NOTAS DE CLASE

La Lotería, una computadora y el número e

En una lotería con 100 números la probabilidad de ganar en un sorteo es 1/100. ¿Qué pasa si un jugador participa en 100 sorteos de este tipo? Una creencia errónea muy extendida entre los jugadores de lotería es que si juegan en tantos sorteos como números tiene la lotería, tienen la seguridad de ganar. Y por eso entre más jueguen, más se acercan a la certeza de ganar. La triste realidad para los jugadores, es que en cada sorteo su probabilidad de ganar es 1/100, pero jugar 100 veces no les garantiza la seguridad.
Un caso análogo más sencillo es con una moneda: la probabilidad de ganar un volado es 1/2, pero si jugamos dos veces, la probabilidad de ganar al menos una vez es sólo de 0.75.
Vamos a simular la situación de la lotería con ayuda de una tabla aleatoria de números que aparece al final. Vamos a suponer que se trata de una lotería con 10 números. Escoge un número cualquiera entre 0 y 9. Ahora busca tu número favorito en el primer renglón de la tabla de números aleatorios. Anota SI, junto al primer renglón si tu número aparece. Anota NO si tu número no aparece en ese renglón. El primer renglón representa simular la situación de que un jugador juega a la lotería (de diez números) diez veces. Continúa el proceso con los otros renglones. En cada renglón de la siguiente tabla anota SI, si tu número aparece en ese renglón. Anota NO si tu número no aparece en ese renglón.
¿Cuántos NO obtuviste? Número de NO's..... Número de SI's.....
Calcula la proporción # de NO's sobre el total de simulaciones (por ejemplo si el número favorito es el 3, la cantidad de NO's en las 100 simulaciones es de 38, la proporción de NO's es 0.38.

Vamos a simular la situación de la lotería con un programa de computación. Con el programa "LOTERIA" el jugador elige cuántas simulaciones, cuántos números tiene la lotería y escoge su número favorito. Por ejemplo digamos que hacemos 100 simulaciones, y cada simulación consiste en realizar 100 sorteos de 100 números. En cada sorteo la computadora selecciona al azar un número entre 1 y 100. La computadora repite el sorteo 100 veces y nos dice "Lotería" si el jugador ganó en alguno de los sorteos. De lo contrario, nos dice "NO" si no ganamos en ninguno de los 100 sorteos.

```
REM LOTERIA
REM SIMULA M SECUENCIAS DE N LOTERIAS DE N NUMEROS
PRINT "CUANTAS SIMULACIONES"
INPUT M
PRINT "CUANTOS NUMEROS TIENE LA LOTERIA"
INPUT N
```

```
PRINT "ESCOGE TU NUMERO FAVORITO ENTRE 1 Y";N
INPUT F
RANDOMIZE
FOR X = 1 TO M
LET S1 = 0
FOR Y = 1 TO N
LET R = 1 + INT(N*RND)
IF R = F THEN LET S1 = S + 1
NEXT Y
IF S1 > 0 THEN PRINT X; "LOTERIA",
IF S1 = 0 THEN PRINT X; "NO",
IF S1 = 0 THEN LET L = L + 1
NEXT X
PRINT "PROPORCION DE NO'S"; L/M
END
```

Corre el programa "Lotería" ¿Cuántas veces obtuviste el mensaje de lotería? El número de veces que obtuvimos Lotería sobre el número total de secuencias de 100 sorteos es una aproximación a la probabilidad de ganar la lotería de 100 números participando en 100 sorteos.

Tabla 1 Resultado de correr el programa Lotería
(100 secuencias de jugar a la lotería de 100 números 100 veces)

CUANTAS SIMULACIONES ?100
CUANTOS NUMEROS TIENE LA LOTERIA ?100
ESCOGE TU NUMERO FAVORITO ENTRE 1 Y 100 ?57

1 NO	2 LOTERIA	3 LOTERIA	4 LOTERIA	5 LOTERIA
6 LOTERIA	7 LOTERIA	8 NO	9 NO	10 LOTERIA
11 LOTERIA	12 LOTERIA	13 LOTERIA	14 LOTERIA	15 LOTERIA
16 LOTERIA	17 LOTERIA	18 NO	19 LOTERIA	20 LOTERIA
21 LOTERIA	22 LOTERIA	23 LOTERIA	24 NO	25 NO
26 NO	27 LOTERIA	28 NO	29 NO	30 NO
31 NO	32 LOTERIA	33 LOTERIA	34 LOTERIA	35 LOTERIA
36 LOTERIA	37 LOTERIA	38 NO	39 LOTERIA	40 LOTERIA
41 NO	42 LOTERIA	43 LOTERIA	44 LOTERIA	45 LOTERIA
46 NO	47 LOTERIA	48 NO	49 LOTERIA	50 LOTERIA
51 NO	52 LOTERIA	53 LOTERIA	54 NO	55 LOTERIA
56 NO	57 NO	58 NO	59 LOTERIA	60 LOTERIA
61 NO	62 NO	63 LOTERIA	64 LOTERIA	65 NO
66 NO	67 LOTERIA	68 LOTERIA	69 LOTERIA	70 NO
71 LOTERIA	72 LOTERIA	73 LOTERIA	74 LOTERIA	75 NO
76 NO	77 NO	78 LOTERIA	79 NO	80 LOTERIA
81 NO	82 LOTERIA	83 LOTERIA	84 LOTERIA	85 NO
86 LOTERIA	87 NO	88 LOTERIA	89 LOTERIA	90 LOTERIA
91 NO	92 LOTERIA	93 NO	94 LOTERIA	95 LOTERIA
96 NO	97 LOTERIA	98 LOTERIA	99 LOTERIA	100 LOTERIA

PROPORCION DE NO'S .35

Podemos aumentar el número de simulaciones. Podemos correr el programa Lotería, para hacer 1000 simulaciones, donde cada simulación es jugar en 100 sorteos de una lotería con 100 números. Esto nos dará una mejor aproximación a la probabilidad de ganar la lotería de 100 números participando en 100 sorteos.

Si aumentamos el número de boletos (de números posibles) por ejemplo a 10,000, ¿cuál será la probabilidad de ganar si un jugador juega en 10,000 sorteos? Podemos correr el programa "Lotería" para simular el experimento, sólo que ahora se llevará mucho más tiempo. Mientras, o en vez de esperar, podemos analizar otra forma de obtener la probabilidad.
Como la probabilidad de ganar un sorteo es 1/10,000, la probabilidad de NO ganar es 0.9999.
Si un jugador participa en 2 sorteos, la probabilidad de que no gane en ninguno de los dos sorteos es 0.9999×0.9999 ó 0.9999^2; si participa en 3 sorteos la probabilidad de que no gane en ninguno de los 3 sorteos es $.9999^3$ Si participa en 10,000 sorteos la probabilidad de que no gane en ninguno de los sorteos es $0.9999^{10,0000}$. Usa tu calculadora científica para calcular este número. El resultado es 0.367861046... Es decir la probabilidad de ganar al menos un sorteo es 0.632...

El número 0.367861046... es un número muy interesante. Usa la tecla 1/x para calcular el inverso de este número. El resultado es 2.718... que es muy parecido al número **e** = 2.718281828... que es la base de los logaritmos naturales. ¿Cómo fue a aparecer este número en este contexto?
Recordemos que

$$\mathbf{e} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

La expresión que nosotros estamos calculando es $(1 - 1/10000)^{10000}$ o en general, para una lotería de n números $(1 - 1/n)^n$. El límite de esta expresión cuando $n \to \infty$ es e^{-1} ó $1/e$. Para ver esto último, multiplica

$$\left(1 - \frac{1}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{n}} \times \left(1 + \frac{1}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{n}} = \left(1 - \frac{1}{\mathbf{n}^2}\right)^{\mathbf{n}} =$$

$$= 1 - \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n}^2} + \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}-1)}{2!\mathbf{n}^4} - \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}-2)}{3!\mathbf{n}^6} + \ldots + \frac{(-1)^{\mathbf{n}}\,\mathbf{n}(\mathbf{n}-1)(\mathbf{n}-2)\ldots 1}{\mathbf{n}!\mathbf{n}^{2\mathbf{n}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\mathbf{n}} + \left(1 - \frac{1}{\mathbf{n}}\right)\frac{1}{2!\mathbf{n}^2} - \left(1 - \frac{1}{\mathbf{n}}\right)\left(1 - \frac{2}{\mathbf{n}}\right)\frac{1}{3!\mathbf{n}^3} + \ldots + (1)^{\mathbf{n}}$$

$$\cdot\left(1 - \frac{1}{\mathbf{n}}\right)\left(1 - \frac{2}{\mathbf{n}}\right)\ldots\left(1 - \frac{\mathbf{n}-1}{\mathbf{n}}\right)\frac{1}{\mathbf{n}!\mathbf{n}^{\mathbf{n}}}$$

De aquí vemos que la distancia de $(1 + 1/n)^n \times (1 - 1/n)^n$ a 1 es menor que $(1/n)$, por lo tanto, el límite de producto es 1.
Por lo tanto $\lim_{n \to \infty} (1 - 1/n) = 1/e$

Anexo

El siguiente programa en TrueBASIC sirvió para generar la tabla de números aleatorios

```
REM TABLA ALEATORIA
REM 50 RENGLONES DE 10 NUMEROS ENTRE 0 Y 9
RANDOMIZE
FOR N = 1 TO 50
FOR M - 1 TO 10
LET R = INT(10*RND)
NEXT M
PRINT
NEXT N
END
```

Tabla de números aleatorios

1	2	0	9	5	8	9	5	1	1
7	8	0	2	7	4	5	2	9	7
3	7	0	4	3	5	6	3	7	8
4	6	2	4	1	5	5	4	6	5
5	9	3	6	8	0	8	4	2	0
5	3	9	4	4	9	8	5	8	6
8	9	7	1	9	3	4	0	4	3
2	0	2	6	5	2	6	7	8	1
8	3	3	0	7	6	3	4	4	2
9	4	8	7	6	9	2	2	8	3
2	0	1	9	7	4	8	4	8	1
4	1	9	8	5	2	9	0	6	9
3	8	9	6	9	0	2	8	0	7
9	6	4	0	8	4	2	0	5	6
7	2	2	6	1	3	7	6	1	1
3	9	7	1	1	0	2	6	2	2
8	5	9	7	2	4	2	6	6	8
3	4	9	5	9	7	5	8	3	4
4	5	8	0	3	4	0	3	9	0
7	7	8	2	6	5	9	0	1	2
1	2	5	2	0	9	8	7	0	3
2	4	3	5	6	6	0	1	7	9
5	3	0	1	0	5	4	4	3	9
8	5	7	2	4	3	0	8	6	5
0	5	4	2	5	7	7	5	8	2
2	5	2	3	7	1	8	6	8	4
6	6	9	0	5	8	8	8	5	7
9	9	6	6	5	6	4	9	9	9
0	4	8	8	7	1	9	4	4	8
3	4	6	9	8	9	2	1	9	4
5	2	4	6	0	1	0	0	3	1
5	8	9	7	3	3	7	0	3	1
2	5	2	3	5	2	6	4	5	5
5	5	4	9	1	8	1	5	0	5
3	8	8	3	7	5	9	0	8	4
7	0	5	8	3	5	1	8	1	9
4	0	7	6	0	5	1	4	4	3
9	3	6	5	7	5	0	7	2	1
5	0	1	6	9	0	9	7	2	5
8	0	8	8	2	9	4	1	9	7
0	9	9	1	0	0	0	7	4	7
5	3	1	7	0	8	1	1	7	8
4	1	1	0	0	9	3	3	2	0
3	9	7	6	3	6	5	2	0	3
8	2	8	5	1	6	8	1	1	4
2	2	3	7	1	6	3	5	8	8
4	5	2	3	1	9	4	3	8	4
1	5	7	6	0	0	3	0	5	5

Alfinio Flores

San Diego State University