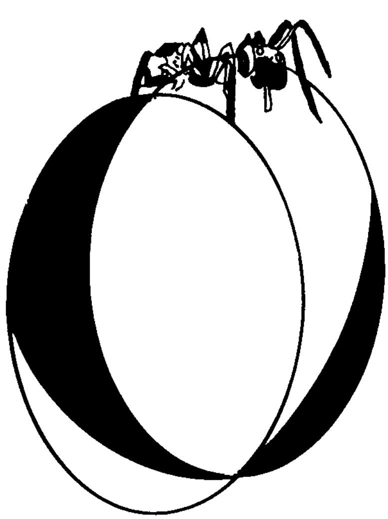
■ EDUCACIÓN MATEMÁTICA ■ Vol. 3 - No. 1 • Abril 1991 ■ © GEI ■ Pág. 105 ■

# La Cinta de Möbius

Elías Loyola Campos

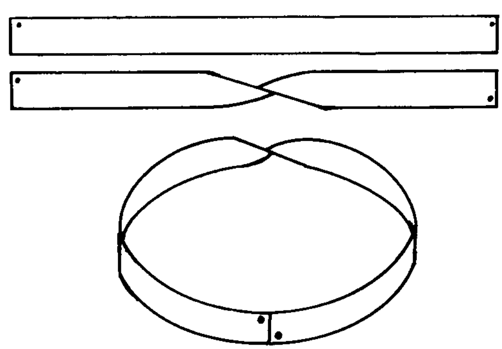
Al estudiar las propiedades que poseen los objetos comunes, se puede encontrar uno con verdaderas sorpresas si se les hace una pequeña variación. Este fue el caso del matemático alemán August Ferdinand Möbius (1790-1868), quien examinando una hoja de papel, y considerándola infinitamente delgada, vió que ésta poseía dos caras y un único borde, su contorno. Se propuso darle una variante.

En una hoja como la de esta revista, una hormiga que estuviera en una cara y deseara pasar a la otra, debería, por fuerza, cruzar el borde. ¿Qué modificación habría de hacerse a la hoja para que la hormiga pudiera pasear por ambas caras sin tener que cruzar el molesto borde?

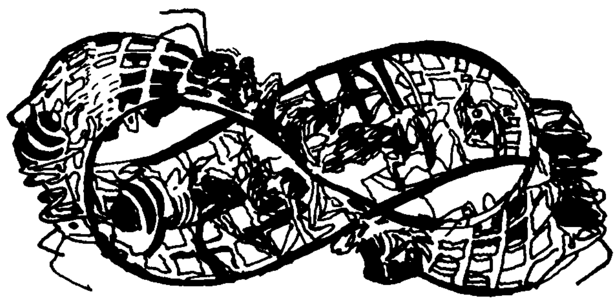


Möbius, en 1858, describió las propiedades que tendría una superficie así. La manera de construirla es muy sencilla, basta tomar una cinta de papel y pegar sus extremos después de haberlos retorcido media vuelta.

Una vez hecha la banda, podrán pasearse por toda ella las hormigas que odien atravesar los bordes. Esta banda tiene una sola cara y un sólo borde. Pero esta propiedad que posee la banda de Möbius tiene aplicaciones prácticas, además de poder servir de paseo interminable a tan laboriosos insectos.

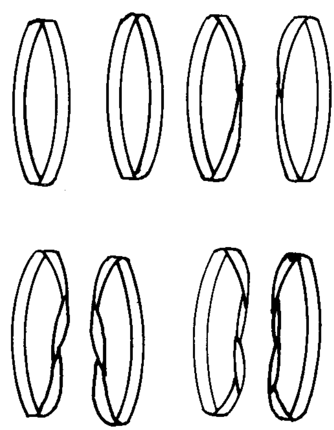


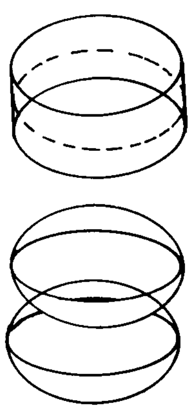
Este tipo de bandas se emplean en la transmisión y transporte ya que permiten el mismo desgaste por ambos lados y tanto su limpieza como su inspección periódica resultan más prácticas. Otra aplicación más se tiene en algunas cintas magnetofónicas cuya ventaja sobre las bandas "sin fin" comunes, es que pueden funcionar sin interrupción y con el doble de tiempo de grabación que las normales. También con ella fue posible fabricar una resistencia desprovista de reactancia, la reactancia da lugar a una diferencia de fase, en ocasiones no deseable, en las tensiones y corrientes alternas. Es posible mencionar muchas aplicaciones más, pero mejor continuemos hablando de sus propiedades.

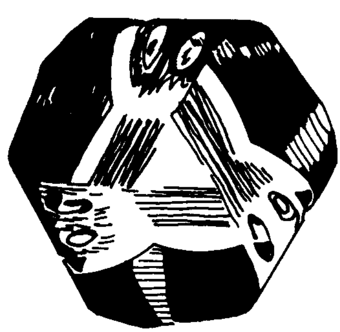


Si un anillo se corta a lo largo, por la mitad, se obtienen... dos anillos ¡Claro! Pero si se corta de la misma manera una banda de Möbius se obtiene... (Tan-tan-tannn,...suspenso) ¡Una figura con dos lados! ¿No lo crees? Hazlo y te convencerás. Usando dos colores, podrás iluminar cada cara con un color diferente; en cambio, en la banda de Möbius esto no es posible.

Las bandas las podemos construir dándoles cero, una, dos, tres, cuatro,..., etc., medias vueltas, también éstas pueden estar a la izquierda o a la derecha.

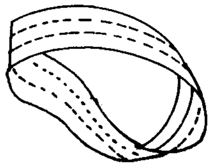






Estudiar las variantes que se obtienen si cortamos a lo largo de cada una de estas bandas y si el mencionado corte lo hacemos a la mitad, a la tercera parte, o la cuarta, o a la fracción que se quiera es una tarea que está llena de sorpresas. Tendrás la seguridad de haber entendido cuando puedes explicar tus descubrimientos.

También será divertido si los empleas para inventar algunos trucos que puedes mostrar a tus amigos. Son muchas las bromas y sorpresas que realizan los magos profesionales con ayuda de estas bandas. Desde luego que ellos las cortan de una manera muy espectacular, por ejemplo pintando una línea central a lo largo de la banda, construida de un papel fuerte y pesado, con una solución concentrada de nitrato potásico y una vez seca, la cuelgan de un clavo, de tal manera que éste sólo alcance la mitad de la anchura. Cuando la línea se prende con un cigarro en la parte baja, arde rápidamente, cortándose, para caer la parte que no estaba sostenida y... no son dos, es una.



La explotación que los artistas gráficos hacen de la cinta Möbius es muy extensa, ya te hemos mostrado dos que pertenecen a la creatividad del grabador holandés M.C. Escher. Algunos otros perciben en ella a la idea del infinito, debido quizá a su propiedad de ser una banda "sin fin" y que su forma es similar al símbolo ∞, así, en conjunto les recuerda el concepto de infinitud y lo aprovechan.

También, la banda Möbius, se presta para que algunos escritores que han sido cautivados por ella la emplén con un objeto de su obra o como fuente de inspiración. Independientemente del género literario y si es serio o chusco. Por ejemplo, cuando hablaba con un amigo, veracruzano y jaranero para más señas, sobre la banda de Möbius y recité algunos versos que Cyril Kornbluth hizo al respecto:

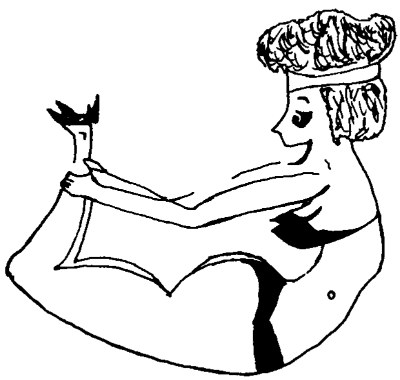
Una bailarina, fríbola, de cabaret.
preciosa, de nombre Jacinta,
tanto hacía estriptís como ballet.

Amiga de leer ciencia-ficción,
un mal día murió por constricción
de tanta contorsión y finta,
al hacer así una cinta.

Se sonrió y me miró a los ojos mientras pensaba, y casi de inmediato solicitó música a unos jarochos, para acompañar la respuesta al estilo de su tierra:

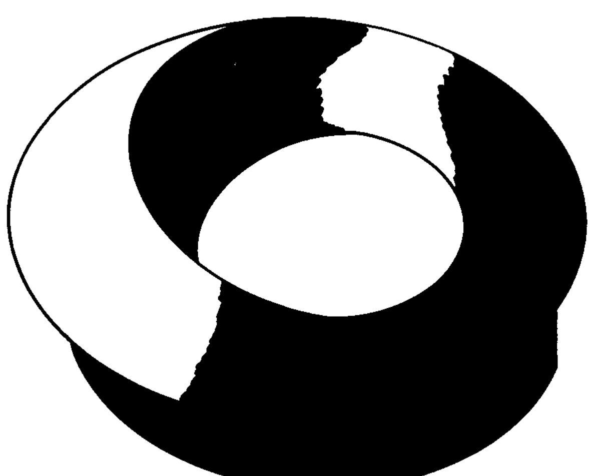
Lo que dices de Jacinta
no pasa de ser ficción
no murió por constricción
ni porque estuviera en cinta

Murió por otro motivo,
descubrió con grave susto
en un mismo lado el busto
y su mayor atractivo.



Todo lo que hemos dicho fué suponiendo que la hoja era infinitamente delgada, de tal manera que el borde es una línea. Los matemáticos desarrollaron así una de las ramas de la topología llamada de superficies no orientadas, a la cual pertenece la banda de Möbius como el caso más simple de ellas. Pero si reflexionamos un poco más y abstraemos un poco menos, sabemos que no existe ningún papel cuyo espesor se pueda reducir a cero. En realidad las bandas que hemos fabricado las podemos considerar como prismas de cuatro caras, que hemos deformado, como si fueran de hule, para poder darle medias vueltas y pegar sus extremos. Si pensamos en un prisma cuya sección transversal sea un cuadrado, podremos pegarlo si le damos cuartos de vuelta y estudiar sus propiedades. Por ejemplo, es factible hacer un anillo prismático cuadrangular retorcido para que posea una sola cara y una sola arista, basta darle un cuarto de vuelta antes de pegar sus extremos. Si le damos dos cuartos de vuelta (media vuelta) antes de pegarlo, tendrá dos caras y dos aristas. ¿Qué pasa si lo giramos tres cuartos de vuelta?

¿Y cuatro? etc., ¡Que bueno si puedes responder sin construirlos! pero si se te dificulta imaginarlo, no lo dudes, construye prismas largos con plastilina, hazlos cuadrangulares, triangulares, pentagonales, como quieras.



Examina el número de caras que obtienes, cuenta las aristas.

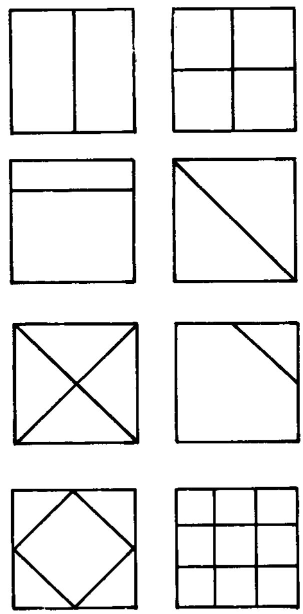
Desde luego que estas dependerán de la relación que exista entre el número de lados del prisma y del número k de pasos de torsión que le des. Aquí tienes una tabla que resultó después de estudiar anillos prismáticos de distintos tipos ¿Coincide con tus observaciones? para poder sacar unas conclusiones de ella, te será útil recordar algunos conceptos de los números enteros. Por ejemplo el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo.

k = NUMERO DE PASOS DE TORCION

| n = LADOS POR SECCION TRANSVERSAL | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 |
| 4 | 4 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 |
| 5 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 6 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 6 | 1 | 2 | 3 |
| 7 | 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 1 | 1 |
| 8 | 8 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 | 8 | 1 |
| 9 | 9 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 9 |
| 10 | 10 | 1 | 2 | 1 | 2 | 5 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 11 | 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 12 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 6 | 1 | 4 | 3 |
| 13 | 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 14 | 14 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 7 | 2 | 1 |

*Tabla que muestra el número de caras conocidas n y k*

Ya sabemos que cuando se cortan a lo largo las cintas retorcidas, pasan cosas raras ¡Imagínate qué sucederá si cortan los anillos prismáticos de la misma forma! Claro que ahora hay más posibilidades, y por lo mismo más sorpresas. Estamos seguros de que tu imaginación es muy grande y que podrás idear y estudiar las propiedades que se tienen al cortar los anillos de distintos modos.



*Algunos modos de cortar un anillo de n = 4*

**Bibliografía**

GARDNER, Martín; *Festival Mágico Matemático* (Cap. 8); Alianza Editorial; Madrid; 1984.

GARDNER, Martín; *Juegos Matemáticos,* en Investigación y Ciencia, número 25, octubre de 1978, pág. 98-101.

COURANT, Richard/ROBBINS, Herbert; *¿Qué es la matemática?* (Cap. V, sec. IV); Ed. Aguilar. 5a. ed. 1979.