■ EDUCACIÓN MATEMÁTICA ■ Vol. 3 - No. 1 • Abril 1991 ■ © GEI ■ Pág. 99 ■

Demostraciones Matemáticas con la Ayuda del Computador: Un Ejemplo Elemental

Resumen:

Si $x = x_n 10^{n-1} + x_{n-1} 10^{n-2} + \ldots + x_1$ (n un entero positivo, $x_n \neq 0$ y $x_1, \ldots, x_n$ enteros del 0 al 9) es la representación decimal del entero positivo x, definimos $f(x) = x_n^3 + \ldots + x_1^3$. Si se itera la función f para un entero positivo x, eventualmente los valores obtenidos serán atraidos por ciertas órbitas. La demostración de este hecho constituye un ejemplo elemental de una demostración matemática en la que la computadora juega un papel esencial. El resultado se generaliza y se presentan varios problemas abiertos.

En el versículo 11 el último capítulo del evangelio según San Juan (versión bíblica de Casiodoro de Reina según revisada por Cipriano de Valera) aparece:

Subió Simón Pedro y sacó la red a tierra, llena de grandes peces, ciento cincuenta y tres; y aun siendo tantos, la red no se rompió.

San Agustín ofreció el siguiente argumento "numerológico" para explicar el carácter especial del número 153 en el pasaje bíblico. Decía San Agustín que si sumamos el número de mandamientos de la vieja ley mosáica (10) al número de los dones del espíritu (7), símbolo de la nueva dispensación, obtenemos una suma de 17 la cual representa la unión de lo viejo y lo nuevo. San Agustín señaló además que

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 17 = 153.$$

Es también interesante notar (aunque esto no lo señaló San Agustín) que

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 153.$$

Jorge M. López

Departamento de Matemática Universidad de Puerto Rico
Río Piedras

Phil Kohn, de Yokneam, Israel, descubrió una curiosa e interesante propiedad del 153. Kohn observó primeramente que 153 es un número (hay **cinco** tales) que vale la suma de los cubos de sus dígitos:

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153.$$

Además, 153 es el **único** múltiplo de tres que satisface esta propiedad. Kohn apuntó además que se cumplía el siguiente curioso fenómeno. Suponga que comenzamos con un múltiplo cualquiera de tres y sumamos los cubos de sus dígitos. Si al número que resulta, que también es divisible por tres*, le aplicamos el mismo procedimiento y continuamos de este modo, siempre iremos a morir al 153. Ilustramos la aseveración mediante dos ejemplos. Comenzando con el número 6 tenemos:

$$\begin{array}{rl}
6 & 6^3 = 216 \\
216 & 2^3 + 1^3 + 6^3 = 8 + 1 + 216 = 225 \\
225 & 2^3 + 2^3 + 5^3 = 8 + 8 + 125 = 141 \\
141 & 1^3 + 4^3 + 1^3 = 1 + 64 + 1 = 66 \\
66 & 6^3 + 6^3 = 216 + 216 = 432 \\
432 & 4^3 + 3^3 + 2^3 = 64 + 27 + 8 = 99 \\
99 & 9^3 + 9^3 = 729 + 729 = 1458 \\
1458 & 1^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 = 1 + 64 + 125 + 512 = 702 \\
702 & 7^3 + 2^3 = 343 + 8 = 351 \\
351 & 3^3 + 5^3 + 1^3 = 27 + 125 + 1 = 153.
\end{array}$$

Si se comienza con el número 1611, el lector comprobará fácilmente que este proceso genera la siguiente sucesión de números:

1611, 219, 738, 882, 1032, 36, 243, 99, 1458, 702, 351, 153.

¿Qué ocurre si en lugar de comenzar este proceso con un múltiplo de tres comenzamos con un entero positivo arbitrario? Por ejemplo, ¿qué ocurre si comenzamos con el número 4589? El lector podrá verificar sin dificultad alguna que en este caso se genera la siguiente sucesión de números:

4589, 1430, 92, 737, 713, 371.

Nótese que $371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$, de manera que 371 es otro entero que vale lo mismo que la suma de los cubos de sus dígitos. Por otra parte, si comenzamos con el 46, se genera la siguiente sucesión: 46, 280, 520, 133, 55, 250, 133, 55, 250, etc.

Notamos pues que en este caso no terminamos con un número igual a la suma de sus propios dígitos, sino más bien con la cierta "órbita" (133, 55, 250) que se repite indefinidamente.

* Un número es divisible por tres sí y sólo sí la suma de sus dígitos también lo es; y además todo número entero es congruente con su cubo módulo 3.

¿Cómo podemos describir matemáticamente el fenómeno que estamos observando? Una buena dosis de experimentación (dos o tres horas quizá con una calculadora científica) nos muve a postular que todos los enteros positivos que se someten a este proceso van a morir a una de las siguientes "órbitas":

1
371
153
133 - 55 - 250
370
217 - 352 - 160
407
1459 - 919
136 - 244

Se adivina pues que 1, 371, 153, 370 y 407 son enteros que gozan de la propiedad de ser iguales a las sumas de los cubos de sus respectivos dígitos. Se conjetura además que estos son todos los enteros positivos con tal propiedad (como señaláramos al comienzo de este trabajo). También se adivina que si al repetir el proceso descrito terminamos con algún número perteneciente a alguna de la órbitas que contienen más de un punto, entonces, al continuar el proceso contendremos cíclicamente y en orden todos los números que aparecen en esa órbita. La conjetura es pues que al aplicar iteradamente a un número cualquiera el proceso de sumar los cubos de sus dígitos, eventualmente terminamos en alguna de las órbitas indicadas. ¿Cómo podemos probar esta conjetura? Curiosamente todas las demostraciones conocidas de esta conjetura utilizan de manera esencial el computador. Además, la demostración que presentaremos ilustra un ejemplo sencillo, pero a la vez no trivial, de cómo un matemático se puede valer de un computador para generar una demostración matemática. A continuación presentamos los detalles de la prueba.

Primeramente introducimos cierta notación y vocabulario, los cuales nos permitirán enunciar cláramente y en términos matemáticos precisos la conjetura aludida. Si

$$x = x_n 10^{n-1} + x_{n-1} 10^{n-2} + \ldots + x_1 = (x_n x_{n-1} \ldots x_1)10$$

(n un entero positivo, $x_n \neq 0$ y $x_1, \ldots, x_n$ enteros del 0 al 9) es la representación decimal del entero positivo x, definimos

$$f(x) = x_n^3 + \ldots x_1^3.$$

Definimos además,

$$f^{(0)}(x) = x$$

$$f^{(k+1)}(x) = f(f^{(k)}(x)) \text{ para un entero } k \geq 0.$$

Nótese que la tabla anterior determina **nueve** conjuntos, los cuales llamaremos ***órbitas***, a saber: {1}, {371}, {153}, {133, 55, 250}, {370}, {217, 352, 160}, {407}, {1459, 919} y {136, 244}.

Nótese que una órbita contiene un solo punto x si y sólo si x es un **punto fijo** de f, es decir, si y sólo si $f(x) = x$. Decimos que una órbita **0** ***atrae*** a un entero positivo x si existe un entero $k \geq 0$ tal que $f^{(k)}(x)$ pertenece a **0**. Con este vocabulario mínimo podemos ya enunciar nuestra conjetura.

Teorema Si x es un entero positivo, entonces existe una órbita única **0** que atrae a x.

(Como las órbitas son disjuntas, claramente la órbita atrayente tiene que ser única.) La demostración de nuestra conjetura depende de dos lemas, a saber:

Lema 1 Si x es un entero positivo y $< 2{,}000$, entonces existe una órbita 0 que atrae a x.

Lema 2 Si x es un entero positivo y $x \geq 2000$, entonces $f(x) < x$.

Nótese que el Lema 1 no es sino el enunciado del Teorema para el conjunto $\{x \mid x \text{ es un entero y } x < 2000\}$. Antes de indicar las demostraciones de los lemas indicamos cómo de ellos se obtiene el Teorema.

Prueba del Teorema a partir de los lemas:

Supondremos, como se ha indicado, la validez de los lemas. Sea x un entero positivo. Si $x < 2000$ entonces, por el Lema 1 existe una órbita **0** que atrae a x. Si $x > 2000$, entonces $x_1 = f(x) < x$. Si $x_1 > 2000$, entonces $x_2 = f(x_1) = f^{(2)}(x) < x_1$.

Claramente, existe un entero n tal que $x_n < 2000$, ya que de otra manera tendríamos una sucesión infinita de enteros tal que

$$2000 \leq \ldots < x_{n+1} < x_n < x_1, < x$$

lo cual es imposible ya que sólo hay un número finito de enteros entre 2000 y x_1. Pero entonces $x_n = f^{(n)}(x) < 2000$ y por el Lema 1 existe una órbita **0** que atrae a x_n y por consiguiente a x. Esto termina la demostración del Teorema. La demostración del Lema 1 se efectua por "fuerza bruta", es decir, un computador cubica dígitos y los suma miles y miles de veces hasta verificar que todo entero entre 1 y 1999 es atraido por alguna de las órbitas. La prueba del Lema 2, sin embargo, es de naturalezaa teórica. A continuación presentamos su demostración.

Prueba del Lema 2

Supongamos que $x = x_n 10^{n-1} + x_{n-1}10^{n-2} + \ldots + x_1 = (x_n\, x_{n-1} \ldots x_1)_{10}$ (n un entero positivo, $x_n \neq 0$ y $x_1, \ldots, x_n$ enteros del 0 al 9) es la representación decimal de x.

Obsérvese que

$$x_1^3 - x_1 = x_1(x_1^2 - 1) \leq 9(9^2 - 1) = 720$$

$$x_2^3 - 10x_2 = x_2(x_2^2 - 10) \leq 9(9^2 - 10) = 639$$

$$x_3^3 - 100x_3 = x_3(x_3^2 - 100) \leq 9(9^2 - 100) = -171$$

$$x_4^3 - 1000x_4 = x_4(x_4^2 - 1000).$$

Sumando tenemos para un número de cuatro dígitos (n = 4):

$$f(x) - x \leq 1188 + x_4(x_4^2 - 1000).$$

La cantidad de la derecha de la desigualdad anterior es una función decreciente de x_4 y si $x_4 = 2$, su valor es de - 804. Por lo tanto $f(x) - x \leq -804 < 0$ si x es un entero positivo de cuatro dígitos y $x_4 \geq 2$, es decir, $x \geq 2000$. Si $n > 4$ y $x_n \geq 1$, entonces un argumento similar muestra que

$$f(x) - x \leq 1188 + x_n(x_n^2 - 10^{n-1}).$$

Nuevamente se observa que la cantidad de la derecha de la desigualdad es decreciente, y si $x_n = 1$, $x_n(x_n^2 - 10^{n-1}) = 1 - 10^{n-1} \leq 1 - 10^4 = -9999$. En este caso tenemos

$$f(x) - x \leq 1188 - 9999 = -8811 < 0,$$

de manera que $f(x) < x$. Esto termina la demostración del **Lema 2**.

Un cuadro más amplio

A continuación presentamos una interesante generalización del Teorema anterior. Suponga que $b > 1$ es un entero y x es cualquier entero positivo. Sea $x = x_n b^{n-1} + x_{n-1} b^{n-2} + \ldots + x_1 = (x_n\, x_{n-1} \ldots x_1)_b$ (n un entero positivo, $x_n \neq 0$ y $x_1, \ldots, x_n$ enteros de 0 a b-1) la representación en la base b del entero positivo x. Sea e un entero positivo, el cual podríamos tomar en un comienzo como un factor de b-1. Definimos entonces $f(x) = x_n^e + \ldots + x_1^e$ para todo entero positivo x. En el caso que discutimos anteriormente tenemos $b = 10$ y $e = 3$. Si imitamos la demostración del Lema 2 en el presente caso, descubrimos que existe un entero crítico n_0, tal que si $x \geq n_0$, entonces $f(x) < x$. Por consiguiente, la misma demostración anterior funciona para la situación ahora descrita. Nótese que las órbitas, como en el caso anterior, se deben determinar "experimentalmente" mediante el computador. Sin embrago, el número crítico, el cual depende de b y de e, se puede hacer prohibitivamente grande de suerte que la verificación del Lema 1 con la ayuda del computador puede ser larga o imposible en términos del tiempo necesario para completarla. La siguiente tabla es ilustrativa:

Base	**Exponente**	**Número Crítico**
3	2	9
4	3	64
5	2	25
5	4	1250
6	5	15552
7	3	686
7	6	235298
8	7	6291456
9	2	81
9	4	13122
9	8	129140163
10	3	2000
11	2	121

Base	Exponente	Número Crítico
11	5	483153
13	2	169
13	6	19307236
15	2	225
15	7	683437500
16	3	8192
16	5	3145728
17	2	289
17	4	250563
19	2	361
19	3	13718
19	6	188183524
21	4	583443
25	2	625
25	4	1171875
25	6	976562500

Una pregunta que parece ser de dificultad extrema y que permanece abierta es la siguiente: ¿es posible describir las órbitas de f en términos de la base y el exponente utilizados? En otras palabras, ¿es posible escribir una demostración general sin utilizar el computador? La contestación de esta última pregunta parece estar más alla de las posibilidades de la matemática actual.