■ EDUCACIÓN MATEMÁTICA ■ Vol. 4 - No. 3 • Diciembre 1992 ■ © GEI ■ Pág. 57 ■

Factorización de Expresiones Algebraicas:

Cuatro trucos

Se describen cuatro trucos que pueden ser presentados a los alumnos en la clase de matemáticas: 1) *tabla del 9 con los dedos*, 2) *cómo multiplicar con los dedos números del 6 al 10*, 3) *cómo sumar de manera "instantánea" números de Fibonacci*, y 4) *cómo sumar números en una hoja de calendario de manera relampagueante*. Todos estos trucos gustan mucho a los alumnos. Los podemos utilizar para hacer la clase más atractiva, pero además podemos descubrir el principio matemático que explica por qué dan buen resultado. En este caso, el principio subyacente en todos ellos es que podemos factorizar una expresión algebraica.

Actividad 1
La tabla del nueve con los dedos

Se numeran los dedos como se indica en la Fig. 1

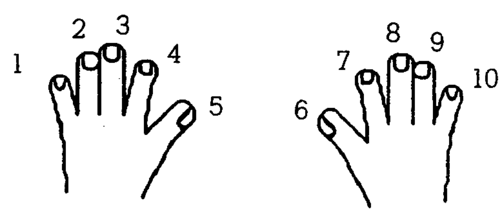

Figura 1. Numeración de los dedos

Para multiplicar un número por nueve, se dobla el dedo correspondiente (Fig. 2). Los dedos que quedan a la izquierda del dedo doblado cuentan como decenas, los que están a la derecha como unidades. Por ejemplo, en la Fig. 2 se representa la operación $7 \times 9 = 63$.

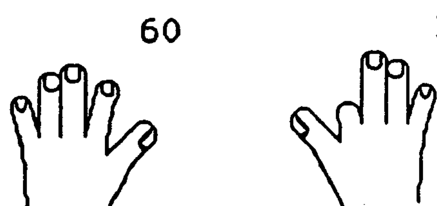

Figura 2. Multiplicado 7×9

Alfinio Flores

Para explicar por qué funciona este truco, basta ver que sumar 9 es lo mismo que sumar una decena y restar una unidad. Al ir recorriendo el dedo que se dobla, se suma una decena y se resta una unidad. Empezamos con 9 unidades con el primer dedo doblado, es decir, $(10 - 1)$, y vamos sumando decenas y restando el mismo número de unidades. El segundo dedo doblado representa $2 \times (10-1) = 2 \times 9$; al doblar el séptimo dedo se representa $7 \times (10-1) = 7 \times 9$

Actividad 2
Multiplicar con los dedos números del 6 al 10

Se numeran los dedos como se indica en la Fig. 3

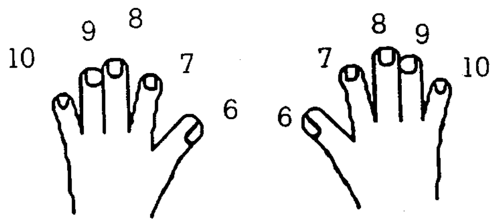

Figura 3. Otra forma de numerar los dedos

Para multiplicar dos números se tocan los dedos correspondientes. Por ejemplo, en la Fig. 4 se ilustra 7×9.

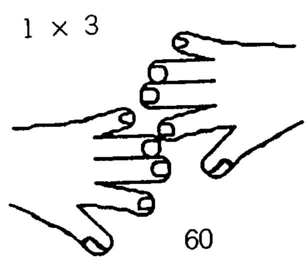

Figura 4. Multiplicación de 7×9

Los dedos que quedan abajo y los que se tocan cuentan como decenas; los que quedan arriba se multiplican (los de una mano con los de la otra) y el resultado se suma a las decenas. En este ejemplo, los dedos que se tocan más los que

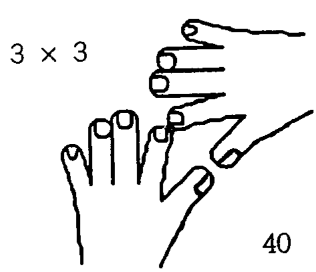

Figura 5. Multiplicación de 7×7

quedan abajo suman seis, o sea que tenemos 6 decenas, es decir, 60. Los que quedan arriba son dos en una mano y tres en la otra, y se multiplican entre sí: $1 \times 3 = 3$. El resultado final es entonces $60 + 3 = 7 \times 9$. Otro ejemplo se ilustra en la Fig. 5.

¿Cómo funciona?

Los números del 6 al 10 se pueden escribir como $5 + 1$, $5 + 2$, $5 + 3$, $5 + 4$, $5 + 5$. En general como $5 + n$.

Veamos cómo se multiplican dos números de la manera indicada en esta actividad. Supóngase que queremos multiplicar $(5 + n) \times (5 + m)$.

Los dedos que se tocan son el n-ésimo y el m-ésimo, de abajo hacia arriba. O sea que los que se tocan más los de abajo suman $n + m$. Como cuentan como decenas, se tiene $10 \times (n + m)$. Quedan $5 - n$ dedos en una mano y $5 - m$ en la otra. Se multiplica $(5 - n) \times (5 - m)$.

El método funcionará siempre si la siguiente ecuación es cierta $(5 + m) \times (5 + n) = 10 \times (n + m) + (5 - m) \times (5 - n)$

Se puede comprobar la ecuación desarrollando ambos lados. El primero da $(5 + m) \times (5 + n) = 25 + 5 \times m + 5 \times n + n \times m$

y el segundo:

$10 \times (m + n) + (5 - m) \times (5 - n) = 10 \times m + 10 \times n + 25 - 5 \times m - 5 \times n + n \times m = 25 + 5 \times m + 5 \times n + n \times m$

Actividad 3
Suma rápida de números de Fibonacci.

Los alumnos eligen dos números cualesquiera; por ejemplo, 3 y 4. Se obtiene una sucesión de números de Fibonacci a partir de ellos (para obtener cada término de la sucesión se suman los dos anteriores). Se escriben 10 términos y se suman. Ejemplo:

3	
4	
7	
11	
18	
29	
47	séptimo término: 47
76	
123	
+ 199	
517	$11 \times 47 = 517$

Cuando los alumnos escriben el décimo término, el maestro da el resultado de la suma en forma relampagueante. Para esto, simplemente multiplica el séptimo término por 11. Esto funciona para cualquier sucesión de números de Fibonacci, sin importar cuáles sean los dos primeros términos.

Veamos cómo opera lo anterior. Si los dos primeros términos de la sucesión son a, b, entonces la suma es

$$\begin{array}{r l}
a & \\
b & \\
a + b & \\
a + 2b & \\
2a + 3b & \\
3a + 5b & \\
\mathbf{5a + 8b} & \quad \text{séptimo término } 5a + 8b \\
8a + 13b & \\
13a + 21b & \\
21a + 34b & \\
\hline
55a + 88b & \quad 11 \times (5a + 8b) = 55a + 88b
\end{array}$$

De esta forma se ve claro que la suma puede obtenerse multiplicando por 11 el séptimo término, sin importar cuáles sean los valores de a y b.

Actividad 4
Sumas rápidas en el calendario

Se pide a los alumnos que marquen en una hoja de calendario de un mes cualquiera un cuadrado de 3×3 casillas. Un resultado sorprendente es que la suma de las diagonales es igual a la suma del primer renglón con el tercero, o de la primera columna con la tercera.

Más sorprendente para los alumnos es que se puede obtener el resultado de forma inmediata, multiplicando por 6, el número de la casilla central.

Ejemplo. Considérese el cuadrado siguiente de un calendario ficticio.

15	16	17
22	23	24
29	30	31

Figura 6. Una hoja de calendario

Se tiene que:

$15 + 16 + 17 + 29 + 30 + 31 = 138$ Suma del primer renglón y el tercero

$15 + 22 + 29 + 17 + 24 + 31 = 138$ Suma de la primera columna y la tercera

$15 + 23 + 31 + 17 + 23 + 29 = 138$ Suma de las diagonales

La casilla central es 23, y la suma será $6 \times 23 = 138$.

Pruébese con varios cuadrados, dejando que los alumnos los escojan. No importa cuál haya sido el cuadrado de 3 por 3 que hayan escogido, siempre funcionará este artificio.

Veamos por qué

Si denotamos por n el primer número del cuadrado, el siguiente a la derecha será $n + 1$ y el siguiente $n + 2$. El número que está abajo del primero será $n + 7$, pues el calendario está agrupado por semanas. La casilla central será entonces $n + 7 + 1$. El cuadro completo quedaría entonces así:

n	$n + 1$	$n + 2$
$n + 7$	$n + 7 + 1$	$n + 7 + 2$
$n + 14$	$n + 14 + 1$	$n + 14 + 2$

Figura 7. Una hoja de un cierto calendario (en general)

Renglones:

$$\begin{array}{lccccc}
\text{primer renglón} & n & + & n+1 & + & n+2 \\
\text{tercer renglón} & n+2\times 7 & + & n+2\times 7+1 & + & n+2\times 7+2 \\
\hline
\text{Total} & \multicolumn{5}{l}{6\times n+6\times 7+6}
\end{array}$$

Columnas:

$$\begin{array}{lccccc}
\text{primera columna} & n & + & n+7 & + & n+2\times 7 \\
\text{tercera columna} & n+2 & + & n+7+2 & + & n+2\times 7+2 \\
\hline
\text{Total} & \multicolumn{5}{l}{6\times n+6\times 7+6}
\end{array}$$

Diagonales:

$$\begin{array}{lccccc}
 & n & + & n+7+1 & + & n+2\times 7+2 \\
 & n+2 & + & n+7+1 & + & n+2\times 7 \\
\hline
\text{Total} & \multicolumn{5}{l}{6\times n+6\times 7+6}
\end{array}$$

Factorizando vemos que $6 \times n + 6 \times 7 + 6 = 6 \times (n + 7 + 1)$. Esto es, el resultado es 6 veces el número de la casilla central.

Las actividades anteriores pueden servir para motivar a los alumnos a traducir a términos algebraicos, una situación interesante, practicando así esta importante habilidad. Además ilustra cómo, mediante la manipulación algebraica, es posible obtener otras expresiones que permitan una mejor comprensión de la situación original.

Referencia

FLORES PEÑAFIEL, ALFINIO; MIRABAL, FRANCISCO. *Prácticas de laboratorio: Álgebra.* Comunicaciones del CIMAT, 1986.