NOTAS DE CLASE

A la una... a las dos... y ... a las tres

Seguramente es la primera sucesión numérica con la que nos topamos en nuestra vida. ¿Quién no la ha usado cuando pequeño? Creemos que todos, y aún de grandes, de vez en vez la seguimos utilizando.

Conforme pasaba el tiempo la longitud de la sucesión crecía, y era motivo de mucho orgullo, tanto de padres como del mismo niño contar del uno hasta el diez.

Al ingresar a la primaria, en el primer año, la sucesión se extendió hasta cien, y en segundo, el panorama se amplió de una forma impresionante, ya que las maneras de "caminar" por los elementos de la sucesión son muy variadas. Nos podemos pasear: de dos en dos, o de tres en tres, también se puede recorrer esta sucesión de cuatro en cuatro, o de cinco en cinco. Al mismo tiempo, la sucesión creció hasta mil, posteriormente en tercero de primaria aprendimos que la sucesión no tiene límite y que los caminos para recorrerla llegan hasta de ¡diez en diez! o aún más.

La utilidad de la sucesión anterior no da lugar a dudas, pues nos sirve para enumerar objetos, calcular áreas, volúmenes, hacer operaciones comerciales, contar, medir y muchas cosas más.

Y aunque no es la única sucesión que existe, sí podemos decir sin temor a equivocarnos, que de ella nacen todas las demás. Pero, ¿qué otro tipo de sucesiones hay?

Bueno, hagamos un experimento, sabemos cuatro operaciones al menos, ¿qué tal si dividimos al número uno entre todos los demás? A ver... ¡Sí, claro!, al uno entre el uno, al uno entre el dos, al uno entre el tres, al uno entre el cuatro, al uno entre el cinco, al... Bueno, menos mal que se han inventados símbolos y esto nos ahorrará escribir, veamos:

1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10, 1/11, ..., etcétera.

Pero, ¿por qué etcétera? Porque ya sabemos que nunca vamos a terminar, lo cual es una gran ventaja. Sin embargo, podemos saber el valor de cualquier término de nuestra sucesión. Si queremos saber cuánto vale el término 10568, lo único que debemos hacer es poner:

1/10568

Mat. F. Arturo Gamietea Domínguez

(IFUNAM. Ingeniería UABC)

Si queremos saber el término 67, el 325, el 1265789 o cualquier otro, digamos el x por decir algo en general, bastará poner un uno, una diagonal y el número deseado x.

Ya sabemos que la mayoría de lectores tienen la siguiente pregunta a flor de labios: ¿Para qué nos sirve esto?

Dentro de lo que acabamos de hacer hay un VERDADERO TESORO, ¡claro!, si queremos verlo. En primer lugar, podemos darnos cuenta de que con elementos que hemos aprendido desde pequeños, podemos CONSTRUIR, podemos EXPERIMENTAR y podemos DESCUBRIR. En segundo lugar, manejamos conjuntos cuyo número de elementos no tiene fin y NO HEMOS NECESITADO de ningún instrumento para ello, salvo quizás un lápiz y un pedazo de papel.

Recapacitemos un poco y tratemos de ver qué pasa en otras disciplinas. ¿Habrá otra materia en la que podamos hacer experimentos tan baratos?

Retomando nuestro "LABORATORIO", sigamos jugando para ver si podemos formar otras sucesiones.

¡Ah, sí! Multipliquemos el número uno por uno, el número dos por el dos, el número tres por el tres, el número cuatro por cuatro, el número cinco por cinco, el... ¡Basta! ya se ve la necesidad de ponerlo en símbolos:

$1\times 1, 2\times 2, 3\times 3, 4\times 4, 5\times 5, 6\times 6, 7\times 7, 8\times 8, 9\times 9, 10\times 10, 11\times 11, 12\times 12,$ ..., etcétera.

Sabemos que nunca terminará, pero pudimos poner el etcétera nuevamente ya que podemos decir cualquier término de la sucesión, por ejemplo, el término 35 es 35x35, el término 3456 es 3456x3456. Puede detener aquí la lectura un rato y pensar en algunos números de esta sucesión.

Mencionamos el conocimiento de cuatro operaciones, usemos la resta, tomemos nuestra sucesión inicial: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, ..., etcétera. Tomemos el segundo término , el 2, restémosle el primer término; el 1, esto nos dará 2-1; al tercer término restémosle el segundo término el resultado será 3-2; al cuarto término restémosle el tercero, 4-3; al quinto le restamos el cuarto, 5-4; al sexto el quinto, 6-5; y como ya está muy claro, recurrimos a los símbolos y nos ahorramos palabras:

2-1, 3-2, 4-3, 5-4, 6-5, 7-6, 8-7, 9-8, 10-9, 11-10, 12-11, 13-12, ..., etcétera

Antes de pensar en cuál será un término determinado, podemos OBSERVAR un poco, hacer las operaciones y ¡SORPRESA!

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1,..., etcétera.

¡Esto está demasiado fácil!, pues podemos adivinar que cualquier término de la sucesión es 1.

Si usted es de las personas que se preocupa mucho de la utilidad práctica de lo que hace, le podemos decir que el trabajo que estamos haciendo nos lleva a fomentar algunas de las capacidades del intelecto, como son la CURIOSIDAD, que se **fomentará** cuando nos preguntemos ¿cómo podremos formar otras sucesiones?, la IMAGINACIÓN, que se **fomentará** al pensar que: ¡nos estamos paseando por varias rutas que nos ofrece el mundo de los números!, la CONCENTRACIÓN, que se **fomentará** porque ¡si no ponemos atención, nos equivocamos!

ANÁLISIS, que se **fomentará** al hacer problemas como éste: Tenemos la sucesión, al restar a un término el anterior, obtenemos una sucesión de unos. SÍNTESIS, que se **fomentará** cuando pensemos: ¡al saber los términos de la sucesión $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3, \ldots$, etcétera, sabemos que cualquier término es: el término fulano × el término fulano, y como sabemos símbolos tf × tf! OBSERVACIÓN, que se **fomentará** porque: ¡sólo así podremos encontrar las relaciones entre los términos de la sucesión!

Aunque podemos seguir aumentando la lista, creemos que con esto es más que suficiente para hacer ver el gran valor de las MATEMÁTICAS para el desarrollo de algunas de las facultades mentales. Sabemos que no es la única forma en que éstas se pueden fomentar, pero de lo que estamos plenamente convencidos es de que es la manera MÁS ECONÓMICA Y EFICIENTE que hay.

Regresemos a nuestro laboratorio, sigamos jugando con nuestras sucesiones, propóngase algunas, obsérvelas, trate de encontrar relaciones entre los números, relaciones con otras sucesiones. Lo más difícil será sentarse verdaderamente a hacerlas.

¿Qué les parece la siguiente?.

$2 + 1, 3 + 2, 4 + 3, 5 + 4, 6 + 5, 7 + 6, 8 + 7, \ldots$, etcétera.

Hasta ahora, solamente hemos usado una operación, ¿podremos usar dos al mismo tiempo? ¡Intentémoslo!:

Hasta ahora, solamente hemos usado una operación, ¿Podremos usar dos al mismo tiempo? ¡Intentémoslo!:

al primero le sumo el segundo y al resultado lo divido entre la resta del tercero más el cuarto, aquí es una maraña de palabras, así que recurramos a nuestros símbolos para ver si es más fácil:

$(1+2)/(3+4), (2+3)/(4+5), (3+4)/(5+6), (4+5)/(6+7), (5+6)/(7+8), \ldots$, etcétera

¡Esperamos que en este último renglon ya alguien tenga una calculadora! y la esté usando para poner:

$3/7, 5/9, 7/11, 9/13, 11/15, 13/17, 15/19, \ldots$, etcétera.

Y a propósito de calculadoras, si tiene una de las que sacan raíz cuadrada, puede obtener un conjunto de sucesiones y descubrir cosas muy interesantes, digamos, escriba un número, saque raíz cuadrada, a este resultado sáquele raíz cuadrada, a este nuevo resultado, sáquele raíz cuadrada, a lo que se quedó, raíz cuadrada, otra vez y otra, y otra y muchas veces..., más veces, hasta que... ¡SORPRESA!

Escoja otro número y repita el experimento anterior, ¡OTRA VEZ LO MISMO!

Proponga otro número y obtengamos más raíces cuadradas... ¡Parece que siempre dará lo mismo!

Haga varios experimentos más.

Ahora ponga un número menor que uno, digamos .34 y apliquemos el procedimiento de las raíces cuadradas, ..., ¡QUÉ INTERESANTE!

Proponga otros números menores que uno, y a oprimir la tecla de raíz cuadrada muchas veces, ..., y...

Al menos podemos sacar tres conclusiones:

PRIMERO.- Si empezamos con un número mayor que uno, llegamos a 1.

SEGUNDO.- Si empezamos con un número menor que uno, llegamos a 1.

TERCERO.- ¡Qué MARAVILLA son las calculadoras! Y si no lo cree, repita el trabajo que hizo, con papel y lápiz.

También podemos ver lo ocioso que resulta asustarnos porque nuestros alumnos no saben sacar raíz cuadrada si no es con calculadora. ¿No es mejor que estén experimentando e incluso encontrando resultados como los que hemos mencionado, que obligarlos a utilizar un algoritmo anacrónico, que no les invita más que al fastidio? ¿No es mejor hacerles ver que ellos pueden redescubrir teoremas o resultados importantes, en lugar de ponerlos a competir con una calculadora a la que NUNCA podrán igualar en velocidad? ¿No es mejor enseñarles a usar esta útil herramienta para que puedan con mayor facilidad desplazarse en el mundo de las matemáticas, en lugar de pedirles un ejercicio inútil como sería el sacar veinticinco raíces cuadradas a números con ocho decimales?

Sabemos que no es la demostración de un teorema el camino que hemos seguido, pero también sabemos que la mayoría de nuestros alumnos no requerirán del formalismo de los matemáticos. Y si podemos usar las matemáticas para que puedan desarrollar las tan mencionadas capacidades intelectuales, mediante el juego del laboratorio, y de hacer experimentos en matemáticas, es muy posible que modifiquemos al menos la actitud de rechazo que tienen la mayoría, hacia esta materia tan útil en el desarrollo de la humanidad.

Pero continuemos con nuestros experimentos, formemos una sucesión de tal forma que el primer término sea cero, el segundo uno, el tercero la suma de los dos anteriores; es decir, al cero le sumamos el uno y obtenemos nuestro tercer término; el cuarto término lo obtenemos sumando el segundo más el tercero; el quinto término, sumando el tercero más el cuarto; el sexto, sumando al cuarto el quinto, ..., y como ya entendimos, lo traducimos a símbolos:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ..., etcétera.

Formemos otra sucesión:

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57, 61, ..., etcétera.

Antes de formar una más observemos ésta última y tratemos de sacarle información,...

Ahora una más:

1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, 1/256, ..., etcétera.

Empecemos por ésta última, ¿qué podemos experimentar con ella...? Veamos... Y si ¿restamos al primer término el segundo?, y ¿al segundo el tercero? y ¿al tercero el cuarto? y ¿al cuarto el quinto? y... ¡Caramba!, ya se volvió a hacer una maraña de palabras, recurramos a nuestros símbolos:

1/2-1/4, 1/4-1/8, 1/8-1/16, 1/16-1/32, 1/32-1/64, 1/64-1/128, 1/128-1/256, ..., etcétera.

¡Con un poco de paciencia obtendremos!

1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, 1/256, ..., etcétera.

¡Resultó más fácil de lo que pensábamos! Nos costó trabajo al principio, pero ya podemos adivinar ahora cualquier término de la sucesión sin tener que hacer las cuentas.

¿Podremos hacer otro experimento con la misma sucesión? Bueno, pues intentemos dividir el segundo término entre el primero, el tercero entre el segundo, el cuarto entre el tercero, ..., etcétera

1/4 entre 1/2, 1/8 entre 1/4, 1/16 entre 1/8, 1/32 entre 1/16, 1/64 entre 1/32, ..., etcétera.

Si hacemos las operaciones ¡Qué agradable sorpresa!

1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, ..., etcétera.

Pero... ¿Por qué es una sorpresa agradable? ¿Hay belleza en esto? ¿Podríamos hablar de elegancia?

Pensemos, ..., partimos de una sucesión cuyo número de términos no tiene fin, ..., formamos una nueva sucesión tomando dos elementos consecutivos, y en lugar de tener que hacer una INFINIDAD de operaciones, nos bastó hacer ¡MENOS DE DIEZ! para poder saber cualquier término de ese conjunto INFINITO. Si esto le parece poco, intente hacer unas cien operaciones de éstas tomando tiempo. Ahora piense lo que tardaría en hacer mil, diez mil o un millón de esas operaciones y considere que aún estaría tan "lejos del infinito" como cuando empezó.

Al continuar nuestro experimento, efectuamos algunas divisiones, y encontramos que todas ellas llevan al mismo resultado, no necesitamos hacer una infinidad de divisiones para ver esto, y sí podemos tener la certeza de que al dividir cualquier término de la sucesión entre el que le precede dará 1/2.

Es suficiente el ahorro de trabajo para decir: ¡QUÉ AGRADABLE SORPRESA! Si este hecho lo relacionamos con los experimentos que se pueden o deben realizar en otras disciplinas, se ve que la VENTAJA ES MUY AMPLIA.

Aunque la belleza y la elegancia son relativas y subjetivas, creemos que estarán de acuerdo con nosotros en que, es una BELLEZA el no tener que hacer tanto trabajo, y que con un pequeño número de operaciones, logremos algo que no se podría hacer en toda la vida de toda la humanidad, trabajando exclusivamente en un problema semejante, ya que NO SE PUEDE HACER UNA INFINIDAD DE OPERACIONES. El haber obtenido un solo número como el representante de todos, nos parece MUY ELEGANTE, sin recovecos, sin artificios, SIMPLE Y DIRECTO.

También sabemos que hay ocasiones en las que se han hecho inferencias erróneas, por el hecho de encontrar que los primeros resultados se comportaban de cierta forma, sin embargo estamos convencidos de que esto no debe ser un obstáculo para seguir este camino en el estudio de las matemáticas.

¡MIL VECES! preferiríamos que llegaran alumnos diciéndonos que descubrieron la cuadratura del círculo con regla y compás (lo cual no se puede hacer), a tener alumnos que nos digan que no recuerdan como sumar fracciones, incluso en el nivel de la licenciatura.

Pero, regresemos a nuestro "juego", dejamos dos sucesiones pendientes, a la sucesión, 1, 5, 9, 13, 17, 21, ..., seguramente ya le encontraron algo ... ¡Claro! restando al segundo término el primero, al tercero el segundo, al cuarto el tercero, etcétera:

5-1, 9-5, 13-9, 17-13, 21-17, ..., etcétera

o escrita con menos símbolos:

4, 4, 4, 4, 4, ..., etcétera.

¡Otra vez nos encontramos con una cosa muy simple! Cualquier término de la nueva sucesión es cuatro.

Hasta aquí podríamos pensar que todo se reduce a encontrar un número que sea representante de una sucesión dada, mediante operaciones elementales de la aritmética, lo cual nos llevaría a perder interés. Pero veamos que la situación se vuelve más interesante.

Tomemos la primera de las tres últimas sucesiones que propusimos:

Empezamos con cero, luego uno, sumamos al cero el uno, formando así el tercer término, al segundo término le sumamos el tercero para obtener el cuarto, mientras que el quinto lo construimos sumando el tercero al cuarto, y como ya entendimos y las palabras empiezan a complicar el asunto, recurrimos a nuestra "taquigrafía".

0, 1, 0 + 1, 1 + 1, 1 + 2, 2 + 3, 3 + 5, 5 + 8, 8 + 13, 13 + 21, 21 + 34, 34 + 55, 55 + 89, 89 + 144, 144 + 233, 233 + 377, ..., etcétera

haciendo las sumas:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ..., etcétera.

El experimento que les proponemos, ¡claro que pueden hacer el que quieran!, es dividir el segundo término entre el primero, el tercero entre el segundo, el cuarto entre el tercero, el quinto entre el cuarto, el sexto entre el quinto y así sucesivamente:

0, 1, 2, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, 34/21, 55/34, 89/55, 144/89, 233/144, 377/233, 610/377, ..., etcétera

usando una calculadora y "traduciendo" esas fracciones a números con decimales:

0, 1, 2, 1.5, 1.6666, 1.6, 1.625, 1.6153846, 1.6190476, 1.6176471, 1.6181818, 1.6179775, 1.6180556, 1.6180258, 1.6180371, ..., etcétera.

Empezamos a observar que el número empieza a tener características fijas conforme aumentamos el número de términos, esto le da interés a nuestros experimentos previos, ya que aunque parece ser que vamos a encontrar un número fijo después de varios cálculos, ya no es la simpleza de un número para toda la sucesión.

Claramente surgen aquí una serie interminable de preguntas: ¿Habrá más sucesiones que se comporten igual a ésta? ¿Podremos encontrar alguna otra sucesión que nos lleve al mismo número? ¿Es una casualidad que sea el número 1.6180..., o éste es un número especial?

Las repuestas a estas preguntas son en algunos casos fáciles, pero en otros debemos estudiar un poco más. Pero lo que sí es muy importante, es que nosotros podemos hacer varios experimentos y llegar a conclusiones. Posiblemente no encontremos un resultado que coloque a nuestros nombres en las páginas doradas de los grandes genios matemáticos, pero sí lograremos darle un nuevo sentido a las matemáticas, a su estudio, puesto que ya no seremos únicamente receptores pasivos de un conocimiento perfecto, acabado, en donde ya no hay qué hacer, salvo escuchar a nuestro profesor.

Tendremos el placer de ver que podemos construir resultados por nosotros mismos, encontrar relaciones entre números que antes nunca pensamos que existiesen y, como fruto implícito de este agradable trabajo, desarrollaremos capacidades intelectuales, nada despreciables en otras áreas del conocimiento humano.

Hasta aquí sólo hemos visto problemas de sucesiones, pero ¿qué hay de geometría, de aritmética, de álgebra, de trigonometría, etcétera? ¿Podremos encontrar también este tipo de LABORATORIO? ¿Podremos llevar a cabo este mismo tipo de experimentos? ¿Estarán también a nuestro alcance algunos resultados aunque sean modestos?

AFORTUNADAMENTE la respuesta es SI. Intentemos algo en geometría. Dibujemos un triángulo cualquiera, ¡claro, grande, en una hoja limpia!, no quiere decir que los triángulos pequeños no sirvan, o que las hojas sucias no son adecuadas; lo que pasa es que nos sentiremos más a gusto trabajando en un lugar limpio, con espacio suficiente, porque "veremos" más claramente lo que estamos haciendo y muchas ventajas más.

Encontremos la mitad de cada uno de sus lados, la manera más fácil es midiendo con una regla, aunque no es la única forma de hacerlo, ahora unamos cada vértice con el punto medio de su lado opuesto. ¿Qué encontramos? Dibujemos otro triángulo, repitamos la operación de encontrar los puntos medios de los lados y unámoslos con los vértices.

Dibujemos un triángulo más, pero ahora muy diferente a los dos anteriores y repitamos el procedimiento.

¡Ya tenemos una conjetura! Parece ser que las líneas que trazamos coinciden en un punto. Pero no es la única observación que podemos hacer. Nuestros triángulos se dividieron en figuras ¿Qué tipo de figuras? ¿Cuántas? ¿Seguirán teniendo la propiedad que tenía el triángulo original respecto a la reunión de las rectas que van de los vértices a los puntos medios? ¿Habrá algunas otras rectas que tracemos en un triángulo que se reúnan en un mismo punto?

Como podremos haber notado, las limitantes las marcamos nosotros. Si este tipo de ejercicios los llevamos a cabo, vamos a desarrollar habilidades importantes, y además GUSTO por las matemáticas, aunque no querramos ser matemáticos, físicos o ingenieros.

Hagamos un pequeño ejercicio de imaginación. Supongamos que viajamos a un lugar en donde se están dando albores de las sociedades agrícolas, en donde las personas ya tienen tiempo de meditar mientras se da la cosecha. De alguna manera encuentran figuras en la naturaleza que tienen la forma de círculo, las observan y las observan y las siguen observando, y ¡DESCUBREN que cada uno de ellos tiene un centro!, que todos los puntos están a la misma distancia de éste, esto les permitió formar sus propios círculos, pero los seguían observando, observando, observando, ..., y ¡el radio es la mitad del diámetro! ¿Habrá alguna otra información que podamos obtener? Esa debió haber sido una pregunta que se hicieron después de estos dos descubrimientos importantes, aunque ahora nos parezcan triviales. ¡Y encontraron a PI! Ya que debieron haber pensado que sería conveniente relacionar el diámetro con el perímetro.

Aquí el descubrimiento fue ENORME, pero dentro de esta grandiosidad, hay algo que no es tan evidente y que es aún mucho más importante que el descubrimiento mismo. ¿Adivinan...?

¡CLARO QUE SI!, el descubrimiento del método, es decir observamos y comparamos los elementos de las figuras que estamos observando, ¡así que a tomar triángulos y a comparar entre sus elementos! ¡A tomar polígonos y a encontrar sus relaciones! ¡Midamos objetos, comparémoslos entre ellos mismos y tratemos de encontrar relaciones que hemos encontrado en otras formas y figuras! ¡Pero no solamente podemos comparar figuras o sus elementos, podemos comparar números y series de números también!

Si todavía hay quien pueda preguntarse, ¿qué utilidad práctica tiene todo este trabajo de matemáticas?, ¿en qué le va a servir o beneficiar en sus actividades cotidianas? La respuesta que se nos antoja es una serie de preguntas: ¿Le molesta desarrollar sus capacidades intelectuales? ¿Cree que no vale la pena desarrollarlas? ¿Tiene algún método más simple para ello? ¿El encontrar clasificaciones, analogías y diferencias, el observar desde varios puntos de vista un mismo problema o situación no le provoca satisfacción? ¿Le parece poco que el "edificio" tecnológico descanse sobre bases matemáticas?

También creemos necesario aclarar que: sí hay problemas difíciles, algunos aún no se sabe si puedan ser resueltos, otros ya se ha visto que no tienen solución y que nunca se resolverán. Que nos va a tomar esfuerzo es innegable, pero recordemos cuando éramos pequeños y tendremos presente que no importaba el esfuerzo que implicaba comer solo, la satisfacción que sentíamos era inmensa porque ya éramos "GRANDES", recordemos las horas que pasábamos intentando abrochar las agujetas de los zapatos, que no eran nada en comparación al júbilo de haberlo logrado SOLOS. El placer de descubrir es una de las satisfacciones más grandes que tiene el género humano.

Un gran maestro nuestro nos dijo: "LAS PERSONAS NO LE TEMEMOS A LO DIFICIL, LO QUE NOS HACE ABANDONAR LAS TAREAS ES EL ABURRIMIENTO", evitemos que nuestros alumnos se aburran, permitámosles que experimenten por ellos mismos "EL LENGUAJE CON QUE DIOS ESCRIBIÓ LA NATURALEZA: **LAS MATEMATICAS**", según GALILEO GALILEI.

Deseo expresar mi más caro agradecimiento a las personas que tan amablemente me hicieron el favor de revisar el manuscrito, y aportar ideas muy valiosas que ya están incorporadas: Licenciada Jeannette Cortés, Ingeniero Israel Gradilla, Ingeniero Gerardo Soto y al Doctor Miguel Ávalos.