

Sección Problemas

La resolución de problemas es una actividad que permite evaluar, reafirmar y desarrollar nuestros conocimientos y habilidades. Invitamos a nuestros lectores para que envíen problemas con su solución o que propongan soluciones a los que aquí se formulan.

Problemas propuestos

1. Demuestre que la mediana a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la mitad de la hipotenusa.
2. Encontrar dos números enteros, tales que juntos utilicen justamente una vez, cada uno de los diez dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Los dos números son respectivamente, el cuadrado y el cubo del mismo número.
3. Encontrar el número entero más pequeño, tal que si se toma su último dígito y se coloca en el lugar de las unidades, el nuevo número es nueve veces el original.
4. Se tiene una línea recta que se desea bisectar, pero no se cuenta con ninguna otra herramienta salvo dos compases para hacerlo. ¿Cómo se puede realizar la bisección?

32nd. International Mathematical Olympiad

Sigtuna, Sweden

SEGUNDO DÍA

18 de Julio, 1991

4. Sea G un grafo conexo con k aristas. Demuestre que es posible numerar las aristas de G de 1 a k de tal manera que cada vértice de G que pertenece a dos o más aristas, el máximo común divisor de los números asignados a esas aristas es 1.

(Un grafo es un conjunto de puntos llamados *vértices* y un conjunto de *aristas* que unen pares de vértices distintos. Cada par de vértices distintos x , y tiene a lo más una arista que los une. El Grafo G es *conexo* si para cada par x , y de vértices distintos existe una sucesión de vértices $x = v_0, v_1, v_2, \dots, v_m = y$, tal que cada par v_i, v_{i+1} , $0 \leq i < m$, está unido por una arista de G .

5. Sea ABC un triángulo y P un punto interior al triángulo. Demuestre que al menos uno de los ángulos $\angle PAB$, $\angle PBC$ o $\angle PCA$ es menor o igual que 30° .
6. Una sucesión infinita x_0, x_1, x_2, \dots de números reales es *acotada* si existe una constante C tal que $|x_i| \leq C$ para todo $i = 0, 1, 2, \dots$

Dado cualquier número real a mayor que 1, construir una sucesión infinita y acotada x_0, x_1, x_2, \dots tal que se cumpla

$$|x_i - x_j| |i - j|^a \geq 1, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots (i \neq j)$$