PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Olimpiada de la Cuenca del Pacífico Marzo de 1992

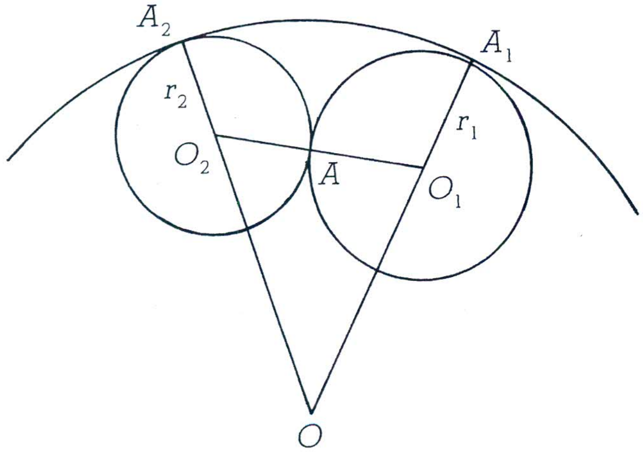
Tiempo: 4 horas
No se permite el uso de calculadoras
Cada pregunta vale siete puntos

Pregunta 1

Considere un triángulo cuyos lados están dados y se denotan por a, b, y c. Sea S el semiperímetro, es decir $S = (a + b + c)/2$. Construya un triángulo cuyos lados midan $S - a$, $S - b$ y $S - c$. Este proceso se repite hasta que no se pueda contruir un triángulo con la longitud de lados indicada. ¿Para qué triángulos iniciales este proceso se puede repetir una infinidad de veces?

Pregunta 2

En el círculo C de centro O y de radio r consideremos dos círculos C_1 y C_2 tangentes interiormente a C en A_1 y A_2 y ellos a su vez tangentes exteriormente en A. Sean O_1, O_2 y r_1, r_2 los centros y radios respectivos de C_1 y C_2. Pruebe que las rectas OA, O_1A_2 y O_2A_1 son concurrentes.



Pregunta 3

Sea n un entero tal que $n > 3$. Supongamos que se escogen tres números del conjunto $\{2,3,\ldots,n\}$. Usando esos tres números únicamente una vez y usando la suma, la multiplicación y los paréntesis, formemos todas las posibles combinaciones.
(a) Pruebe que si los tres números son mayores que n/2, entonces los valores de las combinaciones son distintos.
(b) Sea p un número primo tal que $p \leq \sqrt{n}$. Pruebe que el número de maneras de elegir tres números tal que el más pequeño sea p y los valores de las combinaciones no son distintos, es precisamente el número de divisores positivos de $p - 1$.

Pregunta 4

Determine todas las parejas (h, s) de números enteros positivos con las siguientes propiedades:
Si se dibujan h rectas horizontales y otras s que satisfacen
(i) no son horizontales
(ii) no hay dos de ellas paralelas
(iii) no hay tres de las $h + s$ rectas concurrentes
(iv) el número de regiones delimitadas por esas $h + s$ rectas es 1992.

Pregunta 5

Encuentre la sucesión de longitud máxima que consiste de enteros distintos de cero en la cual la suma de cualesquiera siete términos consecutivos es positiva y que la suma de cualesquiera once términos consecutivos es negativa.

BUENA SUERTE

PASATIEMPO MATEMÁTICO

Aguilera Aguilar, Inocente*

* LA CADENA *

A un herrero le trajeron cinco trozos de cadena, de tres eslabones cada uno, y le encargaron que los uniera formando una cadena contínua.

Antes de poner manos a la obra, el herrero comenzó a meditar sobre el número de anillos que tendría necesidad de cortar y forjar de nuevo. Dicidió que le haría falta abrir y cerrar cuatro anillos.

¿No es posible efectuar este trabajo abriendo y enlazando un número menor de anillos?

* LA CEREZA *

La parte carnosa y el hueso de una cereza son de la misma anchura. Supongamos que la cereza y el hueso tengan forma esférica. ¿Puede usted calcular cuántas veces es mayor el volumen de la parte jugosa que el del hueso?

* DOS MELONES *

Están a la venta dos melones de la misma calidad. Uno tiene 60 cm. de perímetro, el otro 50 cm. El primero cuesta vez y media más caro que el segundo. ¿Qué melón es más ventajoso comprar?

* Vocal del Cmté. Estatal Baja California Sur de la ANPM.

(Tomada de: Thales, Órgano Informativo de la ANPM, Baja California Sur, 1, 1, Enero 1991).