

Elaboración de una Guía de Situaciones-Problemas sobre Variable Aleatoria y sus Aplicaciones a partir del Currículo Escolar Chileno

Construction of a Guide of Problems-Situations about Random Variable and their Applications according to the Chilean School Curriculum

Valeria Bizet Leyton,¹ Elena Molina-Portillo²
Felipe Ruz,³ José Miguel Contreras García⁴

Resumen: Esta investigación tiene por objetivo proponer una guía que integre las situaciones-problemas relativas a la comprensión de variable aleatoria y sus aplicaciones en distribuciones de probabilidad promovidos por el currículo escolar chileno, fundamentada en las ideas de Transposición Didáctica y objetos matemáticos primarios del EOS (Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos). Primero, por medio del análisis de contenido a lineamientos curriculares chilenos e internacionales, fue creada la Guía de Situaciones-Problemas sobre Variable Aleatoria y sus Aplicaciones en Distribuciones de Probabilidad según el Currículo Escolar Chileno (GSP-VADP). Posteriormente, a partir de la literatura ha sido seleccionado un conjunto inicial de ítems representantes de las situaciones-problemas que componen la guía, y luego a

Fecha de recepción: 9 de mayo de 2021. **Fecha de aceptación:** 10 de febrero de 2023.

¹ Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, España, valeriabizet@gmail.com, orcid.org/0000-0002-5995-1543.

² Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, España, elemo@ugr.es, orcid.org/0000-0002-9955-3080.

³ Instituto de Estadística, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, felipe.ruz.a@pucv.cl, orcid.org/0000-0003-4050-728X.

⁴ Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, España, jmcontreras@ugr.es, orcid.org/0000-0001-6821-0563.

través de un juicio de expertos fue identificado el conjunto final. Los resultados muestran que la GSP-VADP está constituida por 34 situaciones-problemas, de aquellas emergen los restantes objetos matemáticos primarios. Esta herramienta es viable utilizarla para identificar ítems representantes de sus situaciones-problemas por medio de juicio de expertos, debido a que el conjunto final de ítems obtuvo un coeficiente de validez y concordancia bueno (0,86).

Palabras clave: *Variable Aleatoria. Distribuciones de Probabilidad. Situaciones-Problemas. Transposición Didáctica. Currículo Escolar.*

Abstract: This research has the aim of proposing a guide that integrate the problems-situations regarding the understanding of random variable and their applications in probability distributions promoted by the Chilean School Curriculum, based on the ideas of Didactic Transposition and OSA's primary mathematical objects (Ontosemiotic Approach to Mathematical Cognition and Instruction). First, through the content analysis to Chilean and international curricular documents, the Guide of Problems-Situations about Random Variable and their Applications in Probability Distributions according to the School Chilean Curriculum (GPS-RVPD) was created. Subsequently, from the literature has been selected an initial item group that is a representation of the problems-situations that compose the guide, and then through an expert judgment the final group was identified. The results show that the GPS-RVPD is constituted by 34 problems-situations, from which emerge the rest primary mathematical objects. This tool is feasible to use for identifying items representing their problems-situations, through expert judgment, this is because the final item group obtained a good validity and concordance coefficient (0,86).

Keywords: *Random Variable. Probability Distribution. Problems-Situations. Didactic Transposition. School Curriculum.*

1. INTRODUCCIÓN

La variable aleatoria y las distribuciones de probabilidad son tópicos esenciales en la educación estocástica dada su importancia en la teoría de la probabilidad y en la práctica estadística (Heitele, 1975; Batanero, 2004). Por esta razón se les da un lugar importante a estos temas en el currículo de Chile (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2015; MINEDUC, 2019a) y en el currículo de la mayoría de países, por ejemplo, el de Estados Unidos (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; National Governors Association Center for Best Practices [NGACBP] y Council of Chief State School Officers [CCSSO], 2010).

En las investigaciones que tienen como objeto de estudio los libros de texto de probabilidad y estadística, se ha constatado la escasez de situaciones-problemas sobre el tema de variable aleatoria y distribuciones (Ortiz, 2002, Valverde, 2017). Por otro lado, a pesar de que la variable aleatoria es inseparable de su distribución de probabilidad (Ruiz, 2013), hemos notado que la literatura previa ha sido persistente en reportar deficiencias en los conocimientos utilizados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la distribución binomial a nivel escolar (Sánchez y Landín, 2014), la variable aleatoria (Ruiz, 2006) o la distribución normal en el ámbito universitario (Tauber, 2001).

Por ello, identificamos una problemática vigente en torno a la carencia de herramientas que permitan valorar de manera articulada y simultánea la comprensión de la variable aleatoria y sus aplicaciones en las distribuciones de probabilidad binomial y normal. Lo anterior se agudiza frente al inminente tratamiento de este contenido durante la transición de egreso de la educación escolar e inicio de la educación superior, que se espera sea coherente con los lineamientos curriculares actuales. Por tanto, en este trabajo nos proponemos abordar la problemática descrita previamente, para lo cual se establece el objetivo de proponer una guía que integre las situaciones-problemas relativas a la comprensión de variable aleatoria y sus aplicaciones en distribuciones de probabilidad, promovidas por el currículo escolar chileno, donde las situaciones-problemas hacen referencia a tareas, actividades o ejercicios que originan la actividad matemática (Godino, 2002).

2. MARCO CONCEPTUAL

La investigación se fundamenta en la noción de transposición didáctica, entendida como el cambio realizado al conocimiento científico (saber sabio) para poder

ser enseñado (Chevallard, 1980). Dentro de esta se distinguen dos tipos (Chevallard, 1991): la transposición didáctica externa, que corresponde a la transformación realizada del conocimiento científico (saber sabio) al contenido expuesto en el currículo escolar (saber a enseñar); transposición interna, que hace referencia al cambio del contenido presente en los lineamientos curriculares (saber a enseñar) en una forma de conocimiento que sea accesible a los estudiantes (saber enseñado).

Además, en la transposición didáctica intervienen agentes, tales como (Chevallard, 1991): (i) expertos, vigilan en el proceso de transformación que el saber enseñado no sea una distorsión del saber sabio; (ii) documentos curriculares, los cuales exponen los contenidos de referencia sobre los que debe actuar el profesor; (iii) profesor, quien es uno de los responsables del proceso de transposición didáctica y; (iv) estudiantes, quienes son los receptores de aquel producto.

También este estudio se sustenta en elementos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino *et al.*, 2007), teoría que propone que el origen de la actividad matemática son las situaciones-problemas, es decir, tareas, actividades o ejercicios (Godino, 2002), y para su resolución se realizan determinadas prácticas matemáticas. Aquellas prácticas son específicas actuaciones y expresiones verbales o gráficas que pueden ser compartidas en una institución (llamado significado institucional) o realizadas por una persona (denominado significado personal) para resolver una tarea o comunicar su solución (Godino, 1994).

En el EOS los objetos corresponden a todo aquello a lo que se hace referencia en la práctica matemática, por lo que según la función que cumplan es posible clasificarlos en la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios (Godino, 2002): a) situaciones-problemas (S-P), tareas, actividades o ejercicios que promueven la actividad matemática; b) lenguaje (L), términos matemáticos en sus diversos registros de representación (verbal, simbólico, tabular y gráfico) utilizados para enunciar o resolver tareas; c) conceptos (C), descripciones o definiciones relacionadas a un objeto matemático, aplicadas en la resolución de actividades; d) proposiciones (PP), características o propiedades de conceptos, usadas en solucionar tareas; e) procedimientos (P), algoritmos, técnicas de cálculos u operaciones desarrollados para responder actividades; y f) argumentos (A), enunciados empleados para aprobar o justificar proposiciones y procedimientos, o la respuesta a tareas. Así, un conjunto de situaciones-problemas vinculadas recíprocamente, que comparten sus representaciones, procesos o soluciones similares constituyen un campo de problema (C-P) (Godino, 1999).

De esta manera, el EOS se ha utilizado en la determinación de los campos de problema que estructuran la guía diseñada, a partir de la indagación de investigaciones previas en torno a la epistemología y significado institucional de los temas en cuestión. La noción de transposición didáctica interna fue empleada en el análisis de documentos curriculares tanto chilenos como internacionales y proceso de identificación, clasificación y reducción de unidades de análisis. También el Enfoque Ontosemiótico se ha usado en el proceso de inferencia de situaciones-problemas a partir de las unidades de análisis, además en la selección desde la literatura de tareas, actividades o ejercicios que representan aquellas situaciones-problemas que componen la guía.

3. METODOLOGÍA

El presente trabajo es una investigación documental, la cual tiene como propósito comprender la realidad social y producir conocimiento mediante el análisis de diversos documentos (Hoyos, 2010). También, este trabajo posee datos empíricos obtenidos de las opiniones de expertos iberoamericanos que validaron la guía diseñada.

3.1 CONTEXTO Y MATERIALES DE LA INVESTIGACIÓN

El contexto de esta investigación ha sido la educación escolar chilena, por consiguiente, en primer lugar, se indagó el principal documento curricular del país propuesto por el Ministerio de Educación, denominado Bases Curriculares (MINEDUC, 2015; MINEDUC, 2019a) únicamente las destinadas a la educación secundaria (grado 9 hasta 12). Además, se incluyó el análisis a los Programas de estudio de Matemática (MINEDUC, 2016; MINEDUC, 2019b; MINEDUC 2019c), pues es un instrumento que hace posible la ejecución de las Bases Curriculares. En estos documentos fueron estudiados los Objetivos de Aprendizaje (O.A.) e Indicadores de Evaluación (I. Ev.) sobre tópicos estocásticos.

La elaboración de las Bases Curriculares, se sustentan en diversas fuentes, una de ellas es la revisión de lineamientos curriculares internacionales principalmente de países pertenecientes a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (MINEDUC, 2009). En consecuencia, en un segundo momento se analizaron los siguientes documentos:

- Los estándares americanos como los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000) y los Estándares Estatales Básico Comunes para las Matemáticas (NGACBP y CCSSO, 2010), dirigidos a la educación preescolar y escolar (grados K al 12). En el primero de ellos se han estudiado las Expectativas de Aprendizaje (E.A.) del estándar de Análisis de Datos y Probabilidad, mientras que en el segundo los Dominios (D) y Estándares (E) pertenecientes a la categoría conceptual de Estadística y Probabilidad.
- Los Lineamientos para la Evaluación y Enseñanza en Educación Estadística, conocido como proyecto GAISE (Franklin *et al.*, 2005) que abarca desde la educación preescolar a grado 12, pues es un documento de referencia internacional para afrontar los desafíos de la educación estadística a nivel escolar. En él fue estudiado el apartado sobre el rol de la probabilidad en estadística.

La investigación se realizó bajo un enfoque mixto (Hernández *et al.*, 2014) y su desarrollo se organizó en tres fases, cada una es detalla a continuación.

3.2 FASE 1: CONSTRUCCIÓN DE GUÍA DE SITUACIONES-PROBLEMAS

En la primera fase de la investigación, se empleó la técnica de análisis de contenido (Krippendorff, 1990). Esta es una técnica para analizar de forma sistemática documentos, con el propósito de realizar inferencia reproducible e identificar en sus fragmentos la presencia o ausencia de alguna característica del tema. Por ello se ha utilizado en la identificación y clasificación de normativas vigentes en torno a la enseñanza-aprendizaje de la variable aleatoria y sus aplicaciones en algunas distribuciones de probabilidad, organizadas en categorías, según los ocho campos de problema abajo definidos.

Aquellos campos de problema fueron establecidos en un proceso cíclico e inductivo por medio del análisis a la epistemología de la variable aleatoria (Amrani y Zaki, 2015; Dinges, 2005; Ruiz, 2013). También este aspecto ha sido indagado en la distribución binomial (García-García *et al.*, 2022; Vilca, 2015) y distribución normal (Stahl 2006; Tauber, 2001). Así se obtuvieron los siguientes:

1. Identificar la variable aleatoria como una función presente en el contexto probabilístico.
2. Reconocer la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta (función de cuantía) como una herramienta que permite ver la variación aleatoria.
3. Reconocer la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua (función de densidad) como una herramienta que permite ver la variación aleatoria.
4. Establecer la función de distribución de una variable aleatoria discreta.
5. Utilizar parámetros vinculados a la variable aleatoria para resumir la distribución de sus probabilidades.
6. La distribución binomial como un modelo probabilístico que describe un fenómeno de la vida real.
7. La distribución normal como un modelo probabilístico que describe un fenómeno de la vida real.
8. Aproximar distribuciones de variables aleatorias discretas con un número grande de valores.

Las Unidades de Análisis (U.A.) fueron definidas a partir de la revisión de los documentos curriculares señalados y clasificadas en los campos de problema anteriores, para ello se emplearon letras minúsculas del alfabeto latino (a, b, c, ..., z). Luego por medio del método de Rivas (2014), las U.A. han sido comparadas y reducidas utilizando el comentario “contenida en”, debido a que algunas unidades estaban contenidas en otra o no entregaban nueva información, todo ello con el propósito de lograr representar su información en una U.A. final. Un ejemplo de este procedimiento se expone en la tabla 1.

Tabla 1. Ejemplo del proceso de identificación, clasificación y reducción de las Unidades de Análisis

Campo de problema	Unidades de Análisis
2. Reconocer la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta (o función de cuantía) como una herramienta que permite ver la variación aleatoria	<p data-bbox="450 343 1018 397">MINEDUC (2015, p. 124): OA 10 Mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas</p> <ul style="list-style-type: none"> <li data-bbox="473 403 940 428">a. Calculando su probabilidad. <i>UA a contenida en h</i> <li data-bbox="473 433 958 459">b. Graficando sus distribuciones. <i>UA b contenida en d</i> <hr/> <p data-bbox="450 476 727 502">MINEDUC (2016, p. 154): I. Ev.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li data-bbox="473 507 992 561">c. Determinan las probabilidades de una variable aleatoria aplicando la terminología $P(X = xi)$. <i>UA c contenida en h</i> <li data-bbox="473 567 1024 621">d. Elaboran tablas y gráficos para representar la distribución de una variable aleatoria finita. <i>UA d</i> <p data-bbox="450 638 687 664">NCTM (2000, p. 324): E. A.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li data-bbox="473 669 1024 753">e. Comprender los conceptos de espacio muestral y distribución de probabilidad y construir espacios muestrales y distribuciones en casos simples. <i>UA e contenida en h</i> <li data-bbox="473 758 1024 813">f. Usar simulaciones para construir distribuciones de probabilidad empíricas. <i>UA f contenida en i</i> <p data-bbox="450 830 982 884">NGACBP y CCSSO (2010, p.82-83): D. Usar la probabilidad para tomar decisiones</p> <ul style="list-style-type: none"> <li data-bbox="473 889 1012 973">g. E.1: Graficar la distribución de probabilidad correspondiente utilizando el mismo gráfico como para distribuciones de datos. <i>UA g contenida en d</i> <li data-bbox="473 978 1020 1062">h. E.3: Desarrollar una distribución de probabilidad para una variable aleatoria definida en un espacio muestral en el que se puede calcular las probabilidades teóricas. <i>UA h</i> <li data-bbox="473 1067 1020 1151">i. E.4: Desarrollar una distribución de probabilidad para una variable aleatoria definida en un espacio muestral en el que las probabilidades se asignan empíricamente. <i>UA i</i> <hr/> <p data-bbox="450 1168 1004 1193">Franklin <i>et al.</i> (2005): El rol de la probabilidad en estadística</p> <ul style="list-style-type: none"> <li data-bbox="473 1199 1024 1253">j. Se requiere la comprensión de conceptos probabilísticos, como las distribuciones de probabilidad. <i>UA j contenida en h</i>

Posteriormente, a partir de las Unidades de Análisis final se procedió a inferir situaciones-problemas (S-P) alusivas a la comprensión de la variable aleatoria y distribuciones de probabilidad, donde se presentaron los siguientes casos: (i) una U.A. final originó una única situación-problema; (ii) una U.A. final originó dos o tres situaciones-problemas, ejemplo de ello se muestra en la tabla 2.

Tabla 2. Ejemplo del proceso de inferencia de situaciones-problemas

Unidades de Análisis final	Situaciones-Problemas
<i>U.A. final i.</i> Desarrollar una distribución de probabilidad para una variable aleatoria definida en un espacio muestral en el que las probabilidades se asignan empíricamente (NGACBP; CCSSO, 2010, p. 82-83)	E 2.1 Determinar las probabilidades asociada a los valores de una variable aleatoria discreta desde un enfoque frecuencial
<i>U.A. final h.</i> Desarrollar una distribución de probabilidad para una variable aleatoria definida en un espacio muestral en el que se puede calcular las probabilidades teóricas (NGACBP; CCSSO, 2010, p. 82-83)	E 2.2 Determinar las probabilidades asociada a los valores de una variable aleatoria discreta desde un enfoque clásico
	E 2.3 Definir la función de probabilidad de una variable aleatoria utilizando la terminología $P(X = x_i)$.
<i>U.A. final d.</i> Elaboran tablas y gráficos para representar la distribución de una variable aleatoria finita (MINEDUC, 2016, p. 154)	E 2.4 Construir una tabla para representar la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta
	E 2.5 Construir un gráfico de barras para representar la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta

Finalmente, como resultado de esta fase se obtuvo un conjunto de 34 situaciones-problemas, que sintetizaron los objetivos de aprendizaje e indicadores de evaluación en torno a la comprensión de variable aleatoria y sus aplicaciones en el modelo binomial y normal, presentes en documentos curriculares escolares. En su conjunto conformaron la Guía de Situaciones-Problemas sobre Variable Aleatoria y sus Aplicaciones en Distribuciones de Probabilidad según el Currículo Escolar Chileno (GSP-VADP).

3.3 FASE 2: SELECCIÓN DE UN CONJUNTO INICIAL DE ÍTEMS A PARTIR DE LA LITERATURA

En esta fase se seleccionó de la literatura actividades, tareas o ejercicios concretos, representantes de las situaciones-problemas que componen la guía sobre variable aleatoria y sus aplicaciones en distribuciones de probabilidad. La búsqueda se realizó en estudios, tanto donde se hayan utilizado cuestionarios para evaluar la comprensión de la variable aleatoria y/o distribución binomial o normal, como en aquellos que se presentan propuestas de enseñanza en torno a los conceptos en cuestión. En el caso que, en las indagaciones no se encontrara una pregunta pertinente para valorar una situación-problema, se procedió inicialmente a buscar una interrogante en libros de textos escolares de matemática (chilenos) y en última instancia esta fue creada según el contexto de algún enunciado propuesto para evaluar otra situación-problema.

Para cada situación-problema que integra la guía, fue preparado un trío de ítems diferentes, aunque en algunos casos un ítem valoró más de una situación-problema. De esta manera se obtuvo un primer conjunto constituido por 91 ítems, la mayor parte fueron preguntas de tipo abierta, debido a que entregan información más detallada (Hernández *et al.*, 2014).

3.4 FASE 3: SELECCIÓN DE UN CONJUNTO FINAL DE ÍTEM A PARTIR DE LA VALIDEZ DE CONTENIDO POR JUICIO DE EXPERTOS

En este momento se procedió a la validez de contenido de los ítems por medio de la valoración por juicio de experto, su evaluación permitió seleccionar de cada trío propuesto al ítem mejor calificado para el conjunto final. Participaron seis expertos de diferentes nacionalidades (Argentina, Chile, España, México y Portugal), dado que se recomienda considerar entre cinco a diez (Barraza, 2007), todos ellos doctores en educación matemática o psicología con una reconocida experiencia en investigación en el área de didáctica de la estadística. A cada uno de los expertos se les envió, por medio de correo electrónico, una invitación en la cual se especificó el contexto de la investigación y objetivo del instrumento y se solicitó su colaboración para valorar: el grado en que cada ítem es adecuado para evaluar la situación-problema donde fue clasificado; elegir aquel ítem que considera que evalúa de mejor manera la situación-problema, entre los tres que se proponen por cada una. Para ello fue propuesta una escala Likert, de 1 (nada relevante) a 5 (muy relevante),

sumado a un apartado de sugerencias donde pudieran recomendar mejoras en la redacción de los ítems.

Posteriormente se realizó un análisis descriptivo de los resultados por medio de indicadores estadísticos sobre el centro (media: \bar{X} y mediana: M_e) y la dispersión (desviación típica) de las valoraciones de los expertos. Así de los tres ítems propuesto para cada situación-problema, ha sido seleccionado aquel con media más alta. Para los casos donde existieron dos ítems con igual media, fue elegido aquel que tiene una mediana con mayor valor, mientras que, si hubo dos ítems con igual media y mediana, fue seleccionado el con menor desviación típica.

Finalmente, para analizar el grado en que cada ítem seleccionado se ajustó a una situación-problema, los resultados también fueron examinados a través del Coeficiente de Validez de Contenido (CVC) de Hernández-Nieto (2002) que permite valorar el grado de acuerdo de los expertos respecto a cada uno de los diferentes ítems y al instrumento en general. Para interpretar el CVC de un ítem se tuvo en cuenta la siguiente escala: (i) ítem inaceptable ($CVC < 0,60$); ítem deficiente ($0,60 \leq CVC \leq 0,70$); (iii) ítem adecuado ($0,70 < CVC \leq 0,80$); (iv) ítem bueno ($0,80 < CVC \leq 0,90$); (v) ítem excelente ($0,90 < CVC$). De esta manera se consideraron aceptables los ítems con un coeficiente de validez y concordancia mayor que 0,70.

4. RESULTADOS

4.1 GUÍA DE SITUACIONES-PROBLEMAS

La tabla 3 presenta la Guía de Situaciones-Problemas sobre Variable Aleatoria y sus Aplicaciones en Distribuciones de Probabilidad según el Currículo Escolar Chileno (GSP-VADP). Como se puede apreciar el primer campo de problema, constituido por cuatro situaciones-problemas, aborda el reconocimiento de la variable aleatoria ligada a un fenómeno aleatorio, dado que es el primer paso para estudiar distribuciones de probabilidad. El segundo y tercer campo de problema, compuesto por cinco y tres situaciones-problemas respectivamente, tiene relación con el establecimiento de la función de probabilidad: en una primera instancia para la variable aleatoria de tipo discreta que permite determinar la probabilidad que esta tome valores aislados; en un segundo momento para la variable aleatoria de tipo continua que, hace posible calcular la probabilidad que esta tome un valor en un subconjunto de números reales. El cuarto

campo de problema integrado por tres situaciones-problemas, hace referencia a estudiar la función de distribución de una variable aleatoria discreta, dado que son tópicos inseparables y esta función permite representar la situación aleatoria en que ambas están involucradas. El quinto campo de problema, conformado por seis situaciones-problemas, aborda un aspecto fundamental de la variable aleatoria como son sus parámetros, que están mayormente relacionados a su función de probabilidad.

El sexto y séptimo campo de problema, constituidos por cinco y seis situaciones-problemas respectivamente, trabajan la aplicación de la variable aleatoria en los modelos de probabilidad, para las de tipo discreta (modelo binomial) y continuas (modelo normal) correspondientemente. El octavo y último campo de problema, constituido por dos situaciones-problemas, está relacionado a la aproximación de la distribución binomial por la normal.

Por tanto, partir de las 34 situaciones-problemas identificadas emergen los restantes tipos de objetos matemáticos (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), y que en su conjunto reflejan el significado institucional de la variable aleatoria y sus aplicaciones en distribuciones de probabilidad en el contexto escolar chileno.

Tabla 3. GSP-VADP

Campos de problema	Situaciones-Problemas
1. Identificar la variable aleatoria como una función presente en el contexto probabilístico	1.1 Diferenciar entre variables deterministas y variables aleatorias 1.2 Definir variables aleatorias finitas en experimentos aleatorios 1.3 Identificar dominio de una variable aleatoria finita 1.4 Identificar recorrido o valores de una variable aleatoria finita
2. Reconocer la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta (o función de cuantía) como una herramienta que permite ver la variación aleatoria	2.1 Determinar las probabilidades asociadas a los valores de una variable aleatoria discreta desde un enfoque frecuencial 2.2 Determinar las probabilidades asociadas a los valores de una variable aleatoria discreta desde un enfoque clásico 2.3 Definir la función de probabilidad de una variable aleatoria utilizando la terminología $P(X = x_i)$ 2.4 Construir una tabla para representar la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta 2.5 Construir un gráfico de barras para representar la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta

3. Reconocer la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua (o función de densidad) como una herramienta que permite ver la variación aleatoria
 - 3.1 Construir gráfico de la función de probabilidad de una variable aleatoria continua
 - 3.2 Calcular algunas probabilidades asociadas a la variable aleatoria continua
 - 3.3 Determinar si la función dada es una función de probabilidad de una variable aleatoria continua
4. Establecer la función de distribución de una variable aleatoria discreta
 - 4.1 Determinar la probabilidad acumulada hasta algunos valores de la variable aleatoria discreta
 - 4.2 Definir la función de distribución (o función de probabilidad acumulada) de una variable aleatoria discreta
 - 4.3 Construir un gráfico para representar la función de distribución (o función de probabilidad acumulada) de una variable aleatoria discreta
5. Utilizar parámetros vinculados a la variable aleatoria para resumir la distribución de sus probabilidades
 - 5.1 Calcular la media o valor esperado de una variable aleatoria discreta
 - 5.2 Interpretar la media o valor esperado de una variable aleatoria discreta
 - 5.3 Calcular la varianza de una variable aleatoria discreta
 - 5.4 Calcular la desviación estándar de una variable aleatoria discreta
 - 5.5 Interpretar la desviación estándar de una variable aleatoria discreta
 - 5.6 Identificar la media y desviación estándar de una variable aleatoria continua
6. La distribución binomial como un modelo probabilístico que describe un fenómeno de la vida real
 - 6.1 Identificar situaciones que pueden modelizarse a través de la distribución binomial
 - 6.2 Determinar los parámetros asociados a la distribución binomial como n (número de ensayos), p (probabilidad de éxito) y q (probabilidad de fracaso)
 - 6.3 Calcular la media y/o desviación estándar de la distribución binomial
 - 6.4 Calcular probabilidades aplicando la función de probabilidad o función de distribución de la distribución binomial
 - 6.5 Calcular probabilidades asociadas a una distribución binomial empleando una herramienta tecnológica

- | | |
|--|--|
| 7. La distribución normal como un modelo probabilístico que describe un fenómeno de la vida real | 7.1 Identificar situaciones que pueden modelizarse a través de la distribución normal
7.2 Calcular la probabilidad en una distribución normal a través de la propiedad $\pm 3\sigma$
7.3 Calcular la probabilidad en una distribución normal empleando la tipificación
7.4 Describir la tendencia de los datos representados gráficamente empleando la aproximación de la binomial por la normal
7.5 Evaluar la veracidad de afirmaciones utilizando el concepto de distribución normal
7.6 Calcular probabilidades asociadas a una distribución normal empleando una herramienta tecnológica |
| 8. Aproximar distribuciones de variables aleatorias discretas con un número grande de valores | 8.1 Calcular los parámetros asociados a la distribución normal como (media) y (desviación estándar)
8.2 Calcular probabilidades en el contexto de aproximación de la distribución binomial a la normal |

A continuación, se muestra la selección de cada ítem representante de una situación-problema a través de la valoración por juicio de expertos. Es importante mencionar que, en las fases de selección de ítems a partir de la literatura y elección según juicio de expertos, se han excluido dos situaciones-problemas (6.5 y 7.6), debido a que se proyecta que el conjunto final de ítems sea aplicado a estudiantes individualmente y en forma presencial o en línea. Además, en las fases señaladas se incluyeron ítems para valorar dos situaciones-problemas (6.1 y 7.1) fundamentadas en la alfabetización estadística en términos de Gal (2002), con el propósito de aportar con información sólida y empírica a la investigación de esta área.

4.2 ANÁLISIS DESCRIPTIVO DE LA VALIDEZ DE CONTENIDO POR JUICIO DE EXPERTOS

A los seis expertos participantes se les presentó un documento donde la primera sección contenía tres ítems para cada una de las 32 situaciones-problemas previamente identificadas. Su valoración hizo posible seleccionar de cada trío de ítems propuesto, aquel que fue más relevante para ellos (ítem sombreado), a través del mayor valor medio dado a cada uno. Por ejemplo, para la situación-problema 1.1 fueron propuestos los ítems 1, 2A y 3.1, por lo que ha sido seleccionado el ítem 1, cuya media es de 4,33 puntos. La tabla 4, muestra los siguientes casos presentados en la elección de ítems que componen la versión definitiva de esta sección:

- i. En tres situaciones-problemas (1.4, 6.2 y 7.4), un par de ítems fueron evaluados con la misma puntuación media, seleccionándose aquel con mayor mediana. En concreto, para la situación problema 1.4, los ítems 1 y 3.2C, poseen igual media (4 puntos), entonces fue seleccionado el ítem 3.2C, cuya mediana es 4,5 puntos.
- ii. En dos situaciones-problemas (5.2 y 7.1), un par de ítems han sido valorados con igual media y mediana, entonces fue elegido el que presenta menor desviación típica. En particular, para la situación-problema 5.2, los ítems 14.1A y 15C tienen misma media (4 puntos) y mediana (4 puntos), así fue elegido el ítem 15C cuya desviación típica es 0 punto.
- iii. En la situación-problema 4.2, los ítems 8A y 9A fueron calificados con igual media (4,683 puntos), mediana (4,7 puntos) y desviación típica (0,37 puntos). Por tanto, ha sido escogido el ítem 8A, ya que posee igual contexto que los ítems seleccionados para la situación-problema 4.1 y 4.3.

Tabla 4. Selección de ítems y resumen estadístico de puntuaciones de expertos a los ítems

Situación-Problema	Ítem	\bar{X}	M_e	Desv. típ.	Situación-Problema	Ítem	\bar{X}	M_e	Desv. típ.
1. 1	1	4,33	5	1,21	5.2	13.1B	3,8	4,4	1,47
	2A	3,83	4	1,17		14.1A	4	4	0,89
	3.1	2,33	2	1,51		15C	4	4	0
1. 2	1	4,33	4,5	0,82	5.3	13.2A	4	4	0,89
	2C	3,83	4	1,17		14.2A	3,67	4	1,03
	3.2 B	4	4,5	1,55		15B	4,5	4,5	0,55
1.3	1	3,17	3	1,17	5.4	13.2A	4	4	0,89
	2B	4,17	4,5	0,98		14.2A	4,33	4,5	0,82
	3.2 A y C	4	4	1,1		15B	4,17	4	0,75
1.4	1	4	4	0,89	5.5	13.2B	3,83	4	1,17
	2B	3,67	3,5	1,21		14.2B	3,67	3,5	1,21
	3.2 C	4	4,5	1,27		15C	4	4	1,1
2.1	4.2	3	2,5	1,67	5.6	16	2,67	3	1,51
	5.1 A	3,83	4	1,17		17	3,33	4	1,51
	6.2	3,67	4	1,03		18	2	1	1,55
2.2	4.1 A	3,8	3,9	1,17	6.1	19.1	3,83	4	1,33
	5.1 B	3	3	1,1		20	4,17	4	0,75
	6.1 A	4	4	1,1		21	3,83	4	1,17
2.3	4.1 B	3	3	0,89	6.2	19.1	3,5	3,5	1,05
	5.2	3,83	4,5	1,47		20A, B, C y D	4,17	4,5	0,98
	6.1 B	4,17	4	0,75		21A y B	4,17	4	0,75
2.4	4.1 B	3,33	3,5	1,21	6.3	19.2A y B	4,17	4,5	1,17
	5.1 B	4,17	4	0,75		20E y F	4,5	5	0,84
	6.1 B	3,83	4	0,98		21C y D	4,6	4,8	0,49
2.5	4.1 C	4,17	4,5	0,98	6.4	19.1	4,17	4,5	1,17
	5.1 C	4,17	4,5	0,98		20B	4,33	4,5	0,82
	6.1 C	4,33	4,5	0,82		21B	4,5	4,5	0,55
3.1	10A	3,83	4	0,98	7.1	22A	4,17	4,5	1,17
	11A	3,5	3,5	1,38		23.1	4,17	4,5	0,98
	12.1 B	3,33	3,5	1,63		24	3	3,5	1,27
3.2	10C y D	3,67	4	0,52	7.2	22B y C	4	4,5	1,27
	11B	3,83	4	0,98		23.2	3	3	1,1
	12.2 y 12.3	3,67	4	1,37		24	3,5	3,5	1,38
3.3	10B	4	4	0,63	7.3	25	4,17	4	0,75
	11B	4,17	4	0,75		26	4,33	4,5	0,82
	12.1 A	4	4	1,1		27	4	4	1,1
4.1	7A	3,67	4,5	1,75	7.4	28	2,83	2,5	1,47
	8A	4	4	0,89		29	4,5	5	0,84
	9C	3,83	4	1,17		30	4,5	4,5	0,55

4.2	7B	4	4	0,89	7.5	31	3,17	3,5	0,98
	8A	4,683	4,7	0,37		32	3,83	4	0,75
	9A	4,683	4,7	0,37		33	3,17	3	0,75
4.3	7B	3,83	4	1,17	8.1	34A	3,83	4	0,75
	8B	4,5	4,5	0,55		35A	4	4	0,63
	9B	4,33	4,5	0,82		36	3,67	3,5	0,82
5.1	13.1B	4,33	4,5	0,82	8.2	34B	4,17	4	0,75
	14.1 A y B	4,17	4	0,75		35B	4	4	0,89
	15A	3,67	4	1,03		36	3,83	3,5	0,98

Como resultado se puede apreciar que de los 32 ítems elegidos para la versión final de esta sección del documento: veinte de ellos fueron muy relevantes para los expertos, dado que cada uno fue calificado en promedio con más de 4 puntos; siete han sido relevantes pues, cada uno fue evaluado en promedio con 4 puntos; cinco fueron medianamente relevantes ya que, cada uno ha sido valorado en promedio con más de 3 puntos, pero menos que 4.

Además, según se expone en la tabla 4 los expertos han valorado positivamente las situaciones-problemas que componen cada campo de problema. Una evidencia de ello es que, en cada uno de los 32 ítems escogidos para la versión final de la primera sección del documento, su evaluación obtuvo una mediana igual o mayor a 4 puntos. Concretamente: en cuatro de estos ítems la mediana de sus puntuaciones es mayor a 4,5 puntos, es decir, la mitad de los expertos valoraron cada interrogante con 5 puntos a diferencia de los demás evaluadores que les asignaron 5 o menos puntuación; en 13 de ellos, las puntuaciones evidenciaron una mediana de 4,5 puntos, lo cual significa que tres jueces evaluaron a cada ítem con 5 puntos y los tres participantes restantes lo han hecho con 5 o menor valor; en 15 de esos, la mediana de sus puntuaciones es 4, es decir, tres de los jueces valoraron a estos ítems con 4 o 5 puntos y la otra mitad de los participantes les han asignado un valor igual o menor a 4.

Por tanto, para los expertos participantes, cada ítem seleccionado es representativo de la situación-problema en la cual han sido propuesto, además de ser relevante y coherente para evaluar la situación-problema consultada. También estos ítems representan las tareas, ejercicios y actividades que promueve el currículo escolar chileno para valorar la comprensión de la variable aleatoria y distribuciones binomial y normal.

Respecto a la segunda sección del documento presentado a los expertos, donde se abordan situaciones-problemas acerca de distribuciones de probabilidad fundamentadas en la alfabetización estadística, la tabla 5 contiene los

resultados sobre su valoración. En ella ha sido posible observar que se presentó el caso que una de las situaciones-problemas (6.1) obtuvo dos ítems calificados con igual media, mediana y desviación típica. Por tanto, ha sido escogido aquel, en que el estudiante debe poner en juego habilidades como evaluar e interpretar la información estadística presente en su enunciado, más que realizar procedimientos (algoritmos, operaciones, etcétera).

Tabla 5. Selección de ítems sobre alfabetización estadística y resumen estadístico de puntuaciones de expertos

Situación-Problema	Ítem	\bar{X}	M_e	Desv. típ.
6.1 Identificar situaciones que pueden modelizarse a través de la distribución binomial	37	4,5	5	0,84
	38	4	4	1,1
	39	4,5	5	0,84
7.1 Identificar situaciones que pueden modelizarse a través de la distribución normal	40	4,7	5	0,52
	41	4	4	1,1
	42	4	4	1,1

También la tabla 5 muestra que los dos ítems que fueron seleccionados para la versión definitiva de esta sección han sido evaluados por los participantes como muy relevantes, pues cada uno fue calificado en promedio con más de 4 puntos. Aún más, en aquellos ítems la mediana de sus puntuaciones es 5, lo cual significa que tres de los expertos asignaron a cada uno la máxima valoración (5) a diferencia de los otros tres que los calificaron con 5 o menos puntos.


De esta manera se obtuvo un conjunto final de 34 ítems que representan concretamente gran parte de las situaciones-problemas de la GSP-VADP, 32 de estos integran la primera sección de un documento, mientras que los restantes dos la segunda. En su resolución se manifiestan conceptos, lenguaje, procedimientos, propiedades y argumentos, que en conjunto caracterizan el significado institucional de la variable aleatoria y sus aplicaciones en las distribuciones de probabilidad a nivel escolar. La tabla 6 presenta información relativa a las fuentes bibliográficas de los 34 ítems, organizada según la situación-problema que valora cada uno.

Tabla 6. Fuentes bibliográficas del conjunto final de ítems

Situación-Problema	Ítem y Fuente	Situación-Problema	Ítem y Fuente
1.1	1.1 Fernández <i>et al.</i> (2013)	5.2	5.2c Elaboración propia
1.2	1.1 Fernández <i>et al.</i> (2013)	5.3	5.2b Osorio <i>et al.</i> (2019)
1.3	1.2 Flores <i>et al.</i> (2014)	5.4	5.2a Elaboración propia
1.4	1.3 Adaptación de Flores <i>et al.</i> (2014) y Salazar (2014)	5.5	5.2c Elaboración propia
2.1	2.1a Flores <i>et al.</i> (2014)	5.6	10.a Elaboración propia y posee información de Ramírez (2018)
2.2	2.2a Salazar (2014)	6.1	6 Alvarado y Retamal (2014) 9. Elaboración propia y posee información de Colomé (2015) *Alfabetización estadística
2.3	2.2b Salazar (2014)	6.2	6 Alvarado y Retamal (2014) y adaptación de Sánchez y Carrasco (2018)
2.4	2.1b Flores <i>et al.</i> (2014)	6.3	6.e y 6.f Elaboración propia
2.5	2.2c Elaboración propia	6.4	6.a, 6.b, 6.c y 6.d Alvarado y Retamal (2014) y adaptación de Sánchez y Carrasco (2018)
3.1	3.1 Muñoz <i>et al.</i> (2013)	7.1	7.1 Morales <i>et al.</i> (2008a) 10.b Elaboración propia y posee información de Ramírez (2018) *Alfabetización estadística
3.2	3.2b Muñoz <i>et al.</i> (2013)	7.2	7.2 Tauber (2001)
3.3	3.2a Adaptación de Muñoz <i>et al.</i> (2013)	7.3	7.3 González y Ojeda (2017)
4.1	4.a Elaboración propia	7.4	7.4 Adaptación de MINEDUC (2019c)
4.2	4.a Elaboración propia	7.5	7.5a Tauber (2001) y 7.5b Morales <i>et al.</i> (2008b)
4.3	4.b Chacón <i>et al.</i> (2018)	8.1	8.1 Norambuena <i>et al.</i> (2019)
5.1	5.1 Guerrero <i>et al.</i> (2016)	8.2	8.2 Alvarado y Batanero (2007)

En la tabla 7 es expuesto un ejemplo de ítems seleccionados para el conjunto final, los cuales representan las situaciones-problemas correspondientes al campo de problema dos. En este caso, es posible apreciar los elementos que consideraron significativos los expertos para elegir las situaciones-problemas relativas a la distribución de probabilidades de una variable aleatoria discreta. Respecto a la situación-problema 2.1 los expertos seleccionaron el ítem 2.1A. Por tanto, se puede reconocer que consideraron relevante el proponer una situación real y cercana a estudiantes, la cual admite una estrategia de resolución por tanteo, donde para entender y dar respuesta a la tarea planteada se pueden llevar a cabo en repetidas ocasiones el experimento aleatorio involucrado.

Tabla 7. Ejemplo de ítems seleccionados para su conjunto final

Campo de problema 2: Reconocer a la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta (o función de cuantía) como una herramienta que permite ver la variación aleatoria	Situación-Problema												
<p>2.1 (Flores, García y Sánchez, 2014) Llamaremos lanzamiento a la acción de lanzar tres monedas al aire al mismo tiempo (de preferencia de la misma denominación). Ahora imagínate que se realizan 1000 lanzamientos y en cada uno de ellos se observa la variable “número de caras que ocurren”.</p> <p>A) En la siguiente tabla anota en la fila de arriba, los posibles valores de la variable y en la fila de abajo, el número de veces (o frecuencia) que crees que ocurra cada valor:</p>	<p>2.1 Determinar las probabilidades asociada a los valores de una variable aleatoria discreta desde un enfoque frecuencial (apartado A).</p> <p>2.4 Construir una tabla para representar la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta (apartado B).</p>												
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20%;">Caras</td> <td style="width: 15%;"></td> <td style="width: 15%;"></td> <td style="width: 15%;"></td> <td style="width: 15%;"></td> <td style="width: 20%;">Total</td> </tr> <tr> <td>Frecuencia</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	Caras					Total	Frecuencia						
Caras					Total								
Frecuencia													
<p>B) Anota la probabilidad que asignas a la ocurrencia de cada valor de la variable:</p>													
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20%;">Caras</td> <td style="width: 10%;">0</td> <td style="width: 10%;">1</td> <td style="width: 10%;">2</td> <td style="width: 10%;">3</td> <td style="width: 20%;">Total</td> </tr> <tr> <td>Probabilidad</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	Caras	0	1	2	3	Total	Probabilidad						
Caras	0	1	2	3	Total								
Probabilidad													
<p>2.2 (Salazar, 2014) En un programa de televisión los concursantes hacen girar una flecha en una ruleta como en la figura y cada vez que la flecha se detiene en la zona de color rojo, se gana un premio y el concurso se trata de hacer girar la flecha 3 veces. En base a esta situación responde las siguientes preguntas:</p>	<p>2.2 Determinar las probabilidades asociada a los valores de una variable aleatoria discreta desde un enfoque clásico (apartado A).</p> <p>2.3 Definir la función de probabilidad de una variable aleatoria, utilizando la terminología $P(X = x_i)$. (apartado B).</p>												
													
<p>A) ¿Cuál es la probabilidad de que un participante gane dos premios? Y ¿Cuál es la probabilidad de que un concursante no gane ningún premio?</p> <p>B) Escribe en la tabla siguiente la función de probabilidad de la variable aleatoria que relaciona el espacio muestral con el número de premios que gana un concursante:</p>	<p>2.5 Construir un gráfico de barra para representar la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta (apartado C).</p>												
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%;">X</td> <td style="width: 15%;">0</td> <td style="width: 15%;">1</td> <td style="width: 15%;">2</td> <td style="width: 15%;">3</td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	X	0	1	2	3	f(x)							
X	0	1	2	3									
f(x)													
<p>C) En un gráfico represente la función de probabilidad anterior.</p>													

Para representar la situación-problema 2.2 los expertos eligieron el ítem 2.2A. En él no es inmediata la obtención de las probabilidades solicitadas, sino que es necesario razonar e interpretar el enunciado (no ganar ningún premio quiere decir ganar cero premios). También permite aplicar diferentes elementos asociado al tópico de probabilidad como la intersección de sucesos aleatorios independientes o el diagrama de árbol, entre otros.

Sobre la situación-problema 2.3, los participantes escogieron para caracterizarla el ítem 2.2B, donde se propone un tipo de lenguaje específico para representar la función de probabilidad (lenguaje tabular). Por lo general dicho lenguaje de representación es más cercano a estudiantes que el simbólico, además se facilita la respuesta dado que se entrega el dominio de la función requerida.

En relación con la situación-problema 2.4, los expertos prefirieron el ítem 2.1B. Esto se debió a que su enunciado proporciona facilidades, tanto en entregar una tabla donde se espera que sea representada la función de probabilidad, como en proveer completada la fila superior de esta tabla, correspondiente a los elementos del dominio de dicha función. Aún más, la tabla contiene una columna que hace referencia al total de las probabilidades, la cual sirve para corroborar si la función identificada, cumple con una de las condiciones para ser de probabilidad (suma de sus probabilidades igual a uno). De esta manera los aspectos mencionados favorecen a comprender lo solicitado y responder manera correcta.

Finalmente, los expertos, para representar la situación-problema 2.5, optaron por el ítem 2.2C. Esto se debe a su vinculación con el contexto de ítem 2.2B (situación-problema 2.3), el cual proporciona todos los elementos del dominio de la función de probabilidad, pero haciendo referencia explícita a los valores de X (variable aleatoria discreta). Esta información sin duda favorece a la resolución de la situación-problema 2.5, específicamente ayuda a asociar el eje horizontal del gráfico con el dominio de dicha función (valores de la variable aleatoria) y su eje vertical con el recorrido (probabilidades).

4.3 ESTIMACIÓN DE LA VALIDEZ DE CONTENIDO POR JUICIO DE EXPERTOS

A cada uno de los 34 ítems seleccionados a través de juicio de expertos, se le calculó el CVC de Hernández-Nieto (2002) y los resultados del procedimiento se exponen en la tabla 8. Así es posible afirmar que los ítems elegidos pueden ser conservados debido a que cada uno posee un coeficiente superior a 0,70, es decir, valora adecuadamente la situación-problema respectiva. También el conjunto

final de ítems obtuvo en promedio un CVC igual a 0,8, este valor indica que aquellos ítems evalúan idóneamente la comprensión de variable aleatoria y sus aplicaciones en las distribuciones de probabilidad binomial y normal en el contexto escolar chileno. En consecuencia, se puede sugerir la utilización de la GSP-VADP como un instrumento de evaluación en una investigación en educación o para estimar el avance en la comprensión de los estudiantes en los temas señalados.

Tabla 8. Valor de CVC de cada ítem que integra la versión final de la GVC-VADP

Situación-Problema	Ítem	CVC	Situación-Problema	Ítem	CVC
1.1	1	0,87	5.4	14.2A	0,87
1.2	1	0,87	5.5	15 C	0,8
1.3	2B	0,83	5.6	17	0,67
1.4	3.2C	0,8	6.1	20	0,83
2.1	5.1A	0,77	6.2	20A, B, C y D	0,83
2.2	6.1A	0,8	6.3	21C y D	0,92
2.3	6.1B	0,83	6.4	21B	0,9
2.4	5.1B	0,83	7.1	23.1	0,83
2.5	6.1C	0,87	7.2	22B y C	0,8
3.1	10A	0,77	7.3	26	0,87
3.2	11B	0,77	7.4	29	0,9
3.3	11B	0,83	7.5	32	0,77
4.1	8A	0,8	8.1	35.A	0,8
4.2	8A	0,94	8.2	34.B	0,83
4.3	8B	0,9			
5.1	13.1B	0,87	6.1	37	0,9
5.2	15C	0,8	7.1	40	0,93
5.3	15B	0,9		Media	0,86

5. CONCLUSIONES

La presente investigación permitió crear una guía integrada por diversas tareas, actividades o ejercicios para comprender la variable aleatoria y distribuciones de probabilidad binomial y normal, según el currículo escolar chileno, denominada GSP-VADP. Los resultados de este estudio muestran que la guía está constituida por 34 situaciones-problemas sobre dichos temas, identificadas a partir de un análisis riguroso a documentos curriculares vigente, principalmente de Chile (MINEDUC, 2015; MINEDUC, 2016; MINEDUC, 2019a; MINEDUC, 2019b; MINEDUC, 2019c), además de Estados Unidos (NGACBP y CCSSO, 2010; Franklin *et al.*, 2005; NCTM, 2000). También esta herramienta presenta importantes avances en torno a la enseñanza de los tópicos probabilísticos señalados:

- Amplía la diversidad de situaciones-problemas sobre variable aleatoria identificadas por Ortiz (2002), siendo estas representativas de la educación escolar actual.
- Propone situaciones-problemas en torno a la distribución binomial, fundamentales para la educación escolar e inicio de la universitaria, que no han sido explicitadas como tal objeto matemático en estudios previos.
- Amplía las diferentes situaciones-problemas relativas a la distribución normal reconocidas por Valverde (2017), coherentes con la educación probabilística fomentada documentos curriculares vigentes.

Por tanto, la Guía de Situaciones-Problemas sobre Variable Aleatoria y sus Aplicaciones en Distribuciones de Probabilidad según el Currículo Escolar, posee información valiosa que puede servir a los profesores de matemática que ejercen su labor en las escuelas, para orientar su trabajo y diseñar propuestas de enseñanzas en torno a los temas en cuestión.

Por otra parte, los resultados del presente estudio indican que es viable utilizar la GSPVADP para identificar ítems que representen las situaciones-problemas que la constituyen, por medio de expertos. Debido a que el conjunto final de ítems que ha sido seleccionados por los seis participantes obtuvo en promedio que es bueno, con un coeficiente de validez y concordancia superior a 0,8. También este conjunto de ítems complementa las actividades o tareas propuestas para la enseñanza a nivel escolar de la variable aleatoria (Bizet y Ramos, 2022; Doukhan y Gueudet, 2019), distribución binomial (Alvarado y Retamal, 2014) y distribución normal (Salinas *et al.*, 2018), ya que de manera articulada

integra situaciones-problemas sobre variable aleatoria y su aplicación en distribuciones de probabilidad.

Finalmente, esta investigación se proyecta en llevar a cabo un análisis a priori de las situaciones-problemas que componen el conjunto final de ítems. De esta manera, establecer de forma explícita el lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos puestos en juego en su resolución, los cuales caracterizan el significado institucional de la variable aleatoria y aplicaciones en distribuciones de probabilidad. Posteriormente, se espera aplicar aquellos ítems a estudiantes que cursan último grado de educación escolar (17 a 19 años) o comienzan su formación universitaria, con el propósito de centrarse en identificar el significado personal de los tópicos en cuestión.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo realizado en el marco del proyecto B-SEJ-063-UGR18 y Grupo SEJ622 (Junta de Andalucía). La investigación ha sido financiada por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) del Gobierno de Chile a través de la beca de doctorado en el extranjero (folio-72200367).

REFERENCIAS

- Alvarado, H. y Batanero, C. (2007). Dificultades de Comprensión de la Aproximación Normal a la Distribución Binomial. *Números, revista de didáctica de las matemáticas*, 67, 1-7.
- Alvarado, H. y Retamal, M. (2014). Representaciones de la distribución de probabilidad binomial. En L. Andrade (Ed.), *Memorias del I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp. 98-109). Asociación Colombiana de Educación Estocástica.
- Amrani, H. y Zaki, M. (2015). Student's conceptual difficulties with respect to the notion of random variable. *International Journal of Education, Learning and Development*, 3(9), 82-98.
- Barraza, M. (2007). La consulta a expertos como estrategia para la recolección de evidencias de validez basado en el contenido. *Investigación Educativa Duranguense*, 2(7), 5-14.
- Batanero, C. (2004) Ideas estocásticas fundamentales ¿qué contenido se debe enseñar en la clase de probabilidades? En J. Fernández, M. Sousa y S. Ribeiro (Eds.), *Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 9-30). Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

- Bizet, V. y Ramos, E. (2022). Valoración de una situación didáctica para la enseñanza de variable aleatoria y distribución de probabilidad en la educación secundaria chilena. *Innovaciones Educativas*, 24(36), 21-36. <http://dx.doi.org/10.22458/ie.v24i36.3897>.
- Chacón, A., García, G., Rupin, P., Setz, J. y Villena, M. (2018). *Texto del estudiante de matemática 2° medio*. Ediciones SM.
- Chevallard, Y. (1980). The didactics of mathematics: its problematic and related research. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 1, 146-157.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Aique.
- Colomé, S. (28 de diciembre de 2015). *¿Cuál es la probabilidad real del empate de la CUP?*. La Vanguardia. <https://www.lavanguardia.com/politica/20151228/301071423295/probabilidad-empate-cup.html>
- Dinges, H. (2005). Variables, in particular random variables. En M. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and sign grounding mathematics education* (pp. 305–311). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24270-8_26.
- Doukhan, C. y Gueudet, G. (2019). Students' difficulties at the secondary-tertiary transition: the case of random variables. En U. Jankvist, M. Van Den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2464-2471). Freudenthal Group y Freudenthal Institute of the Utrecht University y ERME.
- Fernández, F., Andrade, L. y Sarmiento, B. (2013). Rehaciendo el camino hacia la comprensión de la variable aleatoria. En P. Perry, C. Samper, Ó. Molina, L. Camargo, A. Echeverry, F. Fernández y B. Sarmiento (Eds.), *Aportes investigativos para el diseño curricular en geometría y estadística* (pp. 93–169). Universidad Pedagógica Nacional.
- Flores, B., García, J. y Sánchez, E. (2014). Avances en la calidad de las respuestas a preguntas de probabilidad después de una actividad de aprendizaje con tecnología. En M. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 307-316). SEIEM.
- Font, V., Godino, J. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97-124. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0>.
- Franklin, C., Kader, G., Newborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-k-12 curriculum framework*. American Statistical Association.
- Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1– 25. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x>.

- García-García, J., Fernández, N., Arredondo, E. e Imilpán, I. (2022). The Binomial Distribution: Historical Origin and Evolution of Its Problem Situations. *Mathematics*, 10, 1-28. <https://doi.org/10.3390/math10152680>.
- Godino, J. (1999). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico- antropológico para la investigación en didáctica de las matemáticas. En T. Ortega (Ed.), *Investigación en Educación Matemática III* (pp. 196-212). SEIEM.
- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2.3), 237-284.
- Godino, J. y Batanero, C (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>.
- González, Y. y Ojeda, A. (2017). Comprensión de la distribución normal en bachillerato. En L. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 30 (pp. 207-2017). CLAME.
- Guerrero, H., Batanero, C. y J. M. Contreras. (2016). Conocimientos sobre esperanza matemática en alumnos de bachillerato. En F. España (Ed.), *Actas del XVI congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (pp. 26-35). Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view of fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6(2), 187-205, 1975. <https://doi.org/10.1007/BF00302543>.
- Hernández-Nieto, R. (2002). *Contributions to Statistical Analysis*. Universidad de los Andes.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. (6a ed.). Editorial McGraw Hill Education.
- Hoyos, C. (2010). *Un modelo para la investigación documental. Guía teórico-práctica sobre construcción de Estados del Arte con importantes reflexiones sobre la investigación*. Señal Editora.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Paidós.
- Ministerio de Educación de Chile. (2009). *Currículum: Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación de Chile. (2015). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Gobierno de Chile. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación de Chile. (2016). *Matemática, programa de estudio segundo medio*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación de Chile. (2019a). Chile. *Bases Curriculares 3° y 4° medio*. Unidad de Currículum y Evaluación.

- Ministerio de Educación de Chile. (2019b). *Programa de estudio matemática 3° medio para formación general*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación de Chile. (2019c). *Programa de estudio matemática 4° medio para formación general*. Unidad de Currículum y Evaluación.
- Morales, F., Vega, M., Aguilar, M. Gúmera, C. y Marchant, P. (2008a). *Texto manual matemática 3° y 4° medio – proyecto explor@ndo*. Ediciones SM.
- Morales, F., Vega, M., Aguilar, M. Gúmera, C. y Marchant, P. (2008b). *Libro de actividades 3° y 4° medio– proyecto explor@ndo*. Ediciones SM.
- Muñoz, G., Gutiérrez, V. y Muñoz, S. (2013). *Texto matemática cuarto año medio*. Santillana.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. NGACBP and CCSSO.
- Norambuena, P., Osorio, G., Romante, M. y Díaz, J. (2019). *Cuaderno de actividades de matemática 3° y 4° medio*. Ediciones SM.
- Ortiz, J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Grupo de Investigación en Educación Estadística de la Universidad de Granada.
- Osorio, G., Norambuena, P., Romante, M., Gaete, D., Díaz, J., Celedón, J., Morales, K., Ortiz, N., Ramírez, P., Barrera, R. y Hurtado, Y. (2019). *Texto del estudiante de matemática 3° y 4° medio*. Ediciones SM.
- Ramírez, N. (28 de diciembre de 2018). *Siempre el 16% obtiene más de 600 puntos en la PSU: Demre explica cómo funciona la prueba*. Emol. <https://www.emol.com/noticias/Nacional/2018/12/28/932495/Siempre-el-16-obtiene-mas-de-600-puntos-en-la-PSU-DEMRE-explica-como-funciona-la-prueba.html>
- Rivas, H. (2014). *Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria* [Tesis de doctorado no publicada]. Universidad de Granada.
- Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria* [Tesis de maestría no publicada]. Instituto Politécnico Nacional.
- Ruiz, B. (2013). *Análisis epistemológico de la variable aleatoria y comprensión de objetos matemáticos relacionados por estudiantes universitarios* [Tesis de doctorado no publicada]. Universidad de Granada.
- Salazar, R. (2014). *La variable aleatoria con probabilidad desde la perspectiva de la teoría APOE* [Tesis de maestría no publicada]. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Salinas, J., Valdez, J. y Salinas-Hernández, U. (2018). Un acercamiento a la metodología lesson study para la enseñanza de la distribución normal. En L. Rodríguez-Muñiz, L. Muñoz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 525- 534). SEIEM.

- Sánchez, E. y Carrasco, G. (2018). El razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato en actividades de distribución binomial. En L. Rodríguez-Múniz, L. Múniz-Rodríguez, Á. Aguilar-González, P. Alonso, F. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 535- 543). SEIEM.
- Sánchez, E. y Landín, P. (2014). Levels of probabilistic reasoning of high school students about binomial problems. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking presenting plural perspectives* (pp. 581-597). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_31.
- Stahl, S. (2006). *The Evolution of the Normal Distribution*. *Mathematics Magazine*, 79(2), 96-113. <https://doi.org/10.1080/0025570X.2006.11953386>.
- Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos* [Tesis de doctorado no publicada]. Universidad de Sevilla.
- Valverde, M. (2017). *Un estudio de la presentación de la distribución normal en los textos de bachillerato* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad de Granada.
- Vilca, M. (2015). *Tipificación de los errores que se presentan al identificar una variable aleatoria de distribución binomial en problemas contextualizados* [Tesis de maestría no publicada]. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Autor de correspondencia

VALERIA BIZET LEYTON

Dirección postal: Campus Universitario de Cartuja C.P. 18071, Granada (España).
valeriabizet@gmail.com