La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior

María Trigueros

Resumen: El trabajo de Piaget es la fuente epistemológica de algunas de las teorías que se utilizan en el campo de la investigación en matemática educativa. En este trabajo, se presentan las ideas fundamentales de una de estas teorías, la teoría APOE y se muestra cómo esta teoría se encuentra en desarrollo dinámico y continuo a través de la introducción de nuevos conceptos que permiten dar cuenta de la manera en la que los estudiantes universitarios entienden y son capaces de integrar los conceptos de las matemáticas en un nivel superior.

Palabras clave: matemática educativa, esquema, teoría APOE, Piaget, derivada, cálculo.

Abstract:: Piaget's work is the epistemological source of some of the theories that are used in the field of mathematics education research. In this paper, the fundamental ideas of one of these theories, APOS theory, are presented. It is shown how this theory is evolving dynamically and continuously through the development of new concepts that can be used to investigate university students' understanding of advanced mathematical concepts, and to analyse if students are able to integrate several concepts in the solution of specific problem situations.

Keywords: mathematics education, schema, APOS theory, Piaget, derivative, calculus.

INTRODUCCIÓN

¿Por qué regresar en esta época al trabajo de Piaget? ¿No es un trabajo superado? ¿Qué nos puede aportar en el ámbito de la matemática educativa? El trabajo de Piaget es tan amplio, la gama de ideas que trabajó en el desarrollo de su epistemología es tan vasta, que aún hay mucho por explorar en la relación de sus ideas

Fecha de recepción: 24 de agosto de 2004.

sobre la construcción del conocimiento con la investigación en la enseñanza de matemáticas.

El interés de Piaget consistía en desarrollar una teoría del conocimiento que pudiera sustentarse experimentalmente. Desde la perspectiva de Piaget, la epistemología puede dejar de ser una parte de la filosofía, dejar de ser especulativa, para volverse una ciencia. Piaget cambió la pregunta que había regido el pensamiento epistemológico por muchos años: ¿Cómo se adquiere el conocimiento?, por una nueva pregunta que pudiera ser contrastada experimentalmente: ¿Cómo se pasa de un nivel de conocimiento a otro? Si bien al buscar la respuesta a esta pregunta Piaget no se involucró directamente con el problema de la educación, las consecuencias de su teoría han servido como fundamento de una gran cantidad de teorías en este ámbito y de muchas experiencias educativas.

Siempre que se utilizan los resultados de una ciencia en otra se requiere hacer una adaptación de las mismas (Chevalard, 1985). El contexto en el que surgieron las ideas es diferente al de la ciencia en la que se quieren emplear. Por ello, es necesario hacer adecuaciones que permitan su uso en ese nuevo entorno. La educación no es la excepción. Al intentar utilizar teorías o resultados provenientes del contexto de la epistemología, es necesario hacer una adaptación, construir, de hecho, una nueva teoría que, con base en las ideas de la epistemología, sea útil en el contexto educativo particular en el que se quiere utilizar. El uso de la epistemología de Piaget, o de parte de ella, o de cualquier otra teoría epistemológica en la matemática educativa requiere necesariamente de la conformación de una teoría en el ámbito de esta última que tome como base las ideas epistemológicas.

La obra de Piaget es un parteaguas en la historia de la epistemología. Es muy importante profundizar en su estudio y buscar caminos por los que puedan aplicarse sus ideas a la comprensión de la manera en la que los individuos aprenden matemáticas. Todavía tenemos mucho que aprender. El esfuerzo de elaboración de modelos basados en la epistemología piagetiana todavía es útil y puede ser muy valioso. En este artículo se presentan elementos de una teoría de la matemática educativa desarrollada con base en la epistemología de Piaget. Esta teoría es conocida (Dubinsky y Lewin, 1986; Dubinsky, 1994; Asiala *et al.*, 1996; Dubinsky y McDonald, 2001; Czarnocha *et al.*, 1999), pero el presente trabajo intenta mostrar cómo esta teoría es dinámica, está en construcción y sigue alimentándose de elementos surgidos de la epistemología de Piaget.

LA TEORÍA APOE

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) toma como marco de referencia epistemológico, como se mencionó antes, la teoría de Piaget (Dubinsky, 1996; Czarnocha *et al.*, 1999). A partir de las ideas piagetianas acerca de la manera como se pasa de un estado de conocimiento a otro, en la teoría APOE se hace una construcción, o modelo, para hablar únicamente de la manera en la que se construyen o se aprenden conceptos matemáticos, en particular los que corresponden a la matemática que se introduce en la educación superior. En sus inicios, la teoría fue elaborada por el doctor Ed Dubinsky. Con el tiempo y con la colaboración de nuevos investigadores, se ha probado en distintos contextos de las matemáticas. Hoy sigue creciendo y adaptándose a las necesidades de este importante campo de investigación a través de los trabajos de los miembros del grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) y de otros investigadores que la utilizan.

Desde el punto de vista de la teoría APOE, la construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas básicas: acción, proceso y objeto. El paso por estas tres etapas no es necesariamente secuencial. Una persona puede pasar mucho tiempo en etapas intermedias e incluso estar en una etapa de construcción para ciertos aspectos de un concepto y en otra para otros. Lo que sí puede afirmarse es que el manejo que una persona hace de un concepto ante distintas situaciones problemáticas es diferente cuando un individuo responde con un nivel caracterizado por proceso en la teoría que cuando lo hace a nivel acción, y cuando lo hace a nivel objeto que cuando lo hace a nivel proceso. Es claro, además, que el tipo de respuesta del sujeto dependerá en gran medida de la demanda cognitiva del tipo de problema al que responde.

El mecanismo principal en la construcción de conocimiento matemático en esta teoría es, como en la de Piaget, la abstracción reflexiva, en el sentido de un proceso que permite al individuo, a partir de las acciones sobre los objetos, inferir sus propiedades o las relaciones entre objetos en un cierto nivel de pensamiento, lo que implica, entre otras cosas, la organización o la toma de conciencia de dichas acciones y separar la forma de su contenido, e insertar esta información en un marco intelectual reorganizado en un nivel superior (Dubinsky, 1991a, 1991b). Este mecanismo se activa a través de las acciones físicas o mentales que el sujeto hace sobre el objeto de conocimiento. La interacción entre el sujeto y el objeto de conocimiento, al igual que en el caso de la teoría de Piaget, es dialéctica, es decir, no es posible separar al objeto de conocimiento del sujeto que conoce.

Un aspecto muy importante del modelo APOE, como instrumento tanto de investigación como de enseñanza, consiste en que para trabajar con el modelo es necesario pensar en los conceptos desde la propia matemática, es decir, el modelo nos permite incorporar dentro del mismo estudio de la matemática educativa a la matemática. Se reconoce, dentro de esta teoría, que la construcción de los conceptos matemáticos sigue un proceso que puede ser diferente al que se requiere para construir conocimientos de otras disciplinas. Los conceptos matemáticos tienen su propio sistema que se puede pensar como un lugar en donde viven y donde se establecen relaciones entre ellos y con conceptos de otras disciplinas. Al trabajar con las matemáticas en el ámbito escolar estas relaciones se transforman, pero es importante conocerlas, y por ello es que nos interesan en matemática educativa.

En la teoría APOE se parte, entonces, de un análisis de los conceptos matemáticos en el que se ponen de relieve las construcciones cognitivas que pueden ser requeridas en su aprendizaje. A este análisis se le conoce como descomposición genética del concepto. En un principio, son los investigadores quienes proponen, basados en su experiencia en el aula, una descomposición genética del concepto por estudiar; posteriormente, a través de la propia investigación, dicha descomposición se refina de modo que dé cuenta de mejor manera de lo que se observa que hacen los estudiantes cuando trabajan con ese concepto. Es importante aclarar que no puede hablarse dentro de esta teoría de la descomposición genética de un concepto, pues ésta depende de la formulación que ha hecho el investigador. Pueden coexistir varias descomposiciones genéticas de un mismo concepto. Lo que es importante es que cualquier descomposición genética de un concepto sea un instrumento que dé cuenta del comportamiento observable del sujeto.

Una descomposición genética parte, como ya se mencionó, del análisis de las construcciones que el sujeto hace conforme aprende el concepto matemático en términos de lo que es observable. Estas construcciones se caracterizan bajo los rubros acción, proceso y objeto.

ACCIONES, PROCESOS, OBJETOS Y ESQUEMAS

Una acción es una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa. La transformación se lleva a cabo como una reacción a una indicación que da información precisa sobre los pasos que se van a seguir. Si una persona únicamente puede resolver problemas haciendo uso de este tipo de transformaciones, decimos que está a nivel acción. Es conveniente recalcar que una persona con un nivel de comprensión más profundo de los conceptos matemáticos puede resolver un problema haciendo transformaciones de este estilo cuando es apropiado; lo que la distingue es que no está limitada a realizar acciones.

Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser interiorizada en un proceso. El proceso es una transformación basada en una construcción interna, ya no dirigida por estímulos que el individuo percibe como externos. El individuo puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso invertirlos, es decir, tiene más control sobre la transformación. Si una persona resuelve problemas y da muestras de utilizar transformaciones de tipo proceso, cuando el problema por tratar lo requiere, decimos que tiene una concepción proceso del concepto estudiado.

Los objetos cognitivos se pueden construir de dos maneras: una es encapsulando un proceso para que el individuo pueda hacer nuevas transformaciones sobre él. Dicho de otro modo, cuando el individuo es consciente del proceso como una totalidad, puede pensar en él como un todo y es capaz de actuar sobre él, se dice que el individuo tiene una concepción objeto del concepto. La otra manera de construir un objeto ocurre cuando un individuo reflexiona y puede actuar sobre un esquema, de lo que hablaremos más adelante.

El mecanismo para pasar de un nivel a otro es siempre, y como ya se mencionó, la abstracción reflexiva, entendida en el sentido de la reflexión que hace el sujeto sobre el sentido de las operaciones que se efectúan sobre el objeto matemático y del efecto que tienen sobre él.

Cuando se utiliza la teoría APOE en la investigación o en el diseño de material didáctico, se empieza siempre por hacer la descomposición genética del o los conceptos de interés. En ella se destacan las acciones y los distintos procesos, además de la forma de irlos estructurando para posibilitar la construcción de la concepción objeto y para propiciar después la construcción de las relaciones entre dichas acciones, procesos y objetos. De esta manera, se fomenta la construcción de los esquemas que se consideran necesarios para el aprendizaje de la parte de las matemáticas en la que se está trabajando. Posteriormente, esta primera descomposición genética se utiliza como base teórica para elaborar materiales que se emplean en el salón de clases. Se diseñan también instrumentos de investigación que se utilizan a lo largo del proceso de enseñanza y se hace una investigación de lo que sucede en la clase y del conocimiento de los alumnos después de haber tomado el curso. Los resultados de la investigación se utilizan para refinar la descomposición para que sea más congruente con la manera como realmente aprenden los alumnos, además de en la evaluación de la efectividad del método respecto a dicho aprendizaje. Este procedimiento se repite, en principio, todas las veces que sea necesario, hasta que se considera que la descomposición en cuestión permite tanto enseñar de manera efectiva el concepto cuanto explicar lo que se consideran las construcciones mentales de los estudiantes cuando están aprendiendo ese concepto.

El proceso de construcción de una buena descomposición genética o, al menos de una adecuada, es bastante largo. En este momento se cuenta con descomposiciones genéticas para muchos conceptos del cálculo, del álgebra lineal, del álgebra abstracta, de ecuaciones diferenciales y de lógica. La mayor parte de ellas han sido publicadas (véanse, por ejemplo, Dubinsky, 1986; Dubinsky *et al.*, 1986, 1988, 1992; Vidakovic, 1994; Cottrill *et al.*, 1996; Asiala *et al.*, 1997a, 1997b; Brown *et al.*, 2001; Baker *et al.*, 2000; Czarnocha *et al.*, 2001; Trigueros, 2001; Weller *et al.*, 2002; Trigueros y Weller, 2003; Oktaç y Trigueros, 2004) y se encuentran en la fase de la segunda o tercera iteración. Aun en esta fase de desarrollo, estas descomposiciones genéticas han probado ser efectivas en el diseño de materiales y en cuanto a los resultados obtenidos acerca del aprendizaje de los alumnos (Weller *et al.*, 2003).

En la teoría APOE, del mismo modo que en la mayor parte de las teorías que existen en el contexto de la educación matemática, se toma en consideración que el proceso de aprendizaje de los conceptos matemáticos no termina en la escuela, sino que sigue en el tiempo ante la necesidad de entender nuevas situaciones y de resolver nuevos problemas.

En el proceso de aprendizaje de las matemáticas, los estudiantes se enfrentan a conceptos complejos dentro de un área específica de las matemáticas y a situaciones en las que requieren utilizar conjuntamente conceptos que provienen de distintas ramas de esta disciplina. En estos casos, la manera de trabajar con un concepto específico es insuficiente para describir lo que los individuos son capaces de hacer y la manera como lo hacen. Ante esta situación, la descripción de las relaciones que se establecen entre los distintos conceptos y la manera como estas relaciones evolucionan se vuelve importante. La noción de esquema y los mecanismos de su evolución nos permiten dar cuenta de este tipo de situaciones.

La noción de esquema también proviene de las ideas de Piaget (Piaget, 1971, 1972). Muchos autores han tomado de Piaget la noción de esquema, sobre todo la de esquema de acción, para utilizarla en distintos contextos en el ámbito de la enseñanza. Sin embargo, la definición de esquema dentro de la teoría APOE tiene un significado preciso, diseñado específicamente para dar una explicación a la manera en la que se desarrollan los conceptos matemáticos a través de los procesos de enseñanza.

En la teoría APOE, un esquema para una parte específica de las matemáticas se define como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas. Cuando un sujeto se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas, evoca un esquema para tratarlo. Al hacerlo, pone en juego aquellos conceptos de los que dispone en ese momento y utiliza relaciones entre esos conceptos. Ante una misma situación, diferentes estudiantes utilizan los mismos conceptos y diferentes relaciones entre ellos. El tipo de relaciones que cada sujeto establece entre los conceptos que utiliza, así como el tipo de construcción del concepto que muestra, dependen de su conocimiento matemático. Se espera que a mayor conocimiento, se hayan construido más relaciones entre conceptos y que estas relaciones formen estructuras cognitivas coherentes en el sentido de que el individuo distinga claramente aquellas situaciones que pueden tratarse poniendo en juego un esquema específico y aquéllas para las que no es adecuado.

El uso en investigación y en enseñanza de la noción de esquema es más reciente y por lo mismo se cuenta con menos referencias de su aplicación al análisis de la manera como los estudiantes construyen los conceptos matemáticos y es a ella a la que se dedica la siguiente parte de este trabajo.

Es importante aclarar que otros investigadores han utilizado en sus estudios la noción de esquema tomada de la obra de Piaget. Cada uno de ellos da su propia definición y, por tanto, existen muchas maneras de concebir lo que es un esquema. En este trabajo se toma la definición de esquema del glosario del grupo RUMEC (Asiala *et al.*, 1996) que es diferente a la que, por ejemplo, utilizan investigadores como Vergnaud en sus trabajos dentro del mismo ámbito de la matemática educativa (véase, por ejemplo, Vergnaud, 1990). Aun cuando ambas definiciones provienen de la teoría de Piaget, la manera de trasponerlas a la educación matemática es distinta. Cada una hace énfasis en distintos aspectos.

LA EVOLUCIÓN DE LOS ESQUEMAS EN LA TEORÍA DE PIAGET

Piaget habló de esquemas en varias de sus obras, pero es en el trabajo conjunto con Rolando García: *Psicogénesis e historia de la ciencia* (1996), donde habla más explícitamente de la evolución de los esquemas y de los mecanismos involucrados en esta evolución.

En la obra *Psicogénesis e historia de la ciencia,* Piaget y García presentan una tesis sobre la evolución de los esquemas. Estos autores proponen que los esquemas evolucionan y que se pueden distinguir tres fases o etapas que se caracterizan por el grado de construcción de relaciones entre los elementos constitutivos del esquema. Piaget y García llegan a esta idea a partir de los estudios psicogenéticos de Piaget y la sustentan en ellos. Intentan, además, demostrar que algo similar ocurre en la historia. Piaget y García ejemplifican la existencia de tres niveles, los niveles intra-, inter- y trans- para las construcciones algebraicas, para algunas construcciones geométricas y en el caso de la mecánica newtoniana. Proponen que este tipo de construcción puede encontrarse en cualquier proceso de construcción de conocimiento y, además, que al estudiar cada una de estas etapas se encuentra que el proceso es anidado, es decir, que dentro de cada etapa de construcción del conocimiento se puede encontrar una triada intra-, inter-, trans, en un nivel distinto. En la etapa intra, se construyen relaciones internas del objeto o fenómeno; posteriormente, se encuentra una etapa inter-, en la que el individuo constituye relaciones entre los objetos o fenómenos de conocimiento; y, por último una etapa trans- en la que las relaciones adquieren mayor coherencia y se estructuran las relaciones del nivel inter-. En este nivel, el individuo puede trabajar con el esquema de una manera mucho más estructurada que cuando el esquema está en otras fases constitutivas, lo cual no quiere decir que el esquema permanece ya inmóvil, pues los esquemas siguen construyéndose y enriqueciéndose mediante la construcción de nuevas relaciones con otros objetos u otros esquemas.

Nuevamente, este trabajo se hizo desde el punto de vista de la epistemología. El trabajo que se ha desarrollado dentro del grupo RUMEC se centra en la investigación en matemática educativa y parte de los planteamientos que se hacen en este trabajo de Piaget y en otros más (Piaget, 1971, 1972, 1976) acerca de la evolución de los esquemas para hacer una primera adaptación que permita el análisis de los esquemas que pueden vislumbrarse a través del trabajo de los estudiantes cuando resuelven problemas de matemáticas que no requieren el uso de un único concepto.

La identificación de las transformaciones que intervienen en la evolución de los esquemas es una tarea compleja. Como un primer acercamiento, en los trabajos con APOE lo interno de las relaciones se refiere a su construcción en términos de acciones, procesos y objetos relativos a un mismo concepto matemático, el inter- a las relaciones entre diversos conceptos y el trans- a la posibilidad de tomar un conjunto de conceptos que pueden ser considerados como acciones, procesos, objetos o esquemas, conjuntamente con sus relaciones como un objeto sobre el cual se pueden ejercer nuevas acciones. Si bien este tipo de definición no responde con fidelidad a los planteamientos de Piaget y García, permite encontrar indicios sobre las dificultades que enfrentan los estudiantes en el proceso de integración de los conceptos y puede proporcionar información para discernir las posibles transformaciones que entran en juego en un futuro.

En algunos trabajos realizados por miembros del grupo RUMEC se ha encontrado que hay algunos fenómenos dentro del contexto de la enseñanza de las matemáticas en la universidad que efectivamente se pueden explicar con mayor facilidad si se introducen las nociones de esquema y de su evolución (Clark, 1997; McDonald *et al.*, 2000; Baker *et al.*, 2000; Trigueros, 2000) en la forma descrita anteriormente.

En este trabajo se revisan algunos avances en la investigación acerca de la evolución de los esquemas.

¿QUÉ SE ENTIENDE POR UN PROBLEMA COMPLEJO?

Los primeros años de investigación en matemática educativa se concentraron en encontrar los obstáculos que tienen los estudiantes y en intentar clasificarlos; y gran parte de la investigación en la infancia de este campo de investigación se concentró fuertemente en esta caracterización de las dificultades de los estudiantes. Más adelante, la investigación empezó a diversificar el tipo de problemas por estudiar. En este contexto, surgen teorías que pretenden explicar estas dificultades y mostrar posibles estrategias que los estudiantes utilizan, al trabajar con distintos conceptos matemáticos para poder entenderlas y, en algunos casos, tomar elementos de ellas que puedan ser útiles tanto en la propia investigación como en la docencia.

El campo de investigación en enseñanza de las matemáticas es aún muy joven. La investigación todavía no es extensa. Se cuenta con mucha investigación sobre conceptos específicos, por ejemplo, sobre el concepto de función, el concepto de derivada, el concepto de límite, y en el nivel de escolaridad primaria, encontramos mucho sobre la división o las fracciones. Estas investigaciones abordan estos conceptos específicos desde distintas perspectivas y han mostrado aspectos del aprendizaje y de la enseñanza de dichos conceptos verdaderamente sorprendentes. Sin embargo, hay poca investigación de la manera como los estudiantes integran varios conceptos cuando los problemas que resuelven son menos específicos. Los investigadores, al igual que los maestros, en ocasiones tienen la idea de que basta con entender cómo aprenden los estudiantes los diferentes conceptos que forman parte de la disciplina, y que la integración y la construcción de relaciones entre los conceptos se dará de suyo, es decir, sin que se busque explícitamente. La investigación no se ha dado a la tarea, sin embargo, de estudiar si esto es así en realidad. De ahí que la pregunta ¿hasta qué punto los estudiantes pueden relacionar e integrar los distintos conceptos de cada parte de las matemáticas para formar un todo que puedan utilizar conjuntamente en la solución de problemas? sea un problema abierto a la investigación.

En la investigación que aquí presentamos, consideramos como un problema complejo aquél cuyo proceso de solución o análisis implica, más que la yuxtaposición de conceptos independientes, su interrelación. En problemas de esta naturaleza, el estudiante requiere considerar esos distintos conceptos además de la manera en la que afectan a la solución cuando se tienen en cuenta de manera conjunta.

Para poder estudiar la integración de conceptos y la construcción de las relaciones entre ellos, se requiere un marco teórico que contenga conceptos que permitan identificarlas con claridad y distinguir las diferencias de comprensión que implican distintas estrategias de comprensión de los problemas.

En el área de la matemática educativa, como en la mayoría de los casos en las ciencias sociales, coexisten muchas teorías. Cada una de estas teorías permite explicar parcialmente algunos conceptos o algunas partes de ciertos fenómenos y, en ocasiones, varias teorías pueden explicar los mismos fenómenos desde distintos enfoques. Es muy difícil decir que una teoría es la mejor o que una teoría es buena y otra es mala. Lo único que se puede afirmar es que, para algunos problemas, una teoría es más pertinente que otra o que una teoría nos acomoda más que otra y por esa razón la utilizamos. La mayor parte de estas teorías tienen un alcance limitado y no ha habido intentos de adaptarlas para estudiar una problemática más compleja. Tal vez las perspectivas que se caracterizan como sociales son las que más han avanzado en el estudio del problema complejo tomando en consideración todos los elementos que intervienen en el fenómeno educativo. En el ámbito de los estudios cognitivos, no se han abordado este tipo de problemas, con la excepción reciente de la teoría APOE, en la que el concepto de esquema ha permitido empezar a abordar esta problemática.

LOS ESQUEMAS EN APOE

Al igual que en la teoría de Piaget, en la teoría APOE un esquema significa una construcción cognitiva que nos permite enfrentar un problema; en el caso que nos interesa en este momento, un problema de matemáticas. Pero, para posibilitar su uso efectivo, es necesario definirlo de manera más concreta, tomando en consideración los elementos propios de la teoría. En estos términos, se define un esquema para una parte de las matemáticas como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas de un individuo que están ligadas, consciente o inconscientemente, en un marco coherente en la mente del individuo y se pueden utilizar en una situación problemática que tiene relación con esa área de las matemáticas. Por ello, al hablar de esquemas dentro de esta teoría no basta con especificar las acciones y los procesos y los objetos que intervienen en la solución de un problema o de un conjunto de problemas, sino que es necesario, además, tener en cuenta que estos elementos están interconectados unos con otros.

Cuando se toman en consideración esas relaciones, es posible identificar, en las acciones de los estudiantes que resuelven un mismo problema, esquemas en distinto grado de formación o de estructuración, dependiendo de cuáles relaciones pueden identificarse como construidas. Es importante insistir en este momento que lo que se define como esquema es una herramienta conceptual, es una herramienta de análisis que permite distinguir e identificar ciertas características de lo que hacen los individuos cuando resuelven problemas de matemáticas. La diversidad en la construcción de relaciones entre acciones, procesos y objetos puede estudiarse tomando como referencia una parte importante de la obra de Piaget: la manera como cambian o evolucionan los esquemas.

LA EVOLUCIÓN DE LOS ESQUEMAS

Como se mencionó anteriormente, el trabajo con la teoría APOE sobre la evolución de los esquemas ha centrado su atención en la existencia de relaciones entre objetos o esquemas relacionados con diferentes conceptos matemáticos. Por ello, en los trabajos publicados se asocia el nivel intra- con la construcción de relaciones entre procesos, objetos y esquemas relacionados con un mismo concepto, el nivel inter- con la existencia de relaciones entre diferentes conceptos relacionados con una misma área de las matemáticas y el nivel trans- con el hecho de que el estudiante dé muestra, a lo largo de su trabajo, de utilizar una estructura coherente de relaciones entre los conceptos y de ser capaz de determinar cuándo es aplicable dicha estructura y cuándo no.

El contexto que interesa en este trabajo es el estudio del aprendizaje de los conceptos matemáticos; en particular, la manera de encontrar la evolución de los esquemas que está de acuerdo con la teoría APOE, basada en la descomposición genética de los conceptos. En los estudios que utilizan la idea de esquema y su evolución, se sigue un ciclo como el mencionado anteriormente. En primer lugar, se hace una descomposición genética de los conceptos en cuestión y de las posibles relaciones o coordinaciones entre ellos. Con base en la descomposición genética se diseñan los instrumentos de investigación y se hace el análisis de sus resultados. En el análisis se enfocan tanto la verificación de estas acciones, procesos, objetos y otros esquemas, como las relaciones que se puede afirmar que han construido los estudiantes. En las entrevistas con los estudiantes se destaca la búsqueda de indicios de los mecanismos que permiten diferenciar entre estas acciones, procesos y objetos a través de la construcción de relaciones entre acciones, procesos, objetos y esquemas relacionados con un mismo concepto o entre diversos conceptos, cuando ello es posible y, al mismo tiempo, la información de la forma en la que pueden integrar estos conceptos en algo coherente que conforme un todo, un esquema. También interesa analizar situaciones en las que los estudiantes puedan tomar un esquema dado como un objeto sobre el cual pueden realizar nuevas acciones.

Podemos ejemplificar la evolución de los esquemas con el caso que nos interesa describir aquí: la integración de conceptos del cálculo diferencial cuando los alumnos enfrentan un problema de graficación. Al esquema que entra en juego en la solución de estos problemas lo llamamos esquema de propiedades de una función y su evolución se describe a continuación.

Esquema propiedades-graficación

Para construir el esquema de función en términos de sus propiedades, el estudiante debe coordinar el objeto o esquema función con los de la primera y segunda derivadas y con los conceptos de continuidad y límite a nivel proceso u objeto. En la solución de problemas relacionados con la identificación y uso de las propiedades de una función, el estudiante lleva a cabo acciones o procesos sobre la función a través del cálculo de derivadas, de límites, del análisis de la continuidad o del proceso que se requiere cuando la función se representa de manera gráfica. Estos procesos deben coordinarse con el esquema de función en términos de las implicaciones de los resultados obtenidos en el comportamiento de la función. Todas estas acciones o procesos individuales deben así coordinarse en el esquema que hemos llamado de propiedades de la función. La coherencia de ese esquema se puede atestiguar mediante la capacidad del estudiante de verificar si existe una única función o una única representación para una función que satisface todas esas propiedades.

Nivel intra-propiedades

En este estudio se consideró que un estudiante que se encuentra en un nivel intra-propiedades es capaz de establecer relaciones entre acciones, procesos u objetos relacionados únicamente con la coordinación de uno de estos esquemas; por ejemplo, el de la primera derivada con el comportamiento de la función. Estas relaciones pueden considerarse como internas de un objeto de aprendizaje: la primera derivada. El estudiante puede estar consciente de que se han definido otras propiedades, pero no las puede coordinar con la propiedad que está empleando en el contexto gráfico.

Nivel inter-propiedades

El nivel inter-propiedades se determinó en términos de la posibilidad del estudiante de coordinar los efectos de las acciones, procesos u objetos provenientes de dos o más esquemas en el comportamiento de la función.

Nivel trans-propiedades

El nivel trans-propiedades se determinó por la capacidad del estudiante de coordinar todos los esquemas y objetos mencionados como parte de una estructura, una nueva función, lo cual se pone en evidencia por la posibilidad del estudiante de encontrar diversas funciones que satisfacen dichas propiedades, cuando éste es el caso.

Desde la perspectiva de la teoría APOE, la triada para la evolución de los esquemas sirve como apoyo real en la construcción de instrumentos de análisis que permiten dar cuenta de la manera como los estudiantes aprenden muchos conceptos matemáticos. El uso de la idea de la evolución de los esquemas a través de la triada ha permitido, además, el diseño de material didáctico que ha mostrado ser efectivo para el aprendizaje de esos conceptos. Ésta no es una teoría fácil de usar. Implica mucho trabajo y eso es lo que la hace, en ocasiones, difícil de entender. Pero al igual que otras teorías, constituye un acercamiento que nos permite estudiar el fenómeno de la construcción de conceptos matemáticos que ha dado resultados positivos, ya que permite dar cuenta de fenómenos que serían muy difíciles de analizar utilizando otras herramientas.

La identificación de las relaciones entre conceptos depende mucho, por supuesto, como en todos los estudios en educación matemática, de la muestra de estudiantes que se estudia y de la manera cómo aprendieron, entre otros factores; pero una vez encontradas en un caso particular, pueden hacerse estudios con nuevas muestras para confirmar o refutar los resultados. Esta posibilidad es la que permite ir estableciendo la educación matemática como una ciencia.

Los estudios que incluyen la idea de esquema en el contexto de la teoría APOE no son todavía muchos, como ya se mencionó; entre ellos se pueden encontrar un estudio sobre la manera cómo los estudiantes construyen la regla de la cadena para la derivación en cálculo (Clark *et al.*, 1997); otro sobre series y sucesiones (McDonald *et al.*, 2000); un tercero sobre sistemas de ecuaciones diferenciales (Trigueros, 2000), y otro que se presenta a continuación, en el que, por la necesidad propia del problema, se hizo necesaria una ampliación de la teoría, al introducir la idea de la interacción entre esquemas (Baker *et al.*, 2000).

UN EJEMPLO DE PROYECTO DE ESTUDIO ACERCA DE LA EVOLUCIÓN DE LOS ESQUEMAS

A manera de ejemplo, se presenta aquí un proyecto de investigación sobre la integración de conceptos en cálculo diferencial. En primer lugar, se presenta el problema que se planteó a los estudiantes en un conjunto de investigaciones entre las que se cuenta la referida anteriormente, y se describirá someramente la descomposición genética sobre la cual se hizo el análisis de las entrevistas a los estudiantes. Se presentará brevemente la metodología que se siguió en el estudio y, por último, se describirán los resultados que se obtuvieron.

El problema con que trabajaron los estudiantes es el siguiente:

Dibuja la gráfica de una función que satisface las siguientes condiciones:

h es continua
$h(0) = 2$, $h'(-2) = h'(3) = 0$ y $\lim_{x \to 0} h'(x) = \infty$
$h'(x) > 0$ cuando $-4 < x < -2$ y cuando $-2 < x < 0$ y cuando $0 < x < 3$
$h'(x) < 0$ cuando $x < -4$ y cuando $x > 3$
$h''(x) < 0$ cuando $x < -4$, cuando $-4 < x < -2$ y cuando $0 < x < 5$
$h''(x) > 0$ cuando $-2 < x < 0$ y cuando $x > 5$
$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \infty$ y $\lim_{x \to \infty} h(x) = -2$

¿Es la función que encontraste la única que cumple con las condiciones dadas por el problema? ¿Qué sucede con la gráfica de esta función si quitamos la condición de continuidad?

El problema parece, a primera vista, un problema típico de aplicación de las derivadas a la graficación de funciones. En todos los cursos de cálculo los estudiantes resuelven este tipo de problemas. Los maestros que imparten el curso dedican a este tema una clase o tal vez dos, a lo sumo tres horas, ya que todos los conceptos necesarios ya han sido cubiertos y basta, para ellos, mostrar cómo se usan en una situación de graficación. Los textos dedican también poco espacio a proporcionar ejemplos de estas aplicaciones con distintos tipos de dificultad.

Al analizar el problema tratando de especificar todo lo que está involucrado en su solución, se encuentran algunos elementos que lo distinguen de aquellos que suelen presentarse tanto en las clases como en los libros de texto. Por un lado, el problema no propone una función expresada en forma algebraica; por ello no es fácil identificar algunos aspectos de la curva que la representa gráficamente, ni tampoco se cuenta con la fórmula para llevar a cabo el procedimiento común que permite encontrar la gráfica. Sin embargo, las condiciones que debe cumplir la función y que proporciona el enunciado del problema resumen todo lo que se obtiene después de hacer el procedimiento antes mencionado con la expresión analítica para esbozar la gráfica de la función. Un análisis más detallado muestra que, en el problema, y en general en este tipo de problemas, hay muchos conceptos involucrados y varias condiciones que no son las que normalmente se trabajan ni en los textos ni en las clases. El problema presenta información sobre el dominio de la función, sobre su continuidad, sobre la primera derivada de la función y sobre la segunda derivada. Presenta también información acerca de los límites al infinito e incluye un límite sobre una derivada que se va a infinito justamente en un punto en el que la función toma un valor específico. La coordinación de todas estas propiedades en una sola gráfica representa un problema complejo para los estudiantes. Todos estos conceptos han sido presentados uno a uno por separado en clase y los estudiantes cuentan con esa información; el problema que hay que analizar es precisamente la posibilidad de los estudiantes de integrar toda esa información relativa a distintos conceptos en la solución del problema.

METODOLOGÍA DE LOS ESTUDIOS

El problema ha sido utilizado en tres estudios diferentes. En el primero, se llevó a cabo una entrevista con 164 alumnos de una universidad estadounidense grande que recientemente habían concluido un curso de cálculo diferencial. En esta ocasión, el marco teórico basado en la teoría APOE, que se presentará más adelante, no se utilizó en el diseño específico de la entrevista, sino únicamente su análisis. En un segundo estudio (Cooley *et al.*, por publicarse) el problema se presentó en una entrevista a 13 estudiantes de una pequeña universidad mexicana y a 14 estudiantes de otra pequeña universidad, que habían cursado al menos dos semestres de cálculo, con resultados sobresalientes. En esta ocasión, el problema se presentó al final de una serie de preguntas sobre los aspectos específicos involucrados en él para analizar la estabilidad de las respuestas de los alumnos, además de la integración de los conceptos. Tanto el diseño como el análisis de las entrevistas se hicieron con base en la teoría APOE. Finalmente, en un tercer estudio (M. Cortés, 2004) se utilizaron las mismas preguntas que en el segundo, pero en forma de un cuestionario que fue resuelto por 124 alumnos de una pequeña universidad mexicana. El análisis de las respuestas de los estudiantes se hizo igualmente utilizando la teoría APOE.

Las entrevistas fueron muy largas pues la solución del problema no es fácil: a algunos estudiantes les tomó más de una hora de trabajo.

LA INTERACCIÓN ENTRE DOS ESQUEMAS

La descomposición genética que se desarrolló inicialmente para el esquema que interviene en la solución del problema que se describió anteriormente contiene los siguientes conceptos que pueden considerarse para cada alumno a nivel proceso o a nivel objeto: función, dominio de la función, primera derivada, segunda derivada, límites y continuidad. Las relaciones entre ellos incluyen la coordinación, o interrelación, entre la primera y segunda derivadas y la posibilidad de relacionar esta información con la existencia de máximos, mínimos y puntos de inflexión; la coordinación de los límites con la función, así como de los límites con la derivada; la coordinación entre la continuidad y la función; y la coordinación entre derivada y continuidad.

A partir de la identificación de los objetos y tomando en consideración las relaciones entre los distintos componentes de la descomposición, se definieron los niveles de evolución del esquema que se consideraron para el diseño de los instrumentos y el análisis de los datos. En las primeras revisiones de los datos, la primera definición de niveles tomaba en consideración sólo la evolución del esquema denominado de propiedades, descrita anteriormente. Sin embargo, esto no fue suficiente para describir la información contenida en las entrevistas con los alumnos, pues se encontró que los estudiantes mostraban dificultades para operar con los intervalos del dominio de la función. Además, un análisis minucioso de las entrevistas puso en evidencia que otra fuente de información importante del problema se encontraba en la relación entre las propiedades de la función y la definición de posibles subconjuntos del dominio de la función y la manera en que la coordinación de las propiedades de la función afecta las operaciones que deben llevarse a cabo entre los intervalos o subconjuntos del dominio de la función. Se decidió, por tanto, introducir un nuevo esquema que interacciona con el primero y describir su evolución. A este esquema se le denominó de intervalos, además de considerar de manera simultánea la interacción entre los dos esquemas.

EVOLUCIÓN DEL ESQUEMA DE INTERVALOS EN EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN: ESQUEMA PARA LOS INTERVALOS

Para construir el esquema de los intervalos del dominio de la función, el estudiante debe realizar acciones sobre subconjuntos de un conjunto de números reales utilizando la definición de las operaciones de intersección y unión. Estas acciones o procesos deben coordinarse con el esquema de función en la determinación del dominio de la función.

Nivel intra-intervalos

El estudiante trabaja coordinando la información acerca de la función en intervalos aislados, la conexión de la información en intervalos contiguos y la intersección de información correspondiente a distintos intervalos le causan confusión.

Nivel inter-intervalos

El estudiante es capaz de coordinar la información sobre la función en dos intervalos contiguos. Sin embargo, no es capaz de coordinar la información a través de todos los intervalos que conforman el dominio de la función.

Nivel trans-intervalos

El estudiante es capaz de coordinar la información de la función en *todo* el dominio de la función. Es también capaz de interpretar la información proporcionada en intervalos que se intersecan y de unir intervalos que comparten la misma información cuando éstos son no contiguos.

La tematización del esquema implica, por una parte, la coherencia del esquema, es decir, la posibilidad de que el sujeto reconozca las relaciones que están incluidas en el esquema y sea capaz de decidir qué problema puede resolverse utilizando el esquema y cuál no. Esta coherencia ya está presente en el nivel trans-, pero ahora el estudiante es capaz de desagrupar el esquema para utilizar las partes que lo componen cuando esto es necesario y reagrupar nuevamente las partes que se requieren en la solución de un problema que requiere las mismas componentes, y tiene la posibilidad de realizar acciones sobre el esquema, es decir, de utilizarlo como objeto en la solución de un nuevo problema.

La doble triada es, pues, un marco teórico que involucra la interacción de dos esquemas. Es necesario insistir que si bien un nivel implica una menor sofisticación matemática que el que le sigue, el paso de uno a otro nivel se da de distintas maneras para distintos individuos. Si consideramos ahora la descripción de la doble triada, los niveles en ella también son niveles de clasificación para los investigadores, el paso de un nivel a otro de esa doble triada puede seguir caminos diferentes y no es necesario recorrer todos los niveles intermedios para llegar hasta el nivel trans-propiedades, trans-intervalos.

Las preguntas de interés una vez construido el marco teórico son las siguientes: ¿cuán útil es este marco teórico como herramienta de análisis? y ¿cuáles resultados se obtienen acerca del trabajo de los estudiantes cuando se aplica esta doble triada? Éstas fueron las preguntas de investigación de los tres estudios antes mencionados.

RESULTADOS

En el análisis de los datos y en concordancia con los objetivos de la investigación se siguió una doble ruta. Por una parte, la guía fue el interés por verificar si el marco teórico desarrollado era apropiado para dar cuenta del comportamiento observable de los estudiantes y, por otra parte, el análisis se orientó a describir las dificultades y estrategias de los estudiantes con base en el marco teórico propuesto.

Un elemento que resultó indispensable considerar fue que, al tratar de integrar las propiedades de la función antes mencionadas, entran en juego los intervalos sobre los que están definidas en el dominio de la función, en los números reales. Las distintas propiedades aplican sobre distintos intervalos en el dominio de la función. La primera derivada proporciona información sobre la función en intervalos específicos, es decir, aquellos donde la función crece o decrece; pero esos intervalos no coinciden con los intervalos donde hay cambios en las propiedades de la función de acuerdo con la información proporcionada por la segunda derivada, y éstos a su vez son diferentes de los resultantes cuando se tiene en cuenta la información que proporcionan los límites y la continuidad de la función. La consideración de la estructura del dominio de la función y su descomposición en intervalos hizo el análisis de los datos mucho más claro.

El marco teórico permitió dar cuenta del comportamiento de los estudiantes desde el primer estudio. Se clasificó a los estudiantes según la información con que se contaba en un nivel en la doble triada. En cada uno de los tres estudios se encontraron estudiantes en todos los niveles, menos en uno, el intra-propiedades, trans-intervalos, lo cual puede significar que en la interacción entre los esquemas, la falta de coordinación entre las propiedades afecta de manera determinante el manejo de los intervalos. En uno de los estudios (Cortés, 2004) se encontró que los estudiantes que no relacionan las propiedades de la función tienen dificultades para operar con los intervalos de la función cuando hay un punto del dominio que tiene un comportamiento marcadamente diferente a los demás, por ejemplo, un punto donde la derivada no está definida. La clasificación no tiene el fin de clasificar en sí mismo, sino de validar el marco teórico; además de lograrse esta verificación, la clasificación proporcionó una visión muy clara de los distintos comportamientos posibles de los estudiantes frente al problema. Por otra parte, el marco teórico permitió describir de manera muy eficiente las dificultades y las distintas estrategias empleadas por los alumnos que resolvieron el problema. Las relaciones que cada estudiante era capaz de establecer entre unos conceptos y otros se pudieron analizar con gran facilidad y, tomando el grupo en conjunto, la clasificación permite observar, de manera muy clara, una especie de retrato de la evolución de este esquema, en diversas trayectorias. Los resultados detallados del primer estudio aparecen en la referencia antes mencionada (Baker *et al.*, 2000).

Entre los resultados más importantes de la secuencia de los tres estudios se encuentra el hecho de que, en todos ellos, se detectó el mismo tipo de dificultades entre los alumnos y el mismo tipo de distribución en los niveles de la doble triada. En el caso del segundo estudio, en el que todos los alumnos elegidos habían tenido un desarrollo sobresaliente en los cursos de cálculo, la distribución que se encontró presentó una mayor desviación hacia los niveles más complejos de la doble triada, pero sorprendentemente menos de lo esperado. Otros resultados importantes obtenidos en los tres estudios son:

- Los estudiantes tienen serias dificultades de interpretación de la segunda derivada de la función y de su relación con el comportamiento de la gráfica de la función.
- Los puntos de inflexión de la función y su relación con la gráfica resultan muy difíciles para los estudiantes.
- La relación entre los conceptos de continuidad y diferenciabilidad de la función en términos de la descripción del comportamiento de la función cuando es continua pero la derivada no está definida o cuando el problema consiste en describir el comportamiento de la función cuando no se considera la propiedad de continuidad es prácticamente inexistente en la mayoría de los estudiantes de los tres estudios antes mencionados.

- Se encontraron estudiantes que, en lugar de integrar las propiedades que caracterizan el comportamiento de la función, trabajan únicamente con la información acerca de la primera derivada y que, aun cuando utilizan esta única propiedad, enfrentan dificultades al relacionarla con los intervalos en el dominio de la función.
- Se encontraron algunos estudiantes que trabajaron únicamente con la información acerca de la segunda derivada y que no fueron capaces de explicar nada relativo al comportamiento de la función utilizando la información acerca de la primera derivada.
- La posibilidad de existencia de puntos donde la derivada no está definida, pero la función sí lo está, provoca una fuerte confusión en los alumnos.
- Los alumnos muestran dificultades con la unión e intersección de los intervalos. Estas dificultades se agudizan cuando una propiedad delimita un intervalo específico que se ve alterado cuando se pone en relación una segunda o tercera propiedad.

Otro resultado que es muy importante tiene que ver con la imposibilidad de los estudiantes de coordinar las propiedades cuando se requiere la unión de distintos intervalos del dominio. Algunos estudiantes pueden integrar sin problemas las propiedades de la función sobre un intervalo específico, pero, en el momento en el que empieza a haber intersecciones o uniones entre diferentes intervalos, muchos de los estudiantes presentan dificultades.

El análisis de los datos utilizando la doble triada permitió obtener una caracterización más clara de las relaciones que distintos estudiantes pueden encontrar entre los diferentes conceptos incluidos en el problema y determinar, por ejemplo, que la segunda derivada no debe considerarse únicamente como la derivada de la derivada en la enseñanza, sino que es necesario hacer un mayor énfasis en sus implicaciones geométricas, dado que, geométricamente, implica algo completamente diferente al significado de la primera derivada. Los resultados de los tres estudios muestran con claridad que el significado geométrico de la segunda derivada va más allá de la concavidad en un sentido superficial y que los estudiantes memorizan y recuerdan en su mayoría las formas de U y de U invertida para los intervalos de concavidad y convexidad. Por ello, por ejemplo, el caso de una curva cóncava hacia abajo en un intervalo en el que no necesariamente se alcanza un máximo no representa, para muchos de ellos, una curva cóncava hacia abajo y les plantea dificultades que son incapaces de resolver.

Para analizar la posibilidad de tematización del esquema descrito por la doble triada en el primer y tercer estudios, se utilizaron las preguntas finales del problema presentado anteriormente: ¿es la función que encontraste la única que cumple con las condiciones dadas por el problema?, ¿qué sucede con la gráfica de esta función si quitamos la condición de continuidad? Estas preguntas resultaron aún más difíciles para los estudiantes que la solución del problema original y, de hecho, fueron los resultados obtenidos de ellas los que dieron lugar a las nuevas investigaciones que se mencionaron en las que se incluyeron preguntas adicionales.

En el primero y tercer estudios, en los que la muestra de estudiantes incluía alumnos de distintos niveles de desempeño en un primer curso de cálculo diferencial, no se encontró ningún estudiante que pudiera considerarse que hubiera tematizado el esquema descrito por la doble triada. En el segundo, donde únicamente se incluyeron estudiantes con resultados sobresalientes y que habían cursado al menos dos semestres de calculo diferencial e integral, se encontraron únicamente dos estudiantes que lo habían logrado. Esto permite concluir que la tematización de este esquema, aunque posible, es muy difícil.

Todos estos resultados se pueden encontrar en términos de la coordinación de las propiedades entre sí y con los conjuntos que son parte del dominio de la función. Por consiguiente, es posible concluir que el marco teórico empleado permite poner en evidencia las dificultades de los alumnos e interpretarlas en términos de la evolución del esquema. Esta conclusión se obtuvo desde el primer estudio y se reafirmó en los posteriores.

IMPLICACIONES PARA LA DOCENCIA

Los resultados de este estudio hacen evidente que es importante poner mucha atención a la enseñanza de la función derivada y a su relación con el comportamiento de las funciones. En particular, sugieren que es necesario trabajar con diferentes propiedades de la función por separado para hacer énfasis en la manera como éstas inciden en la subdivisión de los intervalos de dominio de la función. Posteriormente, es conveniente introducir en un único intervalo actividades que hagan necesaria la coordinación de dos o más propiedades, para proseguir con su coordinación en varios intervalos y analizar con cuidado las nuevas subdivisiones al dominio de la función que es necesario considerar. También indican que es necesario brindar a los alumnos oportunidades de trabajar con funciones en diferentes contextos de representación para que se consolide la construcción de las relaciones entre conceptos. Por otra parte, los resultados de este trabajo señalan la importancia de abordar con cuidado las implicaciones gráficas de la segunda derivada y su relación con la primera, así como de trabajar profundamente en el análisis de problemas en los que se requiera coordinar distintas propiedades de la función en un solo intervalo de su dominio y posteriormente abordar otros problemas en los que se trabaje con la coordinación de diversas propiedades en distintos intervalos del dominio de la función.

Por último, es importante hacer un énfasis especial en un hecho que parece ser de fundamental importancia para lograr la integración y consolidación de estos conceptos por parte de los estudiantes, el hecho de que cuando se enseñan en clase se introduzcan paulatinamente cada uno de los conceptos antes mencionados, analizando sus propiedades en términos analíticos y gráficos y que se coordinen también en forma paulatina de manera que el trabajo en la integración de las propiedades de la función junto con su integración con las operaciones entre intervalos sea consistente y claro para los estudiantes.

Los resultados muestran que este trabajo no es fácil para los estudiantes y es muy probable que un semestre sea poco tiempo para lograr la integración de los conceptos necesarios para la graficación de funciones con éxito. Sin embargo, la integración de los conceptos no debe dejarse de lado y es necesario dedicar tiempo y esfuerzo a sentar bases sólidas al respecto, a fin de que los estudiantes logren un conocimiento más profundo del papel que desempeñan las distintas propiedades y los distintos intervalos en el comportamiento de la función.

ALGUNAS CONCLUSIONES

Una conclusión que se desprende de este estudio en relación con la investigación en educación matemática es la importancia de hacer investigación sobre la manera como trabajan o aprenden los estudiantes conceptos más complejos. Este tipo de estudio aporta una visión diferente que, como investigadores, nos permite ver más allá de la manera en la que se aprende cada concepto en particular y entender la forma en la que los distintos conceptos se van estructurando unos con otros para ir conformando lo que llamamos pensamiento matemático.

El estudio de los esquemas de los estudiantes dentro del marco de la teoría APOE ha mostrado ser, en este y en otros estudios, una herramienta útil y versátil. La información que se obtiene utilizándolos sobre el fenómeno estudiado es muy rica y, a nivel de didáctica, proporciona mucha información al poner de relieve dificultades de los estudiantes que pasan inadvertidas en otro tipo de estudios y en el trabajo en el aula. Los estudios apoyados en la noción de esquema señalan, además, aquellas relaciones en las que hay que hacer mayor énfasis en la docencia y proporcionan indicadores de la manera de hacerlo.

NOTA

Este artículo está basado en una conferencia impartida en el Seminario Papini en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asiala, M., A. Brown, D. DeVries, E. Dubinsky, D. Mathews y K. Thomas (1996), "A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education", *Research in Collegiate Mathematics Education*, vol. II, núm. 3, pp. 1-32.

Asiala, M., J. Cottrill, E. Dubinsky y K. E. Schwingendorf (1997a), "The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative", *Journal of Mathematical Behavior*, núm. 16, pp. 399-431.

Asiala, M., E. Dubinsky, D. Mathews, S. Morics y A. Oktac (1997b), "Student Understanding of Cosets, Normality and Quotient Groups", *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 16, núm. 3, pp. 241-309.

Baker, B., L. Cooley y M. Trigueros (2000), "A Calculus Graphing Schema", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 31, núm. 5, noviembre, pp. 557-578.

Beth, E. y J. Piaget (1966), *Mathematical Epistemology and Psychology*, trad. de W. Mays, Dordrecht-Holland, D. Reidel.

Brown, A., K. Thomas y G. Tolias (2001), "Conceptions of Divisibility: Success and Understanding", en R. Zazkis y S. Campbell (eds.), *Learning and Teaching Number Theory*, Ablex Publishing Series Mathematics, Learning, and Cognition, Monograph Series of the Journal of Mathematical Behavior.

Chelevard, Y. (1985), *La transposición didáctica*, caps. 1, 2 y 3, Barcelona, Aprendizaje Visor.

Clark, J. M., F. Cordero, J. Cottrill, B. Czarnocha, D. J. DeVries, D. St. John, G. Tolias y D. Vidakovic (1997), "Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule", *Journal of Mathematical Behavior,* núm. 16, pp. 345-364.

Cooley, L., M. Trigueros y B. Baker (por publicarse), *On the Thematization of the Calculus Graphing Schema.*

Cortés, M. (2004), *Integración de conceptos en la solución de problemas de cálculo diferencial,* Tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, ITAM.

Cottrill, J., E. Dubinsky, D. Nichols, K. Schwingendorf, K. Thomas y D. Vidakovic (1996), "Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema", *The Journal for Mathematical Behavior,* vol. 15, pp. 167-192.

Czarnocha, B., E. Dubinsky, V. Prabhu y D. Vidakovic (1999), "One Theoretical Perspective in Undergraduate Mathematics Education Research", *Proceedings of the XXIII PME International Conference,* Israel.

Czarnocha, B., E. Dubinsky, S. Loch, V. Prabhu y D. Vidakovic (2002) "A Conceptions of Area: In Students and in History", *Collegiate Mathematics Journal.*

Czarnocha, B., S. Loch, V. Prabhu y D. Vidakovic (2001), "The Concept of the Definite Integral: Coordination of Two Schemas", *Proceedings of the 25th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME25),* Utrecht, Freudental Institute, 12-17 de julio, vol. 2, pp. 297-304.

Dubinsky, E. (1991a), "Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking", en D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 95-123.

—— (1991b), "The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics", en L. P. Steffe (ed.), *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences,* Nueva York, Springer-Verlag.

—— (1994), "A Theory and Practice of Learning College Mathematics", en A. Schoenfeld (ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving,* Hillsdale, Erlbaum, pp. 221-243.

—— (1996), "Una aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática postsecundaria", *Educación Matemática,* vol. 8, núm. 3, pp. 24-45.

—— (1997), "On Learning Quantification", *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching,* vol. 16, núm. 2/3, pp. 335-362.

Dubinsky, E., J. Dautermann, U. Leron y R. Zazkis (1994), "On Learning Fundamental Concepts of Group Theory", *Educational Studies in Mathematics,* vol. 27, núm. 3, pp. 267-305.

Dubinsky, E., F. Elterman y C. Gong (1988), "The Student's Construction of Quantification", *For the Learning of Mathematics,* vol. 8, núm. 2, pp. 44-51.

Dubinsky, E. y P. Lewin (1986), "Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Decomposition of Induction and Compactness", *Journal of Mathematical Behavior,* núm. 5, pp. 55-92.

Dubinsky, E. y G. Harel (1992), "The Nature of the Process Conception of Function", en G. Harel y E. Dubinsky (eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy,* MAA Notes, 25, Mathematical Association of America, pp. 85-106.

Dubinsky, E. y M. McDonald (2001), "APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research", en D. Holton (ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study,* Kluwer Academic Publishers, pp. 273-280.

Henríquez, Gil (1997), "Actividades estructurantes y reflexiones sobre la estructura", en R. García (coord. gral.), *La epistemología genética y la ciencia contemporánea,* Barcelona, España, Gedisa, pp. 315-325.

McDonald, M. A., D. Mathews y K. Strobel (2000), "Understanding Sequences: A Tale of Two Objects", en E. Dubinsky, J. J. Kaput y A. H. Schoenfeld (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV,* 8, pp. 77-102, Providence, R.I., AMS y Washington MAA.

Oktaç, A. y M. Trigueros (2004), "La théorie APOS et l'enseignement des espaces véctoriels dans l'algebre linaire", *Recherches en Sciences Cognitives* (por aparecer).

Piaget, J. (1971), *Psychology and Epistemology,* trad. de A. Rosen, Nueva York, Grossman (edición original: 1970).

—— (1972), *The Principles of Genetic Epistemology,* trad. de W. Mays, Londres, Routledge and Kegan Paul (edición original: 1970).

—— (1976), *The Grasp of Consciousness,* trad. de S. Wedgwood, Cambridge, MA, Harvard University Press (edición original: 1974).

Piaget, J. y R. García (1996), *Psicogénesis e historia de la ciencia,* México, Siglo Veintiuno Editores.

Trigueros, María (2001), "Analysis of Students' Strategies when Solving Systems of Differential Equations in a Graphical Context", *Proceedings of the Twenty Third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education I,* Columbus, OH, pp. 529-537.

—— (2000), "Students' Conceptions of Solution Curves and Equilibrium in Systems of Differential Equations", *Proceedings of the Twenty Second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education I,* Columbus, OH, pp. 93-97.

Trigueros, M. y K. Weller (2003), "Report on the Mini-Symposium on Education at ILAS 2002", *Journal of Linear Algebra Research*.

Vergnaud, G. (1990), "La théorie des champs conceptuels", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* núm. 10, pp. 133-170.

Vidakovic, D. (1996), "Learning the Concept of Inverse Function", *The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching,* vol. 15, núm. 3, pp. 295-318.

Weller, K. *et al.* (2002), *Learning Linear Algebra with ISETL,* publicación electrónica, www.ilstu.edu/~jfcottr/linear-alg

Weller, K., E. Dubinsky, S. Loch, M. A. McDonald y R. R. Merkovsky (2003), "Students Performance and Attitudes in Courses Based on APOS Theory and the ACE Teaching Cycle", *Research in Collegiate Mathematics Education, V,* pp. 97-131.

DATOS DE LA AUTORA

María Trigueros
Departamento de Matemáticas, Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM), México
Trigue@itam.mx