NOTAS DE CLASE

Algo acerca de la Parábola

Cuando dada una ecuación de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \ldots(1)$$

se requiere identificar la cónica que representa y graficarla, se procede regularmente a calcular el discriminante $\Delta = B^2 - 4\,AC$ y a obtener, mediante una rotación, un sistema rectangular de coordenadas para el cual la ecuación de dicha cónica no contenga el término xy.

Hay, sin embargo, para el caso de que dicha cónica sea una parábola, otro método para obtener su gráfica. Quizá no es menos laborioso que el método de rotación de ejes (el lector lo juzgará), pero pienso que es de interés. Y es por ello que decidí presentarlo en tal, y como lo enseñé a los estudiantes de mi grupo de Geometría Analítica.

Empecemos por la definición de la parábola:

Parábola

Es el lugar geométrico de los puntos cada uno de los cuales es equidistante de una recta fija DD' (llamada directriz), y de un punto fijo F (denominado foco).

Para obtener la ecuación de la parábola en un cierto sistema rectangular de coordenadas, supóngase que la ecuación de la directriz en dicho sistema es $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, y que las coordenadas del foco son x_F e y_F.

De la definición de la parábola tenemos que un punto $P(x, y)$ pertenece a ella si cumple con la siguiente igualdad:

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2} \qquad \ldots(2)$$

Ing. Raúl Luna Rivero

Fac. de Ingeniería

UNAM

En efecto, el término izquierdo de la igualdad es la distancia del punto $P(x, y)$ a la directriz y el término derecho, la distancia entre este punto y el foco $F(x_F, y_F)$.

Si elevamos al cuadrado la ecuación (2), obtenemos:

$$(A_1x + B_1y + C_1)^2 = (A_1^2 + B_1^2)\,[(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2].$$

Dejo al lector el cuidado de hacer el desarrollo de esta última ecuación y comprobar que es equivalente a

$$B_1^2x^2 - 2A_1B_1xy + A_1^2y^2 - 2\,[A_1C_1 + x_F(A_1^2 + B_1^2)]\,x - 2$$
$$[B_1C_1 + y_F(A_1^2 + B_1^2)]y + (A_1^2 + B_1^2)(x_F^2 + y_F^2) - C_1^2 = 0 \qquad \ldots(3)$$

la cual podemos considerar como la ecuación de la parábola en su forma general.

Comparando las ecuaciones (1) y (3), resulta que

$$\begin{aligned} B_1^2 &= A \\ 2A_1B_1 &= B \\ A_1^2 &= C \\ -2[A_1C_1 + x_F(A_1^2 + B^2)] &= D \\ -2[B_1C_1 + y_F(A_1^2 + B^2_1)] &= E \\ (A_1^2 + B_1^2)(x_F^2 + y_F^2) - C_1^2 &= F \end{aligned} \qquad (4)$$

De esta manera, puede comprobarse que el discriminante $\Delta = B^2 - 4AC$ es nulo para una parábola:

$$B^2 - 4AC = (-2A_1B_1)^2 - 4(B_1^2)(A_1^2) = 4\,A_1^2\,B_1^2 - 4\,A_1^2\,B_1^2 = 0.$$

El sistema de ecuaciones (4) puede resolverse y obtener que

$$\begin{aligned} A_1 &= \pm\sqrt{C} \\ B_1 &= \pm\sqrt{A} \\ C_1 &= \frac{4(A + C)F - (D^2 + E^2)}{4(DA_1 + EB_1)} \\ x_F &= -\left[\frac{D + 2\,A_1C_1}{2(A + C)}\right] \\ x_F &= -\left[\frac{E + 2\,B_1C_1}{2(A + C)}\right]. \end{aligned} \qquad \ldots(5)$$

Los signos de A_1 y B_1 se determinan tomando en cuenta que

signo (—B) = signo (A_1B_1).

Así, por ejemplo, si el signo (—B) = +, los signos de A_1 y B_1 son iguales. Por el contrario, si signo (—B) = —, entonces signo (A) $\neq$ signo (B_1). En el primer caso se pueden tomar positivos los signos de A_1 y B_1, y en el segundo, tomar positivo el de A_1 y negativo el de B_1. No obstante, la elección inversa es igualmente válida. ¿Por qué?

Ahora veamos un ejercicio de aplicación:

Identificar y dibujar la gráfica de la siguiente ecuación:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 5\sqrt{5}\,y + 1 = 0$$

En este caso, tenemos que A = 1, B = —4, C = 4, D = 0, E = $5\sqrt{5}$ y F = 1. Por lo tanto, $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$. Se trata, entonces, de una parábola.

signo (—B) = signo(4) = + $\longrightarrow$ signo (A_1) = signo (B_1) = +.

$$A_1 = \sqrt{4} = 2$$

$$B_1 = \sqrt{1} = 1$$

$$C_1 = \frac{4(1+4)1 - [(0)^2 + (5\sqrt{5})^2]}{4[(0)(2) + 5\sqrt{5}(1)]} = \frac{20 - 125}{20\sqrt{5}} = -\frac{105}{20\sqrt{5}}$$

$$C_1 = -\frac{21}{4\sqrt{5}}$$

$$x_F = -\left[\frac{0 + 2(2)(\frac{-21}{4\sqrt{5}})}{2(1+4)}\right] = \frac{21}{10\sqrt{5}}$$

$$y_F = -\left[\frac{5\sqrt{5} + 2(1)(-\frac{21}{4\sqrt{5}})}{2(1+4)}\right] = \frac{42 - 100}{40\sqrt{5}} = -\frac{58}{40\sqrt{5}}$$

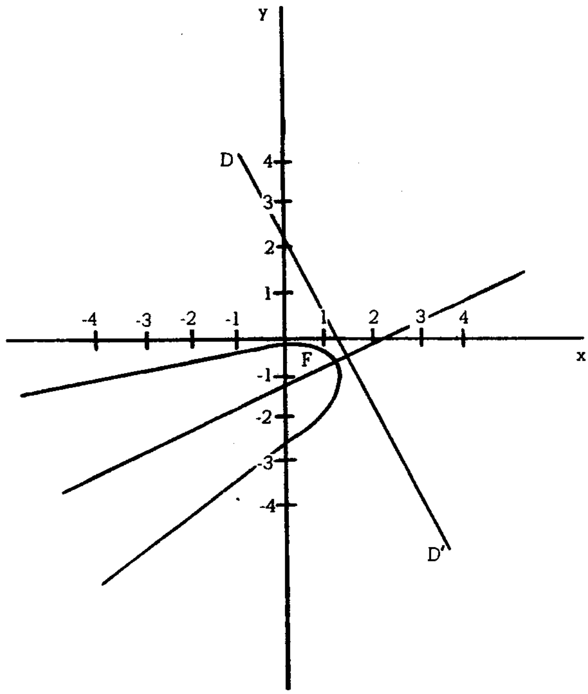
$$y_F = -\frac{29}{20\sqrt{5}}$$

De los resultados anteriores, la ecuación de la directriz es

$$2x + y - \frac{21}{4\sqrt{5}} = 0.$$

y el foco es el punto $F\left(\frac{21}{10\sqrt{5}}, -\frac{29}{20\sqrt{5}}\right)$

Así, a partir de la localización de la directriz y el foco en el plano coordenado, estamos en condiciones de dibujar aproximadamente la parábola.



Recomiendo al lector resolver este problema mediante rotación de los ejes y comparar los resultados, así como ambos métodos.