La Desigualdad en Funciones

Tema de Apoyo para un curso de cálculo

En un primer curso de cálculo elemental puede incluirse este tema. Esto representa un esfuerzo en el sentido de invertir algún tiempo, pero sería recompensado considerando las siguientes ventajas:

1) Se asegura una mayor aceptación de los temas: números, funciones, dominios y gráficas.
2) Se allana el camino hacia los temas: límites y continuidad.
3) Se crea una etapa sin resultados teóricos, pero con una fuerte inclinación a la formalización de los conceptos intuitivos.

Objetivos del tema

Lo que se busca primordialmente es el refuerzo de los conceptos recién adquiridos y la habilidad operacional de ellos, así como lograr la visualización de posibles soluciones, sin descuidar el aspecto riguroso.

Cuando se trabaja mecánicamente, se incurre en errores en las soluciones debido a la manipulación un tanto abusiva de los aspectos algebraicos; se pierden soluciones importantes o se obtienen soluciones extrañas al problema original. Se intentará evitar esto.

También se pretende lograr una predisposición hacia los temas subsecuentes, un desarrollo observacional y, en general, una actitud suficientemente crítica en el concurso de la materia.

Extensión del tema y graduación de los problemas

No es necesario complicar mucho los ejercicios, pues realmente estamos apoyando el curso, es decir, se está un poco "fuera" de él.

Las funciones polinomiales son muy útiles, y también es posible utilizar $\log(x)$, e^x, $\sqrt[n]{x^m}$, funciones trigonométricas elementales, etc.

Manera de resolver los ejercicios

Antes de todo definamos el conjunto de valores de la variable independiente para los que tiene sentido la desigualdad.

Loreto Cruz H.

ITESM-Campus Xochimilco, D.F.

Definición. Sean $f(x)$, $g(x)$ funciones desiguales. El dominio de la desigualdad es

$$\text{Dom }(f,\ g) = \{x \in \text{Dom } f \cap \text{Dom } g\}$$

Podemos iniciar ilustrando algunas desigualdades entre funciones lineales.

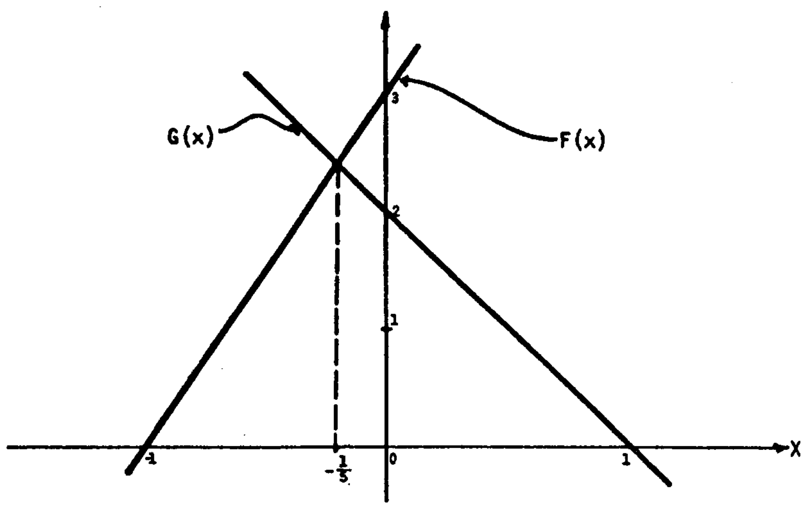
Ejemplo 1: Sean $f(x) = 3x + 3$

$$g(x) = -2x + 2$$

¿Qué quiere decir $f(x) \leq g(x)$?

En este caso Dom $(f,\ g) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$,

Tracemos las gráficas para $f(x)$ y $g(x)$



Éstas se intersectan en $f(x) = g(x)$; es decir si

$$3x + 3 = -2x + 2,$$

esto es, en

$$x = -\frac{1}{5}$$

Geométricamente, a la izquierda de $x = 1 - 1/5$, $f(x)$ está "abajo" de $g(x)$. Es intuitivamente claro, al menos para estas funciones, que este hecho significa que

$$f(x) \leq g(x) \text{ en } x \leq -\frac{1}{5}$$

En realidad, si recordamos que la imagen de un número real bajo una función es también un número real, tales desigualdades pueden plantearse como entre números reales en un dominio adecuado [Dom (f, g)].

Una manera de intentar la solución es:

$$3x + 3 \leq -2x + 2$$

$$5x \leq -1$$

$$x \leq -1/5$$

Afortunadamente en este caso no hay problemas para obtener la solución, ya que Dom $(f, g) = \mathbb{R}$, y la desigualdad es sencilla.

Otra manera sería observando la gráfica e intentando directamente demostrar que

$$f(x) \leq g(x) \rightleftharpoons x \leq -1/5$$

Esto sería:

Sea $x \leq -1/5$

$f(x) = 3x + 3$

$f(x) - 3 = 3x \leq -3/5$

$f(x) \leq -3/5 + 3 = 12/5,$

$g(x) = -2x + 2$

$g(x) - 2 = -2x \geq 2/5$

$g(x) \geq 2/5 + 2 = 12/5$

$f(x) \leq g(x)$

Ahora sea

$$x > -1/5$$

$$f(x) - 3 = 3x > -3/5$$

$$f(x) > 12/5,$$

$$g(x) - 2 = -2x < 2/5$$

$$g(x) < 12/5$$

$$f(x) > g(x)$$

Puede parecer que lo anterior es muy rebuscado; sin embargo, es muy útil en la mayoría de los casos.

Ejemplo 2:

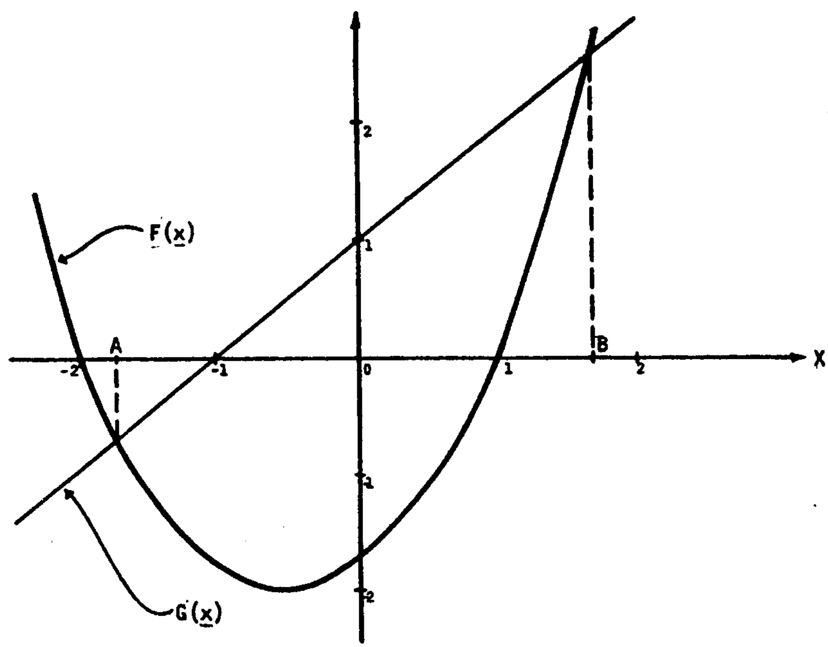
Sean $f(x) = x^2 + x - 2$

$g(x) = x + 1$

Resolver $f(x) < g(x)$

Iniciamos: (Dom $(f, g) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

Se tiene que $f(x)$ representa a una parábola que abre hacia arriba, con raíces $x_1 = -2, x_2 = 1$; y $g(x)$, a una recta de pendiente 1 y que cruza al eje vertical en el punto 1.



Se observa nuevamente que conviene localizar los puntos en que las gráficas se intersectan; es decir, las raíces de $f(x) = g(x)$. De aquí se concluiría que $f(x) < g(x)$ en (a, b) si a y b son tales raíces:

$$x^2 + x - 2 = x + 1$$

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

$$a = -\sqrt{3};\ b = \sqrt{3}$$

hecho que se formaliza como sigue:

Proposición: $x^2 + x - 2 < x + 1 \rightleftharpoons \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

Demostración:

$$x^2 - 3 < 0$$

$$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) < 0$$

Ahora es necesario que:

I) $(x + \sqrt{3}) > 0$ y $(x - \sqrt{3}) < 0$

es decir

$x > -\sqrt{3}$ y $x < \sqrt{3}$

o bien

II) $(x + \sqrt{3}) < 0$ y $(x - \sqrt{3}) > 0$

es decir

$x < -\sqrt{3}$ y $x > \sqrt{3}$

En el caso (I) obtenemos $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$,

En el caso (II) $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cap (\sqrt{3}, \infty)\ \phi$.

Podría extenderse este desarrollo para resolver desigualdades entre polinomios; por ahora no se hará, pero sí complicaremos un poco más los ejemplos.

Ejemplo 3: Resolver $f(x) \leq g(x)$

Donde $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$

$$g(x) = -2$$

Dom $f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

Dom $g = \mathbb{R}$

Dom $(f, g) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

Debemos examinar cada uno de estos intervalos para trazar $f(x)$

(I) Para $x \in (-\infty, -1)$

i) Si x es un número negativo muy grande, $f(x)$ se aproxima o tiende a 1, ya que

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} = \frac{\frac{x^2}{x^2} \quad \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} \quad \frac{1}{x^2}}$$

de donde para $|x|$ muy grande, las cantidades $2/x^2$ y $1/x^2$ son despreciables.

ii) $f(x)$ es siempre positiva:

$$x^2 + 2 > 0$$

y

$$x^2 > 1 \rightarrow x^2 - 1 > 0$$

$$\therefore \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} > 0$$

iii) $f(x)$ es creciente:

Sean x_1, x_2 tales que

$$\frac{x_1^2 + 2}{x_1^2 - 1} < \frac{x_2^2 + 2}{x_2^2 - 1}$$

como $x_1^2 - 1 > 0$ y $x_2^2 - 1 > 0$

obtenemos

$$x_1^2x_2^2 + 2x_2^2 - x_1^2 - 2 < x_2^2x_1^2 - x_2^2 + 2x_1^2 - 2$$

$$3x_2^2 < 3x_1^2$$

$$x_2^2 < x_1^2$$

$$\rightarrow x_1 < x_2 \text{ ¿Por qué?}$$

$\therefore f(x)$ es creciente.

(III)Para $x \in (-1, 1)$ observemos que

i) Si x es un número positivo grande, $f(x)$ se aproxima o tiende a 1.

ii) $f(x)$ es siempre positiva.

iii) $f(x)$ tiene un máximo en $x = 0$ [se sigue de i) y ii)].

Todo esto puede verificarse igual que en (I).

(III)Para x ’ $(-1, 1)$ observemos que

si $x = 0$, entonces $f(x) = x^2 + 2/x^2 - 1 = -2$

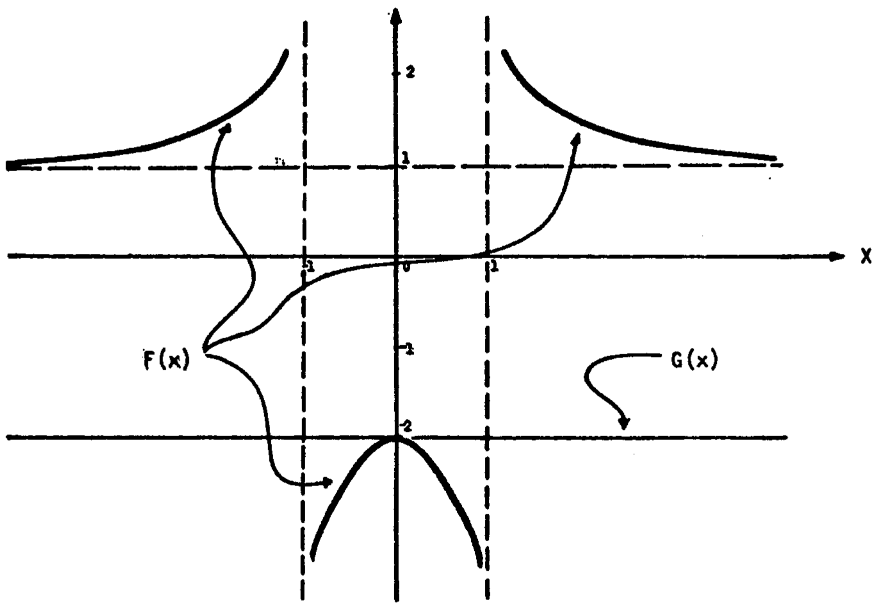
Ahora

i) $f(x$ es creciente si $x \in (-1, 0)$.

ii) $f(x)$ es decreciente si $x \in (0, 1)$

Los procesos para comprobar esto son similares a los utilizados en (I).

iii) $f(x)$ tiene un máximo en $x = 0$ [se sigue de i) y ii)].



Con la gráfica a nuestra disposición, la idea inmediata es el intento de demostrar que

$$f(x) \leq g(x) \leftrightarrow x \in (-1, 1)$$

Para esto, los argumentos (I) ii), (II) ii), (III) iii) son suficientes y sólo será necesario retocarlos, lo cual se considera un ejercicio sencillo. De hecho hemos hallado más elementos.

Ejemplo 4:

Resolver $\sqrt{1-x} \leq \sqrt[4]{5+x}$

Ahora $f(x) = \sqrt{1-x}$,

$g(x) = \sqrt[4]{5+x}$

La solución es muy sencilla si se advierte que:

$$\text{Dom } f = \{x\text{: } 1 - x \geq 0\} = \{x\text{: } x \leq 1\}$$

$$\text{Dom } g = \{x\text{: } 5 + x \geq 0\} = \{x\text{: } x \geq -5\}$$

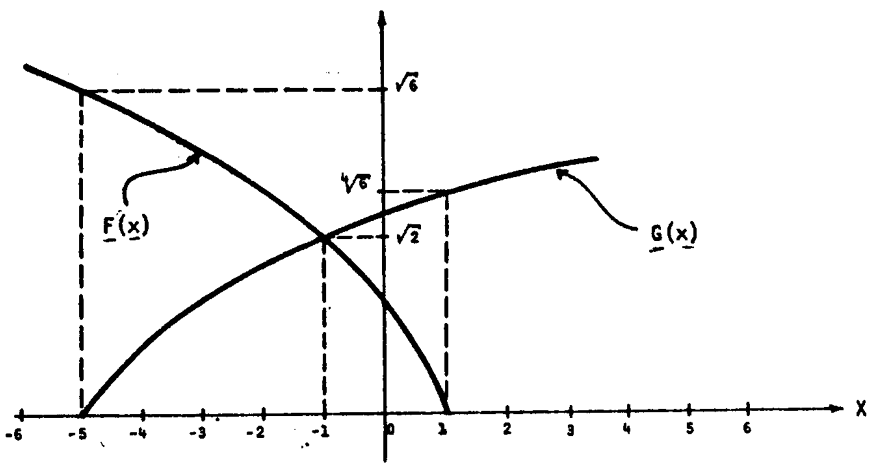
$$\text{Dom } (f,\ g) = [-5,\ 1]$$

¡Sólo será necesario analizar este intervalo!

Se propone como ejercicio formalizar lo siguiente:

i) $f(x)$ Es decreciente.

ii) $g(x)$ Es creciente.



Debemos ahora hallar la intersección (que existe según nuestra graficación):

$$f(x) = g(x)$$

$$\sqrt{1 - x} = \sqrt[4]{5 + x}$$

$$1 - x = \sqrt{5 + x}$$

$$1 - 2x + x^2 = 5 + x$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 4$$

De estas dos raíces sólo x_1 está en Dom $(f,\ g)$; x_2 es ajena y se adquiere al manipular la desigualdad como ecuación común de segundo grado.

La solución a este problema es $x \in [-1, 1]$; es claro que esto no es una demostración formal, pero ahora podemos conjeturar acerca de ella.

Proposición: $\sqrt{1 - x} \leq \sqrt[4]{5 + x} \leftrightarrow x \in [-1, 1]$

Demostración:

$$\text{Sea } x \in [-1, 1]$$

$$0 \leq \sqrt{1 - x} \leq \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \leq \sqrt[4]{5 + x} \leq \sqrt{6}$$

$$\therefore \sqrt{1 - x} \leq {}^4\sqrt{5 + x}$$

En seguida se examina el intervalo $(-5, -1)$ para obtener:

$$\sqrt{2} < \overline{1 - x} \leq \sqrt{6}$$

$$0 \leq \sqrt[4]{5 + x} < \sqrt{2}$$

$$\therefore {}^4\sqrt{5 + x} < \sqrt{1 - x},$$

Si $x \in (-5, -1)$ y terminar la demostración.

Ejemplo 5 Resolver $f(x) > g(x)$

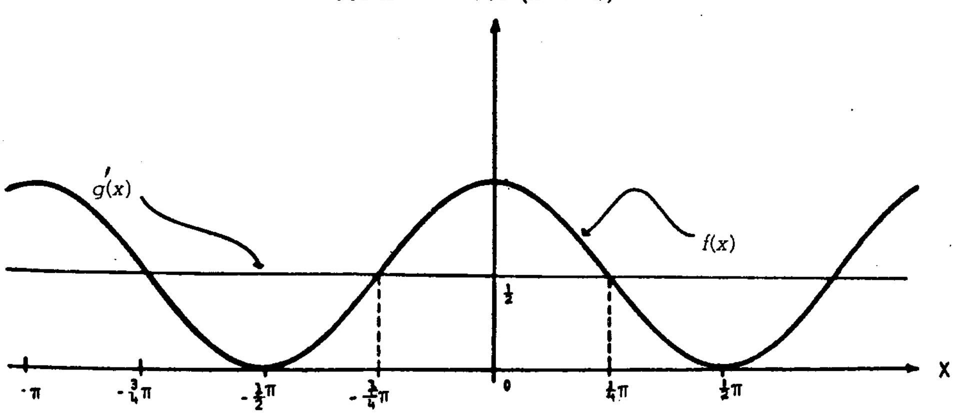
$$f(x) = \cos^2 x$$

$$g(x) = ½$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$
$$\text{Dom } g = \mathbb{R}$$
$$\text{Dom } (f, g) = \mathbb{R}$$

La gráfica de $f(x)$ es siempre positiva y periódica, de periodo π, ya que

$$\cos x = -\cos (x + \pi)$$



Para hallar las intersecciones basta resolver $\cos^2 x = ½$

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \text{arc cos}\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = -\frac{\pi}{4}$$

¿Cómo sería la solución analítica de este problema?

Se observa que es suficiente probar que

$$\cos^2 x > ▪ \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4} \subset \frac{\pi}{4}\right) - \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Y después extender la solución por la periodicidad de la función $f(x)$:

(1) Sea $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$

$$0 \leq \cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq \frac{1}{2}$$

(2) Sea $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$0 \leq \cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow 0 \leq \cos^2 \leq \frac{1}{2}$$

(3) Sea $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > \cos x \leq 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} > \cos^2 x$$

Así $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in (-\pi/4 + n\pi, \pi/4 + n\pi)$,

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

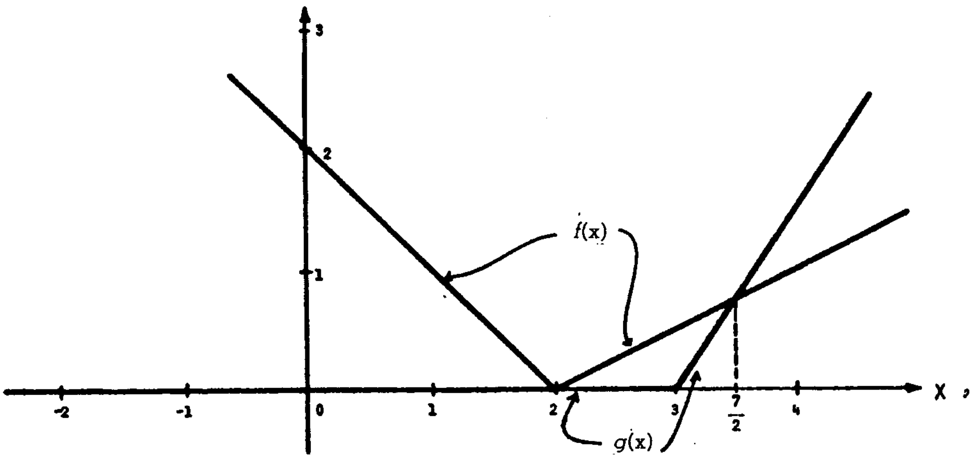
¿Qué pasa para $f(x) \leq h(x)$, si $h(x) = -1/2$?

Ejemplo 6: Resolver $f(x) \leq g(x)$

$$f(x) = |x - 2|$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3 \\ |3x - 9|, & x > 3 \end{cases}$$

Trazar las gráficas [Dom (f, g) = |R]



[Debemos notar que las intersecciones están en $x_1 = 2$, $x_2 = 7/2$].

y demostrar que

$$f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow (\{x \geq 7/2\} \cup \{x = 2\})$$

será muy fácil para el lector.

Conclusiones:

El hecho de definir el dominio de la desigualdad proporciona al estudiante una base importante: Restringe la búsqueda de soluciones a los intervalos definidos por Dom (f, g). La graficación permite el desarrollo de conceptos como crecimiento, decrecimiento y definición de funciones. Se propicia la interpretación gráfica del problema y se obtiene "casi" la solución en términos geométricos; es decir, a partir de ésta es posible proponer una solución analítica.

El Desarrollo intuitivo será de gran valor, lo mismo que los procesos de formalización.

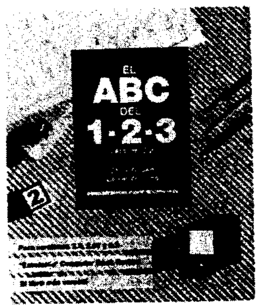
En todo caso, es el profesor del curso quien debe considerar si es adecuado implementar este tema, así como el tiempo y los ejercicios, de acuerdo con las condiciones del grupo.

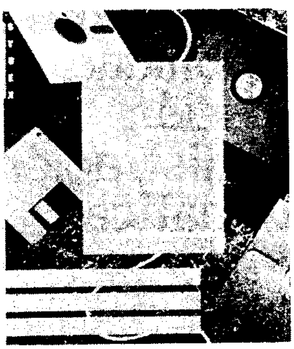
Obsérvese que, dados los elementos que el tema implica, será conveniente presentarlo después de los temas: funciones, dominios y gráficas; y antes de: límites y continuidad.

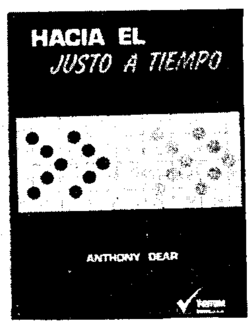
VENTURA EDICIONES

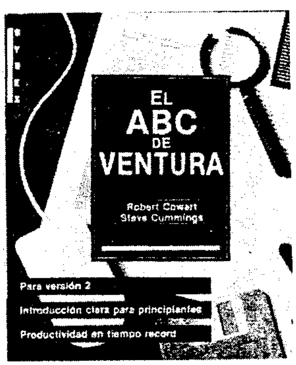
Se complace en presentar su colección selecta de libros en el área de computación y gerencia.

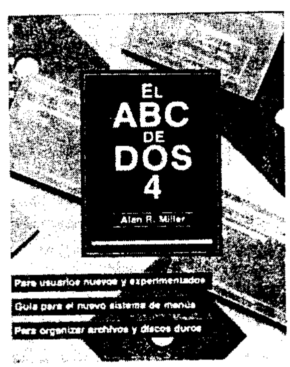
Los títulos que le presentamos serán herramienta indispensable para el mejor aprovechamiento de los paquetes de software de mayor difusión y sobre las técnicas más actualizadas en la gerencia, producción, mercadeo y control de calidad.









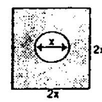
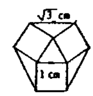
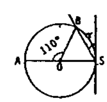
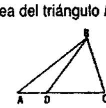


a su servicio en:
Río Ganges 64 México D.F. 06500 Tels: 511-2517 208-7741

CALENDARIO MATEMÁTICO CENAMEC

Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia (Venezuela)
Patrocinado por INTEVEP, S.A. Centro de Investigación y Apoyo Tecnológico, Filial de PDVSA

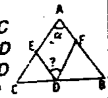
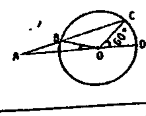
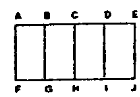
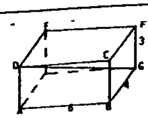
OCTUBRE

DOMINGO	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO
"La música es un ejercicio de la aritmética secreta y el que se entrega a ella ignora que maneja números".				**1** Dada la suma $1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/8 + 1/10 + 1/12$ ¿Cuáles términos deben suprimirse para que la suma de los términos restantes sea igual a 1?	**2** En la siguiente figura, ¿cuánto mide la parte sombreada 	**3** Resolver mentalmente $\begin{cases} 5x + 2y = 35 \\ 2x + 5y = 35 \end{cases}$
4 Un niño nace el 29 de febrero de 1972. Sabiendo que este día era martes. ¿En qué año será su cumpleaños otra vez un día martes? 	**5** ¿Cuales son los divisores mayores que 1 y comunes a 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888 y 999?	**6** ¿Cuál es el menor valor que puede tomar la expresión $x^2 + 8x$, si se asignan valores reales a x?	**7** En una balanza, se equilibra un ladrillo con tres cuartos de ladrillo más tres cuartos de kilo. ¿Cuánto pesa el ladrillo? 	**8** En cierta fábrica las mujeres representan el 35% del total de trabajadores. El número de hombres excede en 252 al de mujeres. ¿Cuál es el noveno número?	**9** Cuál es el área de la siguiente figura? 	**10** Si $x_1 + x_2 = 1$ y $x_1 \bullet x_2 = 1$ ¿Cuánto vale $x_1^3 + x_2^3$?
11 Sabiendo que la longitud del monstruo del Lago de Valencia es de 20 m más la mitad de su propia longitud, ¿cuántos metros de largo mide el monstruo?	**12** $\frac{37}{13} = 2 + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{y + \cfrac{1}{z}}}$ ¿Cuánto valen z, y, z?	**13** A y B pueden limpiar un campo en 10 días, A y C en 12 días, B y C en 15 días. ¿En cuántos días puede C limpiar el campo?	**14** En un cajón hay 12 calcetas negras, 12 blancas, 12 azules, 12 rojas y 12 marrones. Si falta la luz, ¿cuántas medias es preciso sacar para tener la seguridad de que entre ellas habrá, al menos, un par del mismo color?	**15** El promedio de ocho números es 10. Se añade un noveno número y el nuevo promedio es 11. ¿Cuál es el noveno número?	**16** De acuerdo con la figura, ¿cuánto vale α? 	**17** ¿Cuál es el valor de la siguiente expresión? $\mathrm{sen}^2\, 0.8 + \cos^2 0.8$
18 Un ladrillo de los usados en la construcción pesa 4 kg. ¿Cuánto pesará un ladrillo de juguete hecho del mismo material cuyas dimensiones sean todas 4 veces menores?	**19** Si $\|x\| + x + x = 10$ y $x + \|z\| - z = 12$, ¿cuál es el valor de $x + z$?	**20** En una progresión geométrica se tiene: $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt[3]{2}, a_3 = \sqrt[6]{2}$ ¿Cuál es el valor de a_4?	**21** Rosa tiene tantos hermanos como hermanas. Un hermano de Rosa tiene el doble de hermanas que de hermanos. ¿Cuántos hermanos y hermanas son en total?	**22** Se tienen tres números tales que si se suman en parejas los resultados que se obtienen son 38, 44 y 52. ¿Cuále es el mayor de los tres sumandos?	**23** En la Figura se tiene: $DC = 2AD$. Calcular el cociente entre el área del triángulo BCD y el área del triángulo BDA 	**24** Si $\frac{x}{x-1} = \frac{y^2 + 2y - 1}{y^2 + 2y - 2}$
25 En un recinto del zoológico están mezclados jirafas y avestruces. Si en total hay 30 ojos y 44 patas, ¿cuántas jirafas y cuántas avestruces hay?	**26** Escribir el número 24 utilizando únicamente 3 cifras iguales que no sean ochos. (Se pueden usar signos de operación).	**27** Tres enteros están en progresión aritmética y su producto es un primo positivo. ¿Cuáles son los tres números?	**28** Antonio es más rico que Pedro y menos rico que Fernando. ¿Quién de los tres es el más rico?	**29** ¿Cuál es el menor número que al dividirlo entre 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10, su resto es, en cada caso, una unidad menor que el divisor?	**30** Si el radio de una circunferencia se aumenta en una unidad, ¿cuál es la relación entre el perímetro y el diámetro de la nueva circunferencia?	**31** Resolver la ecuación $\log_2 (9 - 2^x) = 3 - x$

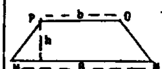
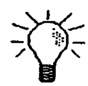
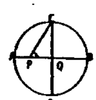
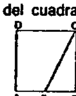
CENAMEC Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia, Venezuela.

Patrocinado por: Intevep, S.A., Centro de Investigación y Apoyo Tecnológico, Filial de PDVSA

NOVIEMBRE

DOMINGO	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO
1 Entre las 12 del mediodía y las 12 de la noche, ¿cuántas veces para el minutero sobre la aguja horaria? 	2 ¿Cuál es el dígito de las decenas de 11^{11}?	3 Pedro tiene \$43.75 entre monedas de \$0.25; \$0.50; \$1.00; \$2.00 y \$5.00. Si tiene el mismo número de monedas de cada tipo, ¿cuántas monedas tiene en total?	4 En el triángulo ABC se tiene: $AB = AC$ $CE = CD$ $BF = BD$ $\alpha = 80°$ ¿Cuánto mide el ángulo EDF? 	5 Los astronautas llevan en sus viajes espaciales paquetes de 2 onzas de salsa de manzana concentrada con sólo el 10% de agua. ¿Cuántas onzas de agua deben agregar para que la mezcla tenga el 50% de agua?	6 Un examen está compuesto por 11 preguntas que se pueden responder con un "sí" o con un "no". Para aprobar hay que responder por lo menos 6 preguntas correctamente. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar si se contesta cada pregunta al azar?	7 Si $y \neq 1$, ¿cuál es el cociente al efectuar la siguiente división $(y-1) \div (1-y^{-1})$?
8 De las 28 fichas del dominó ¿cuál pesa más?	9 Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = K$ ¿cuál es el valor de la siguiente expresión? $\sqrt{a^2} + c^2 + e^2$ $\sqrt{b^2} + b^2 + f$	10 Un padre tiene 33 años y su hijo 7 años. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la del hijo?	11 En la figura la medida del ángulo DOC es 60° y $AB = OC$. ¿Cuál es la medida del ∡ AOB? 	12 Si a la suma de los primeros 600 enteros positivos pares se le resta la suma de los primeros 600 enteros positivos impares, ¿cuál es el resultado?	13 ¿Cuántos cuadrados hay en la siguiente figura 	14 ¿Si $S = i^n + i^{-n}$ donde $i = \sqrt{-1}$ y n es un número entero, ¿cuántos valores diferentes puede tomar S?
15 La población de una colonia de bacterias se duplica dos veces cada día. Si en quince días se obtiene un cultivo de un millón de bacterias, ¿cuánto tiempo se necesita para tener dos millones de las mismas bacterias?	16 Calcular la expresión siguiente: $\frac{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})}$	17 Todas las personas que asistieron a una fiesta se estrecharon la mano. Una de ellas advirtió que los apretones de mano fueron 66. ¿Cuántas personas concurrieron a la reunión?	18 Si la diagonal de un cuadrado mide $x + y$, ¿cuál es el perímetro de otro cuadrado cuya área es el doble de la del cuadrado original?	19 Llevo recorridos los 7/15 de un camino y aún me falta 1/3 de kilómetro para llegar a la mitad. ¿Qué longitud tiene el camino?	20 Si se tiran al aire 3 monedas normales, ¿cuál es la probabilidad de que las tres muestren el mismo resultado (cara o sello)?	21 ¿Cuáles valores de x verifican la siguiente desigualdad? $9 \cdot 10^{-x} \leq 4 \cdot 10x$
22 Un reloj adelanta 2 minutos, 28 segundos cada hora. Ajustado hoy al mediodía, ¿qué hora marcará pasado mañana a las 9 a.m.?	23 Sabiendo que: M.C.D. $(a, b) = 12$ y $a/b = 56/72$, hallar a y b	24 Sumando un número constante a 20, 50 y 100, resulta una progresión geométrica. ¿Cuál es el valor de la razón?	25 En el paralelepípedo de la figura se cumple: $AB = 6$, $BG = 4$ y $FG = 3$. ¿Cuál es la longitud de la diagonal DG?	26 Si se aumenta el radio de un círculo en 100%, ¿en qué porcentaje aumentará su área?	27 ¿De cuántos modos distintos se pueden colocar 4 señoras en una fila de 8 hombres de modo que no haya 2 señoras juntas?	28 Si $1 - 4/x + 4/x^2 = 0$, ¿Cuál es el valor de $2/x$?
29 Las seis caras de un cubo de madera se pintan de negro. Si el cubo se divide en 27 cubos iguales, ¿cuántos de los cubos pequeños quedan con dos caras pintadas?	30 Los ángulos internos de un triángulo son directamente proporcionales a los números 2, 3 y 4. ¿Cuál es la medida del mayor de los ángulos?	30 				El estudio de las matemáticas es como el Nilo, que comienza por la modestia y termina con la magnificiencia". C. Colton

DICIEMBRE 1992

DOMINGO	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES	SÁBADO
		**1** En un guiso para hallacas se pone una almendra por cada dos pasas. ¿Cuántas pasas y almendras hay, sabiendo que el total entre pasas y almendras es de 300?	**2** En la figura se tiene que $AC = CB$ $AC \parallel DE$ med $\alpha = 55°$ med $\beta = 20°$ ¿cuál es el valor de γ?	**3** ¿Cuántas veces la razón 4/5 es la razón 6/3?	**4** En un conjunto de 10 estudiantes, 6 usan lentes y 8 usan reloj. ¿Cuántos estudiantes usan, a la vez, lentes y reloj?	**5** Si $\lvert x - 1 \rvert = 3x$ ¿cuál es el valor de x?
6 Si ayer fue tres días antes del viernes, ¿qué día será mañana? 	**7** Esto y aquello, más la mitad de esto y aquello, ¿qué porcentaje es de esto y aquello? 	**8** Las gráficas de las ecuaciones $x^2 + y = 1$, $x + y = 1$, tienen dos puntos comunes, ¿cuál es la distancia entre esos dos puntos? 	**9** En la figura, el área del trapecio $MNOP$ es $48m^2$. Si B, b y h son tales que están en la relación $B/4 = b/2 = h$, ¿cuál es el valor de h?	**10** ¿Cuál es el valor del cociente $\dfrac{1{,}1111...}{0{,}999...}$	**11** Después de los exámenes finales, los estudiantes intercambiaron 870 fotografías, de manera que a cada estudiante le quedó una foto de cada uno de sus compañeros. ¿Cuántos estudiantes había?	**12** Si $\log a + \log b = 0$, ¿qué relación existe entre a y b?
13 Un tren de kilómetro y medio de longitud viaja a una velocidad de 20 km/h. ¿En cuánto tiempo atravesará un túnel de kilómetro y medio?	**14** Si x, $(2x + 2)$ y $(3x + 3)$ están en progresión geométrica, ¿cuál es el valor del cuarto término?	**15** La edad de Juan es el doble de la que Pedro tenía cuando Juan tenía la edad que Pedro tiene. Sus edades suman 49 años. ¿Cuáles son estas edades?	**16** A un ángulo agudo α se le suma la mitad de su complemento y se le resta la mitad de su suplemento. ¿Cuál es la medida del ángulo resultante?	**17** Si $4^x/2^{x+y} = 8$ y $9^{x+y}/3^{5y} = 243$, ¿Cuál es el valor de $x \cdot y$?	**18** Tres chicos y dos chicas van al cine, y se sientan en cinco asientos consecutivos, pero distribuidos en forma aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos chicas se sienten juntas?	**19** ¿Para cuántos valores de m la ecuación $x^2 + 2mx\sqrt{m^2 - 3} + 4 = 0$ tiene las raíces iguales? 
20 Si un mono se come 50 cambures en 10 días y otro mono se come 300 cambures en 30 días, ¿cuántps cambures, en promedio, se come el segundo mono con respecto al primero?	**21** Las pasas obtenidas al secar una cantidad de uvas pesan el 32% del total del peso de las uvas. ¿Qué cantidad de uvas se deben secar para obtener 2 kg de pasas?	**22** ¿En cuántos puntos se intersectan las gráficas de $y = x^2 - 4/x - 2$, $y = 2x$?	**23** En la figura, AB y CD son diámetros perpendiculares y el ángulo QPC mide 60°. ¿Cuál es el valor de PQ/AQ? 	**24** Efectuar: $\dfrac{(1-1/2)(1-1/3)}{(1-1/4)(1-1/5)}$	**25** En el siguiente cuadrado la suma de los valores colocados en sus filas, columnas y diagonales es constante. ¿Cuál es el valor de x? $\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline & x & \frac{10}{12} \\ \hline \frac{9}{12} & & \\ \hline \frac{4}{12} & \frac{11}{12} & \frac{6}{12} \\ \hline \end{array}$	**26** Si $\dfrac{A}{a} = \dfrac{B}{b}$ ¿cuál es el valor de la siguiente expresión $\sqrt{Aa} + \sqrt{Bb}$?
27 La edad de una persona al morir era 1/31 del año de su nacimiento. ¿Qué edad tenía en el año 1921?	**28** El peso promedio de 5 muchachos es 70 kg y el peso promedio de 4 muchachas es 61 kg. ¿Cuál es el peso promedio de los 9 jóvenes?	**29** El entero N es el cuadrado de un cuadrado y tiene a 18 como un factor. ¿Cuál es el menor valor de N/18?	**30** En la Figura se tiene EB = 1; EC = 2. ¿Cuál es el área del cuadrado ABCD? 	**31** ¿Cuantos números enteros elevados al cuadrado dan 1? 		"Divide las dificultades que examinas en tantas partes como sea posible para su mejor solución". R. Descartes

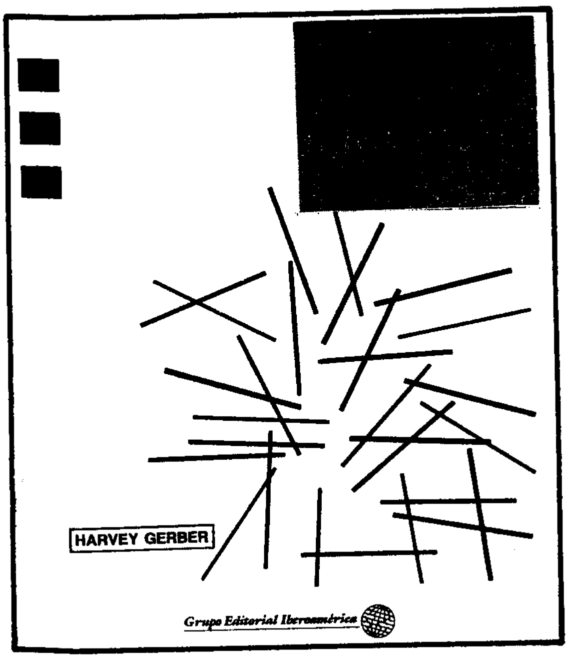
Octubre	1/8 y 1/10	$x^2/4(16-z)$	$x = y = 5$	año 2000	3,37,111	−16	3 kg	840	$A = (3 + \sqrt{3})\ cm^2$	$x^3 + y^3 = -2$	40 m	(1,5,2)	40 días	6	$n_9 = 19$
Noviembre	10 veces	1	25	50°	1,6 onzas	1/2	y	la blanca doble	K	6 años	20°	$s_p - s_i = 600$	3 cuadrados	2,0,−2	15 días y medio
Diciembre	100 almendras 200 pasas	$\gamma = 50°$	5/2 veces	por lo menos 4	1/4	jueves	150%	$d = \sqrt{2}$	4m	10/9	30	$ab = 1$	9 min	−27/2	$x = 28$, $y = 21$

NOVEDAD

ÁLGEBRA LINEAL

Harvey Gerber
Simón Fraser University

Una introducción de Álgebra Lineal sencilla, clara y con excelente presentación gráfica y pedagógica.



506 páginas
Impreso a dos tintas
Encuadernado en rústica
Formato 190 × 238 mm
ISBN 968-7270-63-2

El propósito de este libro es presentar los temas de Álgebra Lineal desarrollando ideas intuitivas, enfocando geométrica y gráficamente los temas más abstractos y desarrollando habilidades en los alumnos para resolver ejercicios y notas históricas

- Contempla cerca de 2000 ejercicios y más de 300 ejemplos.
- Se incluye, al final de cada capítulo, una lista de los teoremas y corolarios más importantes, así como una lista de las palabras y conceptos claves.
- Presenta al final de cada capítulo biografías de los matemáticos más destacados.
- A través de todo el texto se introducen aplicaciones de Algebra Lineal al cálculo, a la computación, economía, estadística, ingeniería, etc.
- El texto se presenta en 2 colores para destacar las definiciones de teoremas, corolarios, ejemplos, definiciones, etc.
- Tiene una presentación única en el desarrollo de ejemplos y teoremas seguidos de problemas en base a esos ejemplos, teoremas y corolarios.

Para mayor información envie los siguientes datos:

Nombre ______________________ Universidad ______________________

Dirección ______________________ Curso que imparte ______________________

Grupo Editorial Iberoamérica
Río Ganges No. 64-06500 México, D.F. - Tels. 5112517, 2087741