo, otros (*e.g.,* Grounlund, 1985) señalan que gran parte de las pruebas empleadas en el campo de la educación tienen confiabilidades que oscilan entre 0.60 y 0.85, y así son aceptables. DeVellis (1991) considera que los coeficientes de 0.80 a 0.87 caen en el rango de "muy buenos". Recientemente, Kerlinger y Lee (2002) han establecido 0.70 como el límite entre confiabilidad aceptable y no aceptable.

De acuerdo con lo anterior, salvo el planteamiento de DeVellis (1991), la interpretación de los resultados obtenidos indica que la escala AMMEC tiene una consistencia interna aceptable. Incluso, el segundo alfa total calculado (0.795) resultó muy cercano a lo que DeVellis (1991) considera una confiabilidad "muy buena".

Además, como parte del análisis de confiabilidad, se efectuó un análisis de correlaciones entre los tres factores de la escala que emergieron del análisis de factor.

Cuadro 3 Intercorrelaciones de los factores de la escala

Factor	1	2	3
1		0.04	0.34*
2			0.13*
3			

* $p \leq 0.01$.

En el cuadro 3 se muestran los resultados. Aunque las correlaciones entre el factor 3 (autoconfianza al trabajar en matemáticas) y el 1 (gusto por las matemáticas) y el factor 3 y el 2 (gusto por las matemáticas con computadora) podrían parecer altas y significativas respecto a las demás correlaciones, se interpretan como correlaciones entre débiles y moderadas (Levin, 1979). Las intercorrelaciones señalan que cada factor de la escala mide un constructo diferente.

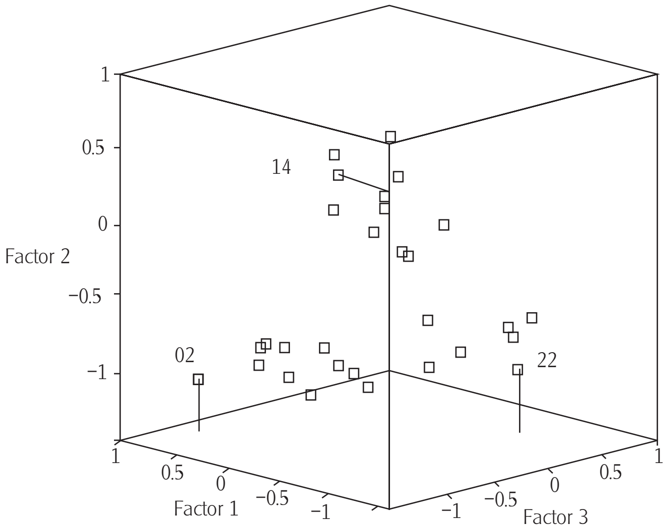
Análisis de la validez

Para verificar la validez del instrumento, se procedió a aplicar un análisis factorial. El análisis de factor incluye una serie de pasos que pueden resumirse en la siguiente secuencia:

datos → correlaciones → extracción de factores → rotación de factores

Para la extracción de los factores se utilizó el análisis de componentes principales (PCA), el cual constituye una herramienta para cribar los datos de variables múltiples. Es un método útil, recomendable cuando se desea validar los resultados de un método de agrupación. En su desarrollo, se extrae una cantidad máxima de varianza conforme se calcula cada factor. El primer factor extrae la mayor cantidad de varianza, el segundo la siguiente mayor cantidad de varianza, y así sucesivamente. Cada nuevo factor que se extrae tiene cada vez menos varianza que el anterior. La extracción de factores concluye cuando la varianza es insignificante o cuando se alcanza el número de factores establecido por el investigador (Kerlinger y Lee, 2002). Mediante dicho procedimiento se extraen los factores. Cuanto mayor sea la varianza total que explican los factores de un instrumento, mayor validez tiene éste. Siguiendo este procedimiento, en el análisis efectuado se obtuvieron tres factores que generan una varianza total de 35.91.

Figura 1 Representación geométrica del análisis de factor



En una representación geométrica del PCA, la cual a veces resulta útil para lograr cierta comprensión intuitiva, los reactivos serían puntos en un espacio factorial *m*-dimensional. Los factores son las coordenadas. La carga factorial de cada reactivo de la escala podría "leerse", en esta representación, en términos de los ejes de referencia. Cada punto puede ser ubicado en el espacio, insertando los ejes adecuados; esto es, un eje para cada una de las *m*-dimensiones. Mediante el análisis de factores se pretende proyectar los ejes a través de conjuntos de puntos, a fin de ubicar los ejes que "expliquen" tanta varianza de las variables como sea posible. Adicionalmente, se trata de establecer: *a)* el número de los factores subyacentes a una escala; *b)* cuáles reactivos están cargados en cuáles factores; *c)* la magnitud de estas cargas. La figura 1 ilustra la representación geométrica del análisis de factor realizado a la escala AMMEC.

En la figura 1 se presentan los valores de la carga factorial de cada reactivo. Los puntos del gráfico indican dichos valores y están distribuidos en tres dimensiones que coinciden con los tres factores, o subescalas que conforman la escala AMMEC. Si bien no es común incluir este tipo de representación en un análisis de factor, en el presente trabajo tiene el propósito de ilustrar los resultados obtenidos. Prescindimos de asociar a cada punto el número del reactivo que representa, ya que, por su distribución en el gráfico, dificultaría la lectura. Sin embargo, se escogieron arbitrariamente tres reactivos (2, 14, 22), uno por cada escala, para los que se señalan las cargas factoriales más altas mediante las proyecciones en el eje correspondiente. De los tres reactivos escogidos, nótese que la proyección del punto que representa al reactivo 14 se ubica arriba de 0.6 en el factor 2, de acuerdo con la línea dibujada en el gráfico; el reactivo 2 tiene su mayor carga factorial en el factor 1, situándose entre 0.6 y 0.8; y el reactivo 22 entre 0.4 y 0.6 en el factor 3. Como se puede apreciar en la figura, no existen reactivos dispersos; todo reactivo tiene su carga factorial en alguno de los tres factores. Por tanto, la escala queda conformada claramente por tres subescalas. Se observa, además, que las cargas factoriales de los reactivos tienden a situarse cerca o por arriba de 0.5 en el eje, es decir en la subescala o factor donde cargan. Los pesos factoriales obtenidos en los reactivos sugieren validez de la escala.

La carga factorial, como un coeficiente de correlación, oscila entre ±1.00 y se interpreta de manera similar. Las cargas factoriales son correlaciones que existen entre los factores y los reactivos de la escala. Si un reactivo carga en un solo factor, y no en los otros, se dice que es una medida "pura" de su factor respectivo. ¿Cuál es el peso o carga factorial adecuada de los reactivos de una escala? En informes de trabajos relacionados con la validación de instrumentos de medición, se han empleado diversos criterios. Por ejemplo, Díaz-Loving y colegas (2000) utilizaron una carga factorial mayor o igual que 0.40. Pantaleón y Sanchez (2000) establecieron en su estudio una carga factorial mínima de 0.372. Fennema y Shermann (1986), para el desarrollo de su Escala de Actitudes en Matemáticas, fijaron cargas factoriales de 0.50 o más altas. Forgasz y Leder (1999), aunque realizaron un análisis de factor en un trabajo que consiste en reexaminar parte de la escala diseñada por Fennema y Sherman, no especificaron el criterio que emplearon. Finalmente, Morales (1998) ha utilizado cargas de 0.38. En el presente trabajo se empleó un criterio similar al de Morales.

En el cuadro 4 se muestran los resultados que arrojó el análisis de componentes principales. Las cargas factoriales obtenidas para cada uno de los reactivos de la primera versión de la escala se presentan entre paréntesis en la columna correspondiente. Nótese que no aparecen los 41 reactivos que conformaban la primera versión de la escala, sino sólo aquellos que obtuvieron una carga factorial alta. Se trata de los 29 reactivos que constituyen la versión final de la escala. En la misma columna aparecen, fuera de los paréntesis, las cargas factoriales de estos 29 reactivos obtenidas al analizar la versión final de la escala.

Damos ahora una breve explicación acerca del último paso que conforma un análisis de factor: la rotación factorial. Habitualmente, en una extracción factorial los resultados obtenidos son difíciles, a veces imposibles, de interpretar. Por

Cuadro 4 Resultados del análisis de componentes principales

Número de ítem		Carga factorial	Subescala
1	Me gusta la clase de matemáticas	(0.76) 0.78	1
2	La clase de matemáticas es aburrida	(0.52) 0.68	1
3	Las matemáticas son difíciles	(0.48) 0.49	1
4	Matemáticas es la materia que me gusta más	(0.63) 0.61	1
5	Las matemáticas son divertidas	(0.61) 0.67	1
7	Me gustan las matemáticas	(0.74) .075	1
9	Es importante aprender matemáticas	(0.45) 0.49	1
10	Me gustaría usar las matemáticas cuando ya vaya a trabajar	(0.50) 0.52	1
11	Me gusta aprender matemáticas con computadora	(0.47) 0.43	1
12	Prefiero las clases de matemáticas sin computadora	(0.73) 0.73	2
13	Me gusta manejar la computadora	(0.70) 0.67	2
14	Prefiero que un compañero maneje la computadora	(0.55) 0.62	2
15	Me pongo nervioso al usar la computadora	(0.46) .049	2
17	Me gustaría ir mas seguido al laboratorio EMAT	(0.58) 0.57	2
18	Aprendería más matemáticas si pudiera usar más tiempo la computadora	(0.53) 0.57	2
19	Me gustan más las matemáticas cuando el maestro explica y pone ejemplos	(0.50) 0.50	2
20	Es fácil usar la computadora en EMAT	(0.62) 0.57	2
21	Me gusta resolver las actividades sin ayuda del maestro	(0.33) 0.36	2
22	La clase en el laboratorio EMAT es aburrida	(0.51) 0.55	3
24	Si fuera profesor de matemáticas enseñaría con computadora	(0.40) 0.42	2
25	Comento las actividades de matemáticas con mis compañeros	(0.45) 0.46	2
27	Tengo dificultad para entender lo que me piden en las hojas de trabajo	(0.46) 0.42	1
28	Puedo resolver los problemas planteados en las hojas de trabajo	(0.33) 0.39	1
30	Me gusta proponer la solución a problemas antes que los demás	(0.31) 0.44	3
31	Me gusta ser el líder de mi equipo	(0.53) 0.67	3
33	Si un problema no sale a la primera, le busco hasta resolverlo	(0.57) 0.54	3
34	Me gusta resolver problemas de matemáticas algo difíciles	(0.56) 0.51	3
40	Me gusta cuando en el equipo discutimos cómo resolver un problema de matemáticas	(0.38) 0.49	3
41	En el equipo defiendo mis ideas	(0.50) 0.61	3

tanto, se requiere rotar la matriz factorial para facilitar su interpretación. En una perspectiva gráfica, la rotación consiste en girar los ejes en dirección de las manecillas del reloj, a fin de encontrar la "mejor" posición de los ejes para reproducir la matriz factorial obtenida por el método de PCA. Con la rotación, se encuentra o descubre el significado que posee un conjunto de reactivos y se pretende buscar la "mejor", la más parsimoniosa, manera de ver la estructura factorial de los reactivos. Existen diversos métodos de rotación. Por ejemplo, cuando los ejes se mantienen en una posición de un ángulo recto (90º) se llama rotación ortogonal. Cuando los ejes factoriales permiten formar ángulos agudos u obtusos, se denomina rotación oblicua. Otro tipo de rotación es la varimax, diseñada por Henry Kaiser en 1958, que consiste en dispersar la mayor cantidad de varianza a través de los factores, buscando, al mismo tiempo, la estructura factorial más simple. El método de rotación aplicado en nuestro estudio fue el de varimax.

El análisis de validez efectuado a la escala AMMEC generó resultados interesantes.

Primero, se ratificaron los tres factores de la escala, que explican 36.0% de la varianza total. El primero explica 17.6%, el segundo, 12.05% y el tercero, 6.29% de la varianza total. Como se indicó anteriormente, cada factor identificado mediante el análisis factorial tiene cada vez menos varianza que el anterior. En los resultados de este trabajo se observa dicho patrón de comportamiento. Por supuesto que, a mayor varianza explicada por los factores del instrumento de la varianza total, mayor validez tiene éste. La varianza total resulta de la suma de la varianza válida, o varianza explicada, y la varianza de error. En el presente caso, los resultados indican que 64% de la varianza total es varianza de error, ya que 36% se interpreta como varianza válida. A diferencia del análisis de confiabilidad, en el análisis de validez no se encontró un criterio que establezca, o defina, la mayor o menor validez de un instrumento. Sin embargo, en algunos trabajos de validación de escalas se registran varianzas explicadas cercanas al valor obtenido en este trabajo (*e.g.*, Gónzalez-Forteza y Ramos, 2000; Reidl y Fernández, 2000; entre otros).

En segundo lugar, se pudo observar que los reactivos poseen características psicométricas de validez, y el recorrido de su carga factorial es de 0.36 a 0.78. Es necesario mencionar que el reactivo 21 ("Me gusta resolver las actividades sin ayuda del maestro") fue el único en obtener una carga factorial menor a 0.38. Si bien 0.38 fue el valor que se estableció como criterio para seleccionar los reactivos válidos, se decidió mantener dentro de la escala AMMEC el reactivo 21 con base en un criterio de validez de *facie* (cf., Kerlinger y Lee, 2002).

Cuadro 5 Relación de las comunalidades obtenidas en el análisis de factor

Reactivo	Comunalidad
1	0.650
2	0.484
3	0.255
4	0.476
5	0.459
7	0.612
9	0.293
10	0.302
11	0.231
27	0.216
28	0.155
12	0.542
13	0.478
14	0.461
15	0.251
17	0.344
18	0.350
19	0.291
20	0.467
21	0.200
24	0.198
25	0.216
22	0.309
30	0.216
31	0.481
33	0.439
34	0.387
40	0.268
41	0.380

En la extracción de factores, las cargas factoriales también se expresan en *comunalidades*. La *comunalidad* de una variable, o reactivo, es la suma de los cuadrados de todas las cargas factoriales que tiene un reactivo. Un reactivo puede tener peso o carga en distintos factores, por ejemplo, en el factor *A* una carga de 0.10, y en el *B* de 0.90. En este ejemplo, el reactivo tiene una carga fuerte en *B*, pero baja en A. Su *comunalidad* es, por tanto, $(0.10)^2 + (0.90)^2 = 0.82$. La interpretación se hace en términos de que la varianza es la que explica el factor común; esto es, la varianza que dos o más medidas o reactivos comparten en común. El cuadro 5 muestra las comunalidades obtenidas de los reactivos de la escala.

Podría llamar la atención que la comunalidad de algunos reactivos tiene un valor bajo con respecto a otros. La explicación es la siguiente: en primer lugar, hay que considerar que se alude a la suma de los cuadrados de los valores de las cargas factoriales; en segundo lugar, hay reactivos que sólo cargan en un factor o en pocos factores, mientras otros cargan en varios factores. Los reactivos que muestran comunalidad alta tienen carga factorial alta en un factor, pero también suelen cargar en otros factores; no obstante, se los ubica en el factor donde es más significativa su carga factorial. Así, por ejemplo, se puede observar que si bien los reactivos 1 y 28 tienen su carga más alta en el mismo factor, la carga del reactivo 28 no es tan alta como la del reactivo 1.

Adicionalmente a la evaluación de la consistencia interna de la escala, también se exploró su validez concurrente. Para ello se procedió de acuerdo con lo establecido (véase, por ejemplo, Jay Cohen R. y M.E. Swerdlik, 2001). Así, del total de los alumnos estudiados, se conformó al azar una submuestra de 30 estudiantes y, posteriormente, se correlacionaron los puntajes que obtuvieron en la escala AMMEC con los puntajes que les habían asignado sus profesores en los mismos rubros que evalúa la escala. El análisis de los resultados obtenidos arrojó una correlación muy alta ($r_s = 0.98$) entre los dos tipos de puntajes. Esto indica que el instrumento también tiene una alta validez concurrente.

CONCLUSIONES

Los resultados del análisis de confiabilidad y validez de la escala AMMEC son muy alentadores. Los coeficientes obtenidos en las distintas modalidades del análisis de confiabilidad realizadas sugieren que la escala posee consistencia interna. Esto indica que puede proporcionar una representación adecuada de la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas y hacia las matemáticas enseñada con el apoyo de la tecnología computacional. El análisis también sugiere que cada uno de los factores de la escala explora un constructo distinto. De tal manera que permite distinguir entre una actitud positiva o negativa hacia las matemáticas y hacia las matemáticas enseñada con tecnología. La escala además posee validez. En consecuencia, la escala AMMEC representa un instrumento alternativo importante, al menos por tres razones:

1. Logra una confiabilidad mayor que el instrumento de Forgasz y Leder (1999), cuyo alfa es de 0.67, y se acerca considerablemente al grado de confiabilidad de 0.87 de la escala de Fennema y Sherman (1976), que constituye el instrumento clásico para medir actitudes en matemáticas.
2. Es posible considerar que el instrumento tiene validez, ya que las cargas factoriales de los reactivos exceden el criterio empleado al respecto por Morales (1998) que fue de 0.38. Además, casi 70% de los reactivos de la escala AMMEC están en el límite o superan la carga factorial de 0.5 empleada por Fennema y Sherman (1986) para su escala. Del resto de los reactivos, la mayor parte tiene cargas muy próximas al valor fijado por estas investigadoras. Respecto a la varianza total, explicada por los tres factores que componen la escala, podemos mencionar que, aunque Morales, por un lado, y Fennema y Sherman, por el otro, no informan la varianza que obtuvieron, la escala AMMEC alcanza los valores obtenidos en trabajos relacionados con la validación de otros instrumentos psicométricos (*e.g.* Gonzáles-Forteza y Ramos, 2000; Reidl y Fernandez, 2000, entre otros).
3. Difiere de otros, como el de Morales (1998) y el de Fennema y Sherman (1986), en que no evalúa por separado actitudes hacia el uso de las computadoras y actitudes hacia matemáticas, como lo hacen tales escalas respectivamente.

En la actualidad, por medio de la escala AMMEC se está conociendo el impacto del proyecto EMAT en las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas. Los resultados obtenidos hasta el momento muestran que un porcentaje importante de los estudiantes (35.8%) tiene una actitud positiva hacia las matemáticas, la mayoría está indecisa (51.9%) y sólo 12.3% manifiestan una actitud abiertamente negativa. También se encuentra que la actitud positiva hacia esta disciplina se eleva notablemente cuando se trata de aprender matemáticas con el apoyo de la tecnología computacional. En este caso, 65% de los estudiantes tienen una actitud positiva, 31.4% están indecisos y sólo 6.6% manifiestan una actitud negativa hacia las matemáticas. Las respuestas de los estudiantes revelan también que la mayoría de ellos tienen una autoestima baja (43.7%) o muy baja (8.9%) en relación con su capacidad para trabajar en matemáticas. Sólo 9.8% consideran que son buenos para las matemáticas. Aún no contamos con datos contundentes que muestren si se modifica la autoestima hacia el trabajo en matemáticas después de una experiencia prolongada usando la tecnología de cómputo como apoyo. Sin embargo, hay indicios que sugieren que, a pesar de que la actitud hacia las matemáticas se vuelve más positiva cuando se usa la tecnología, la autoestima tiende a bajar. Si esta tendencia se confirma, será necesario indagar con más profundidad, realizando entrevistas y estudios de caso, para conocer cuáles pueden ser las posibles razones para tales cambios. Los datos obtenidos se están analizando también para detectar eventuales diferencias de género. Hasta el momento podemos adelantar que no se encontraron diferencias significativas entre los estudiantes de un sexo con respecto a los del otro sexo, en cuanto a su actitud hacia las matemáticas y las matemáticas enseñadas con computadora. Sin embargo, sí se encontraron diferencias significativas en relación con la autoestima para trabajar en matemáticas. Más alumnos (48.7%) que alumnas (32.9%) se mostraron indecisos en cuanto a su capacidad para trabajar exitosamente en matemáticas, pero significativamente más alumnas (48.7%) que alumnos (38.4%) manifestaron ausencia de autoconfianza para esta disciplina.

De acuerdo con los resultados de validez y confiabilidad obtenidos, la escala AMMEC resulta ser un instrumento adecuado para evaluar las actitudes hacia las matemáticas y las matemáticas enseñadas con el apoyo de la tecnología de cómputo. El tener un instrumento que proporcione información confiable y válida al respecto, en la población mexicana, es sin duda un avance en el estudio de un campo cada vez más floreciente: la enseñanza asistida con tecnología; en particular, si consideramos que existen pocos instrumentos de medición en este ámbito.

Por último, queremos señalar que el diseño de escalas, cuestionarios o inventarios, en el contexto de la enseñanza de las matemáticas con tecnología de cómputo, que posean confiabilidad y validez, permite desarrollar más investigación en este campo de la educación y, en particular, una escala, como la que presentamos en este artículo, puede darnos información relevante sobre los efectos que puede tener el uso de la tecnología en las actitudes de los estudiantes.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Maestra en Psicología Cristianne Butto Zarzar su valiosa colaboración en el diseño de la escala AMMEC. Esta investigación estuvo patrocinada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Proyecto de Grupo G26338S.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática/estadística en las enseñanzas medias y universitaria. Características y medición,* Bilbao, Ediciones Mensajero, Paidós.

DeVellis, R.F. (1991), *Scale Development: Theory and Applications,* Newberry Park, Sage.

Díaz-Loving, R., A.S. Rivera, G.A. Ojeda y D.D. Reyes (2000), "Construcción y validación de la escala multidimensional de celos", en *La psicología social en México,* México, AMEPSO, pp. 24-31.

Doepken, D., E. Lawsky y L. Padwa (1993), *Modified Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Scales,* http://www.woodrow.org/teachers/math/gender/08scale.html

Fennema, E. y J. Sherman (1986), *Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Scales. Instruments Designed to Measure Attitudes towards the Learning of Mathematics by Females and Males,* Wisconsin Center for Education Research School of Education, University of Wisconsin-Madison, reimpreso en marzo de 1986; publicado originalmente en JSAS, *Catalog of Selected Documents in Psychology,* 1976, vol. 6, núm. 31 (Ms. núm. 1225).

Forgasz, H. (2002), "Computers for Learning Mathematics: Gendered Beliefs", en A. Cockburn y E. Nardi (eds.), *Proceedings of the XXV Annual Conference International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Norwich, pp. 2-368 a 2-375.

Forgasz, H. J. y G.C. Leder (1999), "The Fennema-Sherman Mathematics as a Male Domain Scale Reexamined", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 30, núm. 3, pp. 342-348.

Gónzalez-Forteza, C. y L.L. Ramos (2000), "Una evaluación de la escala de autoestima de Rosenberg en adolescentes estudiantes", en *La psicología social en México,* México, AMEPSO, pp. 290-296.

Gronlound, N. E. (1985), *Measurement and Evaluation in Teaching,* Nueva York, Macmillan, http://www.tcet.unt.edu/-gknezek/research/techrept/TR95.htm

Kerlinger, F.N. y H.B. Lee (2002), *Investigación del comportamiento. Métodos de investigación en ciencias sociales*, 4a. ed., México, McGraw Hill.
Knezek, G. y R. Christensen (1995a), "A Comparison of Two Computer Curricular Programs at a Texas High School Using the Computer Attitude Questionnaire (CAQ)", *Technical Report 95*.
—— (1995b), *Administration Guidelines for the Computer Attitude Questionnaire*, Denton, Texas, TCET-University of North Texas.
Jay Cohen R. y M.E. Swerdlik (2001), *Pruebas y evaluación psicológicas. Introducción a las pruebas y a la medición*, México, MacGraw Hill.
Levin, J. (1979), *Fundamentos de estadística en la investigación social*, México, Harla.
Morales, C. (1998), "Actitudes de los escolares hacia la computadora y los medios para el aprendizaje", *Tecnología y Comunicación Educativa*, núm. 28, junio-diciembre, pp. 51-65.
Nunnaly, J. (1978), *Psychometric Theory*, 2a. ed., Nueva York, McGraw Hill.
Pantaleón, G.L. y A.R. Sánchez (2000), "Comunicando intimidad sexual con la pareja", en *La psicología social en México*, México, AMEPSO, pp. 67-73.
Reidl, M.L. y B.H.M. Fernández de O. (2000), "Construcción y análisis psicométrico del inventario de relaciones afectivas en parejas mexicanas", en *La psicología social en México*, México, AMEPSO, pp. 303-309.
Tobias, S. (1993), "Gender Equity for Mathematics and Science", *Notes on Invited Faculty Presentations*, Woodrow Wilson Leadership Program in Mathematics, lpt@www.woodrow.org.

DATOS DE LOS AUTORES

Sonia Ursini
Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México
soniau2002@yahoo.com.mx

Gabriel Sánchez
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México, México
josegsr@servidor.unam.mx

Mónica Orendain
Dirección de Materiales y Métodos, Secretaría de Educación Pública, México
morendain@ilce.edu.mx

Las matemáticas en la escuela primaria: construcción de sentidos diversos

Alicia L. Carvajal Juárez

Resumen: En este artículo se presentan los resultados de una investigación que se centró en el análisis de las prácticas escolares de matemáticas en primer grado de primaria. Con base en los datos de uno de los grupos escolares observados, se muestran sentidos que maestra y alumnos otorgan a las actividades escolares para aprender matemáticas y que no necesariamente se definen de manera directa por los contenidos matemáticos. Asimismo, se hace evidente cómo la experiencia en el grado y el papel que la maestra otorga a las características de los niños de primer grado determinan el uso de ciertas actividades. A partir del análisis realizado se plantean cuestiones de tipo metodológico para abordar la actividad docente en matemáticas.

Palabras clave: maestras, materiales, escuela primaria, matemáticas, cambios.

Abstract: This article shows the results of a research centered in math school experiences in first grade of elementary school. Based upon the observation of a teacher and school meanings that teacher and students give to school activities to learn math; which are not necessarily directly defined by math contents. It is also evident how grade experiences and children of first grade characteristics give importance to certain activities. Methodology matters are stated to analyze teaching activities in mathematics.

Keywords: teachers, materials, primary school, mathematics, changes.

INTRODUCCIÓN

Como producto de una reforma curricular en el nivel primaria, en el ciclo escolar 1993-1994 se distribuyeron nuevos libros de texto gratuitos de matemáticas en primero, tercero y quinto grados de educación primaria en México. Los libros formaron parte de la concreción de los postulados de una manera distinta de concebir y trabajar las matemáticas en ese nivel educativo. En este artículo se presentan resultados de un estudio realizado en 1994 en escuelas primarias públicas del Distrito Federal y cuyo propósito central fue documentar las interpretaciones y ajustes que tendría la nueva propuesta educativa en matemáticas, plasmada en un nuevo libro de texto de primaria gratuito, oficial y obligatorio en primer grado.

Para lograr el propósito y partiendo de que la propuesta original necesariamente se vería modificada en la práctica por circunstancias diversas, que habría que reconocer y documentar,[1] se optó por una investigación de corte etnográfico para recuperar los sentidos que maestros y niños daban a las actividades y contenidos escolares de matemáticas. Desde esta perspectiva, las condiciones y normas que rigen la escuela ocupan un segundo plano. Si bien el interés estaba en el tratamiento que los maestros daban a las matemáticas en los salones de clase a partir del libro de texto gratuito de matemáticas, se consideró necesario recuperar en el análisis no sólo aspectos de índole didáctico, sino también otros del trabajo docente[2] que interviniesen en la definición de la situación.

Para el trabajo de campo se seleccionaron dos escuelas primarias con un total de cuatro grupos de primer grado de ambos turnos (matutino y vespertino). Los datos para el proyecto inicial[3] se levantaron durante el primer año de uso del libro de texto en cuestión[4] en dos periodos de trabajo de campo, durante los cuales se realizaron registros de observación de clases, entrevistas a profundidad y pláticas informales con las maestras, así como pláticas informales con los niños.

Producto del análisis, se identificaron aspectos centrales del quehacer y pensar de las maestras, así como preocupaciones y prácticas constantes del trabajo en las matemáticas en ese grado escolar. Se logró identificar características de la práctica que tienen que ver con la formación inicial de las maestras, la experiencia en el grado y las concepciones sobre la mejor manera de enseñar y aprender en

[1] Desde perspectivas analíticas diversas, autores como Ezpeleta (1986) y Brousseau (1990) sostienen que las propuestas son modificadas por quienes las desarrollan.

[2] "A diferencia de la idea de práctica docente, la noción de trabajo docente obliga no solamente a tener en cuenta lo que hacen los maestros, sus prácticas, sino también a estudiar sus condiciones de trabajo, las relaciones institucionales que encuadran su quehacer y los saberes que se apropian a los largo de sus vidas" (Rockwell, 1994, p. 65).

[3] La primera fase del proyecto "Seguimiento del libro de texto de primer grado en escuelas primarias oficiales del Distrito Federal" se concluyó en enero de 1997.

[4] El libro al que se hace referencia es D. Block e I. Fuenlabrada (coords.), D. Block, A. Carvajal, I. Fuenlabrada y P. Martínez (autores), J. Ortega (col.) (1993), *Matemáticas. Primer grado,* México, Secretaría de Educación Pública. En 1993, los maestros contaban sólo con el libro de texto gratuito para los niños y el Plan y programas de estudio. Un año después se les hizo entrega de los otros materiales que constituían, en conjunto, la propuesta didáctica para el grado (Libro para el maestro, Fichero de actividades y Avance programático).

general que se recuperan al trabajar matemáticas. Las prácticas recurrentes encontradas, pese a las diferencias en formación y experiencia en el grado, y los contextos en los que se encontraban las escuelas, permiten delinear características del trabajo docente en primer grado que pueden ser comunes en otros contextos.

Una de las interrogantes, producto de esta primera fase del proyecto, fue cuánto la familiarización con la propuesta y el manejo, uso y/o contacto con todos los materiales oficiales de apoyo al trabajo docente en matemáticas podría impactar –o no– el trabajo de matemáticas con los niños, por lo que se desarrolló una segunda fase. Esta nueva fase se llevó a cabo tres años después, en el ciclo escolar 1997-1998. En ese periodo se observaron las clases de matemáticas de la maestra que contaba con más experiencia en el grado y que ya había sido observada. El regreso al aula permitió identificar otras prácticas que no se habían encontrado durante la primera fase del proyecto, algunas de las cuales, al parecer, resultaron del conocimiento más profundo de la propuesta curricular al trabajar las matemáticas en ese grado escolar.

A continuación, se presentan resultados de las etapas de investigación a partir de un estudio *en* caso, tal y como lo conceptualiza Rockwell (1987, p. 44) desde la etnografía. Esta investigadora sostiene que, a diferencia de un estudio *de* caso, donde interesa el caso en sí, en un estudio *en* caso el interés es más bien comprender procesos de orden general. Luna (1997, p. 17), recuperando la definición de Rockwell, lo explica diciendo:

> Al elegir una escuela, se recorta empíricamente el campo para un estudio en caso, durante el cual, interesa reconocer procesos y relaciones articulables en un objeto teórico. Este último puede generalizarse a otros casos, como referente que permita percibir sus contenidos particulares y sus variaciones en otros contextos.

Con base en esta postura, los resultados encontrados permiten caracterizar, desde una maestra en particular, algunas de las prácticas escolares más comunes que se encontraron en primer grado en matemáticas en todas las maestras observadas, así como los sentidos que adquieren los aspectos que se ponen en juego al trabajar matemáticas,[5] independientemente de la singularidad con que se expresan. A partir del análisis de fragmentos de lecciones que se trabajaron en el grupo de la maestra –a quien llamaremos Elsa–, y de afirmaciones que ex-

[5] Las prácticas de esta maestra fueron recurrentes en las otras maestras observadas y, por cuestiones de exposición, se seleccionaron sólo ejemplos de la maestra Elsa.

presó en las entrevistas y pláticas informales, se muestran algunas concepciones que tenía en relación con los niños, el aprendizaje, las matemáticas y la actualización, como elementos fundamentales de su trabajo docente. Ocasionalmente se incluyen citas textuales que se presentan en el texto entrecomilladas y en itálicas para diferenciarlas de lo no textual.

Los referentes conceptuales básicos para el trabajo metodológico de la investigación fueron Erickson (1995), Geertz (1987), Hammersley y Atkinson (1994) y Rockwell (1987, 1994, 1995), así como los análisis didácticos de Block (1995, 1996), Brousseau (1986,1994) y Chevallard (1997).

Uno de los ejes de análisis que atraviesa la presentación de resultados es lo que llamamos *sentidos* escolares. En este artículo, el término *sentido* se entiende como las interpretaciones y caminos no previstos que puede tomar una propuesta educativa en el curso de la acción. Se recupera, pues, el significado lato del término sentido.[6]

¿QUIÉN ERA LA MAESTRA ELSA?

En 1998, la maestra Elsa cumplió 40 años de servicio, aunque en el momento de iniciar el proyecto contaba con 37, 25 de los cuales trabajó en el primer ciclo de la escuela primaria (1º y 2º grados), especialmente en primer grado. Se formó en la entonces Escuela Nacional de Maestros (en el plan de tres años después de la secundaria) y, desde que egresó, toda su vida profesional laboró en el turno matutino. Cuando trabajaba ya como maestra de primaria, estudió la especialidad en Débiles mentales, menores infractores e inadaptados en la Escuela Normal de Especialización y, si bien nunca ejerció esta profesión, valoraba esos estudios especialmente por la actitud que le inculcaron para trabajar con los niños: la constancia (*"Me quedo más tiempo para sacarlos adelante"*, decía). Actualmente jubilada decía que prefería no pensar en la escuela ni en sus alumnos porque se entristecía dado que *"fue toda una vida"* la que dedicó a la educación de los niños.

Por el tiempo que tenía trabajando con primer grado, la maestra Elsa se consideraba a sí misma especialista en ese grado. Reconocía que la práctica que había desarrollado a lo largo de los años se había ido modificando y valoraba tanto la actualización que lograba por diversos medios (incluidos los cursos y orienta-

[6] En etnografía, sin haberse definido de manera formal, se maneja de esta manera.

ciones oficiales), como los materiales de apoyo didáctico que se proporcionan de manera oficial y gratuita a los profesores en México.

LAS LECCIONES DE MATEMÁTICAS:[7] ALGUNAS CONSTANTES EN PRIMER GRADO

Trabajar en el primer grado de primaria implica, actualmente, el manejo de contenidos matemáticos[8] relacionados con los números y sus operaciones, geometría, medición y tratamiento de la información (SEP, 1993, pp. 55-56), a partir de contextos de situaciones problemáticas que permitan abordarlos. En los grupos observados, estos contenidos circulaban constantemente en los momentos del trabajo en matemáticas, con las adaptaciones a que daban lugar maestras y alumnos.[9] Todas las maestras, en mayor o menor grado y con la singularidad que cada una imprimía a su trabajo al trabajar matemáticas, mostraban preocupación por hacer un manejo particular de los errores de los niños, el uso de cantos en matemáticas, el planteamiento de situaciones de vida cotidiana, el manejo de materiales didácticos diversos, el trabajo con la lengua escrita y el uso de juegos. A continuación se presenta, a partir de la maestra Elsa, un ejemplo de cómo se hacían presentes estas preocupaciones.

En entrevista, la maestra Elsa comentó que no temía admitir ante los niños que se podía equivocar, lo que pudo constatarse en clase: cuando llegaba a equivocarse o bien los niños la corregían, o lo hacía sola si se daba cuenta. El manejo que hacía de sus *errores* no parecía impactar negativamente ni disminuir su imagen de maestra, por el contrario, se fortalecía y así lo consideraba y lo expre-

[7] Se recupera la definición que Erickson (1982, p. 339) da a las lecciones como encuentros educativos ("situaciones parcialmente limitadas en las que los profesores y los alumnos siguen 'reglas' culturalmente normativas y previamente aprendidas, pero también situaciones de innovación en las que unos y otros construyen nuevos tipos de sentido al adaptarse a situaciones fortuitas del momento").

[8] En este artículo, se consideran contenidos matemáticos como aquellos temas y aspectos de matemáticas que se proponen inicialmente en el currículo y los que los maestros incorporan en el trabajo de aula por considerarlos relevantes para la formación en matemáticas de sus alumnos.

[9] "...los profesores y los alumnos de hecho improvisan, y (...) sus desviaciones del orden formal e ideal no se pueden considerar como errores fortuitos (distorsión dentro del sistema), sino que se caracterizan mejor como una adaptación a las exigencias del momento, se trata de acciones que tienen sentido dentro de un contexto adecuadamente especificado" (Erickson, 1993, p. 342).

saba ella. Por lo general, actuaba de la misma manera con los niños: si se equivocaban al realizar algún trabajo pedía que lo volvieran a hacer sin que necesariamente mediara un regaño ni se subrayara el error.

La maestra Elsa acostumbraba enseñarles *cantos* a los niños, como tratando de hacer divertida la estancia en la escuela, que aprendieran y, al mismo tiempo, se divirtieran. Con los cantos repasaban algunos temas del programa (como el conteo), pero también podían preparar alguna ceremonia cívica o festival que les tocaba presentar. Además, los cantos servían como actividades de control, de reinstalación de la disciplina para centrar la atención en algún otro asunto en particular.

En el salón, las actividades de matemáticas con frecuencia se planteaban a partir de *situaciones de la vida cotidiana*; con ellas los niños se entusiasmaban por la tarea y las matemáticas se convertían en un instrumento necesario para realizarla. Una de las situaciones de vida cotidiana más recurrentes fueron las situaciones de compra-venta. Actualmente en primer grado aparecen actividades de compra-venta en diferentes momentos del programa (al trabajar con números de una y dos cifras, por ejemplo),[10] aunque desde los primeros libros de texto gratuitos (que datan de 1960) se planteaban problemas de este estilo.

Otra característica de la práctica de esta maestra fue el *uso de material didáctico diverso*, aprovechando con frecuencia material de desecho, como veremos más adelante. El uso de material concreto como apoyo para las actividades de matemáticas parecía el resultado de una mezcla de supuestos psicológicos del aprendizaje que esta maestra vivió y desarrolló a través de su formación, de su experiencia profesional y de las reformas educativas que le tocó vivir. La propuesta oficial incluye un libro con material recortable para apoyar el manejo de los contenidos y se utilizan en las lecciones o independientemente de ellas. Ávila (1996, p. 338), al estudiar el uso que se da a los libros de texto gratuito en tres grados escolares, resalta la aceptación del material recortable y refiere en su uso el encuentro de dos posturas pedagógicas: la constructivista y la derivada de la tradición escolar, que confluyen en el uso de materiales. El caso de la maestra Elsa parece coincidir con esta afirmación.

Asimismo, la *lectura* y la *escritura* siempre estuvieron presentes en las clases de matemáticas. Las características escolares de los niños y los objetivos propios del

[10] Este tipo de situaciones aparecen con frecuencia en el discurso magisterial. Véanse, por ejemplo, los relatos de cuatro maestros en los que aparece esta reflexión en Arenivar, Palacios y Herrera (1992) y en Tlaseca (coord.) (1997), y son frecuentes en las aulas por ser consideradas actividades significativas para los niños en las que se pueden plantear/ejercitar distintas operaciones aritméticas.

grado hacían necesaria esta vinculación, y la necesidad de lograr el dominio de la lengua escrita llevaba a aprovechar todos los espacios posibles para desarrollarla.

Finalmente, y en concordancia con el uso de cantos, los *juegos,*[11] o actividades que parecían serlo, también se hicieron presentes en este grado escolar pues la maestra reconocía la necesidad de jugar que tienen los niños de esta edad y consideraba indispensable utilizar el juego como recurso didáctico. La propuesta educativa vigente propone el uso del juego en todas las áreas de trabajo, y la maestra Elsa coincidía abiertamente con esta postura, ya que su experiencia le permitía reconocerla como fundamental y válida. A continuación, a partir de algunos extractos de clase, se presenta la expresión de estas constantes.

EL TRABAJO EN EL SALÓN DE CLASES: LA ORGANIZACIÓN DE LA TAREA

Al inicio de la jornada, los niños del grupo de la maestra Elsa sabían que mientras ella acomodaba en el escritorio los materiales que utilizarían en el resto del día, ellos invariablemente debían hacer un dibujo. Sabían también que al terminar el dibujo podían ir a mostrárselo y presentarle la tarea para que se las calificara. En el salón, se expresaba una ritualización de la interacción (Rockwell, 1995, pp. 37-39), es decir, una organización del trabajo que partía de ciertos acuerdos implícitos que permitían que las tareas se desarrollaran de cierta manera y se realizaran más fácilmente en el grupo las actividades del día. En ciertas ocasiones, estos momentos iniciales del trabajo cotidiano en el aula eran aprovechados por algún niño para hacer ambas actividades: dibujar y terminar la tarea.

Con frecuencia, la maestra llevaba listo el material didáctico que utilizaría durante la jornada para trabajar los diferentes temas con los niños: recortaba previamente letras, números, figuras de papel decorativo y propaganda comercial y, a veces, incluso llevaba recortado el material recortable de todos y cada uno de los niños si consideraba que recortarlo requería mayor precisión que la que podían tener los niños, incluso podía llevarlo enmicado para conservarlo mejor.[12]

[11] Bishop (1999) señala el juego como una de las seis actividades matemáticas que se encuentran en todas las culturas. El juego se encontró en las clases de las otras maestras observadas y se ha documentado también en relatos de experiencias de maestros, véase, por ejemplo, Tlaseca (coord.) (1997).

[12] Al respecto, la maestra señaló que no solicitaba con frecuencia el apoyo de los padres para esta actividad, tal y como se sugiere en el libro, pues los papás tardaban en mandar el material y eso afectaba su trabajo.

Como ya se mencionó, utilizaba material desechable como apoyo para las diferentes actividades que proponía:

> Acaban de trabajar la lección de la tienda de don Luis (SEP, 1993, p. 90). Reparte veinte monedas de papel de un peso a cada niño, además de quince monedas que ya tenían. Jorge dice que él tiene dieciséis monedas. Ma.: "Regréseme una", le pide. Enseguida la maestra va a su escritorio y saca de un estante retazos de tela (como muestrarios de telas para trajes) y exclama: "¡Se abre la tienda!" Los niños gritan entusiasmados: "¡Eeeeh!". Ma.: "Cuenten cuántas monedas tienen". Ns.: "Veinte". Ma.: "Yo les di veinte, más quince que ya tenían... Tres decenas más cinco..." Jorge dice: "Veinte más cinco, veinte más cinco..." Ma.: "Me van a pagar de verdad, ¿eh niñitos?", les indica que les va a vender telas: "Esta tienda es de telas y hay diferentes precios, así que el que no sabe va a perder". Los niños miran sus monedas y las telas de la maestra. Ma., en voz más alta: "Se venden telas de diferentes precios" (lo dice como cantando). "Guarden las monedas en su monedero (hicieron uno de papiroflexia). Voy a llamar por filas y hacen cola, porque ésta es una tienda ordenada. ¿Quiénes ya están listos? No vayan a perder las monedas. Fila tres puede venir a comprar". (Hasta este momento la maestra no ha puesto precios.)

Durante este fragmento de la clase, se muestra cómo la maestra planteó una actividad complementaria a la propuesta en el libro de texto que suponía el uso de materiales diversos: los que se aprovechaban del material oficial (monedas de papel incluidas en el libro de texto gratuito recortable), material de desecho (recortes de tela que la maestra llevaba y "vendía" a los niños) y material elaborado por los niños a instancias de la maestra (monedero de papel). Es de llamar la atención el uso de materiales concretos en la enseñanza de la matemática.

Pero también en este evento puede verse que se plantea una situación de compra-venta que intentaba hacer más familiar el aprendizaje y que tenía relación con otra situación de compra-venta planteada en la lección del libro que la antecedió. Con esta actividad, al "comprar", los niños obtenían un objeto real que los entusiasmaba e impulsaba a participar en la situación más de una vez, pues, además, pagaban "de verdad".

Asimismo, se hizo evidente el ambiente que la maestra propiciaba en cada clase: entusiasmo e interés por la actividad y atención al orden de participación, la estructura de participación social:[13] *"Voy a llamar por filas y hacen cola por-*

[13] Véase Erickson (1993, p. 334).

que esta es una tienda ordenada", decía la maestra. Cuando los niños pasaban a comprar, la actividad era individual y se adaptaba a cada "comprador", pues la maestra improvisaba los costos de las diferentes telas poniendo precios de acuerdo con las posibilidades de cada niño. Si bien el interés inicial de la maestra era que los niños compraran más de una tela para que sumaran, que el resultado fuera de más de diez pesos y tuvieran que desagregar y verificar el cambio, a veces los niños sólo querían una tela y con esa sola tela se cumplía la posibilidad de "desagregar" una moneda; los niños provocaban una variación en la actividad propuesta, pues no sumaban.

Tres años después, se observaron otras variantes en este tipo de actividades en el momento de hacer la compra:

> La maestra Elsa dice a los niños: "Vamos a jugar a la tiendita. ¿Se acuerdan que cuando había dulces jugábamos mucho a la tiendita? Sí, nos daban billetes de cinco... Entonces vamos a poner un banco, que gane el banco. Solicito dos personas: una para el banco y otra para dar las notas. Dejen sacar los pesos", dice refiriéndose a los pesos de papel que han utilizado en otras ocasiones. "Van a manejar monedas de 10 pesos" (...) "Primero que todo vamos a poner los letreros, quiero que lo lean, ya saben, hay que practicar la lectura". Diana: "Ya casi sé leer, porque tengo mi libro". La maestra pega en el pizarrón un letrero que dice: "El mejor día de la plaza en el mercado. Compruébelo". Una vez que lo pega, junto con el grupo lee poco a poco el letrero y al terminar dice: "Esta tienda vende verduras, frutas, pero tienen que comprar". Agrega que les va a dar a cada quien un papelito que será la "nota". En cada nota van a poner dos o tres productos, harán la "cuenta", un niño se las va a revisar y después irán al banco a pagar lo que compraron. "Entonces tengo que vendo elotes a cinco pesos", dice mientras pega una ilustración de un elote (ilustración que tomó de propaganda comercial) y escribe la cantidad con el signo de pesos. Varios niños exclaman que están muy baratos. Ma.: "Sí, bueno, están regalados, es que es día de oferta". Ma.: "¿Les gustan los nopales?" Ns.: "Sííí". Ma.: "Pero guisados. Estos los tienen que comprar para que los guisen". Jesús comenta con su compañero de banca: "Están bien de precio porque son cuatro por nueve". Así continúa la maestra colocando figuras con precio y haciendo comentarios que mantienen la atención de los niños, están entusiasmados como si lo que ven realmente lo tuviesen allí.

La actividad remitía a una situación conocida para los niños (un mercado) y el salón se transformó en una representación, como con el grupo anterior. Tenían "dinero" para comprar lo que querían, una nota para formalizar la "cuenta" y un "banco" donde había que pagar y que era controlado por un compañero. Una vez planteada la actividad, cada niño escribía en su cuaderno lo que deseaba comprar. Además de escribir el precio, la maestra les pedía que dibujaran lo que compraban o escribieran los nombres de los productos. Lo que resultaba en los cuadernos de los niños eran representaciones de las sumas, tanto en forma vertical como horizontal, con los signos de las operaciones, el signo de pesos y, a veces, los nombres de los productos "comprados". Lo interesante de esta situación fue no sólo la representación de una situación cotidiana, sino el entusiasmo que provocó en los niños que se formaban para que les fueran revisadas sus notas para poder pagar e, incluso en algunos casos, planteaban otra compra sin que al final recibieran producto alguno, es decir, realizando una compra "virtual". En casos así, la lengua escrita se hacía presente y la inclusión de un nuevo signo, $, implicaba su manejo, otorgándole significado al escribir una operación en forma horizontal o vertical (véase figura 1).

Resulta interesante considerar que, en ocasiones, el material que se utilizaba suponía que tanto la maestra como los niños obviaran ciertas características que tenían frente a sí. Un ejemplo de esto es cuando, para trabajar las decenas, la maestra repartió billetes de juguete que tenían escritas las cantidades con un valor ya no vigente, lo que la obligó a tachar los ceros que estorbaban en la actividad, para poder utilizarlos con el fin que buscaba (figura 2).

Con estas adaptaciones, se requería dominar las reglas del juego (Rockwell, 1995, p. 49), o lo que Brousseau llama el contrato didáctico (Brousseau, 1986, pp. 276-279; 1998, p. 61 y Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, pp. 61-62).

¿QUÉ ES IMPORTANTE PARA APRENDER MATEMÁTICAS? LOS CONJUNTOS

Los conjuntos, como tales, oficialmente ya no se manejan en primaria, pero este contenido no está reñido con los actuales y es uno de los que más arraigo parece haber tenido en los maestros en la reforma de la década de 1970 (Rockwell, 1995, p. 38),[14] a pesar de las resistencias que se dieron al introducirlos.

[14] Ejemplos de este arraigo los encontramos, por ejemplo, en el discurso y práctica de otras maestras (Carvajal, 1997) y en su discurso (Tlaseca, coord., 1997).

Figura 1 Uso del signo $ y dibujo en situaciones de suma

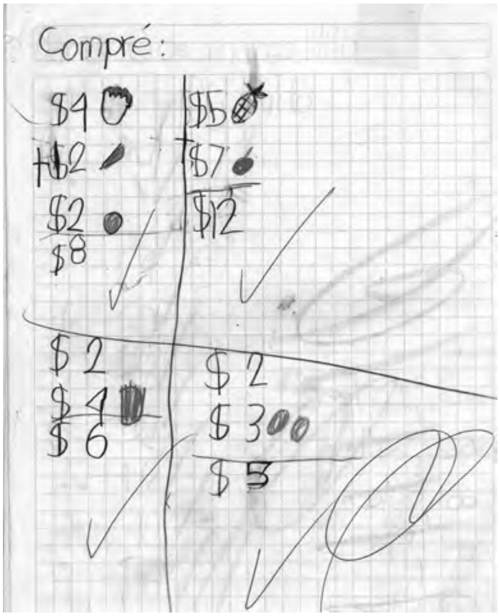


Figura 2 Adaptación del material utilizado

A la maestra Elsa, las actividades con conjuntos y el conteo le parecían importantes para trabajar en primer grado. Consideraba que el empleo de conjuntos era una de las actividades que ayudaban a los niños de ese grado a aprender matemáticas y reconocía usarlos menos que antes, en particular, cierta simbología que se introdujo en la década de 1970 (los signos "mayor que", "menor que", por ejemplo). Durante el trabajo de campo se observó que les presentaba a los niños conjuntos de objetos que fueran iguales (todos del mismo color, de la misma forma, por ejemplo). Por la manera en que expresaba cómo los trabajaba, parece que era ella quien decidía de qué manera hacer los conjuntos, a veces yuxtaponiendo criterios clasificatorios:

> Aunque sean de diferente color, pero que sean de la misma forma, puros triangulitos grandes, medianos, chiquitos, que peguen, y acá vas a pegar todos los que sean del mismo color que también va variando.

La idea de conjunto que manejaba suponía que los elementos que los constituían fuesen iguales y no importaba que, al unir esos conjuntos y de allí derivar la suma, los elementos cambiaran. Importante era trazar *"los diagramas"*[15] y para ello les proporcionaba la tapa de un frasco para que trazaran el círculo, parte central del diagrama, el cual podía variar de tamaño *"según lo que fueran a hacer"*. Evidentemente, uno de los usos de los conjuntos era el conocimiento de los números.

Sin embargo, la idea de conjunto variaba no sólo en cuanto a su definición como conjunto, sino también en cuanto a la cantidad de elementos para considerarlos así. Al inicio del año, al trabajar con números menores que 10, todos los conjuntos que formaban podían trazarse en el cuaderno como diagramas; pero una vez que llegaban al manejo de las decenas, eran éstas las que se representaban con diagramas, los conjuntos de menos de diez elementos ya no parecían alcanzar el estatus de conjunto, al menos con un diagrama que los delimitara. Un ejemplo de esta diferenciación se encontró en una actividad "alternativa"[16] al manejo de planas de series numéricas que la maestra Elsa utilizó con sus alumnos (figura 3).

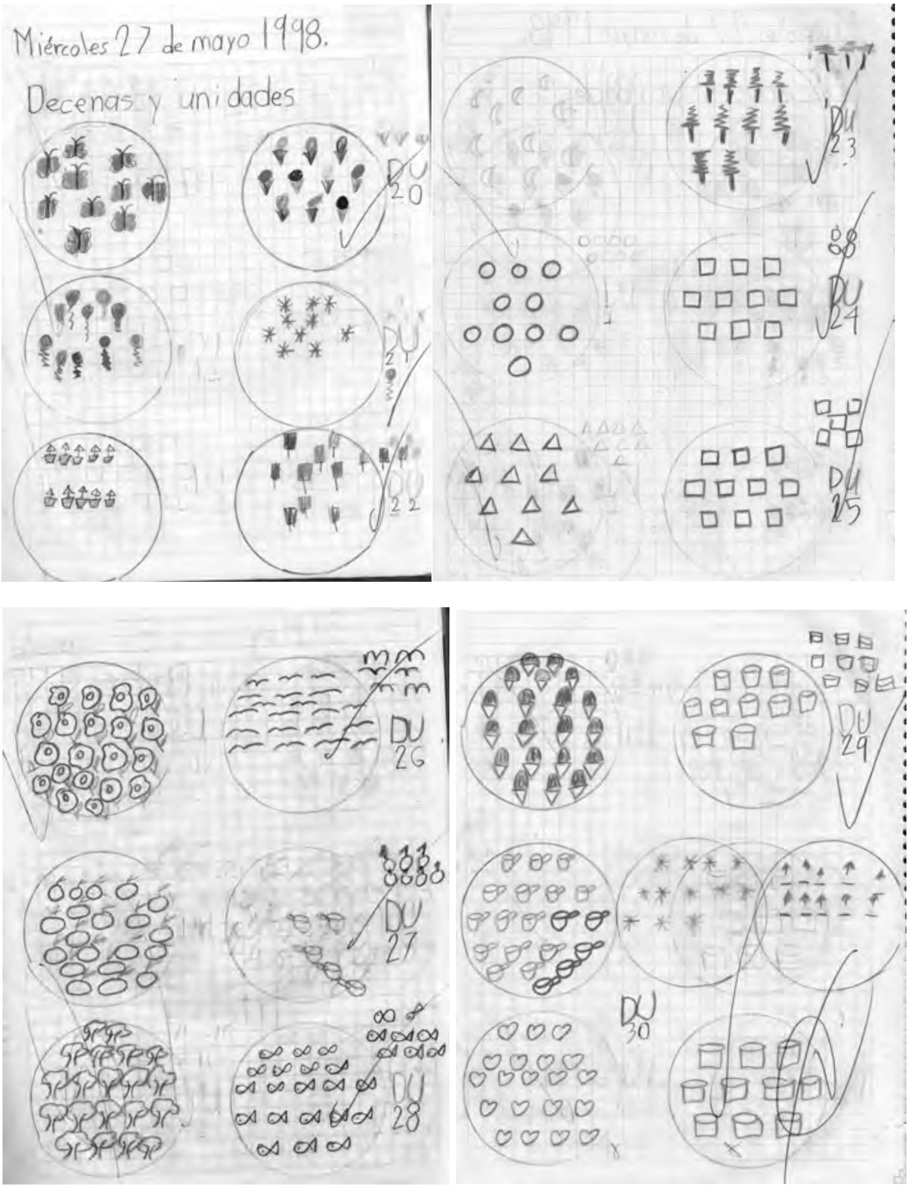
En las representaciones que se solicitaban al trabajar la serie del 20 al 30 se pueden apreciar al menos tres cuestiones: *1)* Los conjuntos que se delimitaban con un círculo eran sólo los de diez o veinte elementos, los elementos que formaban parte de los números, pero que eran menores que diez, estaban fuera de los diagramas; *2)* las decenas y unidades estaban formadas por elementos homogéneos, si bien, vistos esos conjuntos como uno solo (la representación del número en cuestión), estaban formados por elementos heterogéneos; *3)* la ocasión permitía afianzar los conceptos de unidades y decenas, tanto en la representación gráfica (con los dibujos de los elementos), como al escribir los números correspondientes (donde las letras D y U representaban decenas y unidades respectivamente).

---

[15] Diagramas de Venn.

[16] Se consideró como actividad alternativa, mientras las maestras buscaban otras formas de ejercitar las series numéricas y otros conocimientos que consideraban importantes de reforzar, pero lo hacían con estrategias diferentes a las clásicas planas de series numéricas.

Figura 3 Serie del 20 al 30



Es de destacarse que los conjuntos a veces se representaban sin el límite gráfico que parecía privilegiarse y la interpretación de los niños podía variar también. En una ocasión, unos niños discutían acerca de una tarea que les había dejado la maestra, la cual consistía en hacer una plana con diez bolitas y la palabra y el número diez:

> Están haciendo el dibujo del día. Hermilo le enseña su tarea a Roberto: una página de cuadro grande en la que dibujó con lápiz varias veces dos cruces, después el número diez y la palabra diez. Roberto le dice: "No, así no era", al tiempo que le muestra la página con su tarea (en este caso tiene dibujadas diez cruces de colores, el número 10 y la palabra diez. Hermilo le dice: "¿De colores?" Roberto parece desconcertado por la respuesta, y unos segundos después responde que tenían que haber puesto las cruces como las puso la maestra en el pizarrón: "Tres arriba, tres abajo y cuatro enmedio".

Hermilo interpretó la tarea de una manera distinta a la de Roberto: dibujó cruces, escribió el número 10 y la palabra diez, aunque las cruces no necesariamente representaban lo que escribió. Al comparar su trabajo con el de Roberto, éste le comenta que así no era el trabajo. La pregunta de Hermilo sugiere una concentración en la forma de la actividad (la diferencia es el color) y Roberto, después de un momento de confusión, le explica la diferencia que pasa por la cantidad pero también por la forma.

Como los conjuntos, la maestra incluía en el programa otros contenidos por considerarlos necesarios y posibles de ser trabajados con sus alumnos, por ejemplo, los números romanos del uno al diez, que aprovechaba para enseñar el manejo del reloj, así como la escritura de los números ordinales.

LA IMPORTANCIA DEL CONTEO EN PRIMER GRADO

Al opinar sobre el libro de texto gratuito de matemáticas, la maestra Elsa expresó: "*Lo que me gusta es que hay mucho para contar. Y eso es muy importante, el conteo*", por ello permitía el uso de los dedos para que los niños contaran e incluso decía que "*deben manejar bastante sus dedos*". Apoyaba el aprendizaje de la serie numérica con cantos y usando las manos.

Cuando quería que contaran y se apoyaran en sus dedos hablaba de *"la calculadora de dedos"* y, en alguna ocasión, les llevó envases vacíos de pastillas, los rellenaron con bolitas de plastilina y los convirtieron en *"calculadoras"* para contar. Los niños estaban concentrados contando con su *"calculadora"*:

> La maestra pregunta a los niños si trajeron plastilina y casi todos contestan que sí. Ma.: "Los que tienen les pueden dar a los que no". Indica que van a hacer bolitas de plastilina, les dará unos envases vacíos de medicamentos (pastilleros) que tienen 10 hoyitos, "una decena" completa. Na.: "¿Ya podemos empezar, maestra, a hacer las bolitas?" Los niños sacan su plastilina y la colocan en las mesas. La maestra continúa mostrándoles los envases de los que habla: "Los van a rellenar. Son 10, o sea que los van a rellenar con bolitas de colores o de un solo color, como gusten (...) allí calculan de qué tamaño se hacen las bolitas, ¿eh?" Empiezan a trabajar. Un niño comenta a otro mostrándole su pastillero ya con unas bolitas dentro: "Mira, ¿verdad que parecen pastillas?" Los niños hacen bolitas de un solo color o de diferentes colores, la maestra les regala plastilina a quienes no llevaron. Están entretenidos, sonríen, comentan entre ellos, se mueven. Ma.: "Pero apachúrrenlas bien, así, para que se queden las bolitas, para que no se caigan cuando las golpeen" (...) Los niños muestran los pastilleros ya rellenos a la maestra, quien les dice que están "muy bien", que las presionen para mantenerlas en los hoyitos. (...) Ma.: "Con esta decena, niñitos, van a trabajar la suma. ¿Sí? Cuando terminen saquen su cuaderno de matemáticas". Un niño exclama de contento: "¡Eeeeh!" Ma.: "Ahorita están haciendo una decena de pastillas, ¿sí? Entonces con esa decena vamos a trabajar la suma y allí van contando. En vez de con los dedos, cuentan con las pastillitas para que todos saquen diez". Guillermo: "Una calculadora nueva". Ma.: (retomando lo que dijo Guillermo): "Es una calculadora nueva". "Ay", dicen algunos, como sorprendidos agradablemente. Ma.: "Hemos usado los dedos, ahora vamos a usar esta, este pastillero, portapastillas".

Para apoyar el conteo y la suma, la maestra Elsa promovía el uso de una "calculadora de dedos". Los pastilleros fue una idea que le permitía utilizar un material para que los niños abandonaran, poco a poco y de manera casi natural, el uso de los dedos con otra "calculadora" que les permitiese hacerlo.[17]

Al observar el uso de diferentes apoyos para el conteo (dedos, pastilleros, frijolitos...) podría pensarse que algunos materiales –como el pastillero– son muy sofisticados para la función que cumplen y podrían llegar a ser valorados como po-

[17] La maestra Elsa introdujo la calculadora en el salón de clases en segundo año.

co pertinentes. Sin embargo, en el aula, el sentido e importancia que ciertas acciones y decisiones adquieren, rebasan las expectativas y parámetros didácticos previstos y podemos ver, como en este caso, que hay decisiones didácticas que los maestros toman para apoyar el aprendizaje. Desde un análisis estrictamente didáctico podrían resultar actividades de poca valía, pero para el desarrollo de la actividad escolar en general y del clima que es necesario generar en el salón de clases para que los niños se involucren en la tarea, pueden resultar básicos tanto para los maestros como para los alumnos. En casos como éste, se observó que los niños literalmente "se metían" en la actividad, al tiempo que se promovía ir dejando de lado el uso de los dedos "*para que no se convierta en un vicio*", según dijo la maestra.

Al preguntar sobre la importancia que para la maestra Elsa tenía el conteo, explicó que no era suficiente para que los niños comprendieran lo que son los números, pues muchas veces los niños podían enumerar una serie, pero eso no significaba que supiesen los números:

> El niño debe entender, comprender qué es el número, manejarlo, contar, porque se equivocan (al contar, refiriéndose a controlar el conteo) (...) Es saberlo manejar, saber cuántos elementos tiene o cuántas decenas tiene o cuántos conjuntos tiene, *¿sí?*

A lo largo de su trabajo como maestra de este ciclo escolar, había notado que los niños emplean diferentes estrategias al utilizar los dedos para contar: había quienes al sumar contaban de uno en uno los dedos, otros que partían de uno de los números y representaban con sus dedos el otro número y continuaban el conteo tomando como base el primer número. Es algo que no se explicaba, pero que había observado y le llamaba la atención.[18]

Para ella, saber escribir los números, distinguirlos, no era suficiente para entenderlos realmente, pues ello implicaría, además, saber diferentes maneras aditivas de descomponer los números: *"digamos, que el cincuenta tiene dos veces veinticinco, cuarenta más diez. Eso es lo que el niño debe manejar para entender completamente las cantidades (...) saber cuántos elementos tiene y cuántas decenas tiene o cuántos, ¿sí? conjuntos tiene"*. Así puede explicarse el énfasis que hacía en la diferenciación entre unidades y decenas en diferentes actividades

[18] Esta observación la señalan, por ejemplo, Piaget y Szemirska (1975) al trabajar la génesis del número en el niño; Baroody (1988) y Block (1996).

matemáticas a lo largo del año, como en el caso del ejemplo de la tiendita, visto con anterioridad.

LA EVALUACIÓN Y LAS CALIFICACIONES[19]

En la escuela circulan las calificaciones y la evaluación como algo cotidiano y constitutivo y la evaluación ha sido un tema de recurrente debate y duda entre quienes en algún momento tienen que realizarla. Para la maestra Elsa también era fuente de decisiones difíciles: "*Evaluar no es una cosa sencilla*", sostenía.

Al hacer referencia a actividades en las que los niños hacían lo que ella nombraba "composiciones"[20] con figuras geométricas, señaló que era muy difícil evaluar ese tipo de trabajos, pues la creatividad era un elemento central en ellas y quien en otras actividades mostraba bajo rendimiento, en actividades así hacían composiciones que, a decir de la maestra, merecían un diez. Así, la decisión respecto a qué calificación otorgar se dificultaba.

Pero otro elemento central en este aspecto eran los padres. El sentido que los padres otorgan a las evaluaciones diarias que los maestros asignan a los niños puede diferir e influir fuertemente en la relación y expectativas respecto a las calificaciones mensuales que sus hijos logran. Una decisión que la maestra Elsa tomó fue calificar a veces con número y a veces con letra (MB, B o "paloma") y no sólo utilizar calificaciones numéricas, para no crearles falsas expectativas a los padres, pues, decía, a veces éstos piensan que si su hijo tiene puro diez en el cuaderno, eso tendrá en la boleta y no, ella toma en cuenta "*la participación, el manejo de las matemáticas y el trabajo que desarrollen en el libro, en la clase y en el cua*derno". Dificultad para evaluar que se agranda con las corrientes educativas en boga.[21]

[19] Para un ejemplo de este mismo estudio, con otra maestra, sobre una de las maneras en que la calificación afecta el desarrollo de una actividad, véase Carvajal (1996, pp. 19-20).

[20] Las composiciones consistían en figuras geométricas con las cuales se armaban figuras de animales y objetos diversos.

[21] Ejemplos de expresiones de esta dificultad se encuentran en los relatos sobre evaluación de los maestros que se presentan en Tlaseca (coord.) (1997) y en Casanova (1997).

REFLEXIONES FINALES

Con base en los resultados encontrados y que aquí se muestran centralmente desde un caso en particular, resulta necesario plantear ciertas reflexiones respecto a los sentidos que la actividad docente imprime al trabajo con las matemáticas en primaria, especialmente en el primer grado y respecto a la metodología utilizada en la investigación.

En primer lugar, habría que destacar que las matemáticas se consideran uno de los contenidos centrales de la escuela primaria y por ello se aprovechan todas las circunstancias que permiten afianzar los conocimientos que se están tratando de enseñar, más allá de los momentos establecidos en el interior de cada aula para trabajar con matemáticas. Si bien el contenido matemático a veces es el aspecto a partir del cual se estructura la actividad académica, en otras muchas ocasiones es el contexto escolar el que parece definir la tarea: los niños, la necesidad de mantener su atención, de variar las actividades, de promover su participación.

En segundo lugar, y como se ha mostrado, acercarse a las escuelas y maestros lleva a repensar el valor que tiene el uso de materiales diversos en la práctica, el contenido, las actividades y la evaluación en la escuela. Resulta necesario el acercamiento a las prácticas escolares en matemáticas para recuperar los significados, analogías y peso que maestros, alumnos, padres y otros sujetos construyen en relación con los contenidos escolares y con las propuestas curriculares. A partir del reconocimiento de la diversidad y de las adaptaciones y supuestos que subyacen en la práctica, puede entenderse mejor la realidad escolar para diseñar alternativas de actualización y formación más sólidas.

Por otro lado, al analizar el trabajo de la maestra Elsa, con experiencia en primer grado, surge la pregunta de si la experiencia y especialización en grados específicos dan una visión especial al quehacer docente en todas las áreas del grado o ciclo escolar en cuestión, en cuanto a que pudiera lograrse una visión más profunda de los niños, sus intereses y las actividades que pueden funcionar con ellos.

En relación con la metodología, es sabido que la búsqueda de alternativas para mejorar la enseñanza de las matemáticas ha permitido el desarrollo de acercamientos metodológicos y téoricos distintos. Se han estudiado las prácticas escolares en matemáticas en el nivel de primaria, tanto desde las matemáticas y su enseñanza con énfasis en su didáctica,[22] como desde perspectivas etnometodo-

[22] En este caso, me refiero a perspectivas didácticas en el sentido que señala la escuela francesa: "Actualmente, la didáctica de las matemáticas, sin negar la importancia de los facto-

lógicas y culturales para conocerla y comprenderla. En el primer tipo de acercamientos, una de las intenciones centrales ha sido diseñar propuestas didácticas alternativas (véanse, por ejemplo, Lerner, 1994; Moreno, 1996; Martínez, 1997; y Solares, 1999) y con base en ello, proponer vías diversas de formación y de actualización para profesores (Block, Fuenlabrada y Nemirovsky, 1989; Fuenlabrada, 1994; y Block (coord.), 1995). El segundo tipo de acercamientos (culturales y etnometodólogicos) rescata de manera especial las interacciones que se establecen en los procesos de enseñanza de las matemáticas en la escuela y/o fuera de ella (Erickson, 1982; Zaslavzky, 1988; y Carraher, Carraher y Schliemann, 1991), así como los saberes matemáticos de los sujetos involucrados desde perspectivas didácticas (Ávalos, 1996) o culturales de la educación matemática (Bishop, 1988; y D'Ambrosio, 1995). En estos casos, el reconocimiento de la cultura matemática de los sujetos escolares (en especial de los niños) es uno de los puntos centrales de análisis.

No obstante, a partir de estudios como el reseñado, se fortalece la necesidad de promover un trabajo metodológico que recupere los conocimientos de la didáctica en matemáticas y del trabajo docente, para recrear la realidad escolar de una manera mucho más cercana a la complejidad que la caracteriza, así como para formular acercamientos analíticos que aún no se han logrado construir con suficiente claridad y fuerza. De esta manera, podrá contarse con mayores elementos que permitan plantear alternativas viables para el mejoramiento de la educación matemática en la escuela.

Finalmente, una de las interrogantes que surgieron de esta investigación y que es actualmente preocupación central de quien esto escribe es: ¿Qué y cómo se define la renovación de prácticas en matemáticas en el trabajo docente?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arenivar, José P., Alfredo Palacios y Alfonso Herrera (1992), *Primer concurso de narrativa breve sobre el tema La vida en la escuela* (obra premiada), vol. 1, México, Fundación SNTE para la Cultura del Maestro Mexicano.

res psicológicos y motivacionales, ya no presupone que las explicaciones últimas de los fenómenos didácticos deban buscarse en dichos factores, que pasan así a ser considerados como consecuencias de determinados fenómenos, y no como sus causas. (...) Las explicaciones didácticas deben partir de la descripción de las actividades matemáticas que realizan conjuntamente profesores y alumnos en el aula y fuera de ella, así como de las cláusulas del contrato didáctico que rigen esta actividad" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, pp. 61-62).

Ávalos, Alejandra (1996), *Concepciones de los docentes sobre la geometría, su enseñanza y su aprendizaje en un curso de actualización,* Tesis de maestría, México, DIE-Cinvestav-IPN.

Ávila, Alicia (1996), "Los usos reconocidos de los textos de matemáticas", *Revista Mexicana de Investigación Educativa,* vol. I, núm. 2, pp. 315-342.

Baroody, Arthur J. (1988), *El pensamiento matemático de los niños,* España, Aprendizaje Visor-MEC.

Bishop, Alan (1988), "Mathematics Education in its Cultural Contexts", en Alan Bishop (ed.), *Mathematics, Education and Culture,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

—— (1999), *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural,* Argentina, Paidós (Temas de educación).

Block, David (coord.) (1995), *La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Taller para maestros,* México, Secretaría de Educación Pública (Programa Nacional de Actualización Permanente).

—— (1996), "Comparar, igualar, comunicar en preescolar. Análisis de situaciones didácticas", *Básica. Revista de la escuela y del maestro,* vol. 11, mayo-junio, México, Fundación SNTE para la Cultura del Maestro Mexicano, pp. 21-31.

Block, David, Irma Fuenlabrada (coords.), David Block, Alicia Carvajal, Irma Fuenlabrada y Patricia Martínez (autores), Juan Leove Ortega (col.) (1993), *Matemáticas. Primer grado,* México, Secretaría de Educación Pública.

Block, David, Irma Fuenlabrada y Myriam Nemirovsky (coords.) (1989), *Formación de profesores sobre áreas fundamentales de la educación básica,* Informe final ante CONACYT, México, DIE-Cinvestav-IPN.

Brousseau, Guy (1986), *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques,* Tesis de doctorado, Francia, Université de Bordeaux.

—— (1990), "Le contrat didactique: le milieu", *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 9, núm. 3, pp. 308-336.

—— (1994), "Los diferentes roles del maestro", en C. Parra e I. Sáiz (comps.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones,* Buenos Aires, Paidós Educador.

—— (1998), *Théorie des situations didactiques,* Grenoble, La Pensée Sauvage.

—— (2000), "Educación y didáctica de las matemáticas", *Educación matemática,* vol. 12, núm. 10 (abril), pp. 5-38.

Carraher, Terezinha, David Carraher y Analúcia Schliemann (1991), *En la vida diez, en la escuela cero,* México, Siglo XXI.

Carvajal, Alicia (1996), "El uso del nuevo libro de texto de primer grado. Una mirada a las matemáticas en la escuela", *Básica. Revista de la escuela y del maestro,* vol. 11, mayo-junio, México, Fundación SNTE para la Cultura del Maestro Mexicano, pp. 15-20.

Casanova, María Antonia (1997), "El problema de la evaluación en el área de matemáticas", *Educación Matemática,* vol. 9, núm. 3, pp. 35-43.

Chevallard, Yves, Marianna Bosch y Joseph Gascón (1997), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje,* Barcelona, Horsori.

D'Ambrosio, Ubiratán (1995), "Where does Ethnomathematics Stand Nowadays?", *For the Learning of Mathematics,* vol. 17, núm. 2, junio, Canada, FLM Publishing Association, pp. 13-17.

—— (1997), "Globalización, educación multicultural y etnomatemática", en *Conocimiento matemático en la educación de niños y jóvenes,* Brasil, UNESCO-Santiago.

Erickson, Frederick (1993), "El discurso en el aula como improvisación: las relaciones entre estructura de la tarea académica y la estructura de la participación social en clase", en Honorio Velasco, F. Javier García Castaño y Ángel Díaz, *Lecturas de Antropología para educadores,* Madrid, Trotta, pp. 325-353.

—— (1996), "Going for the Zone: The Social and Cognitive Ecology of Teacher-Student Interaction in Classroom Conversations", en Deborah Hicks (ed.), *Discourse, Learning and Schooling,* Cambridge University Press, pp. 29-62.

Ezpeleta, Justa (1986), "La escuelas y los maestros: entre el supuesto y la deducción", *Cuadernos de Investigación Educativa,* núm. 20, México, DIE-Cinvestav-IPN.

Fuenlabrada, Irma (1994), "La geometría en la escuela primaria", *Matemáticas 8,* México, PAM, SEP.

Geertz, Clifford (1987), *La interpretación de las culturas,* México, Gedisa.

Hammersley M. y P. Atkinson (1994), *Etnografía. Métodos de investigación,* Buenos Aires, Paidós Básica.

Lerner, Delia (1994), *Las matemáticas en la escuela primaria. Aquí y ahora,* Argentina, Aique (Didáctica).

Luna Elizarrarás, María Eugenia (1997), *Los alumnos como referente básico en la organización cotidiana del trabajo en el aula,* Tesis de maestría, México, DIE-Cinvestav-IPN (tesis DIE 21).

Martínez, Patricia (1997), *Desarrollo de procedimientos para dividir. Estudio didáctico de la noción de división en la escuela primaria,* Tesis de maestría, México, DIE-Cinvestav-IPN.

Moreno, Eva (1996), *Introducción a la noción de división en la escuela primaria. Un estudio didáctico,* Tesis de maestría, México, DIE-Cinvestav-IPN.

Piaget, Jean y Alina Szerminska (1975), *Génesis del número en el niño,* Buenos Aires, Guadalupe (Biblioteca Pedagógica).
Rockwell, Elsie (1987), "Reflexiones sobre el proceso de trabajo etnográfico", México, DIE-Cinvestav-IPN.
—— (1994), "La etnografía como conocimiento local", en M. Rueda, G. Delgado y Z. Jacobo, *La etnografía en educación,* México, CISE-UNAM.
—— (1995), "De huellas, bardas y veredas", en E. Rockwell, *La escuela cotidiana,* México, Fondo de Cultura Económica.
Secretaría de Educación Pública (1993), *Plan y programas de estudio. Primaria,* México, SEP.
Solares, Diana (1999), *Aproximaciones a la fracción como cociente: un estudio didáctico,* Tesis de maestría, México, DIE-Cinvestav-IPN.
Tlaseca, Martha (coord.) (1997), *Reflexiones, saberes y propuestas de maestros sobre la enseñanza de las matemáticas,* México, Universidad Pedagógica Nacional.
Zaslavzky, Claudia (1991), "World Cultures in the Mathematics Class", *For the Learning of Mathematics,* vol. 11, núm. 2, Canadá, FLM Publishing Association, pp. 32-36.

DATOS DE LA AUTORA

Alicia L. Carvajal Juárez
Área Académica Diversidad e Interculturalidad, Universidad Pedagógica Nacional, México
acarvaj@upn.mx

El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática[1]

Gregoria Guillén Soler

Resumen: En este trabajo comenzamos con una breve descripción del modelo de razonamiento de Van Hiele adaptado a la geometría de los sólidos. A continuación, a partir de la descripción que hace Treffers (1987) del Wiscobas (currículo de primaria holandés) indicamos cómo han ido evolucionando las ideas plasmadas en el modelo de Van Hiele como consecuencia de la investigación realizada en la escuela holandesa. Entendiendo como razonamientos lógicos procesos matemáticos como análisis, clasificación, definición, conjetura, generalización y demostración, nos fijamos en las acciones que corresponden a describir, clasificar, definir y demostrar, como componentes de la práctica matemática para avanzar en la progresiva matematización; y centrándonos en *la descripción y análisis* de objetos geométricos planteamos algunas cuestiones cuyas respuestas proporcionan una gran variedad de situaciones didácticas en las que están implicadas acciones asociadas a estos procesos matemáticos.

Palabras clave: Modelo de Van Hiele, geometría de los sólidos, procesos matemáticos, descripción de sólidos.

Abstract: In this report we start with a brief description of Van Hiele's model of reasoning adapted to the geometry of solids. Then, taking as a starting point the description of Wiscobas (curriculum of Dutch Primary School) in Treffers (1987), we indicate how the ideas conveyed in Van Hiele's model have been developing as a consequence of the research carried out in the Dutch School. Taking logical reasonings as mathematical processes such as analysis, classification, definition, conjecture, generalization and demonstration, we focus on the actions that correspond to describing, classifying, defining and demonstrating as components of the mathematical praxis to advance in the progressive mathematising; focusing on the description and analysis of geometric objects, we set out some questions whose answers provide a great variety of didactic situations in which are involved actions related to these mathematical processes.

Keywords: Van Hiele's model of reasoning, geometry of solids, mathematical processes, description of solids.

PRESENTACIÓN

El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele para la geometría plana ha sido ampliamente investigado (véanse, por ejemplo, Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys *et al.*, 1988). Con respecto a la aplicación del modelo para la geometría de los sólidos, se ha realizado menos investigación; en lo que concierne a este trabajo, cabe señalar aquélla en la que se dieron algunos intentos para caracterizar explícitamente los niveles de Van Hiele para la geometría de los sólidos (por ejemplo, Hoffer, 1981; Gutiérrez, Jaime y Fortuny, 1991) y otras, posteriores, en las que se han precisado estas características para los tres primeros niveles de razonamiento (Guillén, 1996; Guillén, 1997).

Las ideas plasmadas en el modelo de Van Hiele han tenido una evolución que se ve reflejada en la investigación realizada en la escuela holandesa. En este trabajo vamos a comenzar con una breve descripción del modelo de razonamiento de Van Hiele adaptado a la geometría de los sólidos e indicaremos cómo han ido evolucionando las ideas plasmadas en este modelo como consecuencia de la investigación realizada en la escuela donde surgió el modelo. Por último, nos fijaremos en las acciones que corresponden a describir, clasificar, definir y demostrar, como componentes de la práctica matemática para avanzar en la progresiva matematización y nos centraremos en *la descripción*. Freudenthal ha defendido en numerosas ocasiones (véase, por ejemplo, Freudenthal, 1971, 1973) que las descripciones preceden a las clasificaciones y a las definiciones; por ello, al comenzar con el análisis de un proceso matemático, vamos a considerar *la descripción*.

MODELO DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE

El modelo de Van Hiele ha sido elaborado en la escuela holandesa por los profesores Van Hiele. Está formado por dos componentes: el primero es la descripción de los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que van desde el razonamiento intuitivo de los niños hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las licenciaturas de Matemáticas; el segundo es una descripción de cómo puede un profesor organizar la actividad en sus clases para que los estudiantes puedan alcanzar el nivel de razonamiento superior al que tengan (las cinco "fases de aprendizaje"); básicamente, estas cinco fases constituyen un esquema para organizar la enseñanza. En este trabajo nos vamos a centrar en el primer componente: los niveles de razonamiento.

La definición original del modelo de Van Hiele planteaba la existencia de cinco niveles de razonamiento; ahora bien, en la investigación realizada tomando como marco teórico el modelo, no ha habido unanimidad para aceptar el número de niveles de Van Hiele que resulta conveniente distinguir; con frecuencia se utiliza una caracterización que ignora el quinto nivel. El mismo Van Hiele, como consecuencia del proceso de la evolución de sus ideas, en sus descripciones del modelo ha modificado en varias ocasiones la cantidad de niveles de razonamiento y sus características. En su primera descripción planteaba la existencia de tres niveles, que corresponden a los niveles 2º, 3º y 4º, que definió posteriormente, y en Van Hiele (1986, p. 47) sugiere la posible existencia de niveles superiores. En la conferencia sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría: temas para la investigación y la práctica (*Conference on Learning and Teaching Geometry: Issues for Research and Practice*), que tuvo lugar en junio de 1987 en la Universidad de Siracusa, Estados Unidos, Van Hiele planteó una nueva propuesta de definición de los niveles de razonamiento, en la que contemplaba la existencia de tres niveles que corresponden a una reorganización de los niveles 1º a 4º.

CARACTERÍSTICAS DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO 1, 2 Y 3. MATIZACIONES PARA LA GEOMETRÍA DE LOS SÓLIDOS

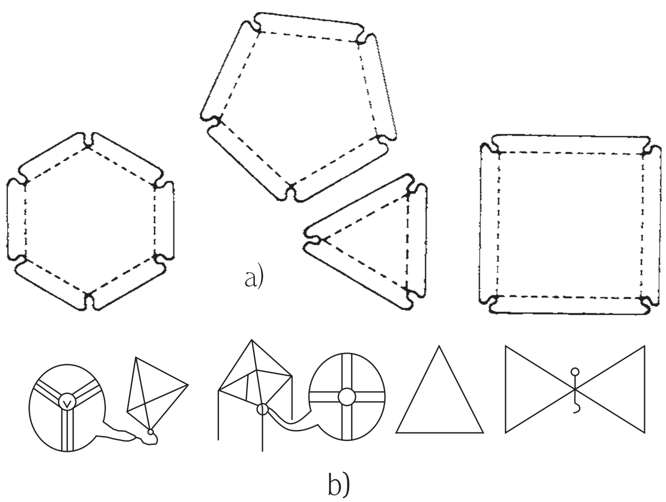
Son numerosas las publicaciones, incluso en castellano, que hacen referencia al modelo de Van Hiele aplicado a la geometría plana (véanse, por ejemplo, Burger y Shaughnessy, 1986; Fuys *et al.*, 1988; y en castellano, Jaime, 1993); en ellas se pueden encontrar listas muy completas con las características de cada uno de los niveles de razonamiento. Ahora vamos a fijarnos en características correspondientes a los tres primeros niveles y haremos algunas matizaciones que surgen al considerar el modelo aplicado a la geometría de los sólidos.

Para el nivel 1 (Reconocimiento), en la investigación se han subrayado las siguientes características generales:

- Percepción de los objetos en su totalidad y como unidades.
- Descripción de los objetos por su aspecto físico; se diferencian o clasifican considerando semejanzas o diferencias físicas globales entre ellos.
- No se suelen reconocer explícitamente los elementos característicos ni las propiedades de los objetos.

Al centrarnos en la geometría de los sólidos, consideramos que éstos se han introducido, intentando organizar el mundo de los objetos que aparecen en el entorno del estudiante y que, después, los objetos se estudian en clase inmersos en procesos de construir y generar sólidos utilizando material comercializado y otros procedimientos para generar sólidos. Cabe hacer notar que un material comercializado está formado por polígonos que son las piezas con los que se construyen los modelos; en el modelo resultante aquéllos corresponderán a las caras de los poliedros (véase la figura 1a). Otro material comercial está formado por

Figura 1 Material comercializado

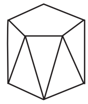


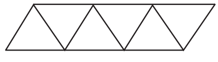
varillas y mecanismos de engarce, que son las piezas con los que se construyen los armazones (esqueletos) de los poliedros; en el modelo resultante corresponderán a las aristas y a los vértices de los poliedros (véase la figura 1b). Así pues, cuando se plantea el trabajo inmerso en tareas de construcción de modelos y de elaboración de "ideas" de familias de sólidos a partir de la construcción de modelos o armazones, junto con el modelo sencillo que se quiere construir, se perciben también las piezas con las que se obtiene el modelo (que, en términos de análisis, corresponden a los elementos del modelo resultante).

Como características de este primer nivel para la geometría de los sólidos podemos apuntar:

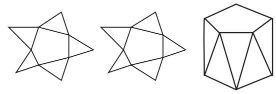
- Se pueden construir modelos y armazones de sólidos sencillos. La construcción se hace por imitación.
- Las "ideas" de familias de sólidos (o de sólido) las introduce el profesor, ya sea verbalmente o mostrando los "trozos" y cómo se juntan éstos para construir ejemplos de una familia dada.
- Aunque estas "ideas" incluyen parte de las figuras, los estudiantes pueden repetirlas, e incluso pueden expresarlas si el profesor dirige convenientemente con material.
- En tareas de descripción sólo se puede comprobar si algo es cierto en los modelos con los que se tiene familiaridad.
- Las respuestas se basan en un modelo en el que se verifica si se cumple la propiedad o no.

Veamos un protocolo (protocolo 1) que aclara el tipo de razonamientos a los que me acabo de referir. En la conversación se muestran algunas ideas para los antiprismas que indicaron dos niños de 12 años (E1 y E2) que participaron en nuestras experimentaciones cuando la profesora, P, les hizo algunas preguntas. Cabe aclarar que las ideas que repiten los niños para los antiprismas habían surgido en sesiones anteriores a partir de la construcción de ejemplos. En estas sesiones previas, también obtuvimos a partir de la construcción ideas para los prismas y para las pirámides.

P: [Muestra un antiprisma pentagonal de base regular ] ¿A qué familia pertenece?

E1: Es un antiprisma. Porque las caras éstas [las señala] laterales son triángulos. Y lo hacemos así... La cinta de triángulos  que la cierro.

Y además también... Que de cada base pongo triángulos. Se puede hacer de esa manera también.



P: [Se dirige a E2] ¿Tú, qué dirías?

E1: No sé... Es que ella ya ha dicho las dos que eran. Otra yo no sé.

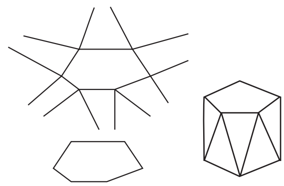
P: Si te fijaras en los vértices, ¿podrías decir algo?

E2: No sé, pero en éste [tiene el modelo del antiprisma hexagonal] se juntan 4 caras; tres de aquí [señala las laterales] y la base.

P: Y eso, ¿pasa en todos los antiprismas?

E2: No sé.

E1: ¡Ah! ¡Ya! Así, hago el pentágono... luego pongo dos en los vértices... y luego los junto al revés. [El estudiante ha construido los modelos que corresponden a los dibujos].
Así también se podía hacer pero era un lío. Yo al principio no me aclaraba con las varillas esas.



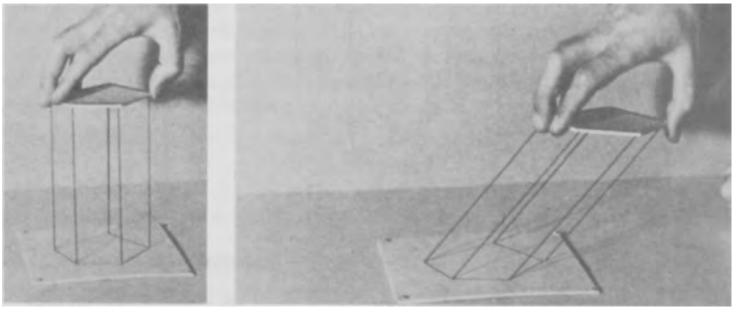
Este protocolo 1 nos introduce ya en las características del segundo nivel de razonamiento de Van Hiele. Pero antes de indicar las características generales asociadas a este nivel de razonamiento, vamos a presentar otro protocolo, que corresponde a una conversación llevada a cabo entre dos alumnos de Magisterio (futuros profesores de Educación Primaria) en la que inmersos en una tarea de construcción del modelo de un prisma oblicuo, utilizan razonamientos que vamos a asignar al 2º nivel. Al comparar las respuestas de este protocolo con las dadas en el protocolo anterior, podremos notar diferencias entre los razonamientos que pueden usarse en tareas de construcción.

Los estudiantes construyen el modelo de prisma oblicuo por parejas. La figura 2, tomada de Castelnuovo (1979, p. 214), ilustra el proceso. Un estudiante lo mantiene construido y el otro estudiante intenta esbozar el desarrollo, calcando los paralelogramos de las caras laterales. Determinados los paralelogramos, los estudiantes dibujaron el desarrollo y construyeron el modelo. Veamos la conversación que tuvo lugar entre ellos (protocolo 2):

E1: Ten mucho cuidado de que las caras bases sean paralelas y que los vértices se correspondan, que no estén giradas las bases.

E2: [Van a hacer los ajustes del esbozo] Mira yo hago estos paralelogramos y tú éstos.

Figura 2 Construcción de prismas rectos y oblicuos



E1: Vale. Pero tenemos que tener en cuenta que las aristas laterales tienen que ser iguales, así que los lados de todos los paralelogramos, en los míos y en los tuyos, tienen que ser iguales.
E2: Y tienen que ser paralelos dos a dos.
E1: Ya. Y los lados de la base de los paralelogramos son los lados del polígono de las bases, a ver... a mí me tocan éstos [los señalan en los polígonos que previamente ya han construido como las bases del prisma] y a ti éstos.

Lo que destacamos de este protocolo es cómo utilizan los estudiantes las propiedades de los prismas para perfeccionar el esbozo de los paralelogramos que obtenían calcando. Veamos ahora las características generales que se han subrayado en la investigación para el nivel 2 (Análisis):

- Percepción de los objetos como formados por partes y dotados de propiedades, aunque no se identifican las relaciones entre ellas.
- Descripción de los objetos con listas de propiedades; puede que no sean suficientes para caracterizar el objeto o que se incluyan más de las necesarias.
- Deducción de nuevas propiedades a partir de la experimentación y posible generalización a todos los objetos de la misma familia.
- La demostración de una propiedad se realiza mediante la comprobación en uno o en pocos casos.

Si nos centramos en los sólidos, relativo a las tareas de construcción de modelos y de elaboración de "ideas" de familias de sólidos a partir de la construcción de modelos o armazones cabe matizar:

- Ya se comprende y se hace explícita la importancia que tiene el análisis de los objetos en la construcción o dibujo de ellos.
- Los modelos y armazones pueden verse como agregados de componentes que guardan unas relaciones entre ellos.
- Los estudiantes pueden ya mostrar los "trozos" de los ejemplos que, al juntarlos, conducen a la idea ingenua considerada. Pueden comprender que, al juntar los "trozos" señalados, siempre se van a obtener ejemplos de una familia dada.
- Pueden descubrir las propiedades de una familia teniendo ejemplos como soporte, ya que las pueden generalizar a todos los ejemplos de ella.

Lo que queremos destacar al comparar las características de este nivel con las del nivel 3 que vamos a indicar a continuación es que no conlleva la misma dificultad para los estudiantes establecer relaciones entre sólidos y entre "trozos" de ellos, que puede facilitar su descripción y establecer relaciones entre sus propiedades. Establecer relaciones entre las propiedades requiere de razonamientos asignados al nivel 3.

Para el nivel 3 (Clasificación), en la investigación se han subrayado las siguientes características generales:

- Se pueden realizar clasificaciones lógicas de los objetos considerando propiedades o relaciones ya conocidas.
- Comprensión de lo que es una definición matemática y sus requisitos.
- Utilización de razonamientos deductivos informales para demostrar una propiedad. Ya se detecta una necesidad de justificar de manera general la veracidad de una propiedad.
- Comprensión de los pasos individuales de un razonamiento lógico de forma aislada, pero no del encadenamiento de estos pasos ni de la estructura de una demostración.
- Incapacidad para realizar una demostración completa en la que haya que encadenar varias implicaciones, y tampoco se siente su necesidad. Por este motivo, tampoco se comprende la estructura axiomática de las matemáticas.

Vamos a utilizar dos tareas para poder comparar respuestas que utilizan razonamientos de diferente nivel de Van Hiele. Consideremos la tarea de determinar el número de caras, vértices y aristas de los prismas. Veamos cuáles respuestas se pueden dar en cada nivel (Guillén, 1997).

En el nivel 1 se utiliza el modelo o armazón como soporte. Los estudiantes pueden desmontarlo y contar las piezas, así como determinar su forma. También se pueden desmontar los modelos dejando varias piezas juntas y se pueden obtener desarrollos de los sólidos o varios "trozos" de ellos.

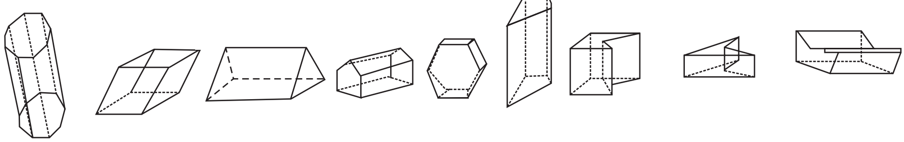
En este nivel, el profesor puede introducir la cuenta de los elementos de manera estructurada. Freudenthal (1983) señala que estas actividades pueden utilizarse, por sus importantes características didácticas, para aprender a estructurar:

> Para contar los vértices aristas y caras, por ejemplo de un cubo, los conjuntos están estructurados:
>
> cuatro vértices abajo cuatro arriba,
> o cuatro vértices de frente y cuatro detrás,
> o cuatro vértices a la derecha y cuatro a la izquierda,
> cuatro aristas abajo, cuatro arriba y cuatro verticales,
> o cuatro aristas a lo largo, cuatro a lo ancho y cuatro a lo alto,
> una cara en la base, una en lo alto y cuatro alrededor,
> o dos caras, frente y detrás, dos a la derecha e izquierda, dos arriba y abajo.
> Así, el cubo (también cualquier prisma cuadrangular: caja) puede considerarse como una estructura con 6 caras, 8 vértices y 12 aristas, dispuestos de una forma fija. Disposición que se puede mirar de una manera estructurada (Freudenthal, 1983, p. 300).

Pero es en el nivel 2 donde los estudiantes pueden contar los elementos de manera estructurada, por niveles, en modelos cuya base tiene cualquier número de lados (n-agonal):

A = núm. de aristas de un prisma n-agonal:
n aristas de una base,
n aristas laterales y
n aristas de la otra base.
$A = 3n$.

Figura 3 Algunos prismas



Los estudiantes pueden delimitar las fórmulas que dan el número de caras, vértices, aristas o un determinado tipo de ángulos (ángulos de las caras, ángulos diedros y ángulos de los vértices), para una familia de sólidos dada (prismas, antiprismas, pirámides...) pues pueden generalizar para *n* los resultados obtenidos a partir de ejemplos concretos, o contando los elementos de una manera estructurada. Por ejemplo, los estudiantes, con ayuda del profesor, pueden hallar el número de ángulos de las caras (son ángulos de los polígonos) (αC) que tiene un prisma *n*-agonal generalizando previamente el número de elementos de cada piso:

- *n* de una base, *4n* de las caras laterales (cada cara lateral tiene 4 ángulos porque son paralelogramos) y *n* de la otra base. En total, $\alpha C = 6n$.
- *3n* al contar los ángulos de las caras que se juntan en los vértices de una base (en cada vértice de los prismas se juntan 3 caras) y otros $3n$ al contar los ángulos de las caras que se juntan en los vértices de la otra base. En total, $\alpha C = 6n$.

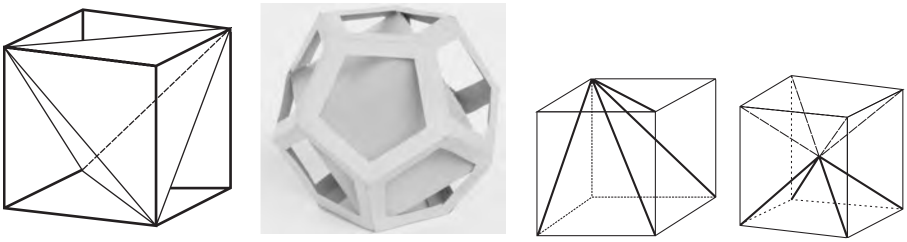
Ahora bien, si lo que pretendemos hallar es el número de diagonales de las caras o de diagonales del espacio (*dC* o *dE*), en este nivel se tienen grandes dificultades; se puede resolver el problema para prismas cuya base tiene un número concreto de lados.

En el nivel 3, los estudiantes ya pueden hallar sin ayuda del profesor, para un prisma *n*-agonal, las fórmulas que dan su número de caras, de vértices, de aristas, de ángulos de las caras, de ángulos diedros y de ángulos de los vértices. Pero, para hallar las fórmulas que dan el número de diagonales de las caras o de diagonales del espacio (*dC* o *dE*), todavía se requieren pistas o ayudas (profesor). Encontrar el número de diagonales de cualquier polígono no es tarea sencilla.

Consideremos la tarea "Relaciones de inscripción. Puzzles". Veamos qué respuestas se pueden dar en cada nivel.

En el nivel 1 los modelos están completamente construidos o los hace el profesor. Éste plantea cuestiones sobre los poliedros obtenidos. Las relaciones entre los poliedros implicados en un modelo o entre poliedros y elementos de la geometría plana son relaciones visuales. El lenguaje utilizado en las cuestiones es informal; nos apoyamos en los modelos concretos que representamos en la figura 4, colocados de una determinada manera. Ejemplos de cuestiones que podemos plantear son: ¿Con cuántas de estas pirámides se puede llenar el cubo?, ¿Cómo se colocan las pirámides?, ¿Dónde queda el ápice? Señálalo en el modelo

Figura 4 Tetraedro en cubo; cubo en dodecaedro; tres y seis pirámides en un cubo



¿Dónde queda la base?, ¿Cómo son de altas estas pirámides?, ¿Cómo son de largas las aristas? Señala los elementos en este cubo al que le hemos quitado una cara.

En el nivel 2 pueden observarse y descubrirse las relaciones entre los elementos de los poliedros inmersos en un modelo. Por ejemplo, se puede describir el modelo del tetraedro inscrito en el cubo de la siguiente manera: el tetraedro se puede inscribir en el cubo de manera que los vértices del tetraedro están en vértices del cubo, las caras del tetraedro se corresponden con los cuatro vértices del cubo opuestos a los que tienen vértices del tetraedro, y las aristas del tetraedro son diagonales de las caras del cubo que se juntan de tres en tres en cada vértice del tetraedro. En este nivel también pueden construirse algunos modelos precisos con ayuda del profesor.

En el nivel 3 ya se puede comprender que, en el cubo y en el dodecaedro, el conjunto de diagonales de las caras está estructurado, de manera que al salir tres por cada vértice del cubo se producen dos tetraedros inscritos en él y al salir tres por cada vértice del dodecaedro se producen cinco cubos inscritos en él.

Después de estos ejemplos, utilizados para aclarar las características asignadas a diferentes niveles de razonamiento de Van Hiele para la geometría de los sólidos, vamos a regresar a las características asignadas a estos niveles. Queremos destacar que, si nos fijamos en las relaciones entre los contenidos geométricos, esto es, el tipo de razonamientos que los engarzan y que en la enseñanza nos proponemos desarrollar como objetivo de primer orden, del modelo de van Hiele se desprende una idea para razonamiento lógico que Fielker (1979) expresa en estos términos: Razonamientos lógicos no significa lógica formal, sino procesos matemáticos como análisis, clasificación, definición, conjetura, generalización y demostración. En estos procesos matemáticos vamos a centrarnos en lo que sigue. Al hablar de los *procesos matemáticos* de *analizar, clasificar, definir, probar, de-*

mostrar, conjeturar, particularizar, generalizar, abstraer nos fijamos "en las características que estas acciones tienen como componentes de la práctica matemática" (Puig, 1996, p. 15). Pero antes de centrarnos en estas acciones, vamos a dar breves pinceladas exponiendo cómo se han reinterpretado las ideas del modelo de Van Hiele en la escuela holandesa en la que surgió el modelo.

LA ESCUELA HOLANDESA: DEL MODELO DE VAN HIELE AL CURRÍCULO WISKOBAS

En la descripción que hace Treffers (1987, pp. 244-245) del currículo de primaria holandés (Wiskobas) habla de tres niveles de Van Hiele, que llama *macroniveles*, que describen el proceso de aprendizaje realizado en un gran periodo de tiempo. Pero hay que señalar que estos macroniveles no coinciden con los tres niveles descritos por Van Hiele, sino que se reinterpretan éstos para tomarlos como una descripción macroscópica del proceso de aprendizaje de las matemáticas en primaria.

En la descripción que hace Treffers del Wiscobas también distingue otros niveles, que llama *microniveles*; que describen el proceso de enseñanza/aprendizaje a corto plazo. No delimita el número de microniveles que hay, y cabe señalar que estos microniveles no corresponden tampoco a los niveles de Van Hiele. Treffers (*op. cit.*) señala:

> Freudenthal no está seguro de que se distingan niveles en el proceso de aprendizaje que se logren por reflexión y recursión de la misma manera como los de Van Hiele. Desde su punto de vista, no hay una tripartición rígida, sino más bien, en principio, una progresión ilimitada de acuerdo con microniveles que sólo se delimitan relativamente unos y otros. Éste es un punto de vista que nosotros suscribimos también (Treffers, *op. cit.*, p. 247).

De Treffers (*op. cit.*) se puede entresacar que se supone que hay cambio de micronivel cuando lo que hay en un nivel que sirve como medio de organización se convierte en objeto de estudio, por lo que vamos a tener muchos más microniveles en el proceso de aprendizaje que los señalados por Van Hiele. Con los microniveles lo que realmente hay es una repetición permanente y menuda del ascenso vertical: Objetos/medios de organización, nuevos objetos/medios de organización, ..., una *matematización progresiva*. *Matematizar* es entendido en un sentido muy amplio: formalizar, esquematizar, organizar, axiomatizar y transformar son verbos que denotan aspectos del proceso de matematización.

Treffers (*op. cit.*) distingue también la *matematización horizontal* o fase en la que interviene la aproximación empírica, la observación, la experimentación, el razonamiento inductivo y que se concreta en el momento en que se ataca un problema; la matematización que da cuenta de la diferencia entre transformar un problema más o menos real en un problema matemático y procesar dentro del sistema matemático, lo cual conlleva una sistematización, una simbolización, y una esquematización/modelización. Y la *matematización vertical*, que agrupa las actividades que llevan a la solución de un problema: resolución, generalización, formalización o revisión. Se está refiriendo al procesamiento matemático, dentro del sistema matemático, y al nivel alcanzado en la estructuración del problema en consideración.

Kindt (1993) lo expresa de la siguiente manera:

> La traducción directa de los problemas del mundo real al lenguaje del "mundo de los símbolos" podemos calificarla como *matematización horizontal*. Se trata del reconocimiento de esencias matemáticas y de datos relevantes, de la esquematización o visualización, del descubrimiento de relaciones, etcétera (...)
>
> La consecuente profundización dentro de la matemática se puede considerar como un *proceso vertical*. Freudenthal dice: "(...) en el mundo real se vive, actúa (y sufre); en el mundo de los símbolos, se forma, se reforma, se manipulan símbolos (mecánicamente, comprendiendo, reflexionando). Ésta es la matematización vertical. Claro que la frontera entre los dos mundos no está marcada con precisión. Algo puede pertenecer en un momento al mundo real y en otro, al mundo abstracto" (Kindt, 1993, p. 76).

Y Puig (1994) lo reinterpreta incorporando otros elementos en su análisis: "La imagen está trazada por un *movimiento horizontal* de despliegue y ampliación de campos semánticos y un *movimiento vertical* de creación de conceptos, movimiento que, a mi entender, no puede desligarse de la elaboración simultánea de los sistemas matemáticos de signos".

Volviendo otra vez al modelo de Van Hiele, el cuadro 1 remarca la reinterpretación que se ha hecho en la escuela holandesa de algunas características fundamentales del modelo. Ahora, al centrarnos en la geometría, vamos a destacar características del modelo que se mantienen.

Cuadro 1

Modelo de Van Hiele	Wiskobas
Los niveles de Van Hiele	Los macroniveles Los microniveles
Desarrollo de los niveles de razonamiento de los estudiantes	La progresiva matematización Matematización horizontal Matematización vertical

Tanto del modelo de Van Hiele como del IOWO[1] se desprende una concepción de la geometría

> como la exploración del espacio en la que el alumno se mueve y vive. En ambos casos se subraya el papel de los contextos. En el modelo de Van Hiele se precisa su papel en cada uno de los niveles de razonamiento; y al describir el IOWO se precisa también la reinterpretación que se hace de ellos: "Al comienzo, el contexto o contextos son elementales, pero paradigmáticos; lo que significa que funcionan como modelos mentales; poseen un fuerte potencial vertical. Proporcionan significados a modelos más abstractos y a los simbólicos. Pero en cuanto contextos, su rango horizontal es amplio: representan un dominio extenso de fenómenos que pueden ser después campo de aplicaciones (Treffers, *op. cit.*).

Asimismo, al analizar el modelo de Van Hiele observamos que están implicados en el modelo y son también objeto de enseñanza los diferentes aspectos de la geometría que precisa Treffers (1987, pp. 310-311), como los que se pretenden trabajar con el currículo Wiscobas: el aspecto de la forma, el aspecto constructivo, el aspecto de relación, el aspecto topológico, el aspecto de cálculo, el aspecto de las transformaciones, el aspecto de lenguaje y el aspecto lógico. En ambos casos, se sigue dando mucha importancia al desarrollo de razonamiento lógico. En el modelo de Van Hiele, es objetivo de primer orden y en el Wiskobas se le da mucha importancia al proceso de matemátizar, entendiendo ésta como: "la actividad de organización y estructuración en la que el conocimiento y las habilidades se evocan para descubrir regularidades, conexiones, estructuras,... aún desconocidas".

[1] IOWO: Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática, que posteriormente se denominó OW & OC (Vakgroep Onderzoek Winscunde Onderwijs Computercentrum) y actualmente se llama Instituto Freudenthal.

LAS ACCIONES DE ANALIZAR, DESCRIBIR, CLASIFICAR, DEFINIR, DEMOSTRAR, ETC., COMO COMPONENTES DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA

Retomando la idea de razonamiento lógico que ya hemos indicado, "significa *cosas* como descripción, clasificación, hipótesis, generalización y prueba", vamos a detenernos en estos procesos matemáticos. Al considerar las acciones de describir, clasificar, definir... como componentes de la práctica matemática, será interesante delimitar situaciones (actividades, tareas, contextos...) diferentes en las que estén implicadas acciones asociadas a cada uno de estos procesos, en un intento de mostrar que la imagen está trazada por un *movimiento horizontal* de despliegue y ampliación de campos semánticos (Puig, 1994). Será también interesante fijarse en estas situaciones (actividades, tareas, contextos...), centrando la atención en las posibles respuestas que pueden darse considerando el tipo de razonamientos que requieren, esto es, razonamientos de nivel 1, 2, 3 o 4, esto es, considerando que los razonamientos están en estratos de mayor o menor abstracción; están más o menos altos en la cadena del ascenso vertical: Objetos/medios de organización, nuevos objetos/medios de organización... (*movimiento vertical*).

Realizar un análisis de estas situaciones para cada uno de estos procesos matemáticos va más allá de los propósitos de este trabajo. Aquí, como indicamos en la presentación, vamos a realizar este análisis considerando *la descripción y el análisis*.

Analizar y *describir*: Algunas preguntas y respuestas

Comenzamos planteando unas preguntas referidas a *La descripción y el análisis* de objetos geométricos que pueden readaptarse al considerar otros procesos:

1. ¿Qué entendemos por describir/analizar un objeto geométrico? ¿Asociamos distinto significado al razonar en diferente nivel de razonamiento de Van Hiele?
2. ¿Hay distintos tipos de análisis? ¿Qué elementos consideramos?
3. ¿Encontramos procedimientos de construir o de generar sólidos que pueden facilitar la descripción/análisis?
4. ¿En cuáles situaciones está implicada la descripción de formas? ¿En qué

se diferencia una situación de otra? ¿Qué podemos variar para crear una nueva situación?

5. ¿Cuáles peculariedades tiene lo que se describe?
6. ¿Cómo se presenta el objeto geométrico que se tiene que describir/analizar? ¿En cuál contexto se sitúa? ¿Con cuál función?
7. ¿Dónde cortamos para elaborar la lista de propiedades de un objeto geométrico? ¿Qué decir de esta lista cuando se razona en diferentes niveles de razonamiento?

Pensemos unos minutos en estas preguntas antes de seguir. A continuación, vamos a centrarnos en cada una de ellas. Es claro que pensar detenidamente en ellas requiere bastante tiempo. Los invito a que vuelvan a reflexionar sobre cada una de ellas al finalizar.

Comenzamos con la primera pregunta planteada:

1. ¿Asociamos distinto significado a la palabra *describir* al razonar en diferente nivel de razonamiento de Van Hiele?

La palabra *describir* en todos los niveles de razonamiento puede asociarse a listas de propiedades o características de los conceptos, y lo que varía de un nivel a otro es el tipo de propiedades que se incluyen en la lista (Guillén, 1997).

En el primer nivel de Van Hiele, la descripción se hace de los objetos familiares; éstos pueden corresponder a un sólido, una familia de sólidos, o sus elementos. La descripción se hace por su aspecto físico o a partir de ejemplos prototipo tomados de su entorno físico y en la descripción se incluyen características visuales y funcionales.

En el segundo nivel, "la figura se convierte en la portadora de sus propiedades" (Van Hiele, 1986, p. 168). Se empieza a reconocer la presencia de propiedades matemáticas de los objetos. Es el nivel propio de la descripción en el sentido matemático. Un sólido, o una familia de sólidos, se describe sobre la base de propiedades geométricas que se delimitan con la ayuda de observaciones, medida, dibujos y construcción de modelos.

Pasamos ya a la segunda pregunta:

2. ¿Hay distintos tipos de análisis? ¿Cuáles elementos consideramos?

Con esta pregunta vamos a subrayar que, al describir los sólidos, podemos poner el énfasis en su simetría, armonía, regularidad, belleza o en otras descripciones analíticas, constructivas que dicen algo sobre cómo está hecho un poliedro –tiene 8 caras, 12 aristas, etc.– o sobre cómo están dispuestos localmente sus elementos (por ejemplo, tiene 8 vértices de orden 4: sus caras cuadradas están bordeadas de triángulos y sus caras triangulares están bordeadas de cuadrados). Así pues, se puede considerar que hay distintos niveles de análisis: de los elementos y de la estructura. En la estructura, el análisis puede ser local –como por ejemplo, nos fijamos en el orden de los vértices o en las caras que bordean a una cara dada– o global, que dice algo respecto de la estructura total –como por ejemplo, nos fijamos en las simetrías que organizan el todo del poliedro y dicen algo sobre cómo está dispuesto todo él, así como lo bello, armonioso y equilibrado que queda (Guillén, 1991, p. 59).

Con la tercera pregunta volvemos a hacer referencia a los protocolos y a los tipos de respuestas para determinadas tareas de las que hemos hablado al explicar las características de los niveles de razonamiento de Van Hiele. La pregunta cuestiona:

3. ¿Encontramos procedimientos de construir o de generar sólidos que pueden facilitar la descripción/análisis?

En Guillén (1997) se constata que la construcción de modelos u armazones de sólidos o la generación de sólidos con otros procedimientos ofrece una situación que puede ayudar a que los estudiantes asimilen para los ejemplos sencillos de las familias de sólidos elegidas las características visuales y las relativas al tipo de caras, su número, así como el de aristas y vértices, y su disposición en el espacio. También facilita que se indiquen parecidos y diferencias entre los ejemplos de una familia y las relaciones (siempre establecidas visualmente) que hay entre unas familias y otras.

Asimismo, separar un modelo por niveles o en casquetes, observar las caras que bordean a una cara dada y las que se juntan en un vértice facilita que se puedan construir ejemplos de una familia de sólidos dada o diferentes desarrollos de algunos sólidos aplicando estas observaciones.

Cabe señalar los diferentes procedimientos de construir o generar sólidos y dar cuenta del tipo de actividad concreta que se puede desarrollar con cada procedimiento de construcción. En Guillén (1997) se explica con detalle; ahora lo vamos a indicar brevemente.

La construcción o modelado de modelos u armazones de sólidos lleva a un análisis primario de los sólidos en el nivel local; centramos la atención en sus elementos: cara, vértice y arista.

La construcción de modelos con polígonos centra la atención en la forma de las caras de un sólido, el número de caras de cada tipo y la disposición de éstas en el espacio. Los estudiantes pueden reconocer los polígonos en el nivel global y su construcción con materiales comercializados permite pasar sin dificultad del modelo físico a las caras, y de las caras al modelo, para sólidos sencillos. Esta construcción permite también introducir diferentes "ideas" de familias de sólidos; ideas genéticas: basadas en cómo están construidos los ejemplos (el protocolo 1 lo muestra).

La construcción del armazón lleva a una idea de sólido como estructura formada por vértices y aristas; facilita que los estudiantes puedan determinar el número de vértices y aristas de ejemplos concretos de una familia dada y lleguen a comprender su disposición en el espacio. Los modelos y armazones de ejemplos sencillos de una familia de sólidos dada se pueden utilizar para enseñar a contar los elementos de manera estructurada. Las respuestas a la tarea 1 dan cuenta de ello. Esta construcción permite también introducir diferentes "ideas" de familias de sólidos; ideas genéticas: basadas en cómo están construidos los ejemplos (el protocolo 1 lo muestra).

Asimismo, el intento de convertir en rígidos algunos armazones puede llevarnos a la descripción de modelos en los que están implicados más de un poliedro. De uno de ellos ya hemos hablado al fijarnos en las respuestas a la tarea de relaciones de inscripción y dualidad: el tetraedro inscrito en el cubo; este modelo se obtiene en el intento de convertir el cubo en un modelo rígido, introduciendo una diagonal por cada cara del cubo, de manera que se junten de tres en tres en cada vértice. Pero si el armazón del cubo lo convertimos en rígido, introduciendo todas las diagonales (de las caras y del espacio) que salen de un vértice, obtendremos tres pirámides que forman un cubo; y al introducir las cuatro diagonales del espacio, obtenemos seis pirámides que forman un cubo (véase la figura 4).

El modelado de sólidos con plastilina permite considerar al sólido como modelo macizo y centra la atención sobre si las caras son planas o curvas, si tienen aristas o no, si éstas son rectas o curvas. También se incidirá en las relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre sus elementos.

Con la construcción de sólidos *mediante el desarrollo* relacionamos el plano con el espacio; podemos fijarnos en las propiedades del modelo que se reflejan o se rompen en el desarrollo, y a la inversa; cabe subrayar también, deshaciendo los modelos construidos con cartulina, que sólo para los prismas rectos podemos asegurar que alguno de sus desarrollos son tiras (formadas por unión de rectángulos) y un polígono a cada lado.

La construcción de un modelo oblicuo, construyendo los polígonos bases y juntándolos con gomas para tener la pieza clave, permite visualizar una variedad de prismas (la figura 2 ilustra el procedimiento). Esta técnica promueve la identificación de relaciones (de igualdad, paralelismo y perpendicularidad) entre los elementos de los prismas, por ejemplo, entre las bases o entre las caras laterales y las bases.

Truncando sólidos, podemos remarcar también que los cortes paralelos a las bases en los prismas y cilindros produce nuevos ejemplos de la familia, y en las pirámides y los conos se obtiene un ejemplo más pequeño y otro sólido que no lo es, y que tampoco es prisma ni cilindro. Estas actividades también proporcionan experiencias para llegar a comprender propiedades de estas familias; por ejemplo, que las secciones paralelas a la base, en todas estas familias tienen la misma forma que la base, pero en los prismas y cilindros son todas ellas iguales, y en las pirámides y los conos se van haciendo más pequeñas a medida que nos acercamos al ápice. Freudenthal (1983, pp. 299-300) justifica claramente la utilidad de este tipo de actividades.

La pregunta 4 se refiere a una cuestión que ya hemos planteado antes.

4. ¿En cuáles situaciones está implicada la descripción de formas? ¿En qué se diferencia una situación de otra? ¿Qué podemos variar para crear una nueva situación?

Aclarado ya el significado que damos a este término cuando razonamos en diferente nivel de razonamiento (en la pregunta 1), las demás preguntas podrían surgir a partir de ésta. Cuando nos cuestionamos en cuáles situaciones está implicada la descripción de formas y en qué se diferencia una situación de otra, podemos delimitar las cuestiones 5 y 6 que hemos enunciado.

Así, al fijarnos en la pregunta 5, podemos considerar diferentes las situaciones en las que se pide que se describa:

- Un objeto.
- Una familia finita.
- Un modelo en el que hay implicados varios poliedros.

- Una familia infinita.
- Se tienen que tener en cuenta varias familias:
  - Para hallar propiedades comunes.
  - Para hallar propiedades de una familia que otra no verifica.
  - Se enuncian de golpe grupos de propiedades.

También podemos variar la representación física con la que se muestra el objeto geométrico que se tiene que describir/analizar (ahora nos estamos fijando en la pregunta 6):

- Un objeto físico del entorno.
- Un objeto que se presenta en la naturaleza.
- Un objeto inmerso en una estructura que aparece en un contexto topográfico.
- Una forma obtenida con piezas de puzzles. Objetos que aparecen en el mundo de los juegos.
- Modelos y armazones de sólidos que los estudiantes construyen con materiales. Contexto geométrico.
  - objetos como modelos macizos
  - como estructuras de superficie
  - como estructuras de aristas
  - la construcción a partir de desarrollos
- Surge en clase a partir de otros sólidos (inmersos en un proceso de generar formas): con piezas de juegos de construcciones, juntando cubitos, apilando sólidos o truncando otros sólidos...
- Surge en clase utilizando unidades base que permiten generar sólidos oblicuos.
- Es un modelo que implica varios poliedros: inscritos unos en otros, intersectados... objetos que aparecen en el mundo del arte.
- Es una representación plana, fotografía o dibujo de sólidos, maquetas... objetos que aparecen en un contexto geométrico, en el mundo de la arquitectura, urbanismo, etcétera.
- Aparece en productos infográficos: videojuegos, imágenes digitales en las carátulas de la televisión, videoclips, juegos de computadora, etcétera.
- Se proporciona el nombre.
- Se obtiene inmerso en una exploración con espejos.
- Se obtiene en un contexto de proyecciones: exploración de sombras.

Tengamos también en cuenta que las cuestiones en las que están implicadas familias de sólidos y propiedades pueden estar planteadas en diferentes contextos:

- En procesos de construcción de formas.
- En tareas de identificación.
- En un contexto de puzzles (mundo de los juegos).
- En problemas prácticos: convertir en rígidas algunas formas; truncar algunas formas para obtener las deseadas....
- En problemas que relacionan la geometría con la aritmética y la medida.

Y ya en un contexto matematizado, encontramos otras situaciones:

- Se presentan propiedades y lo que se cuestiona es si son o no atributos críticos de una familia de sólidos.
- Se consideran varias familias de sólidos y una o varias propiedades. Para cada una de las familias de prismas y para cada propiedad, se ha de razonar si ésta es o no atributo crítico de la familia considerada.
- Se dan las propiedades y son las familias de sólidos las que tienen que determinarse.

Pasamos a la cuestión 7 que plantea dónde cortamos al elaborar la lista de propiedades de un objeto geométrico e incide también en cuáles elementos consideramos. Cabe tener en cuenta lo que ya hemos apuntado al describir las características del nivel 2, al comentar las respuestas en diferentes niveles de razonamiento de la tarea 1 y al considerar la pregunta 1: en el nivel 2, el nivel de la descripción, es donde se pueden enunciar propiedades relativas a todos los elementos de los sólidos. Ahora bien, las propiedades que contienen términos del tipo "como máximo", "como mínimo", "tantas medidas diferentes como", o propiedades que relacionan los elementos de un tipo con los de otro conllevan grandes dificultades (Guillén, 1997). Por ejemplo, es muy usual que los estudiantes enuncien como propiedad de los prismas de bases regulares: "Los prismas de bases regulares tienen dos medidas diferentes para las aristas". Nótese que, al enunciar la propiedad de esta manera, en vez de como: "Los prismas de bases regulares tienen como mucho dos medidas diferentes para las aristas", se excluyen de esta familia los prismas de bases regulares que tienen caras laterales cuadradas (que tienen las aristas iguales). Enunciar de golpe grupos de propiedades, como propiedades de una familia que contiene a la que se describe, también conlleva muchas dificultades, así como enunciar propiedades comunes a varias familias, o propiedades de una familia que no cumplan otras (Guillén, 1997). En el tercer nivel ya se pueden enunciar y entender de manera matemáticamente correcta todo tipo de propiedades matemáticas.

Ya para finalizar, queremos hacer notar cómo las respuestas a las cuestiones planteadas nos han proporcionado una gran variedad de situaciones didácticas en las que están implicadas acciones asociadas para analizar y describir objetos geométricos. Queremos remarcar, asimismo, cómo estas situaciones no pueden verse de manera aislada; en este trabajo perfilamos el marco en el cual se pueden encajar las situaciones didácticas enumeradas.

AGRADECIMIENTOS

Quiero manifestar mi gratitud a la doctora Olimpia Figueras M., responsable del Proyecto "Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del bajo rendimiento escolar en matemáticas" por su invitación para que impartiera una conferencia sobre el "El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos" con objeto de dar a conocer parte del trabajo desarrollado en mi tesis doctoral en el Segundo Seminario sobre Rendimiento Escolar en Matemáticas. Dicha conferencia, luego revisada, dio pie a la escritura de este artículo. También quiero agradecer a la Escuela Normal Superior del Estado de México (ENSEM) haber propiciado este encuentro.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Burger, W.F. y J.M. Shaughnessy (1986), "Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 17, núm. 1, pp. 31-48.

Castelnuovo, E. (1979), *La matemática. La geometría.* [Trad. catalana: *La matematica. La geometria,* Barcelona, Ketres, 1981.]

Fielker, D.S. (1979), "Strategies for Teaching Geometry to Younger Children", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 10, núm. 1, pp. 85-133.

Freudenthal, H. (1971), "Geometry Between the Devil and the Deep Sea", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 3, núm. 2/4, pp. 413-435.

Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht, D. Reidel.
Fuys, D., D. Geddes y R. Tischler (1988), "The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents", *Journal for Research in Mathematics Education* (monografía núm. 3), Reston, NCTM.
Guillén, G. (1991), *El mundo de los poliedros*, Madrid, Síntesis.
—— (1996), "Identification of Van Hiele Levels of Reasoning in Three-dimensional Geometry", en L. Puig, y A. Gutiérrez (eds.) (1996), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Universitat de València, Valencia, España, pp. 43-50.
—— (1997), *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*, Tesis doctoral, Valencia, Universitat de València. (Publicada en 1999 en la Collecció Tesis doctorals en Microfitxes, Valencia, Universitat de València.)
Gutiérrez, A., A. Jaime y J.M. Fortuny (1991), "An Alternative Paradigm to Evaluate the Acquisition of the Van Hiele Levels", *Journal for Research in Mathematics Education, vol.* 21, núm. 3, pp. 237-251.
Hoffer, A. (1981), "Geometry is More than Proof", *The Mathematics Teacher*, vol. 74, núm. 1, pp. 11-18.
Jaime, A. (1993), *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*, Tesis doctoral, Valencia, Universitat de València.
Kindt, M. (1993), "Enfoque realista de la educación matemática", en A. Salar, F. Alayo, M. Kindt y L. Puig (1993), *Aspectos didácticos de Matemáticas*, núm. 4, Zaragoza, ICE Universidad de Zaragoza, pp. 67-91.
Puig, L. (1994), *Semiótica y matemáticas*, col. Eutopías, Valencia, Episteme.
—— (1996), *Elementos de resolución de problemas*, Granada, Comares.
Treffers, A. (1987), *Three Dimensions (A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction - The Wiskobas Project)*, Dordrecht, D. Reidel.
Van Hiele, P.M. (1986), *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*, Londres, Academic Press.

DATOS DE LA AUTORA

Gregoria Guillén Soler
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de Valencia, España
Gregoria.guillen@uv.es

Las cuadráticas. Una aproximación constructivista

Juan Antonio Pérez

Resumen: En el presente trabajo se propone una alternativa constructivista para la transmisión de los hechos básicos a propósito de la solución de ecuaciones cuadráticas. El objetivo es privilegiar los aspectos geométricos de la obtención de la solución general, así como propiciar la experimentación durante el proceso de aprendizaje.

Palabras clave: álgebra, ecuaciones cuadráticas, graficación, aprendizaje, enseñanza, procedimientos de solución.

Abstract: This note is devoted to propose a constructivistic alternative to be used in the transmission of the basic facts related to the solution of quadratic equations. The main purpose is to focus on the geometric aspects of the general solution construction, and to provide tools for experimentation during the learning process.

Keywords: algebra, quadratic equations, graphing, learning, teaching, solution procedures.

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje entendido como una reconstrucción intelectual de la realidad es una de las bases de las teorías constructivistas del conocimiento. En este proceso, compatible con lo que Ausubel (1973) llama *aprendizaje significativo,* la experimentación y visualización desempeñan un papel por demás importante. Desde este punto de vista, generar alternativas constructivistas de la edificación de los *constructos* de Bunge (Bunge, 1980, pp. 53-63) se convierte en una de las tareas más apremiantes de la educación contemporánea.

La geometrización del descubrimiento guiado en el caso de las matemáticas permite un transcurso gradual y sólido de la experiencia sensorial a la formalización, pues como apunta Rosenblueth (Rosenblueth, 1994, p. 198), "... el método deductivo solamente es introducido al final de la investigación para obtener una demostración rigurosa, es decir, para mostrar que los resultados no son inconsistentes". La interiorización del conocimiento matemático adquiere la dinámica propuesta por Lakatos (Lakatos, 1978, p. 21), a propósito de la sustitución de teorías viejas por nuevas, con ventaja sobre el alcance de la generalidad y la superioridad en contenido.

El conocimiento, según LaCasa (LaCasa, 1994, pp. 103-121), no es el resultado de una mera copia de la realidad preexistente, sino un proceso dinámico e interactivo a través del cual la información externa es interpretada y reinterpretada por la mente que va construyendo progresivamente modelos explicativos cada vez más complejos y potentes. Este proceso es la manera más productiva de aprendizaje, pues de acuerdo con Watzlawick (Watzlawick, 1992, p. 123) "...forjamos y no encontramos –como ingenuamente suponemos– nuestras realidades individuales, sociales, científicas e ideológicas".

En su apología del constructivismo radical (López Pérez, 2000, p. 76), López Pérez señala que, según la "epistemología del sentido común", contraria al constructivismo, "...los hombres no son conscientes de estos procesos de construcción de la realidad". En concordancia con el constructivismo, pues, es necesario el pleno uso de la conciencia en el proceso de apropiación del conocimiento, y de ahí la importancia de la visualización y la experimentación programadas.

La presente nota muestra una alternativa constructivista a la presentación del tema relativo a la solución de ecuaciones cuadráticas en la enseñanza media, complementaria a la deducción tradicional de la solución general. El énfasis se coloca en la visualización.

ANTECEDENTES

La ecuación cuadrática más simple tiene la forma

$$x^2 = q$$

y el procedimiento usual de completar cuadrados en la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.1}$$

tiene como objetivo reducirla a la forma más simple. Procedimiento común en matemáticas: resolver un problema llevándolo a la forma de uno previamente resuelto. El resultado de la manipulación algebraica descrita es la "fórmula"

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.2}$$

de no siempre grato recuerdo. Con frecuencia, el instructor, en un intento geometrizador, informa que los ceros de la ecuación 1.1 son las abcisas de los puntos en los que la parábola

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1.3}$$

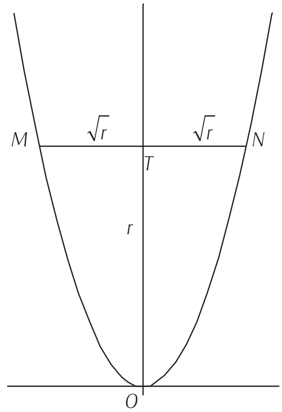
coincide con el eje horizontal.

Aun en estas condiciones, el contenido geométrico no parece conectar adecuadamente con la expresión algebraica que ofrece la solución general.

El autor está convencido de que Tomás de Aquino, además de ser santo, debió haber sido geómetra: "Ver para creer" bien pudiera convertirse en el lema del buen estudiante de matemáticas. Un buen razonamiento se apoya por lo general en un dibujo representativo, aunque éste no sea igualmente bueno. La idea de la presente nota es ofrecer una alternativa para hacer "visible" la solución general de las cuadráticas.

LA PARÁBOLA $y = x^2$

La primera observación que proponemos es extremadamente simple: la parábola $y = x^2$ tiene simetría bilateral, en otras palabras, posee un eje de simetría que coincide con el eje de las ordenadas. La recta horizontal $y = r$ para $r > 0$ tiene dos puntos en común con esta parábola, éstos equidistan del eje de las ordenadas, y $\sqrt{r}$ es la distancia común.



La siguiente observación valiosa, aunque también extremadamente simple, es la relación que guardan las distancias $\sqrt{r} = \overline{NT} = \overline{MT}$ y $r = \overline{OT}$. Otra observación, también muy simple, nos dice que y alcanza su valor mínimo en $x = 0$, es decir, en la intersección de la parábola con el eje de simetría.

Una última observación es que toda parábola

$$y = x^2 + px + q \tag{1.4}$$

no es más que una traslación de la parábola $y = x^2$. Para convencerse basta escribir $y - q = x^2$ seguido de

$$y - \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Con ello se ha transformado la ecuación (1.4) en una ecuación de la forma

$$y - k = (x - h)^2 \tag{1.5}$$

que es, en el lenguaje de la geometría analítica, la ecuación "canónica" de la parábola de lado recto $4p = 1$ y vértice (h,k), la cual, mediante un obvio cambio de coordenadas, se transforma en $y = x^2$.

Tenemos entonces que, como toda traslación es una isometría, la relación de distancias de la parábola $y = x^2$ que se muestra en la figura anterior se conserva en la parábola (1.4). Dicho de otra manera, la parábola $y = x^2$ es un buen modelo para cualquier parábola de la forma $y = x^2 + px + q$.

LA SIMETRÍA DE LAS RAÍCES

Las dos raíces de una ecuación cuadrática son reales, ellas son las abcisas de dos puntos que equidistan del eje de simetría de la parábola a la que corresponde la ecuación. Es decir, si α y β son las raíces de la ecuación cuadrática

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1.6}$$

entonces la recta $x = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ es el eje de simetría de la parábola (1.4).

De la discusión anterior obtenemos nuevas conclusiones valiosas:

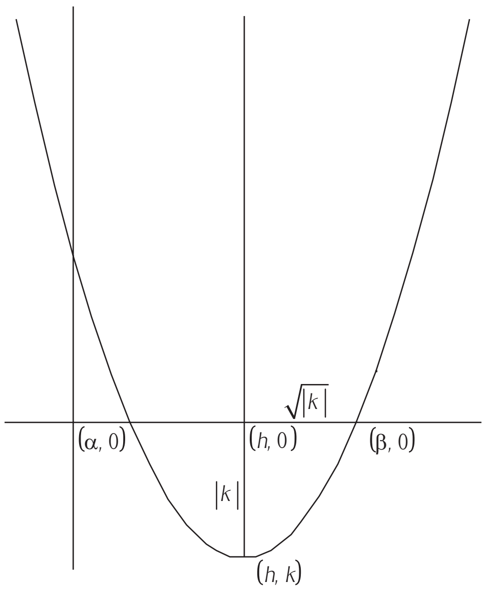
1. La parábola (1.4) tiene un único mínimo.
2. Este mínimo se alcanza en el eje de simetría, es decir, es el valor de y cuando x asume el valor de la media aritmética de las raíces.

Veamos, entonces, que la distancia del vértice (h,k) al eje de las abcisas es precisamente el valor absoluto del valor mínimo de *y*, es decir $d = |k|$, y además $h = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Ahora bien, por la regla de Ruffini tenemos que $\alpha + \beta = -p$ y $\alpha\beta = q$ de donde $h = -\frac{p}{2}$ y, en consecuencia,

$$k = h^2 + ph + q = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q = -\frac{p^2}{4} + q.$$

Observamos, entonces, que la parábola se comporta como lo muestra la figura que sigue, y así, las raíces están entonces dadas en la forma

$$\alpha = h - \sqrt{|k|} \quad \text{y} \quad \beta = h + \sqrt{|k|}$$



LA CUADRÁTICA GENERAL

Notemos primero que las raíces de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.7}$$

son las mismas que las de

$$x^2 = \frac{b}{a}x - \frac{c}{a} = 0, \tag{1.8}$$

por lo que resulta suficiente estudiar la parábola

$$y = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \tag{1.9}$$

cuyo vértice está en el punto (h,k) donde $h = \dfrac{b}{2a}$ y

$$k = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{c}{a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Las raíces de la ecuación (1.7) son reales si $k < 0$, es decir, si

$$\left|k\right| = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

y como ya hemos observado, las raíces son

$$h \pm \sqrt{|k|}$$

o sea

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

con lo que recuperamos la conocida solución general.

COMENTARIOS FINALES

El proceso de experimentación inicial en la introducción de las cuadráticas consiste usualmente en la graficación de los casos particulares. Las ventajas del ejemplo que se presenta en esta nota radican en la comparación gráfica de la parábola de lado recto $4p = a$ con la parábola de lado recto $4p = 1$. El proceso de graficación puede reducirse en tiempo, o bien digitalizarse, una buena alternativa es un acetato sobre papel cuadriculado. Como se ha apuntado, éste es sólo un ejemplo en la línea del artículo previo "Ideas geométricas en álgebra elemental", publicado por el autor en *Educación Matemática* durante 1996.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ausubel, D. P. (1973), "Algunos aspectos psicológicos de la estructura del conocimiento", en S. Elam (ed.), *La educación y la estructura del conocimiento,*. Buenos Aires, El Ateneo.

Bunge, M. (1980), *Epistemología,* México, Siglo XXI Editores.

LaCasa, P. (1994), *Modelos pedagógicos contemporáneos,* Madrid, Visor.

Lakatos, I. (1978), *Matemáticas, ciencia y epistemología,* Madrid, Alianza Universidad.

López Pérez, R. (2000), "Constructivismo radical de Protágoras a Waltzlawick", en R. Careaga (ed.), *Tradición y cambio en la psicopedagogía,* Madrid, Universidad Educares.

Nardone, G. y P. Watzlawick (1992), *El arte del cambio,* Barcelona, Herder.

Pérez, J. A. (1996), "Ideas geométricas en álgebra elemental", *Educación Matemática,* vol. 8, núm. 3, pp. 72-84.

Pozo, J. I. (1997), *Teorías congnitivas del aprendizaje,* Madrid, Morata Editores.

Rosenblueth, A. (1994), *Mente y cerebro y el método científico,* México, Siglo XXI Editores.

DATOS DEL AUTOR

Juan Antonio Pérez
Centro Regional de Estudios Nucleares y Facultad de Ingeniería,
Universidad Autónoma de Zacatecas
japerez@cantera.reduaz.mx

Triángulos y deltoides con Geometría Dinámica

Víctor Larios Osorio

Resumen: Este trabajo contiene material que sirve como guía para el estudio de algunas curvas en la "geometría del triángulo" utilizando software computacional para Geometría Dinámica, a fin de que se desarrollen habilidades de observación, análisis y razonamiento que lleven al aprendizaje de la demostración a través de observaciones, conjeturaciones y argumentaciones.

Palabras clave: enseñanza de la geometría, Geometría Dinámica, curvas mecánicas.

Abstract: This paper contains material to be used as guide to study some triangle geometry curves using Dynamic Geometry software, in order to develop observation, analysis and reasoning skills to learn the demonstration through observations, making conjectures and proposing arguments.

Keywords: geometry teaching, Dynamic Geometry, mechanical curves.

A Iza

–¿Qué es una deltoide? –preguntó A lleno de curiosidad.
–Es una letroide –contestó M sin pérdida de tiempo.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo proporciona una guía para realizar actividades que sirvan para el estudio de curvas que muy raramente se consideran en el currículo geométrico de bachillerato, a pesar de que están relacionadas con algo tan común como los triángulos. Para ello, se echa mano del Software para Geometría Dinámica (o SGD) y de la idea de *mosaico deductivo*.

Una de esas curvas es la llamada *circunferencia de los nueve puntos*[1] que es posible construir con regla y compás, aunque se aborda también en cursos de Geometría Analítica, pero con la ayuda de software es posible relacionarla con otras construcciones que resultan interesantes. Sin embargo, el uso de software no debe eliminar el análisis y la reflexión por parte de los alumnos, ya que las computadoras son una herramienta que puede complementar o ayudar la visualización de los objetos geométricos, pero no es un sustituto de la capacidad intelectual del individuo.

Aunque este trabajo está pensado para que, en su aplicación, el profesor le pida a los alumnos que provean argumentos y desarrollen su razonamiento deductivo, es pertinente aclarar que no se puede esperar que se proporcionen argumentos o demostraciones como se presentan aquí. Uno de los objetivos principales al proponer un trabajo como éste es que se busque desarrollar habilidades de razonamiento en el alumno, a fin de que pueda construir demostraciones deductivas aceptables, pero coherentes con su desarrollo cognitivo, a partir de observaciones, análisis, reflexiones, planteamiento de conjeturas y propuesta de argumentos.

Brevemente, he de decir que, de manera obvia, las observaciones y conjeturas que se proponen a lo largo de este trabajo son una propuesta personal, y queda la posibilidad de que el lector, o sus alumnos, hagan otras y las exploren, propiciando nuevas conjeturas y nuevos argumentos que enriquezcan el trabajo.

En cuanto al software utilizado, se recomienda el uso de *Cabri Géomètre II* (de origen francés) por encima de *El Geómetra* (de origen estadounidense), pues sus opciones para la construcción de lugares geométricos lo hacen más adecuado en este caso. No obstante, es la experiencia del docente la que le permitirá elegir, basándose en las ventajas y desventajas (tanto técnicas como de uso) que tienen cada uno de ellos.

LA RECTA DE SIMSON

Se inicia con la construcción, en la pantalla de la computadora, de un triángulo cualquiera con vértices A, B y C. Además, se crea un punto P libre y se constru-

[1] Según Howard Eves, este nombre le fue dado por Poncelet y se le quedó en la tradición de los países de habla inglesa (y de otros países como México), pero algunos geómetras franceses le han llamado *circunferencia de Euler* y algunos alemanes *circunferencia de Feuerbach*.

Figura 1

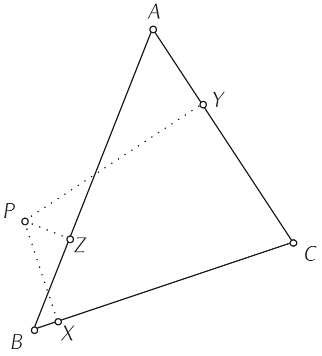
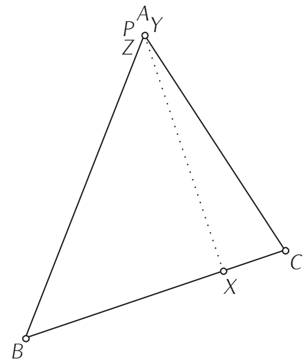


Figura 2



yen los pies de las perpendiculares a los tres lados del triángulo que pasan por *P*, los cuales llamaremos *X*, *Y* y *Z* (figura 1).

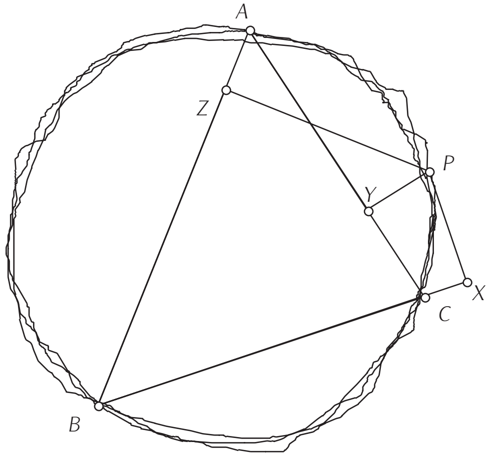
Es importante mencionar que, al utilizar software, aparecen algunas dificultades técnicas, como el hecho de que ocasionalmente desaparecen los pies de las perpendiculares (dependiendo del software y su versión), por lo que no es mala idea pedirle a los alumnos que resuelvan este problema logrando que *X*, *Y* y *Z* aparezcan siempre (aunque estén en las extensiones de los lados) sin afectar la construcción original.

Ahora bien, se tiene que *X*, *Y* y *Z* no necesariamente son colineales, aunque podrían serlo en algunos momentos. El siguiente paso es determinar la (o las) posición(es) de *P* para que sean colineales. La exploración se puede iniciar con los casos extremos: cuando *P* coincide con uno de los vértices y entonces ocurre que dos de los pies coinciden entre sí (si $P = A$ entonces $Y = Z$, véase la figura 2). Además, ocurre que la recta que contiene a los tres pies coincide con una de las alturas del triángulo. En conclusión, tres posible posiciones de *P* son los vértices del triángulo.

Para buscar más posiciones, se podría pedir al software que mida $\angle XYZ$ y entonces mover *P* hasta que la medida sea lo más cercana a 0° o 180°, según convenga. Al utilizar la computadora se puede aprovechar la opción **Traza activada** de *Cabri* (o la opción **Trazar punto** de *El Geómetra*) sobre *P* y moverlo, partiendo de alguno de los vértices, a fin de mantener el ángulo lo más cerca a los valores convenientes. El resultado (después de varios intentos) podría ser como el que aparece en la figura 3.

Figura 3

m∠XZY= 2°



Se observa que P parece estar en una circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo: su circunferencia circunscrita. En otras palabras, podríamos conjeturar que para que los puntos X, Y y Z estén alineados es necesario que el punto P esté en la circunferencia circunscrita del triángulo original.

Aunque podría parecer aventurado ampliar esta conjetura, añadiéndole un "y viceversa" al final, después de una exploración, llegaría a la conclusión de que es así. Por lo anterior, al parecer la siguiente afirmación es verdadera:

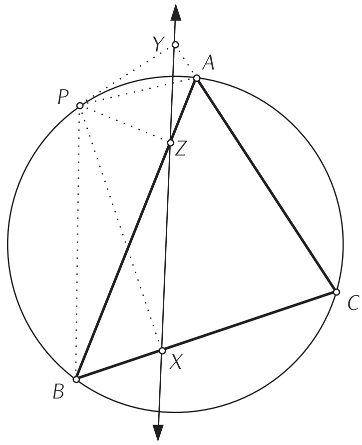
Conjetura 1. Sea un triángulo ABC y un punto P, y sean X, Y y Z los pies de las perpendiculares a los lados del triángulo que pasan por P. Los puntos X, Y y Z son colineales si y sólo si P pertenece a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC.

Ahora, si bien se propone que se construyan demostraciones en clase, no se pretende que se haga a la primera oportunidad y con un nivel muy formal (como ya se dijo en la introducción). Por lo pronto, aquí va una demostración que sirve como guía.

En lo siguiente nos apoyaremos en la figura 4, donde se muestran todos los puntos, rectas, segmentos y la circunferencia que se han mencionado.

Además, por cuestiones de claridad, primero se demostrará la implicación: *si P pertenece a la circunferencia circunscrita del triángulo, entonces los puntos X, Y y Z son colineales.*

Figura 4



Tomemos en cuenta el cuadrilátero *APBC*, el cual es cíclico (pues es posible trazar una circunferencia que pase por sus cuatro vértices). Con algunos ejemplos se puede ilustrar que una de las propiedades de estos cuadriláteros es que sus ángulos opuestos (internos) son suplementarios. Por tanto, se tiene que

$$\angle APB = 180° - \angle BCA.$$

Ahora tendremos en cuenta otros tres cuadriláteros: *BXZP*, *CYPX* y *AYPZ*. Si se observa al cuadrilátero *BXZP* se tiene que $\angle BXP$ es un ángulo recto, por lo que es posible construir una circunferencia que pasara por los tres puntos y que B y P serían los extremos de uno de sus diámetros; observemos que también $\angle BZP$ es un ángulo recto, por lo que se podría construir otra circunferencia que pasara por los tres puntos, siendo B y P también extremos de uno de sus diámetros, por lo que ambas circunferencias en realidad serían una. En conclusión, este cuadrilátero es cíclico. Para el caso de los otros dos cuadriláteros (*CYPX* y *AYPZ*) ocurre lo mismo.

Ahora, teniendo en cuenta el cuadrilátero *CYPX*, resulta entonces que $\angle XCY + \angle YPX = 180°$, y como $\angle XCY = \angle BCA$ se tiene que

$$\angle APB = 180° - \angle BCA = \angle YPX.$$

Si ahora a $\angle APB$ y $\angle YPX$ se les quita (o resta) $\angle APX$, se tiene que

$$\angle XPB = \angle YPA.$$

Concentrémonos ahora en el cuadrilátero cíclico *BXZP*. Se tiene que $\angle XPB = \angle XZB$, pues subtienden el mismo arco.

Similarmente, con el cuadrilátero cíclico *AYPZ*, se tiene que $\angle YPA = \angle YZA$, por la misma razón.

Entonces, se obtiene que

$$\angle XZB = \angle YZA,$$

y como *AB* es un segmento de recta, entonces *X*, *Y* y *Z* están alineados.

Hasta aquí con esta parte de la demostración, ¿podría terminarla el lector?

Resulta que la Conjetura 1 es más bien el Teorema 1 y, de hecho, la línea a la que pertenecen estos tres puntos se denomina *recta de Simson de P con respecto al triángulo ABC*.[2]

Además, conviene rehacer la construcción mostrada en la figura 1, a fin de que *P* esté en la circunferencia circunscrita (que al moverlo sólo pueda moverse sobre ella) y también pedirle a los alumnos el desarrollo de *macros* en el software que generen esta recta a partir de los vértices del triángulo y del punto *P* para simplificar construcciones posteriores.

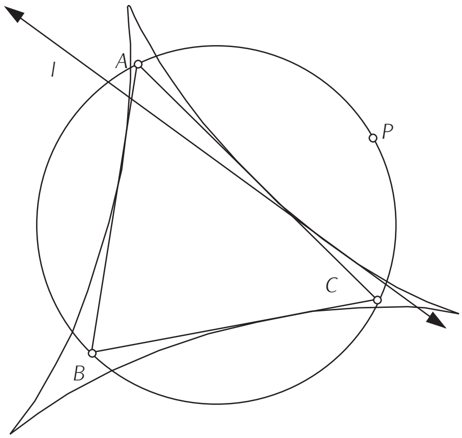
LA DELTOIDE

Una curva cuya obtención con regla y compás resulta complicada, pero que es relativamente fácil de ver utilizando la computadora, es la "deltoide" o "hipocicloide de tres picos".

Resulta que, al mover el punto *P* a lo largo de la circunferencia, su recta de Simson gira suavemente en sentido contrario, delineando una deltoide que, por esta relación con la recta y el triángulo, se llama *deltoide de Steiner*,[3] y está ilustrada en la figura 5. Con la opción **Trazar** del software activada sobre la recta de Simson, se ve cómo se forma la curva. Sin embargo, para un estudio más detallado y libre, se recomienda utilizar la opción que se incluye en los programas para **Construir el lugar geométrico** de la recta de Simson con respecto a *P*.

[2] El nombre de la recta se debe al matemático escocés Robert Simson (1687-1768).
[3] El nombre se debe al matemático Jakob Steiner (1796-1863).

Figura 5



Hagamos una aclaración del lenguaje, pues se ha abusado un poco. En realidad, las rectas de Simson que aparecen en la pantalla de la computadora son un subconjunto (finito) de la familia (infinita) de las rectas de Simson con respecto a un triángulo y toda esa familia "delinea" a la deltoide, pues ésta es la envolvente de las rectas de Simson. Sin embargo, por familiaridad, se seguirán haciendo referencias de este tipo al hablar, por ejemplo, de que "la recta de Simson genera..." en lugar de decir "la familia de rectas de Simson son tangentes a..." o "la envolvente de las rectas de Simson es..." y así aprovechar las potencialidades dinámicas del software, pues *Cabri* utiliza la envolvente para crear el lugar geométrico de las rectas, a diferencia de otros programas (aunque vale la pena que el docente experimente con éstos, a fin de ver cuál resultado se obtiene).

Ahora bien, una vez que ha sido creada la curva como lugar geométrico, ésta puede ser manipulada, es decir, es posible trasladarla, girarla o dilatarla, variando la posición de los vértices del triángulo. Es interesante preguntar a los alumnos si el cambio de la posición de *P* podría o no afectar a la deltoide en su tamaño o posición, si se mantienen fijos los vértices del triángulo. Antes que eso, ¿podría decir el lector por qué afectaría o no?

Pueden plantearse otras preguntas. Por ejemplo: "¿Depende la posición de la deltoide de alguna medida de los lados del triángulo o de la posición de sus vértices o de las medidas de sus ángulos?", "¿o su tamaño?" "¿Cuál es el centro de la deltoide?"

Como caso particular, se les puede sugerir a los alumnos que muevan los vértices del triángulo, tratando de que no se modifique el radio de la circunferencia circunscrita y observando el tamaño y posición de la deltoide. Al lector le queda el reto de hacer una construcción en la computadora en la cual se garantice que, al moverse los vértices del triángulo, no varía el radio de la circunferencia circunscrita. Tras una exploración, es interesante observar que, en estas condiciones, al mover los vértices del triángulo sin modificar el radio de la circunferencia, la deltoide gira y se traslada, pero aparentemente no cambia de tamaño. Una inquietud que podría surgir sería sobre la relación entre la deltoide y el tamaño de la circunferencia, más que entre la deltoide y la posición de los vértices. Si así ocurre, entonces se puede afirmar lo siguiente (a reserva de que después se argumente a favor o se refute).

Conjetura 2. El tamaño de la deltoide generada con la recta de Simson de un punto *P* con respecto a un triángulo *ABC* depende del radio de la circunferencia circunscrita del mismo triángulo.

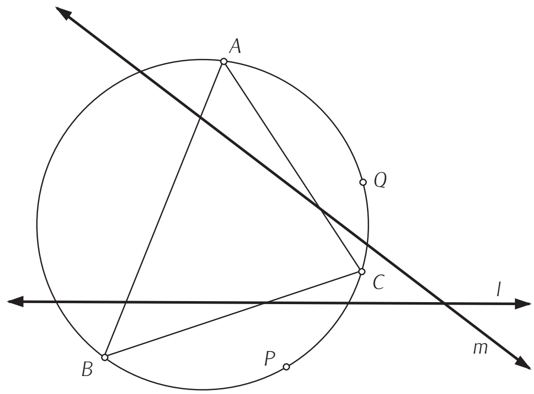
Es importante notar que lo queda en adelante es un reto para encontrar argumentos a favor o contraejemplos, pero aún no se tienen elementos suficientes para ello, por lo que habrá que explorar algunas cuestiones.

Además, consideremos de paso el posible "centro" de la deltoide. ¿Cuál podría ser este punto? En un primer momento, si el triángulo que se ha construido es casi equilátero, se podría aventurar que el "centro" de la deltoide es el circuncentro, pero al modificar el triángulo y hacer que uno de sus ángulos sea obtuso o muy agudo, es posible ver claramente que esto es falso, pues la deltoide se mueve, pero la circunferencia circunscrita y su centro no. Otras posibilidades son los demás puntos notables del triángulo (baricentro, ortocentro e incentro), para lo cual habría que pedirle en un primer momento a los alumnos que analizaran,[4] con base en los objetos que se han manejado hasta este momento, cuál de estos puntos podría ser un candidato adecuado y después realizar una exploración con la computadora.

Por lo pronto, y para un posterior análisis, se hará la siguiente afirmación.

[4] Es importante el hecho de pedirles a los alumnos que realicen análisis de algunos hechos sin necesidad de acudir a la computadora o en un momento previo al uso de esta herramienta electrónica.

Figura 6



Conjetura 3. El "centro" de la deltoide generada a partir de una recta de Simson de *P* con respecto a un triángulo *ABC* es alguno de los puntos notables del triángulo (baricentro, ortocentro o incentro), exceptuando al circuncentro.

A continuación, se considerará una curva que puede ayudar a desentrañar este asunto.

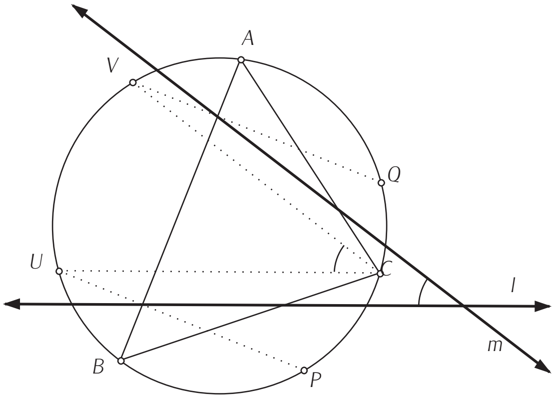
LA SIGUIENTE CURVA

Si se construyen (se podría usar una macro) dos rectas de Simson, *l* y *m*, de *P* y *Q*, respectivamente con respecto al triángulo *ABC* (véase la figura 6), ¿qué relación se observa entre el ángulo que forman esas dos rectas y las posiciones de *P* y *Q* (o la medida del arco que subtienden)?

Con el software, es posible medir la longitud del arco que subtienden *P* y *Q*, midiendo $\angle PGQ$ (donde *G* es el circuncentro), y el ángulo entre las dos rectas, estableciendo convenientemente tres puntos que nos permitan hacer esto. Después de una exploración en la pantalla de la computadora, es posible descubrir que, de hecho, la medida del ángulo entre las dos rectas es la mitad de la medida del arco *PQ*.[5] ¿Podría el lector hallar argumentos más formales que sustenten esta afirmación?, otra posibilidad es que se le pida a los alumnos que proporcio-

[5] Esta afirmación es, de hecho, un teorema, pero su demostración no se incluye para darle énfasis a otros hechos.

Figura 7



nen algunos tras mirar la figura 7 (obsérvese que los segmentos *CU* y *CV* son paralelos respectivamente a las rectas *l* y *m*, y que los segmentos *PU* y *QV* son perpendiculares a uno de los lados del triángulo).

De esta manera, se propondría construir ahora el punto *Q* de tal suerte que sea diametralmente opuesto a *P*, lo que quiere decir que la posición de *Q* dependerá de la posición de *P*. ¿Podría el lector realizar una construcción en la computadora que garantice esto? También podría pedírsele esta construcción a los alumnos. Entonces, resultará que *l* y *m* son perpendiculares entre sí, porque el arco *PQ* es de 180° (figura 8).

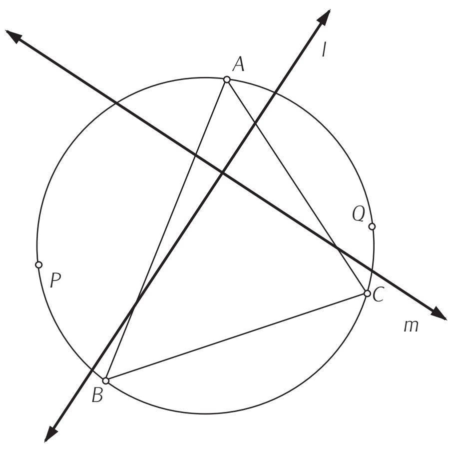
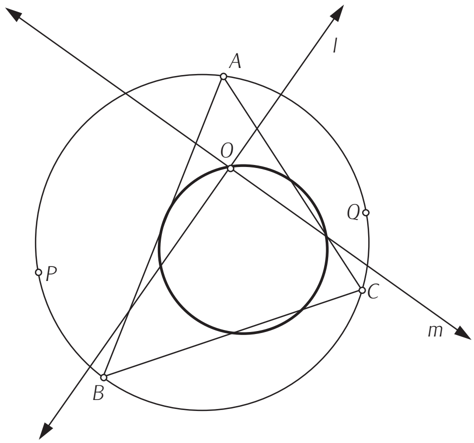


Figura 8

Figura 9



Ahora bien, si se llama O al punto de intersección de l y m, entonces se pediría a los alumnos que activen la opción **Trazar** sobre O y muevan P (con lo cual se movería Q también), observando la curva que describe O. De hecho, es posible construir, con ayuda de la computadora, el lugar geométrico que define O con respecto a P, obteniendo un resultado similar al de la figura 9.

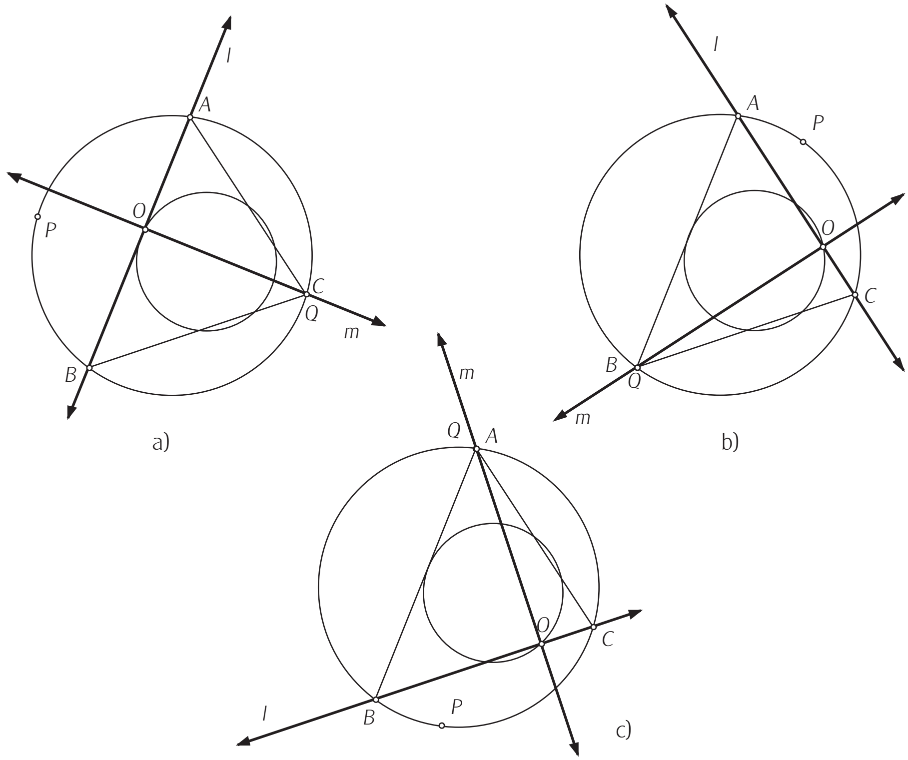
Entonces, con esta última observación en la que parece que O describe una circunferencia, se puede lanzar la siguiente afirmación.

Conjetura 4. Si se tiene un triángulo ABC, se construyen dos puntos P y Q sobre su circunferencia circunscrita de tal suerte que estén diametralmente opuestos, se construyen sus rectas de Simson, l y m respectivamente, y se llama O al punto de intersección de éstas, entonces O pertenece a una misma circunferencia sin importar la posición que tenga P (y por tanto Q) en la circunferencia circunscrita.

Esta afirmación es cierta y, si se expone una argumentación formal, se eleva al rango de teorema (que sería el Teorema 2), pero su demostración no la expondremos aquí, pues requiere algunos resultados previos y su complejidad va más allá del objetivo de este trabajo. Por lo pronto, aceptaremos este resultado como cierto, ¿podría el lector determinar qué circunferencia es?

Para responder a esta pregunta, podemos considerar que por tres puntos no alineados pasa una y sólo una circunferencia, por lo que habría que buscar cuál

Figura 10

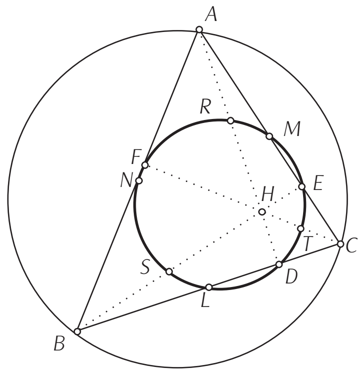


tercia de puntos de esta curva nos conviene analizar. Para ello, se comenzaría por plantear algunos casos y sugerir investigar la posición de *P* necesaria para que su recta de Simson coincida con alguno de los lados del triángulo. Al determinar esta información, se descubre que es necesario que *P* esté situado diametralmente opuesto a un vértice del triángulo para que *l* coincida con el lado opuesto a dicho vértice (véase la figura 10).

Por ejemplo, si *P* queda diametralmente opuesto a *C* (figura 10a), entonces resulta que *Q* y *C* coinciden. También ocurre que la recta *m* pasa por el vértice *C*. Además, como *m* es perpendicular a *l* y esta última coincide con el lado opuesto a *C* (el lado *AB*), se tiene que *m* coincide con la altura del triángulo que pasa por *C* y que *O* coincide con el pie de dicha altura.

Como con los otros lados y vértices del triángulo ocurre lo mismo, es decir, que cada que vez que *P* se coloca diametralmente opuesto a cada uno de los

Figura 11



vértices del triángulo, O coincide con el pie de la altura que está en el lado opuesto al vértice considerado, entonces la circunferencia que traza O pasa por los tres pies de las alturas del triángulo. Por consiguiente, habría que preguntarse: ¿cuál es la circunferencia relacionada con un triángulo que contiene a los pies de las alturas? La respuesta es: *la circunferencia de los nueve puntos*.

LA CIRCUNFERENCIA DE LOS NUEVE PUNTOS

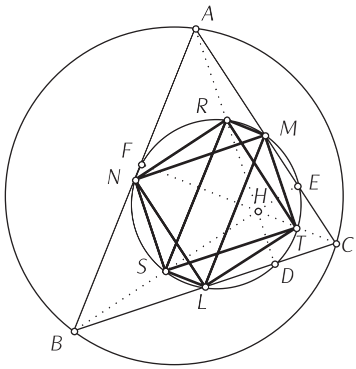
En esta sección hablaremos un poco sobre la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo. Quizá resulte interesante que los alumnos realicen la construcción con regla y compás, o bien utilizando la computadora, a fin de que practiquen sus habilidades manuales y pongan en práctica algunos conceptos geométricos involucrados.

A esta circunferencia se le llama así, porque, para un triángulo cualquiera, contiene los tres pies de las alturas (llamados D, E y F en la figura 11), a los puntos medios de los lados (L, M y N) y a los puntos R, S y T, que son los puntos medios de los segmentos que unen a los vértices del triángulo con su ortocentro (H).

Este hecho es un teorema, el cual se puede enunciar como sigue.

Teorema 3. La circunferencia de los nueve puntos. Dado un triángulo, los pies de sus alturas, los puntos medios de sus lados y los puntos medios de los segmentos que unen sus tres vértices con su ortocentro pertenecen a una misma circunferencia.

Figura 12



Si observa el lector, no se la ha llamado de antemano *conjetura*, porque es información que tendría el docente para presentársela a los alumnos, ya que éstos, en el nivel medio, no tienen por lo general información al respecto.

Para una demostración, consideremos la misma notación de la figura 10, pero añadiendo algunos segmentos que ilustrarán mejor los argumentos, tal como se muestra en la figura 12.

Consideraremos primero lo referente a un solo lado del triángulo.

Como M y N son los puntos medios de los lados CA y AB, respectivamente, el segmento MN es paralelo al lado BC por el teorema de paralelismo. Si ahora consideramos el triángulo HBC, se tiene que también ST es paralelo a BC por el mismo teorema de paralelismo, pues S y T son puntos medios de los lados HB y CH, respectivamente. En consecuencia, MN es paralelo a ST.

Similarmente, AB es paralelo a LM y a RS; y CA es paralelo a NL y a TR.

Ahora bien, regresando a los segmentos paralelos ST y MN, éstos forman parte del cuadrilátero $STMN$.

Consideraremos ahora el triángulo HCA.

Como T y M son puntos medios de HC y CA, respectivamente, entonces TM es paralelo a AH. Pero como este último es parte de la altura del triángulo ABC, que es perpendicular a BC, entonces TM también es perpendicular a BC y, por consiguiente, también a ST y a MN.

Y puesto que el cuadrilátero $STMN$ es cíclico, entonces, sus ángulos opuestos son suplementarios y, en consecuencia, es un rectángulo, siendo por tanto que $ST = MN$. Además, uno de los diámetros de su circunferencia circunscrita es SM.

Similarmente, los cuadriláteros *RSLM* y *TRNL* son rectángulos también y, por tanto, cuadriláteros cíclicos. Además, dos de los diámetros de la circunferencia circunscrita del cuadrilátero *RSLM* son *SM* y *RL*, mientras que uno de los diámetros de la circunferencia circunscrita del cuadrilátero *TRNL* es también *RL*. Por tanto, los vértices de los tres rectángulos (*L, T, M, R, N* y *S*) están en la misma circunferencia.

Finalmente, consideremos el triángulo *LDR*, el cual tiene un ángulo recto en *D*, por lo que *RL* es un diámetro de su circunferencia circunscrita, que es la misma circunferencia a la que nos hemos referido en el párrafo anterior. Por consiguiente, *D* pertenece a dicha circunferencia.

De manera similar, se ve que *E* y *F* también están en la misma circunferencia.

Y aquí termina la demostración. Otro planteamiento interesante en este momento es determinar cuál es el centro de esta circunferencia, lo cual ayuda mucho para el caso de la construcción del trazo (ya sea que se haga con regla y compás o con una computadora). Para ello, es posible experimentar con ayuda de la computadora si el ortocentro o el circuncentro son el centro de esta circunferencia y, entonces, se tendrá *evidencia cabrística*[6] de que no es así.

Convendría lanzar el reto a los alumnos, quizá haciendo aproximaciones cada vez mejores de la posición del centro y llegar a afirmar lo siguiente.

Conjetura 5. El centro de la circunferencia de los nueve puntos es el punto medio del segmento cuyos extremos son el circuncentro y el ortocentro.

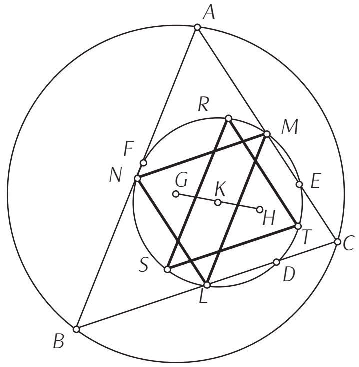
Para una demostración de este hecho, que lo convertiría en el Teorema 4, se utilizará la figura 13, la cual tiene la misma nomenclatura que las figuras anteriores, pero se ha añadido el circuncentro (*G*).

Consideremos los triángulos *ABC, RST* y *LMN*. Considerando los mismos argumentos que para el caso de la demostración del teorema anterior, se tiene que los tres triángulos son semejantes, pues sus lados correspondientes son paralelos entre sí. Además, como los lados de los dos últimos triángulos miden la mitad que los lados correspondientes del primer triángulo, entonces los triángulos *RST* y *LMN* son congruentes entre sí.

Puesto que *R, S* y *T* están en las alturas del triángulo original, *H* es el orto-

[6] La expresión "evidencia *cabrística*" (que por cierto se la atribuyó al doctor Alejandro Díaz Barriga Casales) la he usado para referirme a las ocasiones en que se obtiene información o experiencia, para formular una conclusión, a partir de las observaciones de las construcciones realizadas en la computadora, particularmente con el programa *Cabri*.

Figura 13



centro del triángulo *RST*. Y como *G*, circuncentro del triángulo *ABC*, se obtiene al construir las perpendiculares a los lados que pasan por *L*, *M* y *N*, entonces, *G* es el ortocentro del triángulo *LMN*.

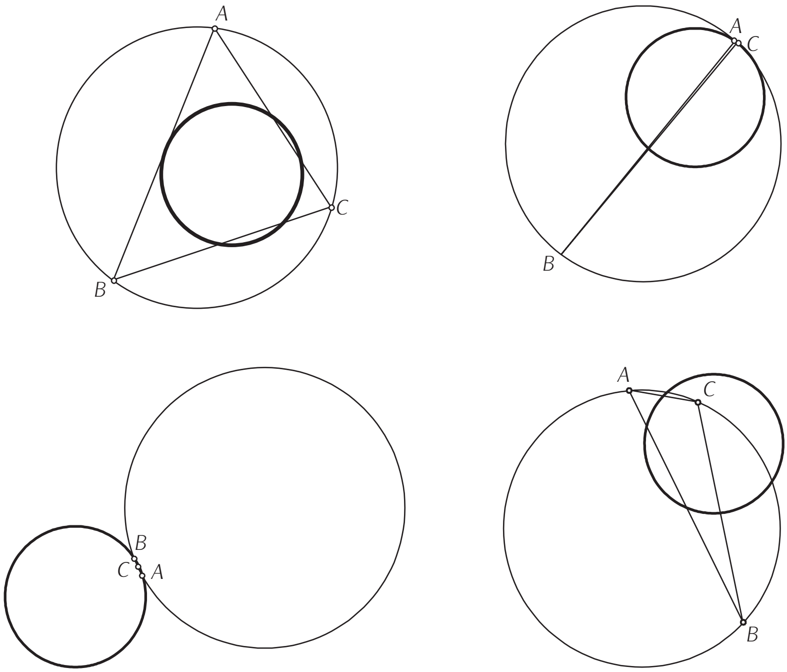
Es interesante observar que es posible obtener cualquiera de estos dos triángulos a partir del otro, realizando un giro de 180° con centro en un punto que coincide con el centro de la circunferencia de los nueve puntos, ya que los vértices de ambos triángulos están en ella. Ahora bien, con la misma rotación, el punto *G* (ortocentro de un triángulo) se convierte en el punto *H* (ortocentro del otro triángulo), por lo que el centro de la rotación y de la circunferencia de los nueve puntos es el punto medio del segmento que une a ambos puntos.

Como se dice comúnmente: *quod erat demostrandum*.

Para seguir hablando de esta circunferencia, se puede pensar en su tamaño en relación con el triángulo y a su circunferencia circunscrita. El software sirve para explorar una construcción en la que aparezca un triángulo *ABC* y sus circunferencias circunscrita y la de los nueve puntos, para ver la relación entre éstas en lo que respecta a sus tamaños.

Una posibilidad es hacer la construcción de tal manera que, al mover los vértices del triángulo, no se modifique ni el tamaño ni la posición de la circunferencia circunscrita (construcción que, de hecho, ya se planteó previamente al lector). Después se construye la circunferencia de los nueve puntos y se mueven los vértices, observando el tamaño de esta última circunferencia. Cuatro de las posiciones posibles de los vértices se ilustran en la figura 14, llegándose a casos extremos de hacer pequeño al triángulo o a alguno de sus ángulos.

Figura 14



Se podrá observar entonces que, al no variar el tamaño de la circunferencia circunscrita, parecería que la circunferencia de los nueve puntos tampoco varía en su tamaño, sino sólo de posición. Para estar seguros, se le podría pedir al software utilizado que muestre las medidas de los radios de ambas circunferencias y continuar explorando para tener suficiente *evidencia cabrística* y plantear lo siguiente.

Conjetura 6. En un triángulo cualquiera, el radio de su circunferencia de los nueve puntos mide la mitad del radio de su circunferencia circunscrita.

Sin embargo, esta afirmación no se queda como conjetura, sino que a continuación se presenta una demostración que la convierte en el Teorema 5.

Para ello, consideremos los triángulos *ABC* y *RST* (véase figura 13). Podemos establecer una correspondencia entre ellos ($\Delta ABC \leftrightarrow \Delta RST$) y como los lados correspondientes son paralelos entre sí, entonces ambos triángulos son semejantes.

Además, ocurre que cada uno de los lados del triángulo *RST* miden la mitad de lo que miden los lados correspondientes del triángulo *ABC*, por lo que las medidas de los radios de las circunferencias circunscritas de ambos triángulos están en razón de 2:1. Sin embargo, la circunferencia circunscrita del triángulo *RST* es la circunferencia de los nueve puntos, por lo que su radio es la mitad del radio de la circunferencia circunscrita del triángulo *ABC*. Con esto se han completado los argumentos de la demostración.

Así pues, basándonos en estos dos últimos teoremas, se puede decir que la circunferencia de los nueve puntos se obtiene al aplicarle a la circunferencia circunscrita una homotecia, con un razón de 2:1, respecto al ortocentro. Es como si la circunferencia circunscrita se encogiera progresivamente hasta que su radio se redujera a la mitad, al tiempo que sufre una traslación a medida que su centro se desplaza hacia el ortocentro, llegando hasta el punto medio del segmento que va del circuncentro a este último.

RELACIONES ENTRE DOS CURVAS

En los párrafos anteriores se mostró cuál es la circunferencia que describe el punto *O* de la figura 9 y se describieron algunas de sus propiedades. Esta circunferencia y la deltoide son dos curvas que se pueden generar, usando rectas de Simson, aprovechando la computadora. Ahora bien, ¿qué pasaría si se ponen juntas? El resultado se ve en la siguiente figura:

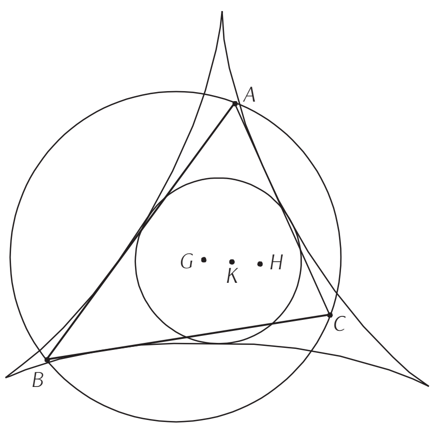
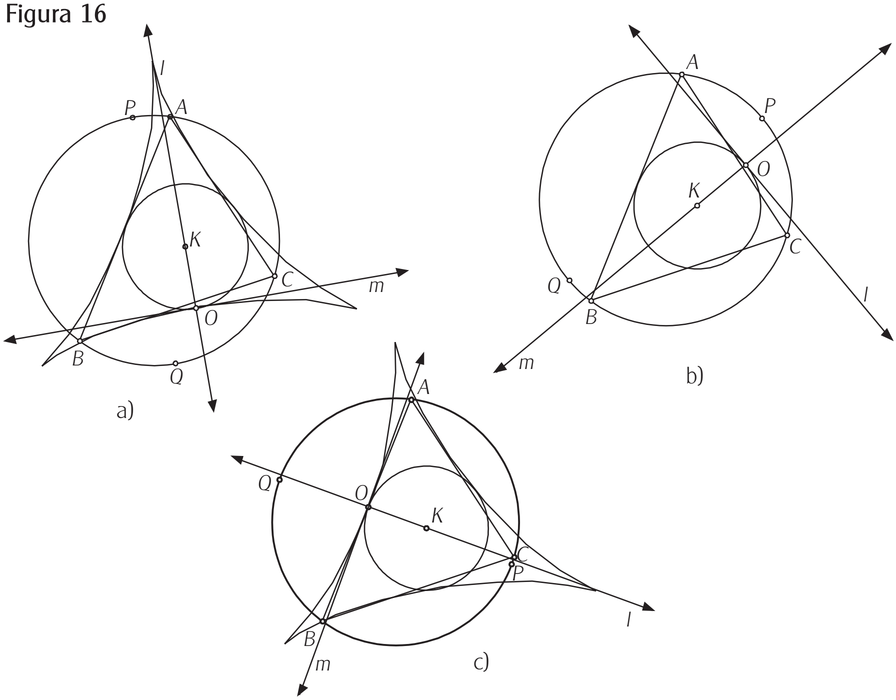


Figura 15

Figura 16



Con la computadora, se podrían mover los puntos iniciales de la construcción: los vértices del triángulo y el punto *P* que define la recta de Simson para observar lo que ocurre. Es más, si la construcción está hecha de tal manera que los vértices se pudieran mover sin que se modificara el radio de la circunferencia circunscrita (como ya se ha propuesto anteriormente), las observaciones podrían ser más enriquecedoras. De éstas, una podría ser que la deltoide y la circunferencia de los nueve puntos no se separan, parecería que son tangentes.

En realidad, ambas curvas son tangentes entre sí en tres puntos, y es posible realizar un análisis extra para proporcionar argumentos al respecto, pero se necesitan métodos analíticos que no ahondaremos aquí. Un trabajo experimental podría ser que los alumnos, con ayuda de la computadora, determinen cuáles son esos puntos de tangencia.

De hecho, ocurre que si se usan dos rectas de Simson basadas en puntos situados diametralmente opuestos, se tiene que si una de éstas es tangente simultáneamente a ambas curvas, la otra pasa por el centro de la circunferencia de los nueve puntos (véase la figura 16).

Al estar relacionadas estas dos curvas de esa manera, se tiene la ventaja de que es posible resolver algunos problemas de una de ellas, utilizando las propiedades de la otra. Es recomendable remarcar a los alumnos que, en la Matemática, ocurre en ocasiones que, para resolver un problema, se lo sustituye por uno similar o relacionado (escogido convenientemente) pero que es más sencillo de resolver. De hecho, en este momento ya estamos en posibilidad de responder a las Conjeturas 2 y 3, planteadas con anterioridad:

Conjetura 2. El tamaño de la deltoide generada con la recta de Simson de un punto *P* con respecto a un triángulo *ABC* depende del radio de la circunferencia circunscrita del mismo triángulo.

Conjetura 3. El "centro" de la deltoide generada a partir de una recta de Simson de *P* con respecto a un triángulo *ABC* es alguno de los puntos notables del triángulo (baricentro, ortocentro o incentro), exceptuando al circuncentro.

Primero consideraremos la Conjetura 3, pues al aceptar que ambas curvas son tangentes entre sí y por las simetrías de la deltoide, resulta que los centros de ambas son el mismo, por lo que la conjetura es **falsa**, así que habría que corregir: El "centro" de la deltoide generada con la recta de Simson de *P* con respecto a un triángulo *ABC* es el punto medio del segmento cuyos extremos son el circuncentro y el ortocentro del triángulo.

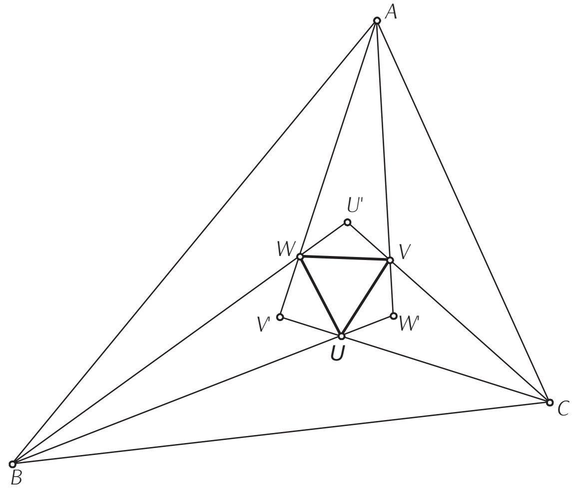
Para resolver el caso de la Conjetura 2, también se utiliza el hecho de la tangencia entre las curvas, lo cual implica que si una de ellas cambia de tamaño, la otra también lo hace y como ya se vio que el tamaño del radio de la circunferencia de los nueve puntos depende del tamaño del radio de la circunferencia circunscrita y no de la posición de los vértices en sí, entonces ocurre lo mismo con la deltoide: su tamaño depende de la longitud del radio de la circunferencia circunscrita.

Con lo anterior, se tiene que la conjetura no es conjetura en sí, sino un teorema: el Teorema 5. Con ello, se ha resuelto la incógnita sobre el tamaño de esta curva.

UN RESULTADO EXTRA

La deltoide, construida como se ha propuesto, tiene otras propiedades que pueden ser investigadas, haciendo su estudio aún más fructífero. Con ayuda de la

Figura 17



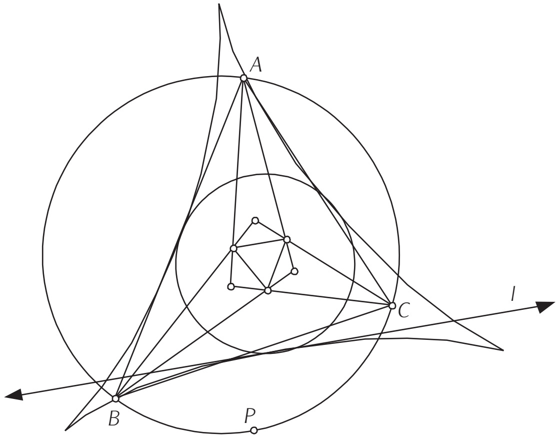
computadora, es posible explorarlas sin tener como objetivo principal, por la complejidad, hallar una demostración formal. En este trabajo, consideraremos un resultado más que, por tener una intención descriptiva, no se le incluye una demostración.

Antes que nada, primero consideremos el llamado *triángulo de Morley de un triángulo ABC,* el cual es un triángulo equilátero que se obtiene, primero, trisectando los ángulos interiores de un triángulo cualquiera, y luego uniendo con segmentos los puntos de intersección de las trisectrices adyacentes. Por ejemplo, y mirando la figura 17, si se tiene un triángulo *ABC* cualquiera y se trisecan sus ángulos interiores en *A, B* y *C* con *AV* y *AW, BW* y *BU,* y *CU* y *CV,* respectivamente, entonces los puntos *UVW* son los vértices de un triángulo equilátero: su triángulo de Morley.

Ahora bien, si además se considera un punto *P* en la circunferencia circunscrita del triángulo y a su respectiva recta de Simson *l,* y se coloca *P* de tal suerte que *l* sea tangente simultáneamente a la deltoide que se genera y a la circunferencia de los nueve puntos del triángulo (véase la figura 18), entonces ocurre que *l* es paralela al lado opuesto del triángulo de Morley del triángulo *ABC.*

Éste y otros resultados interesantes, incluyendo algunas de sus demostraciones, se encuentran en las referencias bibliográficas proporcionadas al final de este artículo.

Figura 18



COMENTARIO FINAL

Como se comentó al inicio de este artículo, aparecen aquí una serie de actividades y observaciones propuestas para que sirvan como una guía en el estudio, en el nivel medio, de curvas, aprovechando la potencialidad gráfica y de manejo a través de la manipulación directa de objetos geométricos que proporciona el Software para Geometría Dinámica. Asimismo, se hace hincapié nuevamente en el hecho de que esta propuesta está abierta al interés del profesor, las observaciones de los alumnos y las posibles conjeturas que puedan ser planteadas a través de un trabajo de grupo. Se hace la invitación al lector de no quedarse con las propuestas plasmadas aquí, sino ampliar las observaciones y explorar otras opciones.

Ha de hacerse la aclaración pertinente de que, aunque se han propuesto actividades que son más fáciles de realizar utilizando computadoras (personales o del tipo *hand held*), la tecnología informática no resuelve por sí misma los problemas de enseñanza y aprendizaje de la Geometría y del razonamiento deductivo, pues aceptar esto implica aceptar que la capacidad cognitiva del ser humano es equiparable a la de una computadora actual y negar la complejidad de los fenómenos educativos. Se hace, entonces, necesaria la participación activa del docente para promover la producción de conocimientos y desarrollo de habilidades, así como para evitar un fracaso en el uso de las computadoras en educación.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer por los comentarios al manuscrito original a la licenciada Noraísa González y al doctor Alejandro Díaz Barriga, así como a *ViL* por la paciencia mostrada al realizar las figuras y el formato una y otra vez hasta que satisfizo mis gustos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Coxeter, H.S.M. (1971), *Fundamentos de geometría,* México, Limusa Wiley.

Coxeter, H.S.M., S.L. Greitzer (1993), *Retorno a la geometría,* España, DLS Euler Editores.

De Guzmán, M. (1998), *La envolvente de las rectas de Wallace Simson en un triángulo: una demostración sencilla del teorema de la deltoide de Steiner* (sitio *web*) http://usuarios.bitmailer.com/edeguzman/Deltoide121298/00deltoi.htm. Visita: 18/02/2002, actualización: 12/1998.

Eves, H. (1985), *Estudio de las geometrías,* México, UTEHA, 2t.

Moise, E.E., F.L. Downs Jr. (1986), *Geometría moderna,* Estados Unidos, Addison Wesley Iberoamericana.

Weisstein, E.W. (2002), "Deltoide", en *Eric Weisstein's world of mathematics* (sitio *web*) http://mathworld.wolfram.com/Deltoid.html. Visita: 18/02/2002, actualización: 2002.

DATOS DEL AUTOR

Víctor Larios Osorio
Departamento de Matemáticas (Facultad de Ingeniería)
de la Universidad Autónoma de Querétaro
vil@uaq.mx

Algunos sitios en los que se puede encontrar información interesante acerca de otros problemas que se pueden trabajar con las herramientas propuestas en este trabajo son:

http://mathforum.org/dynamic/classroom.html
http://www.cut-the-knot.org/geometry.shtml
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Griffiths.shtml.
Laboratorio virtual de triángulos con Cabri
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/
Geometría interactiva
http://www.geometriainteractiva.com/
Geometría con Cabri II
http://terra.es/personal/joseantm/
Sitio sobre Cabri
http://kidslink.scuole.bo.it/fardiconto/cabrijava/risorse.html
Proyecto Cabri
http://www-cabri.imag.fr/
Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles, Geometry
http://www.cut-the-knot.org/geometry.shtml
9-point circle as a locus of concurrency
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Griffiths.shtml
Morley's miracle
http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/Morley.shtml
Math Forum: Corner for Interactive Geometry Software
http://mathforum.org/dynamic/classroom.html

El campo de la educación matemática, 1993-2001, de Alicia Ávila y Eduardo Mancera (coords.)

Reseñado por Rubén Garza Viveros

La idea de emprender el trabajo sistemático de dar cuenta de la investigación desarrollada en educación matemática en nuestro país encontró cabida en el Consejo Mexicano de Investigación Educativa (Comie) y eco en los socios e investigadores, los cuales se comprometieron con la tarea titánica de elaborar un informe sobre la investigación desarrollada en México en el periodo comprendido entre 1993 y 2001. El esfuerzo que desembocó en el texto *El campo de la educación matemática 1993–2001,* objeto de la presente reseña.

Tal libro presenta las estadísticas y las teorías esenciales desarrolladas o aportadas por los distintos trabajos de investigación, los cuales están orientados hacia los diversos niveles educativos (desde preescolar hasta el nivel superior).

La organización estructural del libro responde a tres elementos esenciales relacionados, en primer lugar, con las ideas y acciones que permitieron su elaboración; en segundo lugar, con las investigaciones desarrolladas en el marco de los distintos niveles de nuestro sistema educativo y, en tercer lugar, con los asuntos fundamentales derivados de la revisión de las investigaciones que forman parte de dicho sistema.

La obra reconoce y organiza las investigaciones en educación matemática, provenientes de distintos ámbitos de producción, como son las instituciones dedicadas a la investigación y las dedicadas a la educación que tienen entre sus funciones tareas de investigación; comenta acerca de los actores que realizan esta tarea en condiciones institucionales y analiza las publicaciones y tesis de posgrado producidas entre 1993 y 2001.

Lo hasta aquí señalado permite imaginar la complejidad y magnitud de las ideas que gravitan en el libro. Comienza por perfilar el marco teórico que guió la manera de llevar a cabo las acciones de rastreo, recopilación, análisis y organización de los trabajos de investigación que constituyen la sustancia de la obra. Estas ideas están plasmadas en el apartado denominado "Acciones e idas preliminares".

La organización de los trabajos por niveles educativos, que constituyen los apartados 1, 2, 3 y 4 (investigación en educación matemática en preescolar y primaria; en nivel secundaria; en nivel medio superior; y en nivel superior) y la organización dentro de cada nivel le confieren al libro una característica esencial, la de ofrecer un panorama general de las tradiciones al hacer investigación en los distintos niveles educativos, como si éstos fueran mundos paralelos.

La compleja tarea investigadora permite conjeturas que se concretan al generarse diferentes maneras de llevarla a cabo, diferentes asuntos y diferentes temas por abordarse en el hecho educativo en matemáticas, cuestiones que son bien percibidas por los autores y constituyen las categorías de organización de los trabajos en los diferentes niveles educativos.

En esencia, el trabajo plasmado en los apartados 1 a 4 es un vertiginoso remolino de ideas que permite al lector experimentar innumerables transiciones; a cada instante, la totalidad de los trabajos se convierte en una manera de tener una síntesis de las distintas miradas que han penetrado en la actividad de la educación matemática desde hace poco mas de diez años. El abordaje de los trabajos, aunque constituye una síntesis, permite acercamientos a éstos, da la oportunidad de rastrear trabajos interesantes y de explorar formas distintas de hacer investigación en educación matemática, pero, sobre todo, muestra de manera estructurada el estado del conocimiento en este campo.

Finalmente, no se puede negar que los trabajos de investigación constituyen universos en evolución, en rigor, cada nivel educativo constituye un plano que muestra diferentes características, fortalezas, debilidades y proyecciones, cuestiones que son abordadas oportunamente en el apartado 5, referente al balance y perspectivas y con el cual se cierra el contenido del texto.

Este esfuerzo por reunir las ideas generadas sobre la educación matemática y plasmarlas en blanco y negro muestra una actitud abierta y de franca cooperación, que beneficiará, sin duda, a todos los interesados en la investigación en este campo, pues contiene una síntesis, si no de todos, sí de los trabajos interesantes y con rigor científico en el campo de la educación matemática realizados en México entre 1992 y 2001.

También son autores de este texto: David Block, Alicia Carvajal, Daniel Eudave, Luis Manuel Aguayo y Patricia Camarena.

Para mayor información sobre este texto puede acudir a www.comie.org.mx.

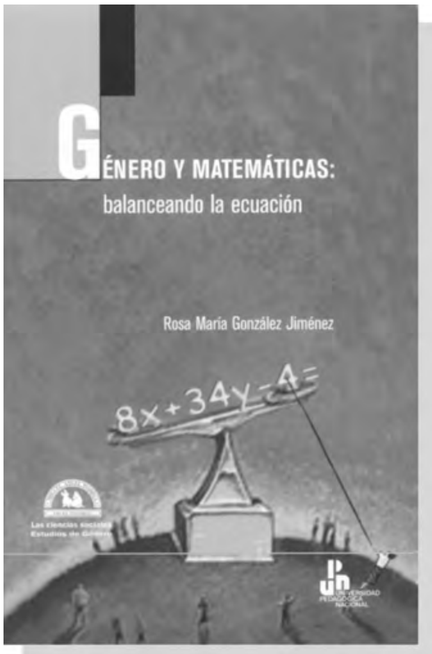
DATOS DEL LIBRO

Alicia Ávila y Eduardo Mancera (coords.)
Textos de David Block, Alicia Carvajal, Daniel Eudave, Luis Aguayo y Patricia Camarena
El campo de la educación matemática, 1993-2001, pp. 35-353, en Mario Rueda (coord.), *Saberes científicos, humanísticos y tecnológicos,* vol. 7, México, Comie, 2003, 560 p.

Género y matemáticas: balanceando la ecuación, de Rosa María González

Reseñado por Acacia Toríz Pérez

Desde el año de 1995, en México el gobierno federal ha venido implementando algunas acciones a fin de favorecer que las niñas tengan iguales oportunidades de estudio que los niños, otorgando becas para las estudiantes de educación básica, entre otras. El hecho de que ingresen en similar proporción a la escuela no agota el problema de la equidad por sexo, en especial en aquellas disciplinas tipificadas como propias para varones, como es el caso de las matemáticas.



El tema de relaciones de género y matemáticas ha despertado gran interés entre la comunidad académica. Tres décadas de investigación han dado como resultado una amplia literatura acerca de los patrones de actuación de hombres y mujeres en matemáticas, con infinidad de libros e informes de investigación en revistas especializadas que, en buena medida, han orientado acciones para garantizar igualdad de oportunidades para las mujeres en este campo. El grueso de la investigación se ha desarrollado en países de habla inglesa, entre los que destacan Inglaterra, Estados Unidos y Australia.

En el caso de los países de habla hispana, el tema apenas empieza a debatirse y la investigación es incipiente. En muchos sentidos, el libro que a continuación presento es pionero en América Latina.

Esta obra presenta ocho informes de investigación, organizados en tres partes. En la primera parte, dos informes de investigación dan cuenta de las diferencias de calificaciones en matemáticas de alumnas y alumnos de secundaria. Para el análisis la autora utilizó las bases de datos del Third International Mathematics and Science Study (TIMMS) que se aplicó en México a finales del 2000; del Examen Nacional de Ingreso a Educación Media Superior (EXANI I) de los años 1996 a 2001 y los resultados de una prueba de rendimiento matemático diseñada y validada por la autora. Algunas de las conclusiones que se presentan en este capítulo es que, en *pruebas de rendimiento* matemático –cuyo diseño se basa en los programas de estudio–, no hay diferencias significativas por sexo; en cambio, especialmente en los reactivos de habilidad visoespacial, de *pruebas de aptitud* matemática –que se basan en teorías de la inteligencia–, las chicas obtienen en promedio resultados más bajos. La autora señala que la prueba de aptitud matemática que aplican para el ingreso a educación media superior representa una limitante para que las chicas concursen en igualdad de condiciones que sus compañeros.

La segunda parte aborda una línea de investigación en enseñanza de las matemáticas que ha recibido gran atención en los últimos años con estudiantes no blancos y/o mujeres: las creencias y expectativas que tienen, tanto el alumnado como el profesorado. Los cuatro informes siguientes se centran en el tema.

En el primer informe se valida un modelo teorético que busca explicar, en parte, el desinterés del alumnado de secundaria por las matemáticas; incluye las siguientes variables: percepción de la dificultad, valor atribuido y actuación del profesor/a. La autora encontró que el modelo funciona de manera muy similar para chicos y chicas.

Una de las recomendaciones que se hace en el nivel internacional es separar desde *junior high school* a las y los estudiantes en su clase de matemáticas, como una manera de estimular el interés en las chicas por la disciplina. En el siguiente informe, la autora estimó el efecto que tiene el tipo de escuela –exclusiva de alumnas (EEA) y mixta (EM)– en el interés y calificaciones de las alumnas en matemáticas. Identificó que si bien las alumnas de EEA se interesan más por las matemáticas que las de EM, no hay diferencias significativas en cuanto a sus resultados en pruebas estandarizadas.

Por otra parte, existe un amplio consenso en los informes de investigación al señalar que, en promedio, las chicas manifiestan menor confianza en sus habilidades matemáticas que sus compañeros. Los programas dirigidos a las chicas invariablemente se refieren a estimular su autoestima. En el tercer informe de este capítulo, la autora analizó la autoconfianza en la habilidad matemática de una muestra de estudiantes de secundaria y bachillerato, y no encontró diferencias significativas por sexo. Una posible explicación que se da es que, en las escuelas mexicanas, la retroalimentación que recibe el alumnado es a través de la evaluación del profesor/a que, en promedio, es mejor para las chicas, a diferencia de otros países, donde es frecuente el uso de pruebas estandarizadas de opción múltiple.

El siguiente informe se centra en las expectativas de actuación que las y los profesores de matemáticas en secundaria tienen acerca de sus estudiantes. Se observa que el profesorado considera en promedio a sus alumnas más ordenadas y cumplidas y a sus alumnos, más ruidosos. De acuerdo con los datos, la autora sugiere que, en los criterios de evaluación del profesorado, la disciplina de los chicos desempeña un papel importante –por encima de su actuación académica–, lo cual repercute negativamente en sus calificaciones.

En la tercera parte del libro, se presenta una visión amplia de la participación de las matemáticas mexicanas. En el primer informe se analiza la cantidad de mujeres que estudian y ejercen profesionalmente las matemáticas: como estudiantes representan 37.1% de la matrícula; y su participación se reduce a 13.3% como investigadoras del Sistema Nacional de Investigadores, y a 7.1% en la Academia Mexicana de Ciencias. El área donde hay mayor cantidad de investigadoras es en matemática educativa en comparación con matemática básica y aplicada. En la segunda parte de este informe, se presenta información interesante acerca de la trayectoria profesional de 18 mujeres matemáticas de primer nivel. Parece ser que el placer que les genera hacer matemáticas, desde la educación básica constituyó una de las razones por la que decidieron dedicarse a este campo.

El último informe analiza datos del profesorado de matemáticas en secundaria. La autora identifica que en el ámbito nacional hay mayor cantidad de hombres, como profesores de matemáticas, que mujeres. Asimismo, que las mujeres ocupan, en menor proporción que sus compañeros, cargos de poder (jefas de enseñanza, directoras). El trabajo analiza la relación que existe entre antigüedad, máximo nivel de estudios y edad, con su cargo y nivel en el programa de estímulos de *Carrera Magisterial*. Los resultados sugieren, señala la autora, que la política de ascensos es más consistente para los hombres y más cir-

DATOS DEL LIBRO

Rosa María González (2004)
Género y matemáticas: balanceando la ecuación
México, Porrúa/Universidad Pedagógica Nacional, 184 p.

cunstancial para las mujeres. Por su parte, en el programa de *Carrera Magisterial* parece haber criterios más definidos y menor discrecionalidad, lo que repercute en condiciones relativamente más justas para las profesoras.

Considero que este libro viene a llenar un vacío en el país acerca de la investigación en género y matemáticas y lo recomiendo ampliamente.

Árbitros 2004

Nombre	Apellido(s)	Institución	País
Silvia	Alatorre	Universidad Pedagógica Nacional	México
Javier	Alfaro	Instituto Tecnológico Autónomo de México	México
Alejandra	Ávalos	Escuela Normal Superior de Mexico	México
Roberto	Ávila Antuna	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Carmen	Azcárate	Universidad Autónoma de Barcelona	España
Pilar	Azcárate	Universidad de Cádiz	España
Hugo	Balbuena	Secretaría de Educación Pública	México
Edgar	Becerra	Ceneval	México
Alberto	Camacho	Instituto Tecnológico de Chihuahua II	México
Miguel Ángel	Campos	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Cristóbal	Cárdenas	Universidad Iberoamericana	México
Guadalupe	Carmona	Universidad de Texas en Austin	Estados Unidos de América
José Luis	Cortina	Peabody College, Universidad de Vanderbilt	Estados Unidos de América
Xóchitl	Chávez	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Fortino	Escareño	Secretaría de Educación Pública	México

Nombre	Apellido(s)	Institución	País
Hugo	Espinosa	Secretaría de Educación Pública	México
Daniel	Eudave	Universidad Autónoma de Aguascalientes	México
Josep	Gascón	Universidad Autónoma de Barcelona	España
Marcela	González	Instituto Tecnológico Autónomo de México	México
José	Guzmán	Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV	México
Fernando	Lacués	Universidad Católica de Uruguay	Uruguay
Víctor	Larios	Universidad Autónoma de Querétaro	México
Silivia	Macotela	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Berta	Madrid	Universidad Iberoamericana	México
Patricia	Martínez	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Jacinto	Méndez Banda	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Ana María	Ojeda	Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV	México
Asuman	Oktac	Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV	México
Marie-Lise	Peltier	Instituto Universitario de Formación de Maestros de Rouen	Francia
Ricardo	Quintero	Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV	México
Luis	Radford	Université Laurentienne	Canadá
Araceli	Reyes	Instituto Tecnológico Autónomo de México	México
Pedro G.	Rodríguez	Centro de Estudios Educativos	México

Nombre	Apellido(s)	Institución	País
Luisa	Ruiz	Universidad de Jaén	España
Jorge E.	Sagula	Universidad Nacional de Luján	Argentina
Irma	Saiz	Universidad de Corrientes	Argentina
Mariana	Sáiz	Universidad Pedagógica Nacional	México
Ernesto	Sánchez	Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV	México
Gabriel	Sánchez Ruiz	Universidad Nacional Autónoma de México	México
José Vicente	Sánchez	Benemérita Escuela Nacional de Maestros	México
Dora	Santos	Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV	México
Anna	Serrado	Universidad de Cádiz	España
Mónica	Schulmaister	Secretaría de Educación Pública	México
Raciel	Trejo Reséndiz	Escuela Normal Superior de México	México

Política editorial

La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA es una publicación internacional arbitrada, que ofrece un foro interdisciplinario para la presentación y discusión de ideas, conceptos y modelos que puedan ejercer influencia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La revista aparece tres veces al año y publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática.

OBJETIVOS

EDUCACIÓN MATEMÁTICA se propone:

- Actuar como un foro de discusión internacional en lengua española en el que se discutan las problemáticas asociadas a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- Facilitar la comunicación entre investigadores y maestros de matemáticas.
- Promover la investigación en educación matemática.
- Alentar acercamientos multidisciplinarios.
- Buscar una comprensión profunda de la naturaleza, teoría y práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

LECTORES

EDUCACIÓN MATEMÁTICA está dirigida a investigadores de la educación matemática, maestros en formación y en ejercicio, estudiantes de posgrado, diseñadores, evaluadores, directivos, administradores y cuadros técnicos vinculados con la educación matemática.

TEMÁTICAS

El contenido de EDUCACIÓN MATEMÁTICA se centra en los siguientes temas:

1. Investigaciones sobre educación matemática en el nivel básico
    1.1. Aprendizaje, cognición y desempeño de los alumnos
    1.2. Conocimientos, concepciones, formación y prácticas de los maestros
    1.3. Saber matemático
        1.3.1. Aritmética
        13.2. Geometría
        1.3.3. Probabilidad y estadística
        13.4. Preálgebra y álgebra
        1.3.5. Trigonometría
    1.4. Materiales, textos y otros recursos de apoyo a la enseñanza
    1.5. Diseño, desarrollo y evaluación curricular
    1.6. Uso de la tecnología
    1.7. Interacciones en el aula
    1.8. Evaluación
    1.9. Enseñanza experimental
    1.10. Educación de adultos
2. Investigaciones sobre educación matemática en el nivel preuniversitario
    2.1. Aprendizaje, cognición y desempeño de los alumnos
    2.2. Conocimientos, concepciones, formación y prácticas de los maestros
    2.3. Saber matemático
        2.3.1. Álgebra
        2.3.2. Geometría
        2.3.3. Probabilidad y estadística
        2.3.4. Cálculo
        2.3.5. Razonamiento matemático
    2.4. Materiales, textos y otros recursos de apoyo a la enseñanza
    2.5. Diseño, desarrollo y evaluación curricular
    2.6. Uso de la tecnología
    2.7. Interacción en el aula
    2.8. Evaluación
    2.9. Enseñanza experimental
3. Investigaciones sobre educación matemática en el nivel universitario
    3.1. Aprendizaje, cognición y desempeño de los alumnos
    3.2. Conocimientos, concepciones, formación y prácticas de los maestros
    3.3. Saber matemático
        3.3.1. Álgebra lineal
        3.3.2. Geometría

- 3.3.3. Probabilidad y estadística
- 3.3.4. Cálculo de una o varias variables
- 3.3.5. Análisis
- 3.3.6. Ecuaciones diferenciales
- 3.3.7. Variable compleja
- 3.4. Materiales, textos y otros recursos de apoyo a la enseñanza
- 3.5. Diseño, desarrollo y evaluación curricular
- 3.6. Uso de la tecnología
- 3.7. Interacciones en el aula
- 3.8. Diagnósticos y evaluación
- 3.9. Enseñanza experimental

4. Estudios sobre la historia y la epistemología de las matemáticas y de la educación matemática
   - 4.1. Usos de la historia en la enseñanza y en la formación de maestros
   - 4.2. Análisis histórico y epistemológico de conceptos y procesos matemáticos
   - 4.3. Análisis de textos y acercamientos didácticos en distintas épocas
5. Estudios sobre el sistema educativo
   - 5.1. Políticas
   - 5.2. Instituciones
   - 5.3. Asociaciones
   - 5.4. Evaluación
6. Estudios sobre la investigación en educación matemática
   - 6.1. Teorías y marcos referenciales
   - 6.2. Métodos de investigación
   - 6.3. Validación
   - 6.4. Instituciones y organizaciones
   - 6.5. Historia

Serán considerados para su publicación los artículos sobre estos temas que no excedan las 30 cuartillas a doble espacio (alrededor de 10 000 palabras), incluidas tablas, gráficas y figuras.

GUÍA PARA AUTORES

- La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica artículos de investigación y otras contribuciones en español.

- Todos los escritos que se reciben son arbitrados. El Comité Editorial se reserva el derecho de aceptar o rechazar un material o hacer sugerencias de corrección para su publicación.
- El contenido del artículo es responsabilidad del autor.
- El Comité Editorial se reserva el derecho de modificar el título cuando lo considere conveniente, previa consulta al autor.
- El Comité Editorial y Editorial Santillana tendrán los derechos de publicación de los artículos aceptados, para lo cual al autor debe firmar una *licencia de publicación no exclusiva* como la que se podrá encontrar en la página www.santillana.com.mx/educacionmatematica.

PREPARACIÓN DEL ESCRITO

El escrito:

- Deberá estar preparado electrónicamente, en Microsoft Word o algún otro procesador compatible.
- Deberá tener un máximo de 30 cuartillas (alrededor de 10 000 palabras) incluidas notas, referencias bibliográficas, tablas, gráficas y figuras. Deberá incluir también un resumen en español de entre 100 y 150 palabras, la versión en inglés o francés del resumen, y un mínimo de 5 palabras clave.
- En archivo aparte, deberá prepararse una *carátula* que contenga: *a)* título y tema central del artículo; *b)* declaración de que el material es original e inédito y que no se encuentra en proceso de revisión para otra publicación (debe mencionarse explícitamente si el material ha sido presentado previamente en congresos o publicado en otro idioma); *c)* el nombre, institución de adscripción, dirección electrónica, teléfono, fax y domicilio completo (incluyendo código postal) del autor o los autores.
- Las figuras, tablas e ilustraciones contenidas en el texto deberán ir incluidas en el archivo de texto.
- Deberá evitarse el uso de siglas, acrónimos o referencias locales que no sean familiares a un lector internacional.

Las referencias dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas (Freudenthal, 1991, pp. 51-53).

Al final del artículo se debe incluir la ficha bibliográfica completa de todas las referencias citadas en el texto de acuerdo con el siguiente modelo:

Ávila, A. y G. Waldegg (1997), *Hacia una redefinición de las matemáticas en la educación básica de adultos*, México, INEA.

Block, D. y Martha Dávila (1993), "La matemática expulsada de la escuela", *Educación Matemática*, vol. 5, núm. 3, pp. 39-58.

Kaput, J. (1991), "Notations and Representations as Mediators of Constructive Processes", en Von Glaserfeld (ed.), *Constructivism and Mathematical Education*, Dordretch, Kluwer Academic Publishers, pp. 53-74.

Si la lengua materna del autor no es el español, el artículo deberá ser revisado por un experto en redacción y ortografía españolas antes de ser enviado a la revista.

ENVÍO DEL ESCRITO

- Los escritos deberán enviarse a alguna de las siguientes direcciones electrónicas: revedumat@yahoo.com.mx o alivi@prodigy.net.mx
- En el remoto caso en que el autor no pueda enviar su propuesta vía correo electrónico, podrá hacerlo llegar de manera impresa acompañada de los diskettes respectivos, con las especificaciones arriba señaladas, agregando una impresión por triplicado en la que no aparezcan los datos de los autores, para facilitar el proceso de arbitraje, que es anónimo, a la siguiente dirección postal:

  Revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA
  Atención Patricia Balderas
  Apartado Postal 86-521
  México, D.F., 14391, México

PROCESO DE ARBITRAJE

Todos los manuscritos recibidos están sujetos al siguiente proceso:

El Comité Editorial hace una primera revisión del manuscrito para verificar si cumple los requisitos básicos para publicarse en EDUCACIÓN MATEMÁTICA. Esta revisión interna tarda aproximadamente un mes, en este término se le notificará por correo electrónico al autor si su manuscrito será enviado a evaluadores externos. En el caso en el que el manuscrito no se considere adecuado para ser evaluado externamente, se le darán las razones al autor.

Las contribuciones que cumplan los requisitos básicos serán enviadas para un arbitraje ciego de 2 o 3 expertos en el tema. Este segundo proceso de revisión tarda aproximadamente tres meses. Después de este periodo, el autor recibirá los comentarios de los revisores y se le notificará la decisión del Comité Editorial (aceptado, aceptado con cambios menores, propuesta de cambios mayores con nuevo arbitraje, y rechazado). El autor deberá contestar si está de acuerdo con los cambios propuestos (si éste fuera el caso), comprometiéndose a enviar una versión revisada, que incluya una relación de los cambios efectuados, en un periodo no mayor de 3 meses.

Para mayores detalles, consúltese la **Guía de Arbitraje** en www.santillana.com.mx/educacion matematica

NOTAS DE CLASE

EDUCACIÓN MATEMÁTICA considera para su publicación un número limitado de notas de clase, consistentes en propuestas originales de presentación de un tema, acercamientos novedosos que hayan sido probados en clase, lecciones, prácticas, ejercicios y, en general, cualquier producto de la experiencia en el aula que el profesor considere valioso compartir con sus colegas, siempre y cuando se incluya el soporte bibliográfico correspondiente. Las notas de clase no deberán exceder las 10 cuartillas a doble espacio (aproximadamente 4 000 palabras), incluyendo tablas, gráficas y figuras, y deberán enviarse en formato Word o con los mismos lineamientos de presentación que los artículos. Las notas de clase se someten a un proceso de arbitraje interno y su contenido matemático y originalidad es revisado por un árbitro externo.

RESEÑAS

EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica también reseñas de libros especializados, libros de texto, software y tesis de posgrado relacionados con las temáticas de la revista. Estas reseñas no excederán las 5 cuartillas a doble espacio (aproximadamente 2 000 palabras) y deberán enviarse igualmente en formato Word. Las reseñas deben incluir la ficha completa del texto o software reseñado; el nombre, institución de adscripción y el correo electrónico del autor; en el caso de las reseñas de tesis de posgrado, se incluirá también el grado, institución, director de tesis y fecha de defensa.