■ EDUCACIÓN MATEMÁTICA ■ Vol. 5 - No. 1 • Abril 1993 ■ © GEI ■ Pág. 11 ■

ARTICULOS

Un Recurso para la Enseñanza de la Geometría

RESUMEN

De los recursos didácticos aprovechables en la geometría euclideana para construir formas geométricas se optó por el material elaborado con papel a base de dobleces. Tiene ventajas por su economía en tiempo, esfuerzo y costo. Propicia la exploración de situaciones novedosas dentro de la matemática escolar. El escrito se inicia mencionando cinco posibles formas de utilizar el recurso en cuestión, y se concentra en la primera presentando un somero estudio sobre polígonos. Se exponen los conceptos geométricos necesarios y criterios para la construcción de polígonos mediante el doblado de papel.

1. INTRODUCCIÓN

Frecuentemente la enseñanza de la geometría se hace más abstracta de lo necesario. En ocasiones se prescinde del entorno que rodea al hombre, aun siendo uno de los medios más idóneos para estudiar los objetos geométricos. Pueden aprovecharse recursos manipulables que son familiares al estudiante. Entre ellos se encuentra el material para diseño por doblado de papel. Con este recurso, el estudio de proposiciones, axiomas y conceptos geométricos introductorios se hace más plausible. El uso del papel doblado en la enseñanza de la geometría constituye un apoyo importante en los aspectos siguientes:

1. Permite construir objetos geométricos del plano y del espacio. Por ejemplo, polígonos y poliedros.

2. Se pueden ilustrar diversos conceptos y verificar propiedades al enseñar proposiciones geométricas. Por ejemplo, para ilustrar teoremas sobre concurrencia de rectas cevianas en un triángulo: medianas, alturas y bisectrices.

3. Propicia la reflexión en torno a múltiples temas que forman parte de la matemática escolar. Construir figuras geométricas por medio de papel plegado da pie al surgimiento de proposiciones no previstas en la matemática escolar, que al demostrarlas, se fomenta la investigación en el seno de la matemá-

Vicente Carrión Miranda,

Sección de Matemática Educativa,
CINVESTAV, México

tica elemental. Por ejemplo, indagar sobre concurrencia de rectas cevianas en ciertos polígonos; o encontrar las dimensiones de una hoja de papel, tal que —a base de dobleces— se obtenga alguna figura regular.

4. Es posible establecer el contenido de un curso de geometría del nivel medio (básico o superior), con el recurso del doblado de papel.

5. Se puede precisar un conjunto de axiomas para el doblado de papel y con base en ellos edificar una estructura geométrica sencilla.

A continuación se trata parcialmente el primer aspecto señalado. El objetivo principal del trabajo es describir y argumentar la construcción de polígonos regulares mediante el doblado de papel. No obstante que el estudio se restringe al plano, lineamientos semejantes pueden extenderse a la construcción de poliedros.

2. POLÍGONOS

Recuérdese que polígono es una figura cerrada delimitada por los n segmentos de recta A_{k-1}, A_k, siendo $k = 1, 2, \ldots, n$, los lados del polígono. Un polígono de n lados se denota con el símbolo $\{n\}$. Se asignan nombres según el número de lados: Triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, heptágono, octágono, eneágono (o nonágono), decágono, undecágono, duodecágono y pentadecágono, son nombres para los polígonos de *3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12* y *15* lados, respectivamente. En ocasiones se incluye al polígono de dos lados, el *dígono*, en el que sus dos lados coinciden.

Un polígono descompone al plano que lo contiene en dos regiones; una de ellas, llamada *interior*, es finita. Hay veces que conviene considerar al polígono de n lados como la figura que consiste en su interior, sus lados y sus vértices; esto es, como una región del plano *simplemente conexa* limitada por n segmentos de recta (Simplemente conexa —intuitivamente— significa que la región *es de una sola pieza* y no contiene *huecos*).

Los elementos de un polígono son los siguientes:

- **Vértice.** Punto donde concurren dos lados consecutivos.

- **Diagonal.** Segmento de recta que une dos vértices no pertenecientes a un mismo lado.

- **Ángulo interior.** Ángulo que contiene el interior del polígono o una parte, y se forma por dos lados que concurren en un vértice.

- Ángulo exterior. Cualquiera de los dos ángulos adyacentes a uno que es interior.

Un polígono es *equilátero* si todos sus lados son congruentes. Es *equiángulo* si todos sus ángulos interiores son congruentes. Es *regular* si, a la vez, es equilátero y equiángulo. Por ejemplo, el rombo es del primer tipo, el rectángulo del segundo, y el cuadrado es regular.

Una característica de los polígonos regulares es que se pueden inscribir en y circunscribir por circunferencias. El centro O y el radio R_n de un polígono regular de n lados son, respectivamente, el centro y el radio de su circunferencia circunscrita. El apotema es el radio r_n de la circunferencia inscrita al polígono. El ángulo central, θ_n, tiene su vértice en el centro del polígono y se forma por dos radios que pasan por dos vértices consecutivos de la figura.

3. POLÍGONOS REGULARES CONVEXOS

Un polígono es *convexo* si dados dos puntos en su interior, el segmento de recta que une esos puntos está contenido en el polígono.

Otra forma conveniente de definir un polígono regular convexo es partir de dos puntos O y A_0; el punto O es fijo. Mediante rotaciones del segmento OA_0 que describen sucesivamente ángulos de medida $\frac{2\pi}{n}$ alrededor del punto O, se obtienen los vértices A_k, siendo $k = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Es decir, las rotaciones del segmento OA_0 alrededor del punto O, describiendo los ángulos $\theta, 2\theta, \ldots, n\theta$, transforman el punto $A_0 \neq 0$ en los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_0$, respectivamente. Estos puntos se encuentran sobre la circunferencia de radio OA_0 y centro O. Si un múltiplo de θ coincide con un múltiplo de 2π, existe entonces un número finito de puntos A_k.

Un polígono también se define en términos de coordenadas cartesianas. Primero, mediante un sistema consistente de desigualdades de la forma

$$a_k x + b_k y \leq c_k, \text{ siendo } k = 0, 1, \ldots, n - 1$$

Si uno de los vértices está en el eje $x'x$ existe otra manera de utilizar coordenadas cartesianas en la definición de un polígono regular de n lados y radio R_n. Los vértices se expresan por las coordenadas

$$\left(R_n \cos \frac{2\pi k}{n}, R_n \operatorname{sen} \frac{2\pi k}{n}\right), k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

Por ejemplo, las coordenadas de los vértices de un pentágono regular convexo (Fig. 1) de radio R, si el vértice A_0 está en el eje $x'x$, son las siguientes:

$$A_0 = (R \cos 0°, R \operatorname{sen} 0°) = (R, 0)$$

$$A_1 = (R \cos 72°, R \operatorname{sen} 72°) = \left(\frac{R}{4}(\sqrt{5} - 1), \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)$$

$$A_2 = (R \cos 144°, R \operatorname{sen} 144°) = \left(-\frac{R}{4}(\sqrt{5} + 1), \frac{R}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)$$

$$A_3 = (R \cos 216°, R \operatorname{sen} 216°) = \left(-\frac{R}{4}(\sqrt{5} + 1), -\frac{R}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)$$

$$A_4 = (R \cos 288°, R \operatorname{sen} 288°) = \left(\frac{R}{4}(\sqrt{5} - 1), -\frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right)$$

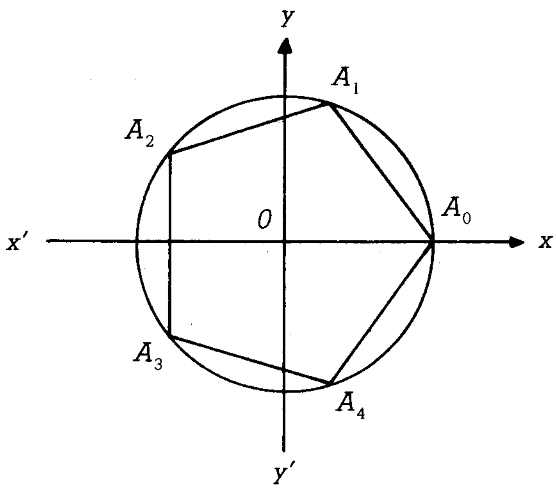


Figura 1

Lo anterior es posible expresarlo en términos de números complejos, considerando que los vértices del polígono regular de n lados y de radio R_n, están en el plano complejo. Si uno de los vértices se encuentra sobre el eje real, $x'x$, entonces las soluciones de la siguiente ecuación representan los n vértices del polígono.

$$Z = r\, e^{\frac{2\pi k i}{n}}, \text{ donde } i^2 = -1 \text{ y } r = \left| R_n \right|$$

Tales soluciones son

$$Z = R_n \left(\cos \frac{2\pi k}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

3.1 PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS REGULARES CONVEXOS

Algunas propiedades de los polígonos regulares convexos son las siguientes:

- El número de diagonales, d, de un polígono de n lados es $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$.
- La suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono es igual a la medida de dos ángulos rectos multiplicada por el número de lados del polígono, menos dos; es decir, $\pi(n-2)$.
- La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono es igual a la medida de cuatro ángulos rectos.
- Los ángulos centrales de un polígono regular convexo son suplemento de los correspondientes ángulos interiores. Por consiguiente, son congruentes con los exteriores.

- Dos polígonos regulares convexos de igual número de lados son semejantes. Dos polígonos son semejantes si tienen, respectivamente, sus ángulos congruentes y los lados homólogos proporcionales.

La siguiente figura representa un polígono regular convexo de n lados.

$AB = \ell_n$ (lado),

$OM \perp AB$,

$AM = MB = \frac{\ell_n}{2}$,

$\measuredangle AOB = \theta_n$ (ángulo central),

$\measuredangle AOM = \measuredangle MOB = \frac{\theta_n}{2}$,

$OA = OB = R_n$ (radio),

$OM = r_n$ (apotema),

$\measuredangle DEF = \beta_n$ (ángulo exterior),

$\measuredangle C = \alpha_n$ (ángulo interior),

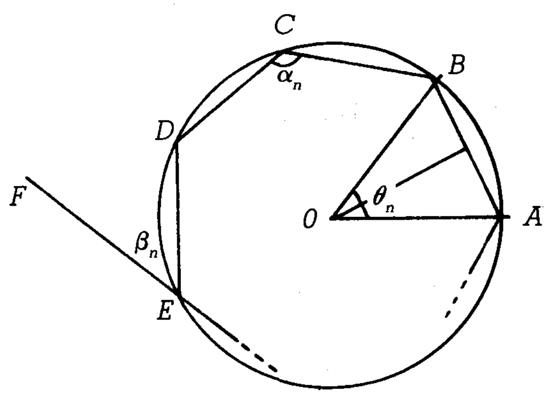


Figura 2

Algunas propiedades que se deducen de la Fig. 2 son las siguientes:

- La medida del ángulo central es $\theta_n = \frac{2\pi}{n}$.

- La medida del ángulo interior es $\alpha_n = \frac{\pi}{n}(n-2)$.

- La medida del ángulo exterior es $\beta_n = \frac{2\pi}{n} = \theta_n$.

- Los radios de las circunferencias circunsrita e inscrita, R_n y r_n, respectivamente, se calculan con las fórmulas

$$R_n = \frac{\ell_n}{2} \csc\left(\frac{\pi}{n}\right) \qquad r_n = \frac{\ell_n}{2} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Puesto que en el triángulo rectángulo AMO se tiene lo siguiente:

$$AM = \frac{\ell_n}{2}, \qquad \measuredangle MOA = \frac{\theta_n}{2}, \qquad \csc\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = \frac{OA}{AM} = \frac{R_n}{\frac{\ell_n}{2}}$$

y

$$\cot\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = \frac{OM}{AM} = \frac{r_n}{\frac{\ell_n}{2}}$$

Se sustituye $\theta_n = \frac{2\pi}{n}$, y se despejan R_n y r_n >>.

En la Tabla 1 se resumen las medidas de los ángulos centrales, interiores y exteriores de polígonos regulares convexos de tres a veinte lados. El conocimiento de estos valores y de las propiedades listadas permite la construcción de polígonos por doblado de papel. El símbolo $\doteq$ significa "es aproximadamente igual a".

3.2. CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES CONVEXOS POR DOBLADO DE PAPEL

En lo que sigue se exponen criterios para construir polígonos regulares convexos. Se presentan dos métodos, a saber:

I. El primero consiste en ciertas reglas para anudar bandas de papel de bordes paralelos.

II. El segundo, bajo el conocimiento de los lados y ángulos del polígono, sin realizar nudos y con ciertos principios generales para doblar papel, se construyen los polígonos.

A continuación se describen ambos métodos. Las figuras muestran la construcción de los polígonos. Es comprensible que este enfoque se apoye con otros recursos geométricos no tratados aquí; por ejemplo, el uso de instrumentos geométricos, construcciones con regla y compás, etc.

3.2.1. MÉTODO I.

Se requieren una o dos bandas (o tiras) según la paridad de n, el número de lados del polígono; una si es impar, y dos, si es par. Más aún, si n es par deben

TABLA 1

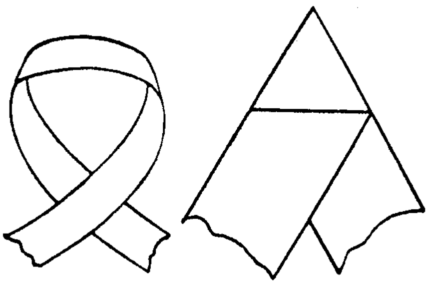
POLIGONO (n)	ANGULO CENTRAL $\theta_n = \frac{2\pi}{n}$	ANGULO INTERIOR $\alpha_n = \frac{\pi(n-2)}{n}$	ANGULO EXTERIOR $\beta_n = \frac{2\pi}{n}$
(3)	$\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$
(4)	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$
(5)	$\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$	$\frac{3\pi}{5} = 108^\circ$	$\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$
(6)	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$
(7)	$\frac{2\pi}{7} \doteq 51^\circ.4286$	$\frac{5\pi}{7} \doteq 128^\circ.5714$	$\frac{2\pi}{7} \doteq 51^\circ.4286$
(8)	$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$	$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$
(9)	$\frac{2\pi}{9} = 40^\circ$	$\frac{7\pi}{9} = 140^\circ$	$\frac{2\pi}{9} = 40^\circ$
(10)	$\frac{\pi}{5} = 36^\circ$	$\frac{4\pi}{5} = 144^\circ$	$\frac{\pi}{5} = 36^\circ$
(11)	$\frac{2\pi}{11} \doteq 32^\circ.7273$	$\frac{9\pi}{11} \doteq 147^\circ.2728$	$\frac{2\pi}{11} \doteq 32^\circ.7273$
(12)	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$
(13)	$\frac{2\pi}{13} \doteq 27^\circ.6923$	$\frac{11\pi}{13} \doteq 152^\circ.3067$	$\frac{2\pi}{13} \doteq 27^\circ.6923$
(14)	$\frac{\pi}{7} \doteq 25^\circ.7193$	$\frac{6\pi}{7} \doteq 154^\circ.2857$	$\frac{\pi}{7} \doteq 25^\circ.7193$
(15)	$\frac{2\pi}{15} = 24^\circ$	$\frac{13\pi}{15} = 156^\circ$	$\frac{2\pi}{15} = 24^\circ$
(16)	$\frac{\pi}{8} = 22^\circ.5000$	$\frac{7\pi}{8} = 157^\circ.5000$	$\frac{\pi}{8} = 22^\circ.5000$
(17)	$\frac{2\pi}{17} \doteq 21^\circ.1765$	$\frac{15\pi}{17} \doteq 158^\circ.8235$	$\frac{2\pi}{17} \doteq 21^\circ.1765$
(18)	$\frac{\pi}{9} = 20^\circ$	$\frac{8\pi}{9} = 160^\circ$	$\frac{\pi}{9} = 20^\circ$
(19)	$\frac{2\pi}{19} \doteq 18^\circ.9474$	$\frac{17\pi}{19} \doteq 161^\circ.0526$	$\frac{2\pi}{19} \doteq 18^\circ.9474$
(20)	$\frac{\pi}{10} = 18^\circ$	$\frac{9\pi}{10} = 162^\circ$	$\frac{\pi}{10} = 18^\circ$

considerarse dos casos: cuando n es múltiplo de cuatro o cuando n es par y no es múltiplo de cuatro.

3.2.1.a. PRIMER CASO

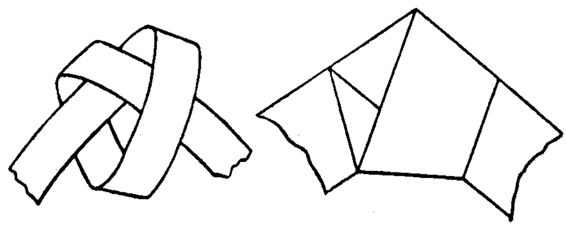
Si el número de lados del polígono es impar se requiere, según se dijo, solamente una tira de papel de lados paralelos. A excepción del triángulo equilátero, la conformación utilizada para construir polígonos de un número impar de lados se emplea para confeccionar polígonos que tienen el siguiente número impar de lados, entrelazando adecuadamente una nueva vuelta y ajustando los nudos. Es decir, para construir el polígono de $2k + 1$ lados se utiliza la estructura de papel hecha para el polígono de $2k - 1$ lados, $k = 2, 3, \ldots, m$.

Primeramente se construye el triángulo equilátero y de éste se obtiene el pentágono haciendo un nudo simple y estrechándolo hasta darle la forma precisa. Véase la Fig. 3 y la Fig. 4.



{3}

Figura 3

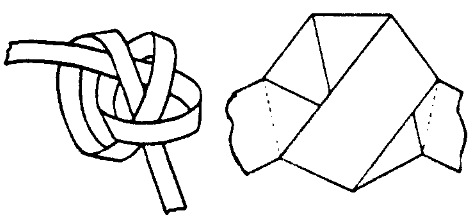


{5}

Figura 4

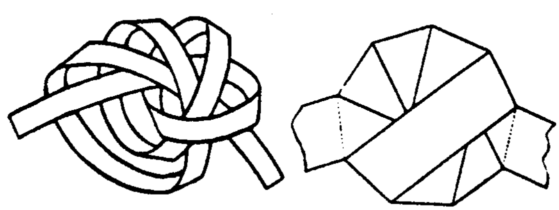
De cinco lados en adelante es fácil demostrar que son regulares los polígonos construidos. La demostración se desprende de la congruencia de los trapecios isósceles marcados al desplegar el papel.

El heptágono se obtiene introduciendo un extremo de la banda en la configuración del pentágono, y el eneágono se tiene al insertar una punta del papel en el esquema del heptágono, según se ilustra en las Figs. 5 y 6.



{7}

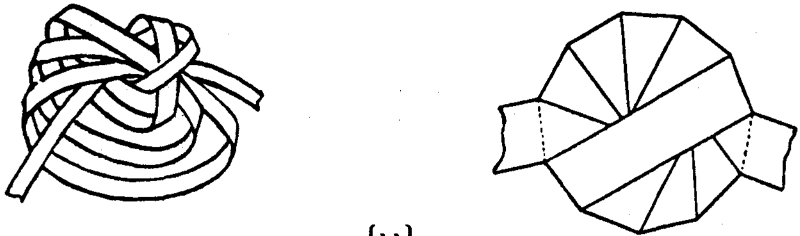
Figura 5



{9}

Figura 6

Se presenta, además, la configuración del undecágono (Fig. 7).

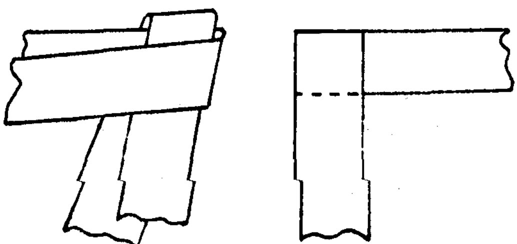


{11}

Figura 7

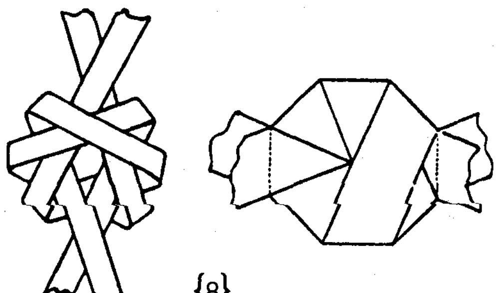
3.2.1.b. SEGUNDO CASO

Si el polígono tiene cuatro lados se toman dos tiras o bandas. Cada una se dobla de manera que la marca del doblez sea perpendicular a los márgenes de la tira de papel. Después se enlazan como se muestra en la Fig. 8. Si el número de lados del polígono es de la forma $n = 4k$, para $k = 2, 3, \ldots m$, la construcción se realiza acoplando apropiadamente las configuraciones de dos polígonos de $2k + 1$. Por ejemplo, para $n = 8$ (Fig. 9) intervienen dos configuraciones de polígonos de 5 lados.



{4}

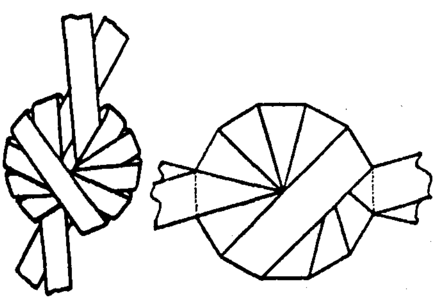
Figura 8



{8}

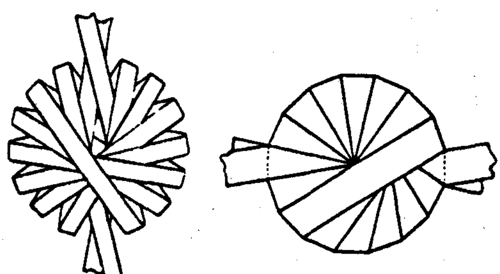
Figura 9

Si $n = 12$ (Fig. 10) se requieren dos estructuras de los polígonos de 7 lados, y si $n = 16$ (Fig. 11) se utilizan dos de 9 lados.



{12}

Figura 10

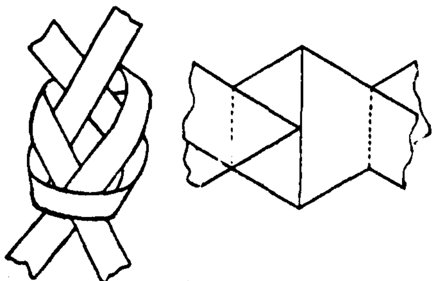


{16}

Figura 11

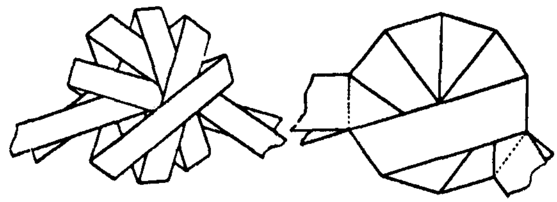
3.2.1.c. TERCER CASO

El hexágono regular (Fig. 12) se construye con dos estructuras de triángulo equilátero. Sin embargo, si $n = 4k + 2$, siendo $k = 2, 3, ..., m$, se hacen mediante las configuraciones de otros dos, uno de $2k + 1$ lados y otro de $2k + 3$ lados. El hexágono es una excepción a esta propiedad. Por ejemplo, si $n = 10$ (Fig. 13) se utilizan las composiciones de los polígonos de 5 y 7 lados.



$\{6\}$

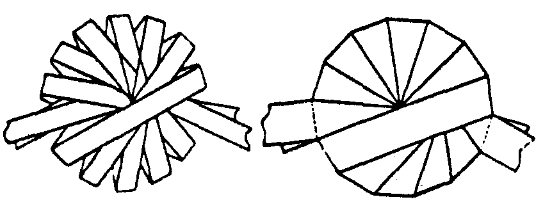
Figura 12



$\{10\}$

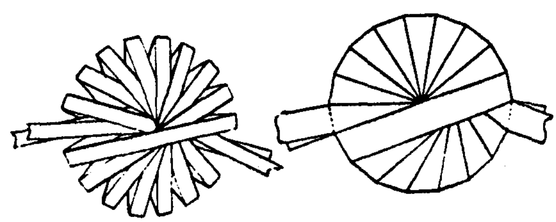
Figura 13

Si $n = 14$ se emplean dos conformaciones de los polígonos, de 7 y 9 lados (Fig. 14). Si $n = 18$ se requieren las de 9 y 11 lados (Fig. 15).



$\{14\}$

Figura 14



$\{18\}$

Figura 15

3.2.2. MÉTODO II.

Este método no comprende casos como el anterior. En uno de los bordes de una banda de papel de ancho uniforme se marcan n puntos, $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$, los vértices del polígono regular convexo de n lados. Los puntos quedan espaciados a una distancia constante ℓ_n, la medida del lado. En cada uno de los

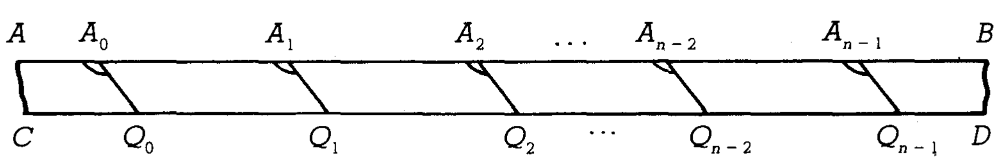


Figura 16

puntos A_i, siendo $i = 0, 1, \ldots, n-1$, se trazan ángulos congruentes a los ángulos interiores del polígono. Es decir, se construyen los ángulos (Fig. 16):

$$AA_0Q_0,\ A_0A_1Q_1,\ \ldots,\ A_{n-2}A_{n-1}Q_{n-1},\ \text{todos de medida } \alpha_n = \frac{\pi(n-2)}{n}.$$

Luego se trazan las bisectrices de los ángulos adyacentes suplementarios a cada uno de ios ángulos trazados anteriormente. Esto es, se trazan las bisectrices A_0R_0, A_1R_1, ..., $A_{n-1}\,R_{n-1}$, correspondientes a los ángulos $A_1A_0Q_0$, $A_2A_1Q_1$, ..., $BA_{n-1}Q_{n-1}$. Cada uno de los ángulos resultantes de la bisección mide π/n. Por ejemplo,

$$\measuredangle R_0A_0Q_0 = \frac{1}{2}(\measuredangle A_1A_0Q_0) = \frac{\pi}{n}$$

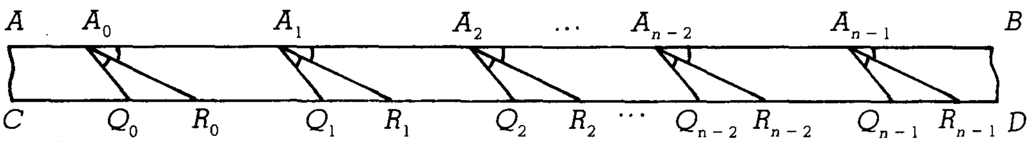


Figura 17

El polígono se construye doblando sucesivamente el papel por las líneas marcadas. La Fig. 18 ($a-e$) ejemplifica el esquema del pentágono. La medida del ángulo interior, obtenido de la Tabla 1, de la página 17, es,

$$\measuredangle AA_0Q_0 = 108°;\ \text{además},\ \measuredangle Q_0A_0R_0 = \measuredangle R_0A_0A_1 = 36°.$$

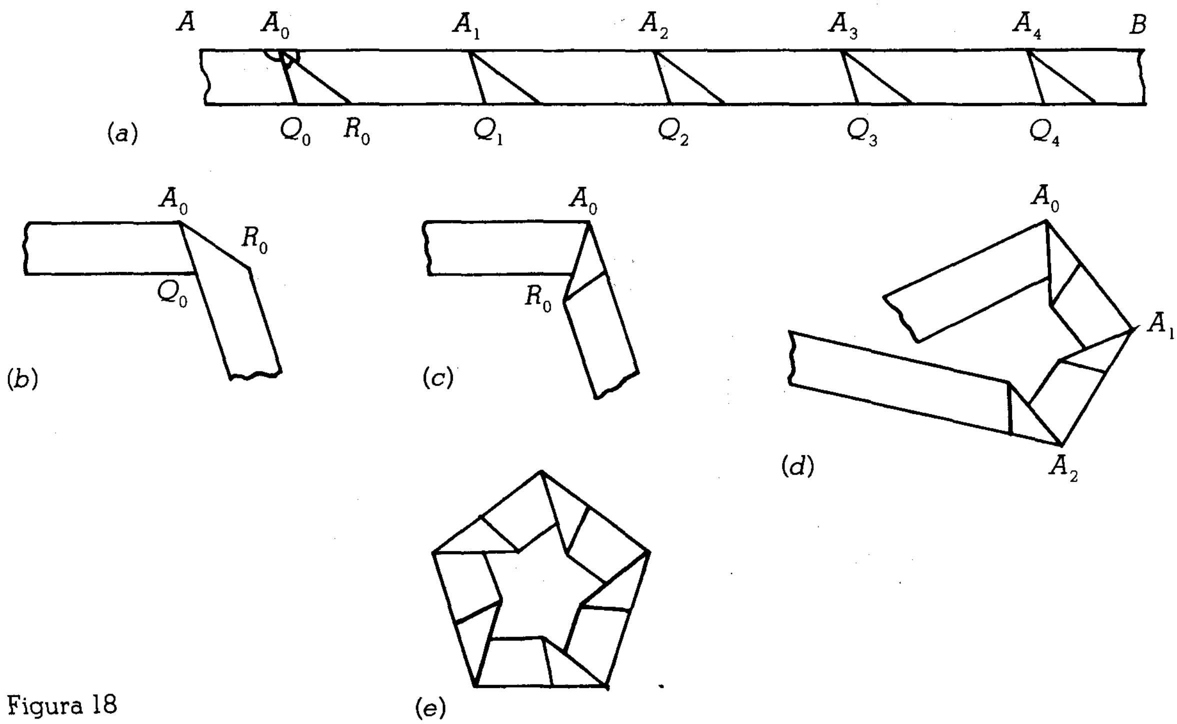
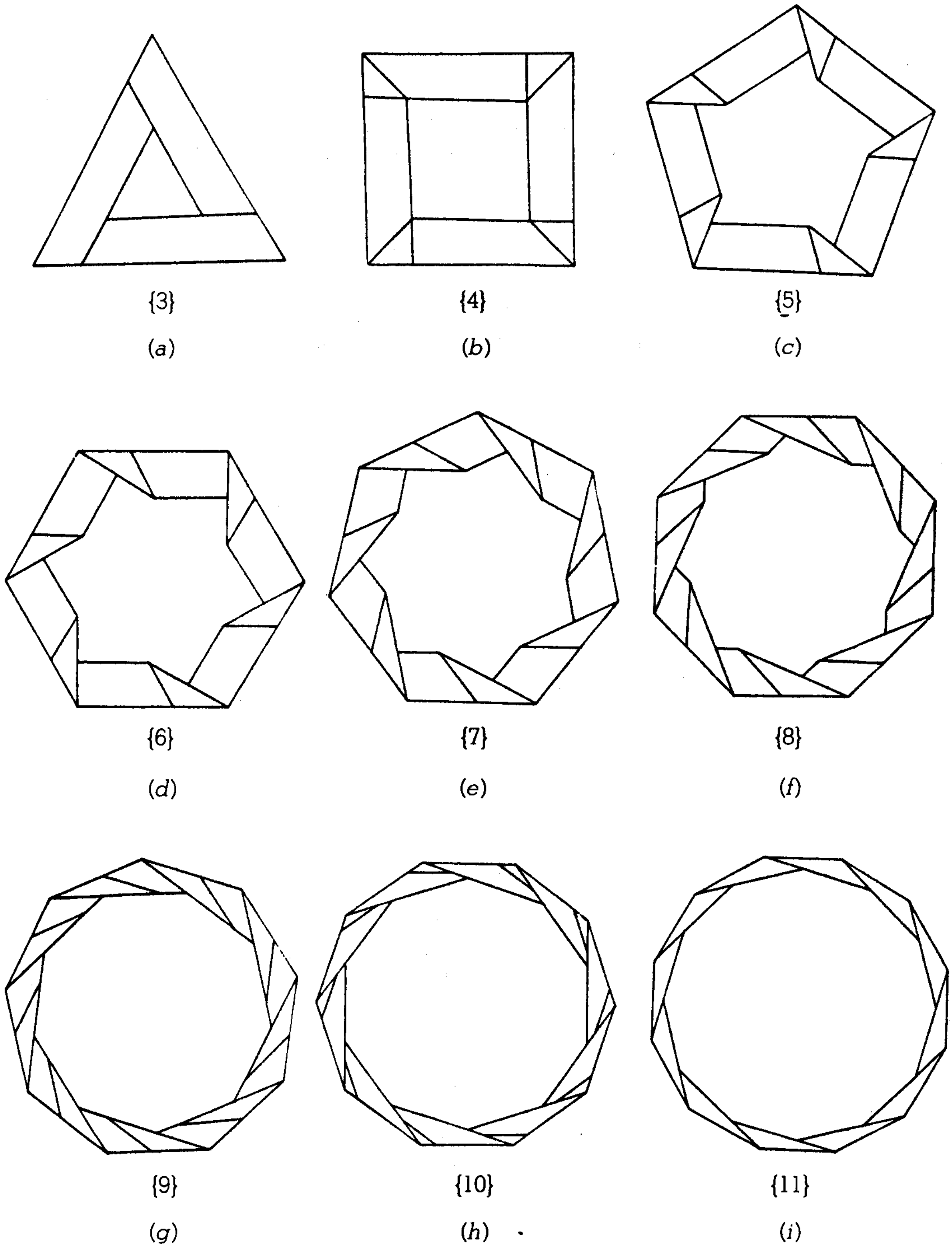
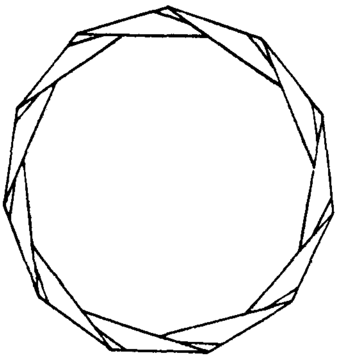


Figura 18

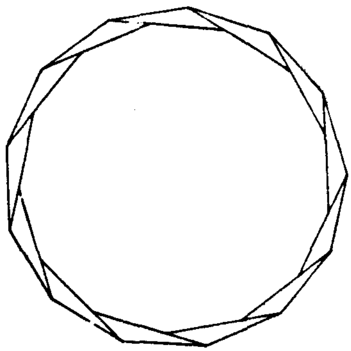
En la Fig. 19 ($a - m$) se presentan algunos polígonos regulares convexos construidos por este método.





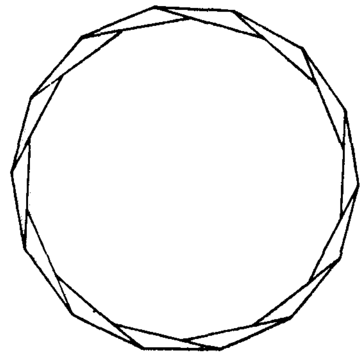
{12}

(*j*)



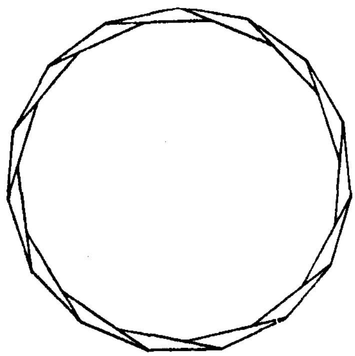
{13}

(*k*)



{14}

(*l*)



{15}

(*m*)

Figura 19

4. POLÍGONOS ESTRELLADOS

Se extiende la idea de polígono regular de n lados aceptando que $n = p/q$ es cualquier número racional mayor que 2. Como se dijo anteriormente, si se divide una circunferencia en p arcos congruentes y se unen uno a uno los puntos de división, se obtiene un polígono regular convexo de p lados. Sin embargo, si se unen de dos en dos, siendo p número par, $p \geq 6$, se obtienen dos polígonos regulares convexos de $p/2$ lados. La Fig. 20 ($a - d$) muestra circunferencias divididas por 8, 10, 12 y 14 arcos congruentes. Se forman, respectivamente, dos cuadrados, dos pentágonos, dos hexágonos y dos heptágonos.

Si p es impar y $p \geq 5$, uniendo sucesivamente los puntos de división de dos en dos y partiendo de un punto inicial se vuelve al punto de partida después de recorrer dos vueltas, y se produce sólo un polígono. Las circunferencias de la Fig. 21 ($a - d$) están divididas en 5, 7, 9 y 11 arcos congruentes. Se han obteni-

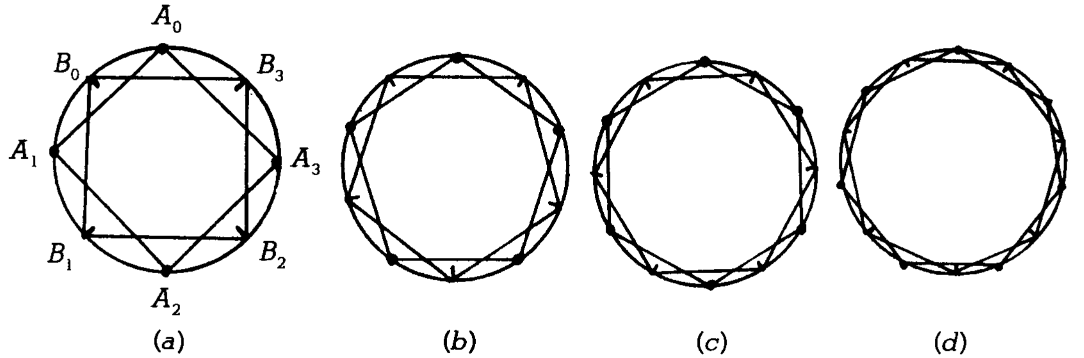


Figura 20

do un pentágono, un heptágono, un eneágono y un undecágono, respectivamente; todos regulares y no convexos.

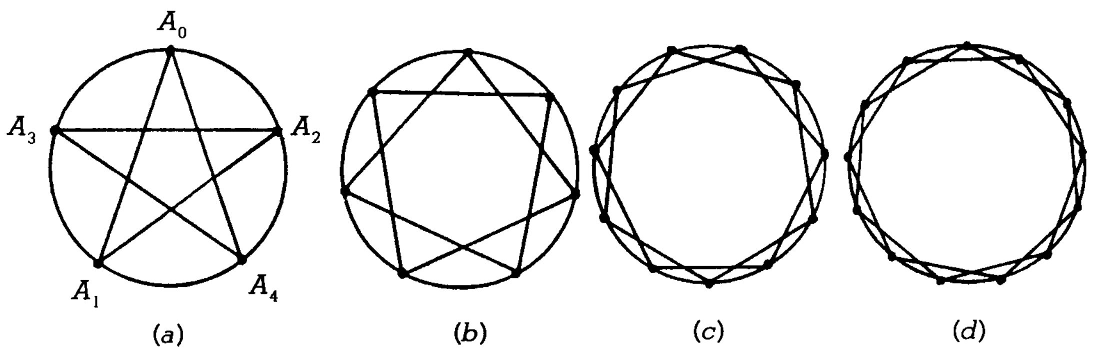


Figura 21

Si n es múltiplo de 3 y la circunferencia se corta en n arcos congruentes y los puntos de división se unen, consecutivamente, de tres en tres, se obtienen tres polígonos regulares convexos de $n/3$ lados. Se ilustran en la Fig. 22 (a – d) circunferencias divididas en 9, 12, 15 y 18 partes. Se forman tres triángulos equiláteros, tres cuadrados, tres pentágonos, tres hexágonos y tres eneágonos, respectivamente.

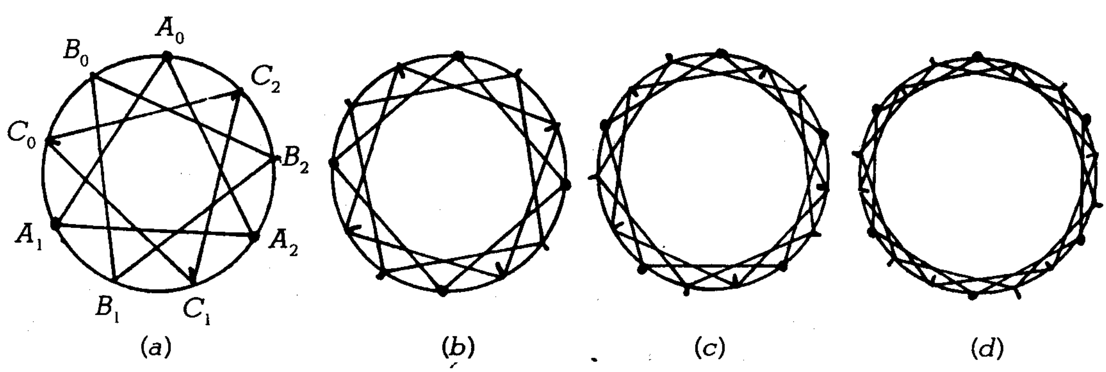
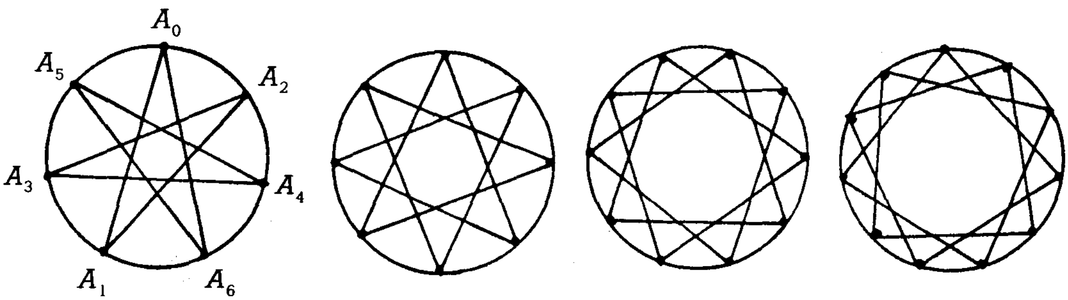


Figura 22



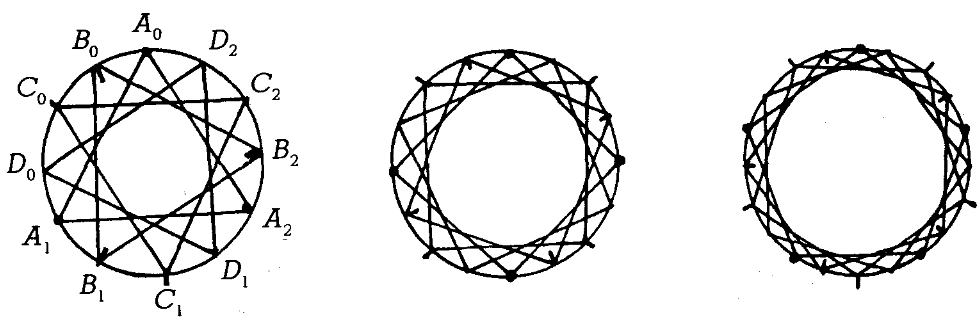
(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

Figura 23

Si p y 3, son primos entre sí, y $n \geq 7$, al unir los puntos de tres en tres, se produce sólo un polígono después de recorrer tres vueltas. La Fig. 23 ($a - d$) ilustra circunferencias divididas en 7, 8, 10 y 11 arcos congruentes. Se forman, respectivamente, un heptágono, un octágono, un decágono y un undecágono. Estos polígonos son regulares y no convexos.

Al dividir la circunferencia en p partes congruentes y unir de cuatro en cuatro los puntos de división pueden presentarse los siguientes casos:

1. Se tiene que n es múltiplo de 4. Entonces hay cuatro polígonos regulares convexos de $n/4$ lados, $n \geq 12$. Por ejemplo, las circunferencias de la Fig. 24 ($a - c$) se han dividido en 12, 16 y 20 arcos congruentes y se obtuvieron, respectivamente, cuatro triángulos equiláteros, cuatro cuadrados y cuatro pentágonos.

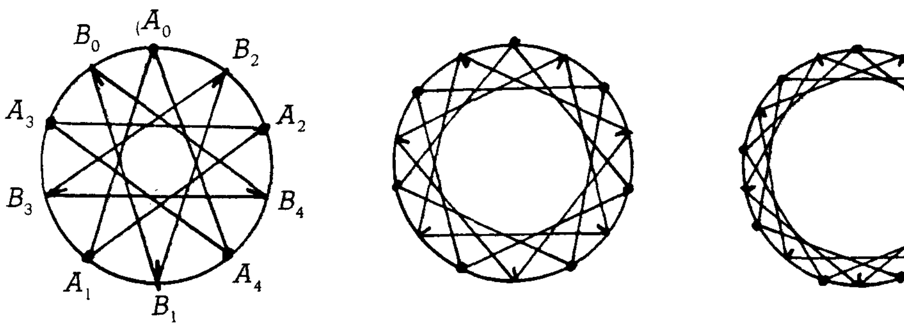


(*a*) (*b*) (*c*)

Figura 24

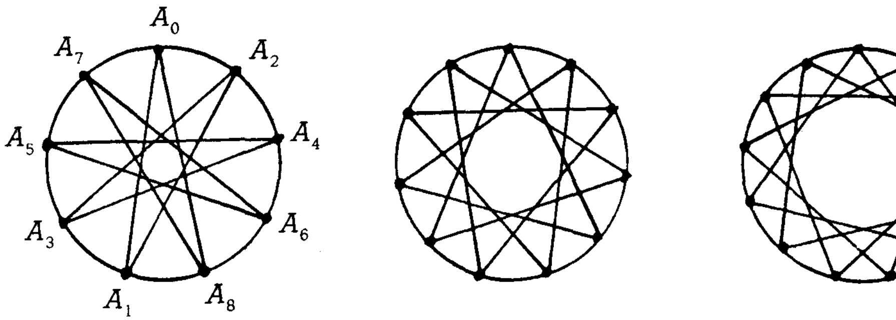
2. El máximo común divisor de n y 4 es 2. Se obtienen así dos polígonos regulares no convexos de $n/4$ lados, $n \geq 10$. Se ejemplifica, Fig. 25 ($a - c$) con tres circunferencias divididas en 10, 14 y 18 arcos congruentes. Se obtienen, respectivamente, dos pentágonos, dos heptágonos y dos eneágonos; todos regulares y no convexos.

3. n y 4 son primos entre sí y $n \geq 9$. Se obtiene sólo un polígono después de recorrer cuatro vueltas. En la Fig. 26 ($a - c$) se indican tres circunferencias divididas en 9, 11 y 13 arcos congruentes. Se tienen, respectivamente, un eneágono, un polígono de once lados y uno de trece; todos regulares y no convexos.



(a) (b) (c)

Figura 25



(a) (b) (c)

Figura 26

En términos generales, si la circunferencia de centro O y radio OP_0 se divide en p arcos congruentes por medio de los puntos

$$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$$

y, a partir de P_0, los puntos de división se unen sucesivamente de q en q, se obtienen los segmentos de recta

$$P_0P_q, P_qP_{2q}, \ldots, P_{kq}P_{(k+1)q}, \ldots, P_{p-2q}P_{p-q}, P_{p-q}P_0.$$

Si $kq > p$ entonces el segmento $P_{kq}P_{(k+1)q}$ es igual al segmento $P_\lambda P_{\lambda+q}$, donde $0 \leq \lambda < p$ y $kq \equiv \lambda (\text{mód } p)$[1].

Estos segmentos son los lados de un polígono regular. Es regular porque tanto sus ángulos centrales como sus lados son congruentes. Al arco A_kA_{k+1}, $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ le corresponde un ángulo de medida $\measuredangle P_kOP_{k+1} = 2\pi/p = \theta_p$.

En consecuencia, uniendo de q en q los p puntos de división se regresa al punto de partida cada vez que el número de arcos recorridos es igual a cualquier múltiplo común de los productos $p\theta_p$ y $q\theta_p$; y vuelve por primera vez al punto

[1] La expresión $a \equiv b(\text{mód } m)$ donde a y b son enteros y $m > 0$ significa $a - b = mk$, k entero; es decir, $a - b$ es múltiplo de m.

inicial cuando ese número de arcos recorridos es el mínimo común múltiplo de $p\theta_p$ y $q\theta_p$, o sea, $pq\theta_p$.

Existen varias probabilidades, a saber:

1. El máximo común divisor de p y q es q; es decir, p es múltiplo de q, $p/q \geq 3$. Se producen q polígonos convexos de p/q lados, puesto que $q\theta_p$ es divisor propio de $p\theta_q$.

2. El máximo común divisor de p y q es d, $d \neq 1$ y $d \neq q$. Se obtienen d polígonos de p/q lados, $p \geq 10$. Los lados de cada polígono se cruzan.

3. p y q son primos entre sí. El polígono tiene p lados y regresa a su punto inicial por primera vez después de recorrer un ángulo igual a p veces el ángulo $q\theta_p$. Esto es, después de q veces la circunferencia $p\theta_p$.

La definición de polígono regular en general surge de la idea de trazarlo por el movimiento de un punto que describe continuamente cuerdas congruentes en una circunferencia fija, y regresa a su posición original después de definir p cuerdas y recorrer q vueltas. Si $n = p/q$ es un número racional, $n > 2$, p y q son primos entre sí y $q < p/2$ entonces, los vértices de un polígono regular en general, se definen por los puntos A_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$, obtenidos a partir de A_0 por medio de rotaciones sobre el círculo de centro O y radio OA_0, que recorren sucesivamente un ángulo de medida $2\pi/n = 2\pi q/p$. Una semirrecta de origen O que no pasa por alguno de los vértices, corta a q lados, de los p que tiene el polígono.

Un polígono, en general, se denota con el símbolo $\{n\} = \{p/q\}$, o también, $\mathcal{P}^{q}_{p}$. En lo sucesivo se usará la segunda notación. Obsérvese que $\{n\} = \{n/1\}$.

La densidad de un polígono se define con el número natural q. Si $q = 1$ el polígono resultante es convexo. Los polígonos que se obtienen para $q > 1$ se denominan *polígonos estrellados*. Sus lados se cruzan en puntos que no son vértices. Algunos nombres para polígonos estrellados son los siguientes:

pentagrama $\{5/2\}$, *octagrama* $\{8/3\}$, *decagrama* $\{10/3\{$ y *dodecagrama* $\{12/5\}$.

Recuérdese que, por el algoritmo de la división, existen los números naturales c y r, tales que $q = cp + r$, $0 \leq r < p$. En consecuencia, el polígono $\{p/q\}$ es igual al polígono $\{p/r\}$. Por ejemplo, $\{7/3\} = \{7/10\} = \{7/17\}$. Véase la Fig. 27.

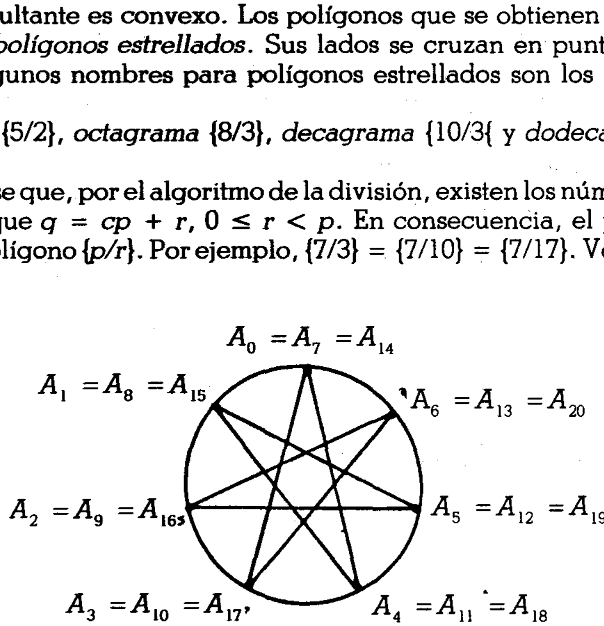


Figura 27

Obsérvese que unir de q en q los puntos de división de la circunferencia es lo mismo que unirlos de $p - q$ en $p - q$, puesto que si una cuerda subtiende un arco menor que una semicircunferencia, también subtiende un arco mayor que la misma semicircunferencia. Ambos suman 2π. Entonces, las expresiones $\{p/q\}$ y $\{p/p - q\}$ representan polígonos congruentes en posiciones distintas; los vértices de uno y otro son puntos simétricos respecto a una recta que pasa por el centro de la circunferencia circunscrita al polígono. La Fig. 28 (a, b) ilustra el caso en que $p = 3$ y $q = 4$.

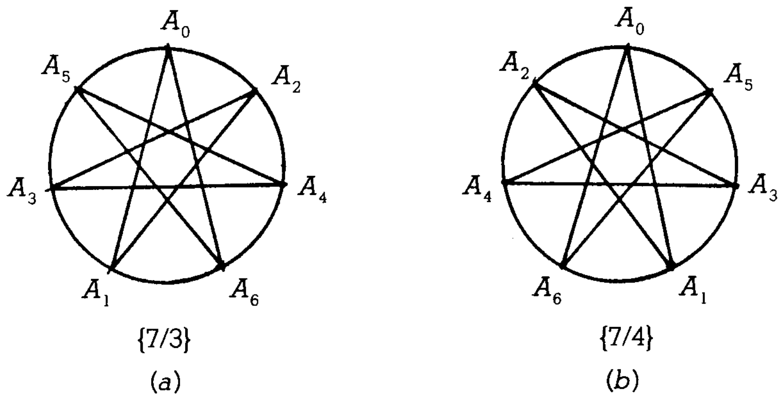


Figura 28

Dado que la densidad q es un número entero positivo menor que $p/2$ y primo relativo con p, existe sólo un polígono regular $\{p/q\}$ que corresponde a cada número racional $p/q > 2$. Sin embargo, surge la pregunta ¿qué interpretación puede darse al polígono $\{p/q\}$, si p/q es un racional negativo? Es posible extender la idea de polígono regular aceptando que q es, en general, un entero diferente de cero, p y $|q|$ son primos entre sí y $|p/q| > 2$. Se tienen, entonces, clases de equivalencia de polígonos regulares. Es claro que el representante de cada clase es el polígono definido anteriormente.

La diferencia entre los polígonos $\{p/q\}$ y $\{p/-q\}$, $q > 0$, es que el primero se construye con una rotación en sentido positivo y el segundo, con un giro en sentido negativo. Por consiguiente, se tienen las siguientes igualdades

$$\{p/q\} = \{p/q - p\} \text{ y } \{p/-q\} = \{p/p - q\}.$$

La Fig. 29 (a, b) ilustra el caso en que $p = 7$ y $q = 3$.

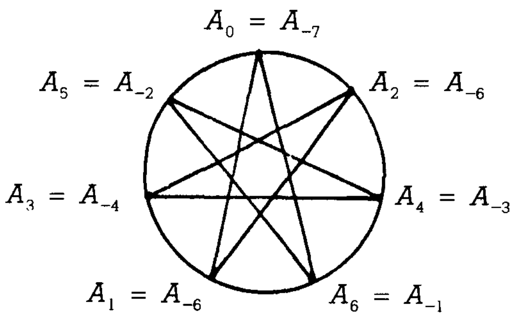
De la discusión anterior se concluye que si p es número natural, q es entero distinto de cero, p y $|q|$ primos entre sí y si $r \equiv q (\text{mód } p)$ entonces

$$\{p/q\} = \{p/r\}.$$

Ejemplos:

1. $\{7/3\} = \{7/-11\} = \{7/24\} = \{7/-39\}$.

2. $\{7/-3\} = \{7/11\} = \{7/-24\} = \{7/39\}$.



{7/3} = {7/−4} (*a*)

{7/−3} = {7/4} (*b*)

Figura 29

Dibújense los polígonos 1 y 2 y obsérvese que sólo difieren en la posición relativa de sus vértices sobre la circunferencia.

4.1. NÚMERO DE POLÍGONOS REGULARES DE *n* LADOS

Otro resultado que surge es determinar el número, N, de polígonos regulares estrellados de n lados. Hay que saber cuántos números menores que n y primos entre sí con n existen. La mitad de este resultado es el número N buscado. Ejemplo,

1. Existen ocho números primos entre sí con respecto a 15, menores que 15, a saber, 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13 y 14. Entonces, hay cuatro polígonos regulares de 15 lados, uno convexo {15} y tres estrellados {15/2}, {15/4} y {15/7}.

2. Si $n = 19$ existen 18 números primos con respecto a 19 y menores que 19; por consiguiente, hay 9 polígonos regulares de 19 lados, uno convexo, {19}; y 8 estrellados, $\{19/k\}$, $k = 2, 3, \ldots, 9$.

La llamada *función de Euler* o *función indicador*, denotada por $\phi(n)$, se utiliza para representar el total de números que son primos entre sí con respecto a n, menores que n. Un resultado de la teoría de números establece

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_r$, son los factores primos diferentes de n. Obsérvese que si n es número primo entonces $\phi(n) = n - 1$. Ejemplos,

1. $\phi(15) = 8$. Los factores primos de 15 son dos, 3 y 5; entonces,

$$\phi(15) = 15\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 8.$$

2. $\phi(19) = 19 - 1 = 18$; puesto que 19 es número primo.

Por consiguiente, el número de polígonos regulares de n lados, N, es igual a $N = \frac{1}{2}\phi(n)$; de ellos uno es convexo y $N - 1$ estrellados.

4.2. PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS REGULARES ESTRELLADOS

Algunas propiedades de los polígonos regulares estrellados son las siguientes:

- La suma de las medidas de los ángulos interiores del polígono estrellado $\{p/q\}$ es $\pi(n - 2q)$.
- La suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono estrellado $\{p/q\}$ es $2\pi q$.

La Fig. 30 representa un polígono regular estrellado de n lados.

$AB = \ell_n$ (lado),

$OM \perp AB$,

$AM = MB = \dfrac{\ell_n}{2}$,

$\measuredangle AOB = \theta_n$ (ángulo central),

$\measuredangle AOM = \measuredangle MOB = \dfrac{\theta_n}{2}$,

$OA = OB = R_n$ (radio del polígono),

$OM = r_n$ (apotema),

$\measuredangle DEF = \beta_n$ (ángulo exterior),

$\measuredangle C = \alpha_n$ (ángulo interior),

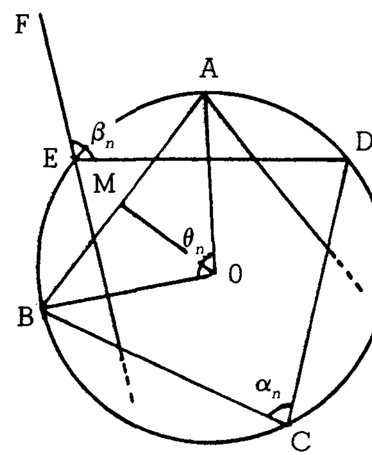


Figura 30

Algunas propiedades que se derivan de la figura son las siguientes:

- La medida del ángulo central es $\theta_p^q = \dfrac{2\pi q}{q}$.
- La medida del ángulo interior es $\alpha_n = \dfrac{\pi}{n}(n - 2q)$.
- La medida del ángulo exterior es $\beta_n = \dfrac{2\pi q}{p} = \theta_p^q$

- Los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita, R_p^q y r_p^q, respectivamente, se calculan con las fórmulas

$$R_p^q = \frac{\ell_p^q}{2}\csc\left(\frac{\pi q}{p}\right) \qquad r_p^q = \frac{\ell_p^q}{2}\cot\left(\frac{\pi q}{p}\right)$$

En la Tabla 2 se resumen las medidas de los ángulos centrales, interiores y exteriores, y los que se forman por dos lados que se cortan en puntos distintos de los vértices. El conocimiento de estos valores y de las propiedades listadas anteriormente, permite la construcción de polígonos regulares estrellados mediante doblado de papel.

TABLA 2

POLIGONO $\left\{\frac{p}{q}\right\}$	ANGULO CENTRAL $\theta_p^q = \frac{2\pi q}{p}$	ANGULO INTERIOR $\alpha_p^q = \frac{(p-2q)\pi}{p}$	ANGULO EXTERIOR $\beta_p^q = \frac{2\pi q}{p}$	ANGULO ENTRE CRUCE DE LADOS $\gamma_p^q = \frac{(p-2q+2)\pi}{p}$
$\left\{\frac{5}{2}\right\}$	$\frac{4\pi}{5} = 144^\circ$	$\frac{\pi}{5} = 36^\circ$	$\frac{4\pi}{5} = 144^\circ$	$\frac{3\pi}{5} = 108^\circ$
$\left\{\frac{7}{2}\right\}$	$\frac{4\pi}{7} \doteq 102^\circ.8571$	$\frac{3\pi}{7} \doteq 77^\circ.1429$	$\frac{4\pi}{7} \doteq 102^\circ.8571$	$\frac{5\pi}{7} \doteq 128^\circ.5714$
$\left\{\frac{7}{3}\right\}$	$\frac{6\pi}{7} \doteq 154^\circ.2857$	$\frac{\pi}{7} \doteq 25^\circ.7143$	$\frac{6\pi}{7} \doteq 154^\circ.2857$	$\frac{3\pi}{7} \doteq 77^\circ.1429$
$\left\{\frac{8}{3}\right\}$	$\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$	$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$
$\left\{\frac{9}{2}\right\}$	$\frac{4\pi}{9} = 80^\circ$	$\frac{5\pi}{9} = 100^\circ$	$\frac{4\pi}{9} = 80^\circ$	$\frac{7\pi}{9} = 140^\circ$
$\left\{\frac{9}{4}\right\}$	$\frac{8\pi}{9} = 160^\circ$	$\frac{\pi}{9} = 20^\circ$	$\frac{8\pi}{9} = 160^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$
$\left\{\frac{10}{3}\right\}$	$\frac{3\pi}{5} = 108^\circ$	$\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$	$\frac{3\pi}{5} = 108^\circ$	$\frac{3\pi}{5} = 108^\circ$
$\left\{\frac{11}{2}\right\}$	$\frac{4\pi}{11} \doteq 65^\circ.4545$	$\frac{7\pi}{11} \doteq 114^\circ.5455$	$\frac{4\pi}{11} \doteq 65^\circ.4545$	$\frac{9\pi}{11} \doteq 147^\circ.2727$
$\left\{\frac{11}{3}\right\}$	$\frac{6\pi}{11} \doteq 98^\circ.1818$	$\frac{5\pi}{11} \doteq 81^\circ.8182$	$\frac{6\pi}{11} \doteq 98^\circ.1818$	$\frac{7\pi}{11} \doteq 114^\circ.5455$
$\left\{\frac{11}{4}\right\}$	$\frac{8\pi}{11} \doteq 130^\circ.9091$	$\frac{3\pi}{11} \doteq 49^\circ.0909$	$\frac{8\pi}{11} \doteq 130^\circ.9091$	$\frac{5\pi}{11} \doteq 81^\circ.8182$
$\left\{\frac{11}{5}\right\}$	$\frac{10\pi}{11} \doteq 163^\circ.6364$	$\frac{\pi}{11} \doteq 16^\circ.3636$	$\frac{10\pi}{11} \doteq 163^\circ.6363$	$\frac{3\pi}{11} \doteq 49^\circ.0909$
$\left\{\frac{12}{5}\right\}$	$\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$
$\left\{\frac{13}{2}\right\}$	$\frac{4\pi}{13} \doteq 55^\circ.3846$	$\frac{9\pi}{13} \doteq 124^\circ.6154$	$\frac{4\pi}{13} \doteq 55^\circ.3846$	$\frac{11\pi}{13} \doteq 152^\circ.3077$

TABLA 2 (Cont)

POLIGONO $\left\{\frac{p}{q}\right\}$	ANGULO CENTRAL $\theta_p^q = \frac{2\pi q}{p}$	ANGULO INTERIOR $\alpha_p^q = \frac{(p-2q)\pi}{p}$	ANGULO EXTERIOR $\beta_p^q = \frac{2\pi q}{p}$	ANGULO ENTRE CRUCE DE LADOS $\gamma_p^q = \frac{(p-2q+2)\pi}{p}$
$\left\{\frac{13}{3}\right\}$	$\frac{6\pi}{13} \doteq 83^{\circ}.0769$	$\frac{7\pi}{13} \doteq 96^{\circ}.9231$	$\frac{6\pi}{13} \doteq 83^{\circ}.0769$	$\frac{9\pi}{13} \doteq 124^{\circ}.6154$
$\left\{\frac{13}{4}\right\}$	$\frac{8\pi}{13} \doteq 110^{\circ}.7692$	$\frac{5\pi}{13} \doteq 69^{\circ}.2308$	$\frac{8\pi}{13} \doteq 110^{\circ}.7692$	$\frac{7\pi}{13} \doteq 96^{\circ}.9231$
$\left\{\frac{13}{5}\right\}$	$\frac{10\pi}{13} \doteq 138^{\circ}.4615$	$\frac{3\pi}{13} \doteq 41^{\circ}.5385$	$\frac{10\pi}{13} \doteq 138^{\circ}.4615$	$\frac{5\pi}{13} \doteq 69^{\circ}.2308$
$\left\{\frac{13}{6}\right\}$	$\frac{12\pi}{13} \doteq 166^{\circ}.1538$	$\frac{\pi}{13} \doteq 13^{\circ}.8462$	$\frac{12\pi}{13} \doteq 166^{\circ}.1538$	$\frac{3\pi}{13} \doteq 41^{\circ}.5385$
$\left\{\frac{14}{3}\right\}$	$\frac{3\pi}{7} \doteq 77^{\circ}.1429$	$\frac{4\pi}{7} \doteq 102^{\circ}.8571$	$\frac{3\pi}{7} \doteq 77^{\circ}.1429$	$\frac{5\pi}{7} \doteq 128^{\circ}.5714$
$\left\{\frac{14}{5}\right\}$	$\frac{5\pi}{7} \doteq 128^{\circ}.5714$	$\frac{2\pi}{7} \doteq 51^{\circ}.4286$	$\frac{5\pi}{7} \doteq 128^{\circ}.5714$	$\frac{3\pi}{7} \doteq 77^{\circ}.1429$
$\left\{\frac{15}{2}\right\}$	$\frac{4\pi}{15} = 48^{\circ}$	$\frac{11\pi}{15} = 132^{\circ}$	$\frac{4\pi}{15} = 48^{\circ}$	$\frac{3\pi}{15} = 156^{\circ}$
$\left\{\frac{15}{4}\right\}$	$\frac{8\pi}{15} = 96^{\circ}$	$\frac{7\pi}{15} = 84^{\circ}$	$\frac{8\pi}{15} = 96^{\circ}$	$\frac{3\pi}{5} = 108^{\circ}$
$\left\{\frac{15}{7}\right\}$	$\frac{14\pi}{15} = 168^{\circ}$	$\frac{\pi}{15} = 12^{\circ}$	$\frac{14\pi}{15} = 168^{\circ}$	$\frac{\pi}{5} = 36^{\circ}$
$\left\{\frac{16}{3}\right\}$	$\frac{3\pi}{8} = 67^{\circ}.5000$	$\frac{5\pi}{8} = 112^{\circ}.5000$	$\frac{3\pi}{8} = 67^{\circ}.5000$	$\frac{3\pi}{4} = 135^{\circ}$
$\left\{\frac{16}{5}\right\}$	$\frac{5\pi}{8} = 112^{\circ}.5000$	$\frac{3\pi}{8} = 67^{\circ}.5000$	$\frac{5\pi}{8} = 112^{\circ}.5000$	$\frac{\pi}{2} = 90^{\circ}$
$\left\{\frac{16}{7}\right\}$	$\frac{7\pi}{8} = 157^{\circ}.5000$	$\frac{\pi}{8} = 22^{\circ}.5000$	$\frac{7\pi}{8} = 157^{\circ}.5000$	$\frac{\pi}{4} = 45^{\circ}$
$\left\{\frac{17}{2}\right\}$	$\frac{4\pi}{17} \doteq 42^{\circ}.3529$	$\frac{13\pi}{17} \doteq 137^{\circ}.6471$	$\frac{4\pi}{17} \doteq 42^{\circ}.3529$	$\frac{5\pi}{17} \doteq 158^{\circ}.8235$
$\left\{\frac{17}{3}\right\}$	$\frac{6\pi}{17} \doteq 63^{\circ}.5294$	$\frac{11\pi}{17} \doteq 116^{\circ}.4706$	$\frac{6\pi}{17} \doteq 63^{\circ}.5294$	$\frac{3\pi}{17} \doteq 137^{\circ}.6471$
$\left\{\frac{17}{4}\right\}$	$\frac{8\pi}{17} \doteq 84^{\circ}.7059$	$\frac{9\pi}{17} \doteq 95^{\circ}.2941$	$\frac{8\pi}{17} \doteq 84^{\circ}.7059$	$\frac{11\pi}{17} \doteq 16^{\circ}.4706$
$\left\{\frac{17}{5}\right\}$	$\frac{10\pi}{17} \doteq 105^{\circ}.8824$	$\frac{7\pi}{17} \doteq 74^{\circ}.1176$	$\frac{10\pi}{17} \doteq 105^{\circ}.8824$	$\frac{9\pi}{17} \doteq 95^{\circ}.2941$
$\left\{\frac{17}{6}\right\}$	$\frac{12\pi}{17} \doteq 127^{\circ}.0588$	$\frac{5\pi}{17} \doteq 52^{\circ}.9412$	$\frac{12\pi}{17} \doteq 127^{\circ}.0588$	$\frac{7\pi}{17} \doteq 74^{\circ}.1176$
$\left\{\frac{17}{7}\right\}$	$\frac{14\pi}{17} \doteq 148^{\circ}.2353$	$\frac{3\pi}{17} \doteq 31^{\circ}.7647$	$\frac{14\pi}{17} \doteq 148^{\circ}.2353$	$\frac{5\pi}{17} \doteq 52^{\circ}.9412$

Tabla 2 (Cont)

POLIGONO $\left\{\frac{p}{q}\right\}$	ANGULO CENTRAL $\theta_p^q = \frac{2\pi q}{p}$	ANGULO INTERIOR $\alpha_p^q = \frac{(p-2q)\pi}{p}$	ANGULO EXTERIOR $\beta_p^q = \frac{2\pi q}{p}$	ANGULO ENTRE CRUCE DE LADOS $\gamma_p^q = \frac{(p-2q+2)\pi}{p}$
$\left\{\frac{17}{8}\right\}$	$\frac{16\pi}{17} \doteq 169^\circ.4118$	$\frac{\pi}{17} \doteq 10^\circ.5882$	$\frac{16\pi}{17} \doteq 169^\circ.4118$	$\frac{3\pi}{17} \doteq 31^\circ.7647$
$\left\{\frac{18}{5}\right\}$	$\frac{5\pi}{9} = 100^\circ$	$\frac{4\pi}{9} = 80^\circ$	$\frac{5\pi}{9} = 100^\circ$	$\frac{5\pi}{9} = 100^\circ$
$\left\{\frac{18}{7}\right\}$	$\frac{7\pi}{9} = 140^\circ$	$\frac{2\pi}{9} = 40^\circ$	$\frac{7\pi}{9} = 140^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$
$\left\{\frac{19}{2}\right\}$	$\frac{4\pi}{19} \doteq 37^\circ.8947$	$\frac{15\pi}{19} \doteq 142^\circ.1053$	$\frac{4\pi}{19} \doteq 37^\circ.8947$	$\frac{17\pi}{19} \doteq 161^\circ.0526$
$\left\{\frac{19}{3}\right\}$	$\frac{6\pi}{19} \doteq 56^\circ.8421$	$\frac{13\pi}{19} \doteq 123^\circ.1579$	$\frac{6\pi}{19} \doteq 56^\circ.8421$	$\frac{15\pi}{19} \doteq 142^\circ.1053$
$\left\{\frac{19}{4}\right\}$	$\frac{8\pi}{19} \doteq 75^\circ.7895$	$\frac{11\pi}{19} \doteq 104^\circ.2105$	$\frac{8\pi}{19} \doteq 75^\circ.7895$	$\frac{13\pi}{19} \doteq 123^\circ.1579$
$\left\{\frac{19}{5}\right\}$	$\frac{10\pi}{19} \doteq 94^\circ.7368$	$\frac{9\pi}{19} \doteq 85^\circ.2632$	$\frac{10\pi}{19} \doteq 94^\circ.7368$	$\frac{11\pi}{19} \doteq 104^\circ.2105$
$\left\{\frac{19}{6}\right\}$	$\frac{12\pi}{19} \doteq 113^\circ.6842$	$\frac{7\pi}{19} \doteq 66^\circ.3158$	$\frac{12\pi}{19} \doteq 113^\circ.6842$	$\frac{9\pi}{19} \doteq 85^\circ.22632$
$\left\{\frac{19}{7}\right\}$	$\frac{14\pi}{19} \doteq 132^\circ.6316$	$\frac{5\pi}{19} \doteq 47^\circ.3684$	$\frac{14\pi}{19} \doteq 132^\circ.6316$	$\frac{7\pi}{19} \doteq 66^\circ.3158$
$\left\{\frac{19}{8}\right\}$	$\frac{16\pi}{19} \doteq 151^\circ.5789$	$\frac{3\pi}{19} \doteq 28^\circ.4211$	$\frac{16\pi}{19} \doteq 151^\circ.5789$	$\frac{5\pi}{19} \doteq 47^\circ.3684$
$\left\{\frac{19}{9}\right\}$	$\frac{18\pi}{19} \doteq 170^\circ.5263$	$\frac{\pi}{19} \doteq 9^\circ.4737$	$\frac{18\pi}{19} \doteq 170^\circ.5263$	$\frac{3\pi}{19} \doteq 28^\circ.4211$
$\left\{\frac{20}{3}\right\}$	$\frac{3\pi}{10} = 54^\circ$	$\frac{7\pi}{10} = 126^\circ$	$\frac{3\pi}{10} = 54^\circ$	$\frac{4\pi}{5} = 144^\circ$
$\left\{\frac{20}{7}\right\}$	$\frac{7\pi}{10} = 126^\circ$	$\frac{3\pi}{10} = 54^\circ$	$\frac{7\pi}{10} = 126^\circ$	$\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$
$\left\{\frac{20}{9}\right\}$	$\frac{9\pi}{10} = 162^\circ$	$\frac{\pi}{10} = 18^\circ$	$\frac{9\pi}{10} = 162^\circ$	$\frac{\pi}{5} = 36^\circ$

4.3. CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES ESTRELLADOS DOBLANDO PAPEL

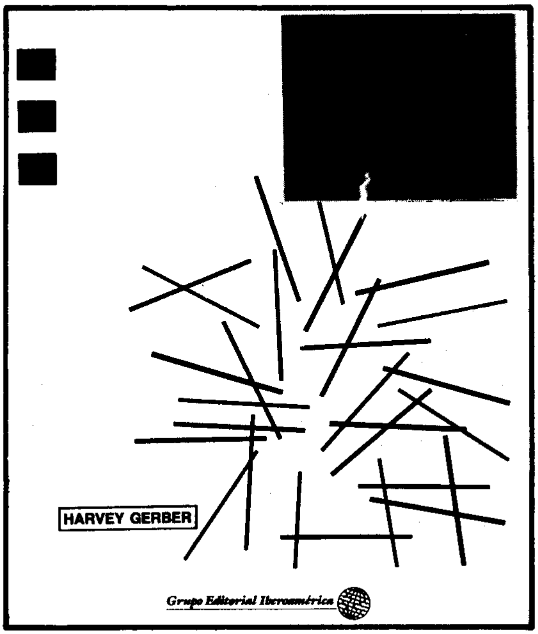
Para construir polígonos estrellados se sigue el segundo método de polígonos convexos. En uno de los bordes de una tira o banda de papel de ancho uniforme se marcan p puntos, $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$, los vértices del polígono estrellado de p lados. Los puntos quedan espaciados a una distancia constante ℓ_p, la medida

NOVEDAD

ÁLGEBRA LINEAL

Harvey Gerber
Simón Fraser University

Una introducción de Álgebra Lineal sencilla, clara y con excelente presentación gráfica y pedagógica.



506 páginas
Impreso a dos tintas
Encuadernado en rústica
Formato 190 × 238 mm
ISBN 968-7270-63-2

El propósito de este libro es presentar los temas de Álgebra Lineal desarrollando ideas intuitivas, enfocando geométrica y gráficamente los temas más abstractos y desarrollando habilidades en los alumnos para resolver ejercicios y notas históricas

- Contempla cerca de 2000 ejercicios y más de 300 ejemplos.
- Se incluye, al final de cada capítulo, una lista de los teoremas y corolarios más importantes, así como una lista de las palabras y conceptos claves.
- Presenta al final de cada capítulo biografías de los matemáticos más destacados.
- A través de todo el texto se introducen aplicaciones de Algebra Lineal al cálculo, a la computación, economía, estadística, ingeniería, etc.
- El texto se presenta en 2 colores para destacar las definiciones de teoremas, corolarios, ejemplos, definiciones, etc.
- Tiene una presentación única en el desarrollo de ejemplos y teoremas seguidos de problemas en base a esos ejemplos, teoremas y corolarios.

Para mayor información envie los siguientes datos:

Nombre ____________ Universidad ____________

Dirección ____________ Curso que imparte ____________

Grupo Editorial Iberoamérica
Río Ganges No. 64-06500 México, D.F. - Tels. 5112517, 2087741

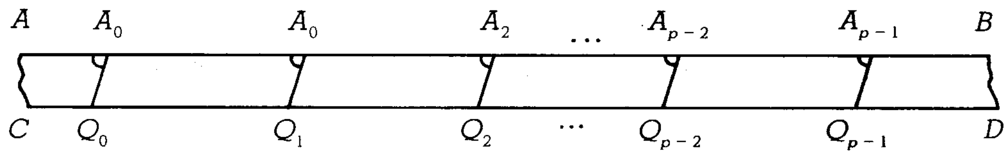


Figura 31

del lado. En cada uno de los puntos N_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, se trazan ángulos congruentes a los ángulos interiores del polígono. Es decir, se construyen los ángulos.

$$AA_0Q_0,\ A_0A_1Q_1,\ \ldots,\ A_{p-2}A_{p-1}Q_{p-1}, \text{ todos de medida } \alpha_p = \frac{\pi(p-2q)}{p}.$$

Véase la Fig. 31.

En seguida, se dividen en $2q$ partes congruentes los ángulos adyacentes suplementarios trazados anteriormente (Fig. 32). Cada uno de los ángulos resultantes de la división mide π/n. Por ejemplo,

$$\measuredangle R_0A_0Q_0 = \frac{1}{2q}\left(\measuredangle A_1A_0Q_0\right) = \frac{\pi}{n}$$

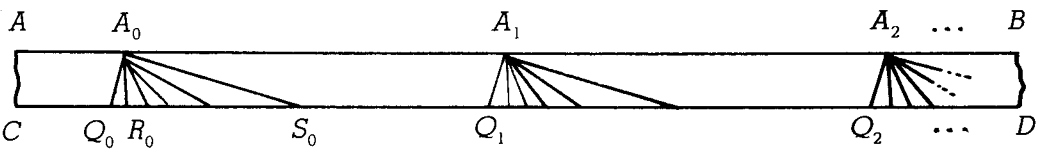
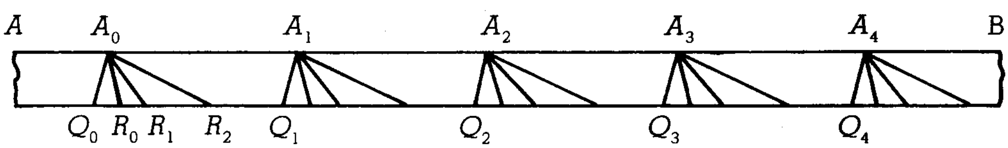


Figura 32

El polígono se construye doblando sucesivamente el papel por las líneas marcadas. La Fig. 33 ($a-g$) ejemplifica el esquema del heptágono regular estrellando $\{7/2\}$. La medida del ángulo interior, obtenida de la Tabla 2 (Pág. 31), es $\measuredangle AA_0Q_0 = 3\pi/7 \doteq 77°.14$; además $\measuredangle Q_0A_0R_0 = ¼(\measuredangle Q_{i-1}A_{i-1}A_i) = \pi/7 \doteq 25°.71$, $i = 1, 2, 3, 4$ y $\measuredangle Q_0A_0R_0 = \measuredangle Q_0A_0R_1 = \measuredangle Q_1A_0R_2 = Q_2A_0$



(a)

Figura 33

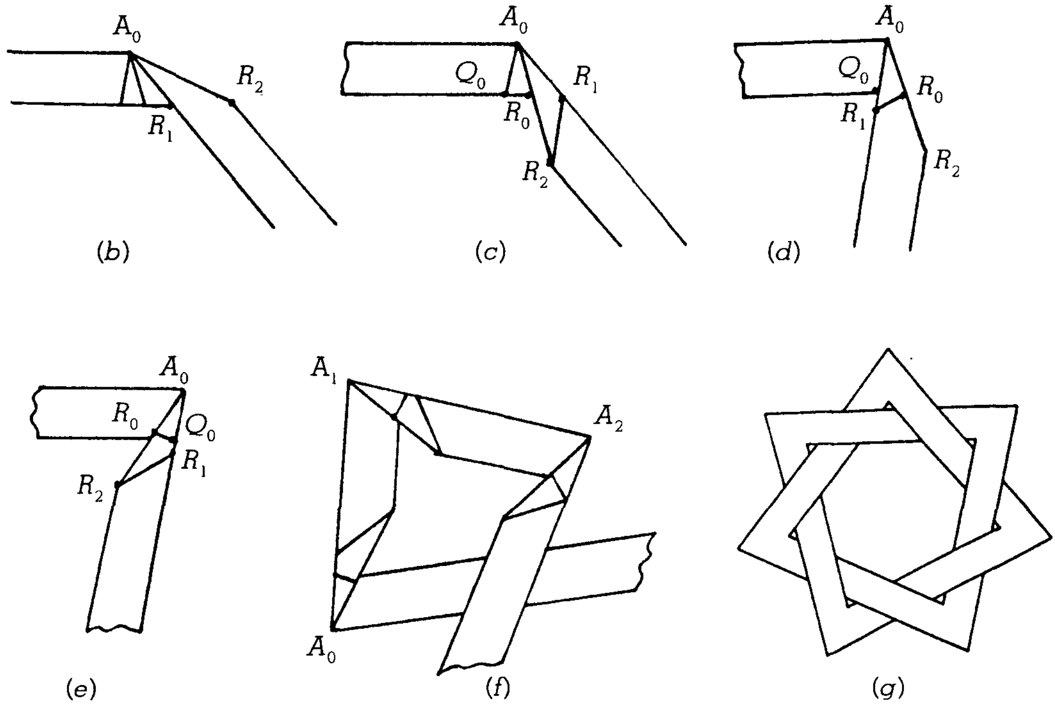


FIGURA 33 (Continúa).

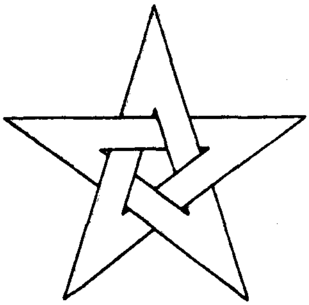
En la Fig. 34 ($a - v$) se presentan algunos polígonos regulares convexos construidos por este método.

5. COMENTARIOS FINALES

En ocasiones se recurre a cierto tipo de material o actividades sin soporte teórico que respalde por qué determinadas construcciones conducen verazmente a lo que se pretende enseñar. Ese desconocimiento puede llevar a visiones erróneas o a falsos conceptos. Por ejemplo, si no hay claridad en el aspecto teórico que sostiene la construcción de figuras, el uso del material se limita a casos particulares. En cambio, si se tienen los fundamentos que lo sustentan se puede ampliar el estudio a mayor número de casos, y estar en posibilidad de inducir generalizaciones.

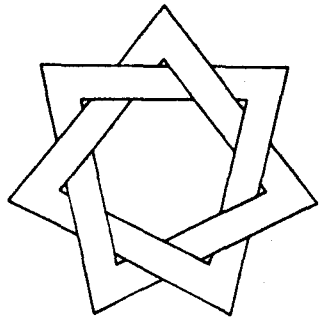
Este trabajo no aborda la forma de usar el recurso del papel doblado en situaciones de enseñanza. Así mismo, el propósito central no es dar demostraciones rigurosas que exhiban por qué funcionan las proposiciones de construcción de polígonos. Más bien —como se dijo— se orienta a justificar y argumentar la posibilidad de la construcción de figuras geométricas, o situaciones donde es factible aprovechar el papel doblado para enseñar la geometría elemental.

A fin de precisar el contexto de uso del material dentro de la enseñanza de la matemática elemental, se invita al lector a utilizarlo en aplicaciones o en la



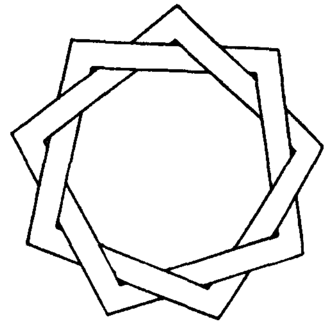
{5/2}

(*a*)



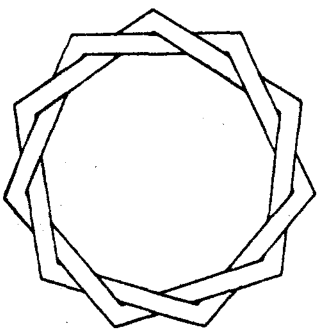
{7/2}

(*b*)



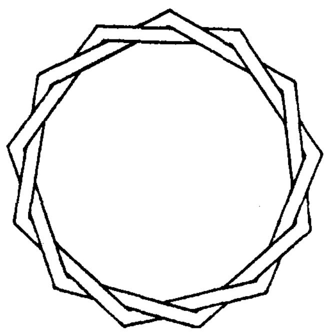
{9/2}

(*c*)



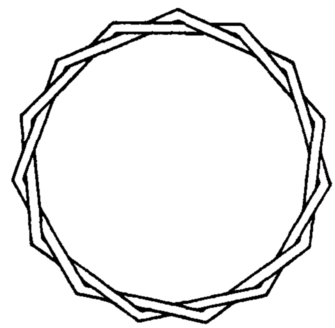
{11/2}

(*d*)



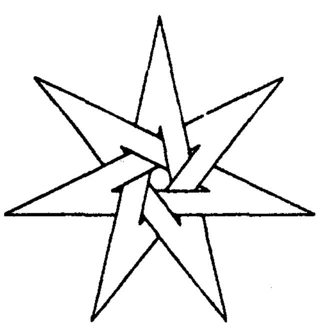
{13/2}

(*e*)



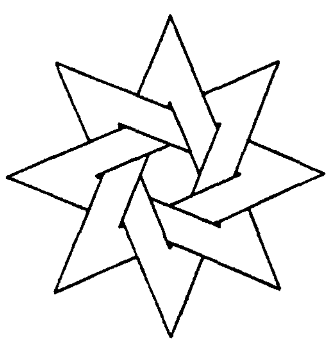
{15/2}

(*f*)



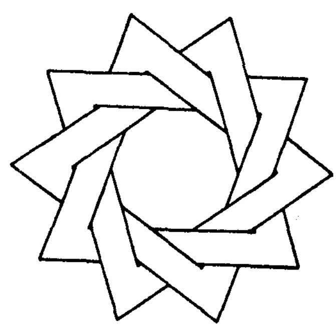
{7/3}

(*g*)



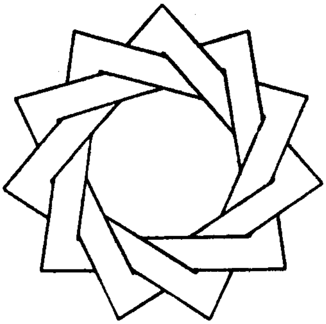
{8/3}

(*h*)



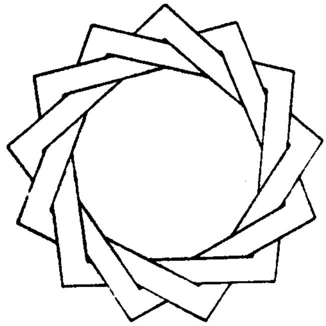
{10/3}

(*i*)



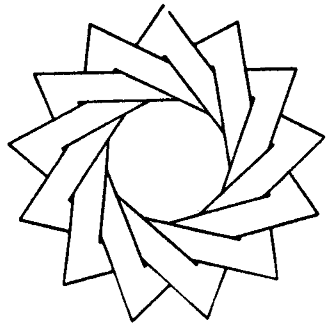
{11/3}

(j)



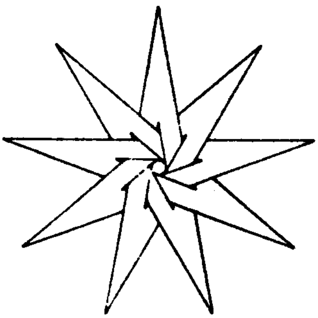
{13/3}

(k)



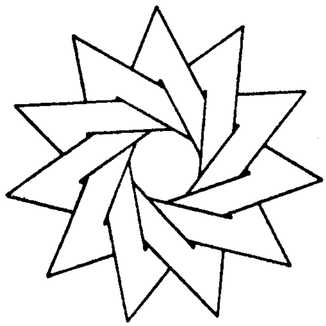
{14/3}

(l)



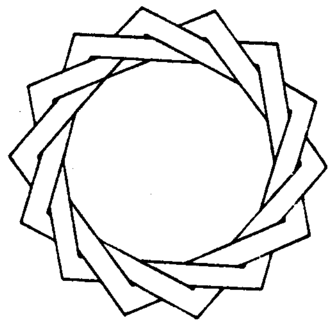
{9/4}

(m)



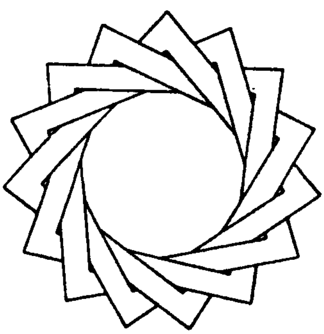
{11/4}

(n)



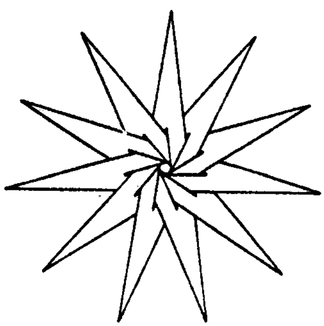
{13/4}

(o)



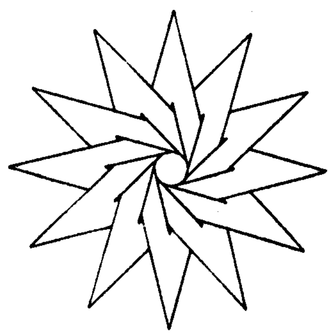
{15/4}

(p)



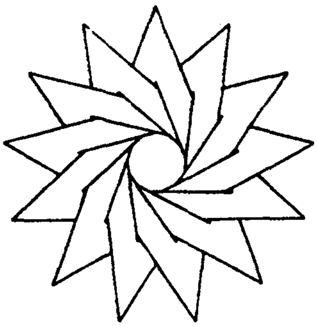
{11/5}

(q)



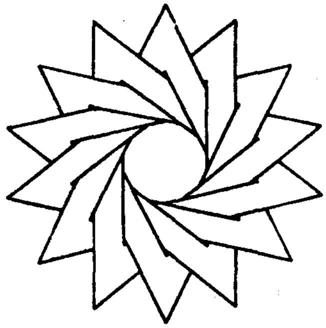
{12/5}

(r)



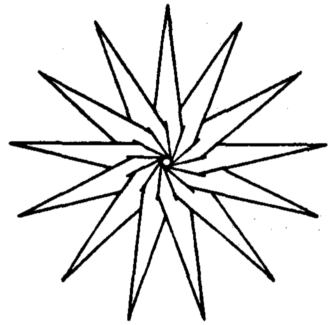
{13/5}

(*s*)



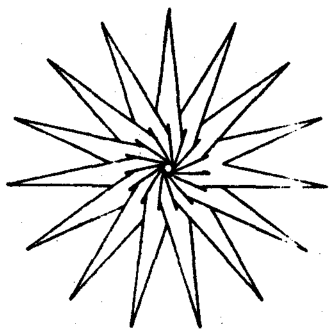
{14/5}

(*t*)



{13/6}

(*u*)



{15/7}

(*v*)

Figura 34

búsqueda de propiedades de polígonos, con el empleo de la calculadora, de la computadora, o sin la utilización de estos medios[2].

En artículos posteriores se abordarán las otras formas de utilizar el papel doblado en la geometría elemental mencionadas al inicio del escrito.

6. BIBLIOGRAFÍA

COXETER, H. S. M. *Fundamentos de Geometría*. México: Limusa. 1984. 518 p.

COXETER, H.S. *Regular Polytopes*. 3a. Edición. Nueva York: Dover, 1973. 321 p.

OLABARRIETA, Luciano. *Geometría y Trigonometría*. 6a. Edición. Bilbao: Editorial **El mensajero del Corazón de Jesús**. 1957. 734 p.

CALDERON, Ayala Gerardo y CARRIÓN Miranda, Vicente. "Mate-

[2] Se invita al lector a intercambiar experiencias con el autor sobre éste y otros recursos de enseñanza de la geometría. Enviar comentarios a la dirección siguiente: Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV, Dakota 379. Col. Nápoles, 03810 México, D. F.

máticas y el plegado de papel". IV Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. México-CINVESTAV, Univ. Nal. de Costa Rica, Univ. Nal. de Honduras. 1990. p. 25-33.

7. ANEXOS

A. Tablas con las medidas de los elementos necesarios para construir polígonos regulares, convexos o estrellados, circunscritos a una circunferencia de 10 cm de radio. En ambos casos, de tres a veinte lados.

Datos para construir polígonos regulares convexos

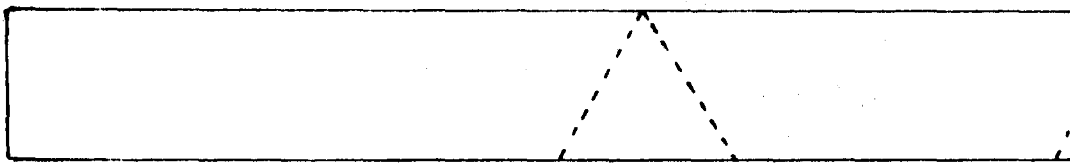
POLIGONO	ANGULO INTERIOR	RADIO	APOTEMA	LADO
(3)	60°	10	5.00	17.32
(4)	90°	10	7.07	14.14
(5)	108°	10	8.09	11.76
(6)	120°	10	8.66	10.00
(7)	128°.57	10	9.01	8.68
(8)	135°	10	9.24	7.65
(9)	140°	10	9.40	6.84
(10)	144°	10	9.51	6.18
(11)	147°.27	10	9.59	5.63
(12)	150°	10	9.66	5.18
(13)	152°.31	10	9.71	4.79
(14)	154°.29	10	9.75	4.45
(15)	156°	10	9.78	4.16
(16)	157°.50	10	9.81	3.90
(17)	158°.82	10	9.83	3.67
(18)	160°	10	9.85	3.47
(19)	161°.05	10	9.86	3.29
(20)	162°	10	9.88	3.13

Datos para construir polígonos regulares estrellados

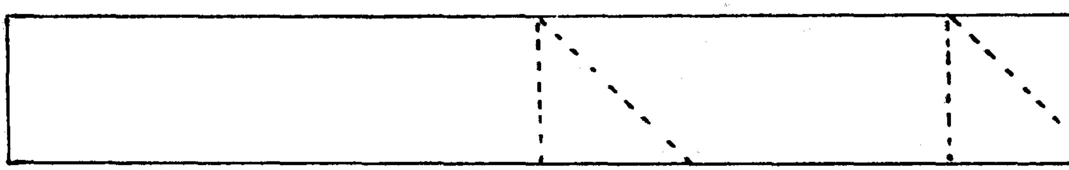
POLIGONO	ANGULO INTERIOR	RADIO	APOTEMA	LADO
(5/2)	36°	10	3.09	19.02
(7/2)	77°.14	10	6.23	15.64
(7/3)	25°.71	10	2.23	19.50
(8/3)	45°	10	3.83	18.48
(9/2)	100°	10	7.66	12.86
(9/4)	20°	10	1.74	19.70

POLIGONO	ANGULO INTERIOR	RADIO	APOTEMA	LADO
(10/3)	72°	10	5.88	16.18
(11/2)	114°.55	10	8.41	10.81
(11/3)	81°.82	10	6.55	15.11
(11/4)	49°.09	10	4.15	18.19
(11/5)	16°.36	10	1.42	19.80
(12/5)	30°	10	2.59	19.32
(13/2)	124°.62	10	8.85	9.29
(13/3)	96°.92	10	7.49	13.26
(13/4)	69°.23	10	5.68	16.46
(13/5)	41°.54	10	3.55	18.70
(13/6)	13°.85	10	1.21	19.85
(14/3)	102°.86	10	7.82	12.47
(14/5)	51°.43	10	4.34	18.02
(15/2)	132°	10	9.14	8.13
(15/4)	84°	10	6.69	14.86
(15/7)	12°	10	1.05	19.89
(16/3)	112°.50	10	8.31	11.11
(16/5)	67°.50	10	5.56	16.63
(16/7)	22°.50	10	1.95	19.61
(17/2)	137°.65	10	9.32	7.22
(17/3)	116°.47	10	8.50	10.53
(17/4)	95°.29	10	7.39	13.47
(17/5)	74°.12	10	6.03	15.96
(17/6)	52°.94	10	4.46	17.90
(17/7)	31°.76	10	2.74	19.24
(17/8)	10°.59	10	0.92	19.91
(18/5)	80°	10	6.43	15.32
(18/7)	40°	10	3.42	18.79
(19/2)	142°.11	10	9.46	6.49
(19/3)	123°.16	10	8.79	9.52
(19/4)	104°.21	10	7.89	12.28
(19/5)	85°.26	10	6.77	14.71
(19/6)	66°.32	10	5.47	16.74
(19/7)	47°.37	10	4.02	18.32
(19/8)	28°.42	10	2.45	19.39
(19/9)	9°.47	10	0.83	19.93
(20/3)	126°	10	8.91	9.08
(20/7)	54°	10	4.54	17.82
(20/9)	18°	10	1.56	19.75

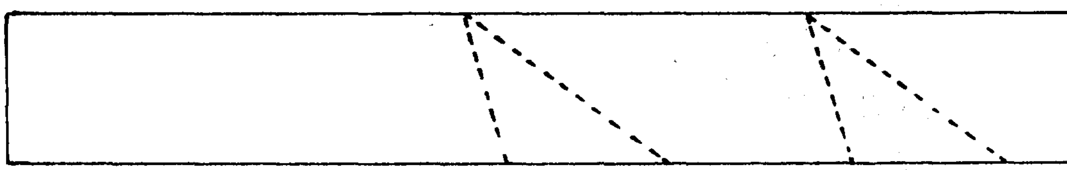
B. Material para confeccionar polígonos regulares convexos de tres a doce lados.



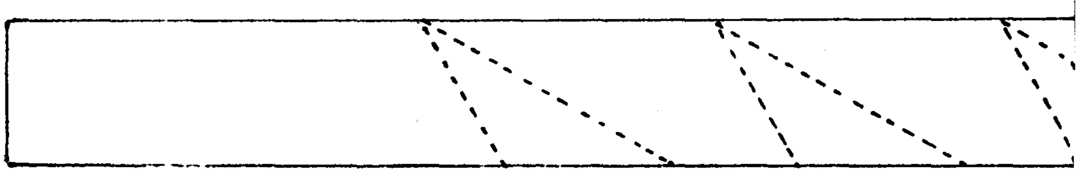
{3}



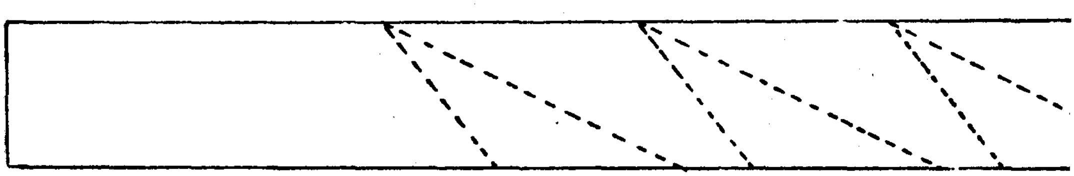
{4}



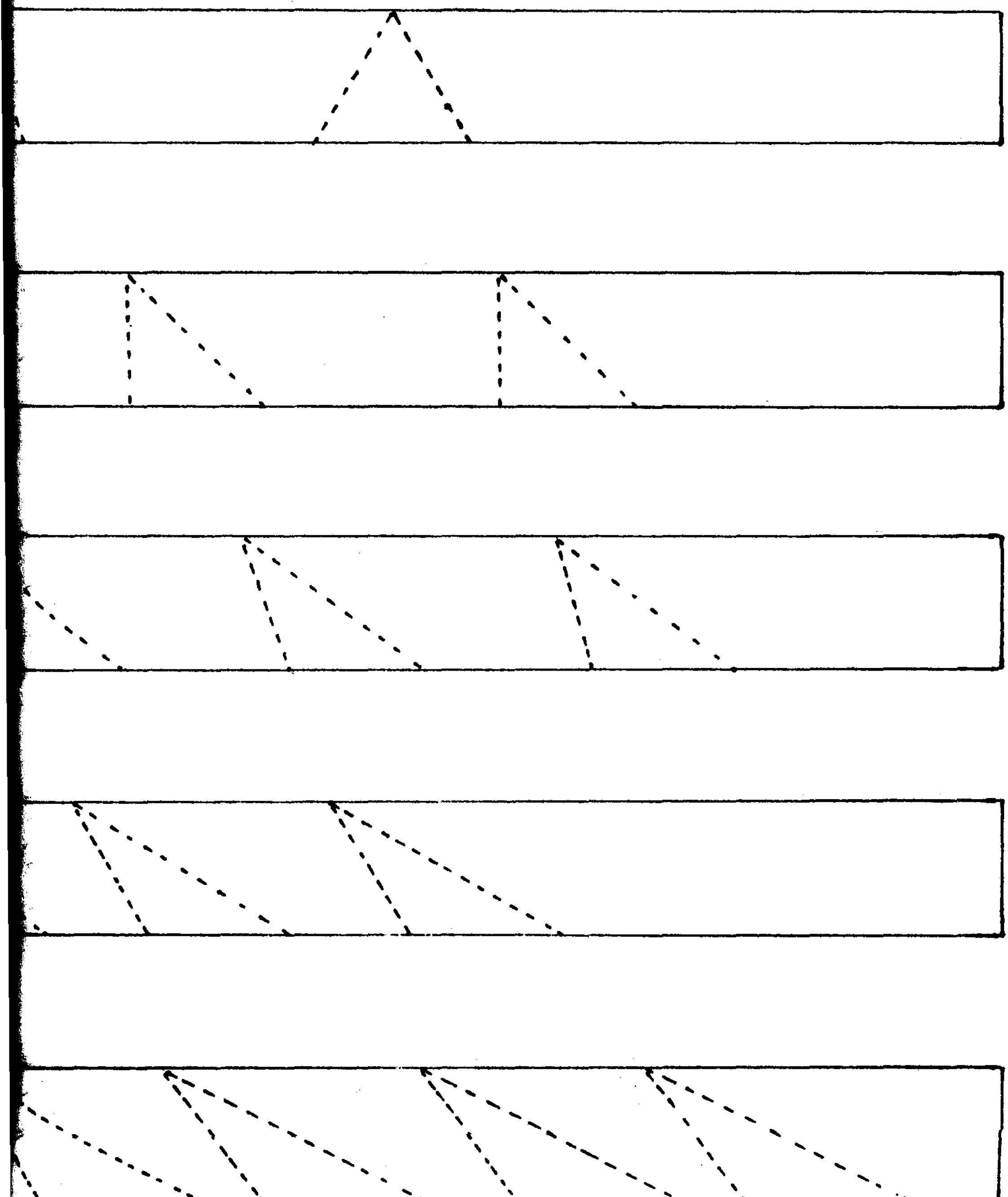
{5}

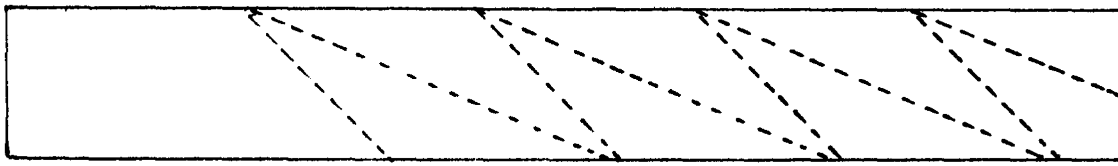


{6}

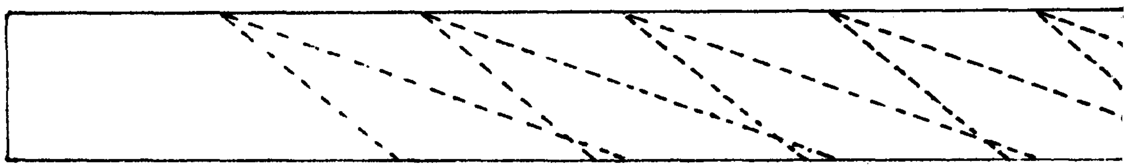


{7}

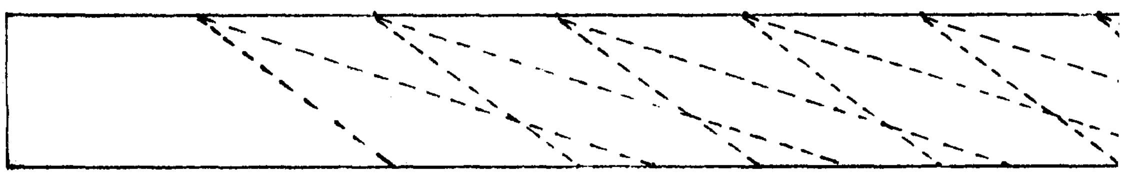




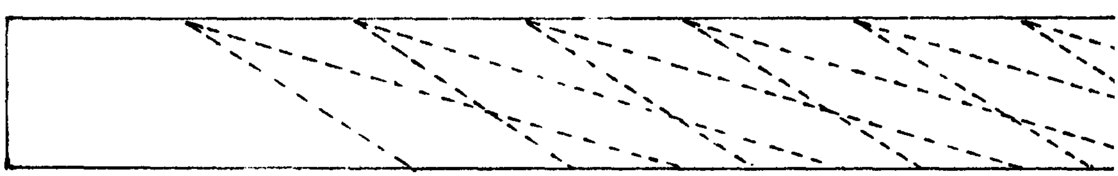
{8}



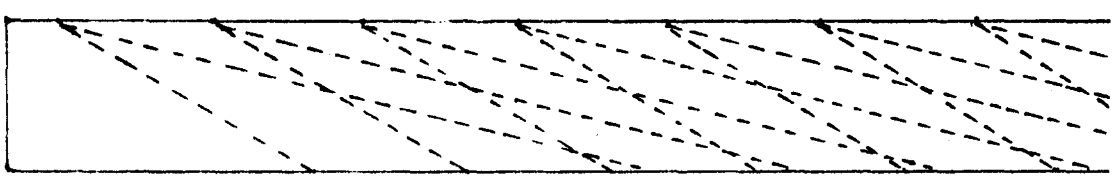
{9}



{10}



{11}



{12}