Las Calculadoras en el Cálculo: El Límite

Explorando límites de sucesiones

Introducción

Las calculadoras se pueden usar para explorar y desarrollar conceptos matemáticos. Presentamos actividades para explorar sucesiones, para preparar a los alumnos para el concepto de límite. Los ejemplos serán ilustrados con las secuencias de teclas para una calculadora que tiene la capacidad de factor constante sin necesidad de una tecla especial. (Sharp EL-506S) y para una calculadora que recuerda el último conjunto de instrucciones (Casio fx-7000G). Se dan para proporcionar una idea de la sensación dinámica, iterativa de calcular los términos de las sucesiones con la calculadora. Las teclas que hay que utilizar pueden variar para otro tipo de calculadoras.

Parte 1

Las siguientes sucesiones se pueden explorar usando un número como un factor constante repetidamente, o bien oprimiendo una sóla tecla después de que un número ha sido escogido.

Actividad 1. Factor constante.

Muchas calculadoras tiene la capacidad de usar el mismo número como un factor constante (o como sumando, o como sea). Algunas calculadoras tienen una tecla especial para eso, otras no necesitan una tecla especial.

Alfinio Flores P.
CIMAT,
Guanajuato

a) Usa el número 2 como un factor constante repetidamente para obtener la sucesión

2
2×2
$2 \times 2 \times 2$
$2 \times 2 \times 2 \times 2$
...

Usa la calculadora:

Sharp EL-506S

2 $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ ....

Casio fx-7000G

2 $\boxed{\text{EXE}}$ $\times$ $\boxed{\text{ANS}}$ $\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{\text{EXE}}$ ...

Escribe el número de la pantalla después de cada ejecución

$S_1 = 2$	$S_9 = 512$
$S_2 = 4$	$S_{10} = 1024$
$S_3 = 8$	$S_{11} = 2048$
$S_4 = 16$	$S_{12} = 4096$
$S_5 = 32$	$S_{13} = 8192$
$S_6 = 64$	$S_{14} = 16384$
$S_7 = 128$	$S_{15} = 32768$
$S_8 = 256$	$S_{16} = 65536$

Cada número es el doble del anterior, así que $S_n = 2 \times S_{n-1}$.

También podemos escribir estos número como potencias de 2: $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots$

Estos números aparecen en el famoso problema de los granos en el tablero de ajedrez, y en el número de hojas que se obtienen al cortar a la mitad una hoja repetidamente.

b) ¿Qué pasa si empiezas con un número entre 0 y 1? Trata con 0.1.

Los números desplegados en la pantalla después de cada ejecución son:

0.1
0.01
0.001
0.0001
...

Nota que podemos acercarnos a 0 tanto como queramos. (De hecho, la calculadora mostrará 0 en la pantalla si eres persistente, esto se debe a errores de redondeo; ver parte 4.)

Usa otros números para comenzar. Trata con 0.9.
Los números desplegados en la pantalla después de cada ejecución son:

0.9
0.81
0.729
0.6561
0.59049
...

¿A qué número se acercan estos números?
¿Qué pasa si empiezas con un número negativo? Trata primero con números entre -1 y 0. Trata luego con números menores que -1.
Resumiendo:

i) Si $-1 < a < 1$, la sucesión $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ tiene 0 como límite

ii) Si $a > 1$, la sucesión $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ crecerá más allá de cualquier cota.

iii) Si $a < -1$, la sucesión $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ tomará alternadamente valores negativos y positivos, pero con valores absolutos que crecen más allá de cualquier cota.

Actividad 2

Para esta sucesión empezamos con 2. Después de eso, cada número de la sucesión es el cuadrado del anterior, $S_n = S_{n-1}^2$

Oprime las teclas en la calculadora:

Sharp EL-506S

2 $\boxed{X^2}$ $\boxed{X^2}$ $\boxed{X^2}$ $\boxed{X^2}$ $\boxed{X^2}$ ....

Casio fx-7000G

2 $\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{X^2}$ $\boxed{\text{ANS}}$ $\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{\text{EXE}}$ . . .

Los números que aparecen en la pantalla son:

2, 4, 16, 256, 65536, . . .

Empezando con 2, pronto alcanzas números más grandes de los que la calculadora puede manejar.
Podemos representar esta sucesión como potencias de 2:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 2^1 \\
S_2 &= 2^2 \\
S_3 &= 2^4 \\
S_4 &= 2^8 \\
S_5 &= 2^{16} \\
S_6 &= 2^{32}
\end{aligned}
$$

Nota que los exponentes son las potencias de 2 (ver el primer ejemplo de la Actividad 1)

Empieza con un número diferente. Escoge un número que esté muy cerca de 1 por ejemplo 1.0001

Nota que los números de esta sucesión crecen también más allá de toda cota.

Ahora empieza con un número cercano al 1 pero menor, por ejemplo 0.9999

Nota que los números de la sucesión en este caso decrecen y se acercan cada vez más a cero.

Actividad 3

Explora la siguiente sucesión:

$2, \sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{2}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}, \ldots$

Esto es, empezamos con 2, luego sacamos raíz cuadrada repetidamente. Oprime las teclas en la calculadora:

Sharp EL-506S

2 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ ....

Casio fx-7000G

2 $\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\text{ANS}}$ $\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{\text{EXE}}$ . . .

Observa los números que aparecen en la pantalla después de cada ejecución

2
1.4142 . . .
1.18 . . .
1.09 . . .
1.04 . . .
1.02 . . .

¿A qué número se acercan?

Podemos expresar esta sucesión utilizando exponentes fraccionarios (recuerda que $\sqrt{x} = x^{1/2}$):

$2^1, 2^{1/2}, 2^{1/4}, 2^{1/8}, 2^{1/16}, \ldots$

¿Qué pasa si empiezas con un número mucho mayor, por ejemplo 1000000?

Escribe los números.

1000000
1000
31.62. . .
5.62. . .
2.37. . .
1.53. . .

Nota que se acercan a 1 también.
¿Qué pasa si empiezas con un número entre 0 y 1, por ejemplo 0.000001?

0.000001
0.001
0.0316. . .
0.177. . .
0.42. . .
0.64. . .
0.80. . .
0.89. . .

En este caso también nos acercamos al 1 tanto como queramos, aproximándonos por valores menores que 1.

Parte 2

En los siguientes ejemplos, los términos de las sucesiones no se obtienen con un sólo teclazo. Los alumnos tienen que oprimir una serie de teclas en un cierto orden para obtener los términos sucesivos. La secuencia se muestra para dar idea del proceso iterativo para obtener la sucesión, y para mostrar cómo la secuencia de teclazos define un algoritmo y sugerir cómo puede ser transformado en un programa. La secuencia de teclas oprimidas puede variar para cada tipo de calculadora.

Actividad 4. La razón dorada.

La razón dorada aparece en muchos contextos en la naturaleza y en el arte. Este número se puede obtener de muchas maneras. Veremos tres de ellas.

Calcula la siguiente sucesión:
$\sqrt{1}$, $\sqrt{(1 + \sqrt{1})}$, $\sqrt{(1 + \sqrt{(1 + \sqrt{1})})}$, . . .

Nota que para obtener un nuevo término añadimos 1 a la raíz cuadrada del anterior, y luego sacando raíz cuadrada de la suma. De este modo se puede definir la sucesión mediante
$S_n = \sqrt{(1 + S_{n-1})}$ empezado con $S_1 = \sqrt{1}$

Para obtener los términos de la sucesión, puedes oprimir las teclas

Sharp EL-506S

$1 \; \boxed{\sqrt{\;}} \; \boxed{+} \; 1 \; \boxed{=} \; \boxed{\sqrt{\;}} \; \boxed{+} \; 1 \; \boxed{=} \; \boxed{\sqrt{\;}}$............

Casio fx-7000G

$1 \; \boxed{\text{EXE}} \; \boxed{\sqrt{\;}} \; \boxed{(} \; 1 \; \boxed{+} \; \boxed{\text{ANS}} \; \boxed{)} \; \boxed{\text{EXE}} \; \boxed{\text{EXE}} \; \boxed{\text{EXE}}$ . . .

Observa los números en la pantalla después de cada ejecución, es decir, después de una secuencia completa de teclas.

Continúa el proceso hasta que los números en la pantalla no cambien.

El resultado es r = 1.61833. . .

Eleva este número al cuadrado. Observa que los números decimales después del punto no cambiaron. Podemos expresar esta relación entre r y r^2 mediante una ecuación:

(1) $r + 1 = r^2$

Actividad 5

Calcula la siguiente sucesión:

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{1}$$

$$S_3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}$$

$$S_4 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}$$

$$S_5 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}$$

Observa que cada término se obtiene añadiendo 1 al recíproco del anterior, esto es $S_n = 1/S_{n-1}$

Una forma de calcular los términos es oprimiendo la siguiente secuencia de teclas:

Sharp EL-506S

1 [1/x] [+] 1 [=] [1/x] [+] 1 [=] [1/x] [+] 1 [=] . . .

Casio fx-7000G

1 [EXE] [+] [ANS] [x^{-1}] [EXE] [EXE] [EXE] . . .

Escribe los números en la pantalla después de ejecutar cada secuencia de teclazos.

Continúa el proceso hasta que los números en la pantalla ya no cambien. El resultado es r = 1.618133. . .

Toma el recíproco de este número. Observa que las cifras después del punto decimal no cambiaron. Podemos expresar esta relación entre r y 1/r mediante una ecuación

(2) $r = 1 + 1/r$

Nota que las ecuaciones (1) y (2) son equivalentes.

El límite de las dos sucesiones anteriores se conoce como la razón dorada. Es la raíz positiva de la ecuación (1) y su valor exacto es $(1 + \sqrt{5})/2$.

Actividad 6

Algunas calculadoras pueden manejar fracciones sin convertirlas a números decimales (por ejemplo Texas Instruments Math Explorer).

Usa una calculadora de este tipo para expresar como fracciones los términos de la sucesión anterior definida por $S_1 = 1$, $S_n = 1 + 1/S_{n-1}$ 1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, 34/21, 55/34, . . .

Observa que los denominadores son los números de Fibonacci:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, . . .

(Cada número de Fibonacci después de los dos primeros se obtiene sumando los dos números anteriores $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$)

Los númeradores también son números de Fibonacci. Así, para aproximar la razón dorada podemos dividir un término de la sucesión de Fibonacci entre el anterior:

$$S_n = F_n / F_{n-1}$$

Actividad 7

Una sucesión que se acerca a 0 muy rápido
Recuerda que $n! = n \times (n - 1)!$ y que $0! = 1$
Sea $S_n = 1/n!$
Para esta sucesión la secuencia de teclazos puede ser

Sharp EL-506S

1 $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{=}$ . . .

Casio fx-7000G

1 $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{\text{EXE}}$ $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{\text{EXE}}$ . . .

Escribe los términos:

1
0.5
0.166666666
0.041666666
0.008333333
0.001388888
0.000198412
0.000024801
0.000002755
0.000000275
0.000000025
0.000000002
. . .

Nota que después de unos cuantos términos estamos muy cerca de 0.

Parte 3

Algunas formas de calcular son mejores que otras, incluso con una calculadora.

Mi maestro en la secundaria insistía que había de escribir $\sqrt{a}/a$ en vez de $1/\sqrt{a}$. En aquel tiempo no había calculadoras de bolsillo, de modo que las raíces cuadradas se tenían que calcular a mano, y cada cifra adicional requería esfuerzo adicional, de modo que una vez obtenido un número requerido de cifras significativas, uno trataba de no perderlas en las operaciones siguientes. Calcular $1/\sqrt{a}$. Dividir era la operación más difícil de las cuatro operaciones aritméticas básicas, de modo que se evitaba dividir entre números con muchos dígitos. Además, calcular $\sqrt{a}/a$ preservaba el número de cifras significativas, en cambio algunas se perdían al calcular $1/\sqrt{a}$. En esta época, con una calculadora, no hay diferencia significativa entre los resultados que obtenemos calculando de cualquiera de las dos formas. Sin embargo, el meollo de la lección es todavía válido: el hecho de que podemos calcular un resultado de diferentes maneras y algunas son más eficientes y precisas que otras.

En las siguientes dos actividades vamos a aproximar un número interesante, **e**, de dos maneras diferentes y vamos a comparar los resultados.

Activiad 8

Considera la siguiente sucesión

$S_0 = 1$
$S_1 = 1 + 1/1!$
$S_2 = 1 + 1/1! + 1/2!$
...
$S_n = S_{n-1} + 1/n!$

La secuencia de teclazos puede ser:

Casio fx-7000G

1 [÷] 0 [SHIFT] [X!] [EXE] [+] 1 [÷] 1 [SHIFT] [X!] [EXE]. . .

Esta sucesión se aproxima a su límite (el número **e**) muy rápido. Estos son los primeros 12 términos de la sucesión

$S_1 = 2$
$S_2 = 2.5$
$S_3 = 2.666666666\ldots$
$S_4 = 2.708333333\ldots$
$S_5 = 2.716666666\ldots$
$S_6 = 2.718055555\ldots$
$S_7 = 2.718253968\ldots$
$S_8 = 2.718278769\ldots$
$S_9 = 2.718281525\ldots$
$S_{10} = 2.718281801\ldots$
$S_{11} = 2.718281826\ldots$
$S_{12} = 2.718281828\ldots$

Actividad 9

La sucesión $S_n = (1 + 1/n)^n$ que surge con el contexto del interés compuesto, tiene también el mismo límite **e**. Calcula algunos términos de esta sucesión

Casio fx-7000G

$\boxed{(}$ 1 $\boxed{+}$ $\boxed{\div}$ 12 $\boxed{)}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{12}$ $\boxed{EXE}$

Sin embargo, esta sucesión se aproxima al límite mucho más lentamente, esto es, los términos correspondientes de la sucesión en la actividad anterior están mucho más cerca del límite.
$S_{12} = (1 + 1/12)^{12} = 2.61303529$
(el 12o. término sólo nos da una cifra correcta, mientras que en la otra sucesión todos los dígitos desplegados en la pantalla eran los correctos)
$S_{100} = (1 + 1/100)^{100} = 2.70481383$
(después de cien términos apenas dos cifras correctas)

Parte 4

No confíes en la calculadora ciegamente

La calculadora usa un sistema numérico finito para representar el sistema abstracto, infinito de los números reales. La diferencia más obvia es que para la calculadora existe un número más allá del cual ya no puede operar. Pero los dos sistemas numéricos difieren también en otros aspectos.

En los números reales, si $K \neq 0$, entones $N + K \neq N$. Sin embargo, con la calculadora, si K es muy pequeña en comparación con N, entones $N + K = N$.

En muchas situaciones es necesario hacer un análisis teórico cuando utilizamos la calculadora, para asegurarnos que la respuesta es razonable.

Actividad 10

Considera la siguiente sucesión:

$S_1 = 1$
$S_2 = S_1 + 1/2 = 1 + 1/2$
$s_3 = S_2 + 1/3 = 1 + 1/2 + 1/3$
...
$S_n = S_{n-1} + 1/n = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots + 1/n$

La secuencia de teclas puede ser

Sharp EL-506S

1 $\boxed{1/x}$ $\boxed{M+}$ $\boxed{RM}$ 2 $\boxed{1/x}$ $\boxed{M+}$ $\boxed{RM}$ 3 $\boxed{1/x}$ $\boxed{M+}$ $\boxed{RM}$ . . .

Casio fx-7000G

1 $\boxed{+}$ 1 $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{EXE}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{EXE}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{EXE}$ . . .

Nota que los términos de la sucesión van haciéndose más grandes, y al mismo tiempo la cantidad 1/n que vamos sumando para obtener el siguiente término se va haciendo más y más pequeño. Con el tiempo, el incremento será demasiado pequeño comparado con la suma que ya tenemos y no afectará el resultado en la calculadora. Sin embargo, podemos ver que la sucesión crece más allá de toda cota comparándola con otras sucesiones:

$$\begin{aligned} & 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + \dots \\ > & 1 + 1/2 + 1/4 + 1/4 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8 + \dots \\ = & 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \dots \end{aligned}$$