NOTAS DE CLASE

Los Grafos y el Diseño

Resumen

La aplicación de la Teoría de Grafos a problemas de Diseño se funda esencialmente en el hecho que esta rama de la Investigación Operativa permite llegar a simbolizar un problema concreto mediante un esquema gráfico o grafo, constituido por puntos y líneas que los unen, y analizar diferentes soluciones del problema inicial mediante acciones sobre el esquema gráfico asociado. Como situaciones totalmente dispares pueden originar los mismos grafos, es lógico que estudiando los grafos en su generalidad, se obtienen simultáneamente soluciones a problemas múltiples de muy diferente idiosincrasia.

1. Introducción

En numerosas facultades de Arquitectura, la Matemática se ha enseñado y aún se sigue enseñando como una asignatura de apoyo a los cursos de Estructuras, Física e Instalaciones. Ello hace que su temática no vaya más allá de la Geometría Analítica clásica, bi y tridimensional, y del Cálculo Diferencial e Integral. Los programas de estudio y el enfoque didáctico pedagógico poco han variado desde la época de nuestros propios progenitores.

Consecuencia natural de ello es que nuestros jóvenes estudiantes de arquitectura, no se sientan motivados en lo más mínimo ante la enseñanza de la Matemática y la consideren como un "mal necesario", pensando que está muy, pero muy lejos de la tarea del Diseño (así con mayúscula, pues tradicionalmente es la asignatura líder entre todas las demás).

Cierto es que los productos de la Arquitectura son elaborados por el hombre, así como también la Matemática es obra del hombre. Pero están en dos planos distintos: la Matemática trabaja con espacios y conceptos abstractos mientras que la Arquitectura, que es a la vez técnica y arte, se ocupa del espacio concreto, del espacio con relación al hombre que lo habita, a sus necesidades, usos y costumbres. Para que la contribución de la Matemática, desde la clásica hasta la actualidad, sea un verdadero elemento coadyuvante al diseño creativo, es necesario, no sólo variar la temática en los programas de Matemática, sino fundamentalmente, cambiar el enfoque con que se la enseña.

Entre los temas posibles que puede abarcar un programa de Matemática para estudiantes de Arquitectura y Diseño, el de **grafos** es el que más los motiva en su capacidad de creación.

Vera M. Winitzky de Spinadel

Buenos Aires, Argentina

La teoría de los grafos es una rama de la investigación operativa que se aplica en el tratamiento de diversos problemas del campo tecnológico, sociológico y económico. Históricamente está comprobado que el hombre ante el planteo de un problema, tiende a hacer un diagrama en el que los puntos representan actividades, etapas de un proyecto, individuos, localidades, etc., uniéndolos por medio de líneas que indican una cierta relación entre ellos.

D. Konig, matemático alemán, fue el primero en proponer en un trabajo publicado en 1936 que tales diagramas recibieran el nombre de "grafos", haciendo un estudio sistemático de sus propiedades.

Obviamente el trazado de un grafo no es un problema métrico; esto es, la forma y longitud de las líneas que unen los puntos es cualquiera. Lo que interesa visualizar son relaciones, interacciones, etc. De ahí la importancia de la teoría de grafos en Arquitectura, y en especial, en todo problema de diseño.

2. Definición de grafo

Llamaremos *grafo* a una terna $G = (V, A, \beta)$, donde V y A son conjuntos finitos y β es una aplicación que hace corresponder a cada elemento de A un par de elementos de V. Los elementos de V son los *vértices* de G, los elementos de A son las *aristas* de G, y β es la *aplicación de incidencia* que asocia a cada arista sus dos vértices.

La representación gráfica de un grafo se efectúa asociando a cada vértice un punto del plano de dibujo, y a cada arista una línea que une los puntos asociados a los vértices (Fig. 1).

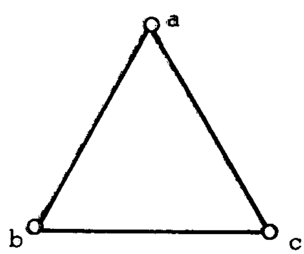


Figura 1

Si $\{a, b\}$ es una arista del grafo, los vértices a y b se llaman *adyacentes*. Si $\{a, c\}$ y $\{a, b\}$ son aristas del grafo se dicen "adyacentes" porque tienen un vértice común.

3. Grafos isomorfos

Si se analizan los dos grafos de la Fig. 2, podemos observar que, aunque a primera vista parecen diferentes, tienen muchas características en común.

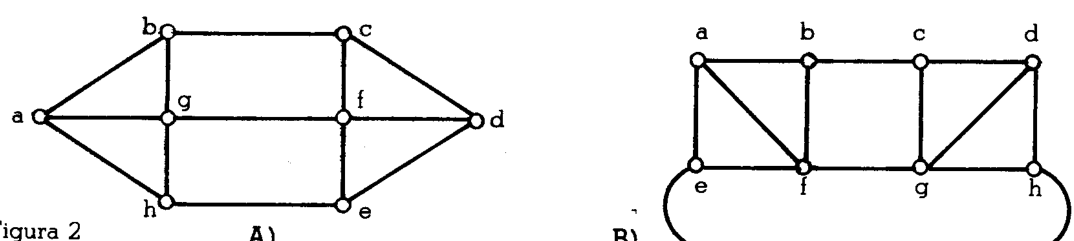


Figura 2

En efecto, ambos poseen 8 vértices y 13 aristas. Además, aparecen 2 cuadriláteros y 4 triángulos en los dos. Es más, eligiendo un par de aristas adyacentes en uno de los grafos, las aristas correspondientes del otro grafo son también adyacentes. Lo mismo sucede con los vértices. Esto es, son dos imágenes distintas de un mismo grafo y se dicen que son *isomorfos*. Más precisamente, dos grafos $G = (V, A, \beta)$ y $G = (V', A', \beta')$ son isomorfos si existe una correspondencia biyectiva entre V y V', y entre A y A', que conserve las relaciones de adyacencia.

A nivel gráfico, debe tratarse de trabajar con los esquemas más simples entre todas las representaciones isomorfas de un mismo grafo. Obviamente, el caso (A) es más sencillo y armónico que el (B).

4. Grafos dirigidos o digrafos

En algunos problemas, la estructura de grafo puede resultar a veces inadecuada para describir una situación considerada. Por ejemplo, si se trata de describir el tránsito de vehículos en un barrio de una ciudad, se podrían identificar las esquinas con los vértices de un grafo y las calles por las aristas del mismo. No obstante, esta descripción no tomaría en cuenta el hecho real de que hay calles de doble vía donde se puede circular en ambos sentidos. En un caso como éste habría que agregar a las aristas del grafo un sentido u orientación, determinado con lo que se obtendría un *grafo dirigido* o *digrafo*.

Llamaremos entonces grafo dirigido o digrafo a una terna $G = (A, V, \beta)$ donde A y V son conjuntos finitos y β es una aplicación que hace corresponder a cada elemento de A un elemento del producto cartesiano $V * V$, esto es, un par ordenado de elementos de V. Los elementos de V son los vértices de G; los elementos de A son los arcos de G, y β es una aplicación que asocia a cada arco sus extremos. El arco (a, b) perteneciente a G, en la Fig. 3, está dado por un par ordenado mientras que en los grafos no orientados, el arco es descrito por un par no ordenado $\{a, b\}$. Diremos que en el arco (a, b), a es el vértice inicial y b su vértice final.

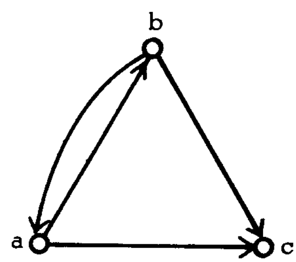


Figura 3

Asimismo podemos extender el concepto de isomorfismo estableciendo que dos digrafos $G = (V, A, \beta)$ y $G = (V', A', \beta')$ son isomorfos si los correspondientes grafos no dirigidos son isomorfos y además se conserva la orientación de arcos correspondientes.

5. Conceptos orientados y no orientados

Antes de presentar diversas aplicaciones interesantes de la teoría de grafos, expondremos algunos conceptos distintos entre grafos y digrafos para fijar la nomenclatura a usar.

Comenzaremos por los conceptos de orientados. Ellos son:

Vértices: puntos que representan los elementos del conjunto V.

Arcos: líneas orientadas que unen partes de vértices y representan los elementos del conjunto A.

Extremo inicial y extremo final de un arco: vértice del que parte un arco y vértice al que llega.

Arcos adyacentes: arcos que tienen un extremo común y son diferentes.

Subgrafo: grafo que se obtiene suprimiendo uno o más vértices, así como los arcos que de ellos llegan o parten, del grafo original.

Camino: sucesión de arcos adyacentes, tales que el extremo final de uno coincide con el extremo inicial del siguiente.

Longitud: número de arcos del camino.

Circuito: camino en el cual el vértice inicial coincide con el final.

Bucle: circuito de longitud uno.

Ejemplo:

a, b, c, d, e, f: vértices
(a, a); (a, b); (c, b); (c, d); (c, e);
(d, c); (e, d); (e, f): arcos
(a, b) y (a, a); (c, d) y (c, e): arcos ady.
(c, e, d): camino de longitud 2
(c, e, d, c, b): camino de longitud 4
(c, e, d, c): circuito de longitud 3

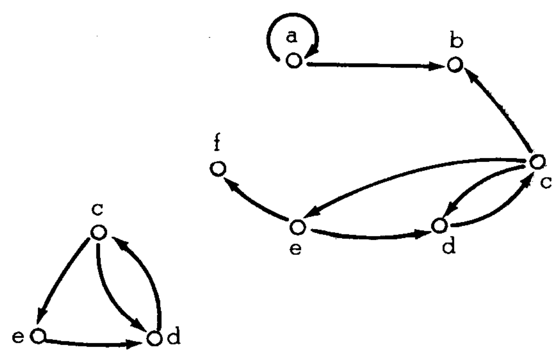


Figura 4

En este grafo observamos que de algunos de sus vértices no podemos llegar a todos los demás. Si todos los vértices de un grafo son alcanzables desde cualquier otro vértice, se dice que el grafo es **fuertemente conexo**.

Esto es, un grafo se dice *fuertemente conexo* si entre dos vértices cualesquiera del mismo existe un camino de cualquier longitud que va de uno a otro. Por ejemplo, el grafo de la Fig. 5 es fuertemente conexo.

Todo subgrafo fuertemente conexo de un grafo se denomina *componente fuertemente conexa*. En el caso de la Fig. 4, el subgrafo (c, d, e) es una componente fuertemente conexa.

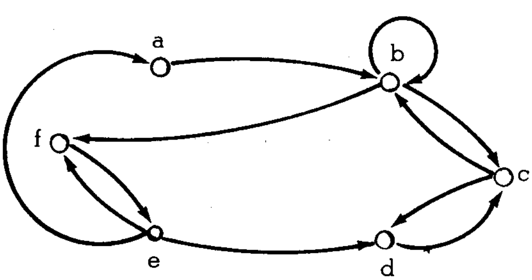


Figura 5

Los conceptos no orientados de un grafo son los siguientes:

Arista: existe una arista entre dos vértices x y y distintos del grafo, si existe un arco que va de x a y, y/o de y a x.

Cadena: sucesión de aristas adyacentes.

Ciclo: cadena finita en la que el vértice inicial coincide con el final.

Ejemplo:

$\{a, b\}$ $\{b, c\}$ $\{c, d\}$ $\{d, a\}$: aristas

$\{a, b, c\}$: cadena

$\{a, b, c, d, a\}$: ciclo

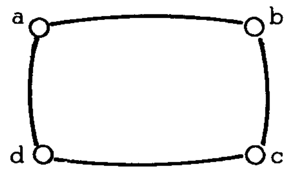


Figura 6

Obviamente, $\{a, b, c\}$ es una cadena pero no un camino. Asimismo, el ciclo $\{a, b, c, d, a\}$ no es circuito. En cambio, todo camino es una cadena y todo circuito es un ciclo. Ello sugiere calificar este grafo como *conexo*.

Diremos que un grafo es conexo si entre dos vértices cualesquiera, distintos entre sí, existe una cadena.

Como resumen de este parágrafo podemos asegurar: ***todo grafo fuertemente conexo es conexo, pero la recíproca no es cierta.***

Verifique el lector que el sistema de tránsito urbano de la Fig. 7 es un grafo fuertemente conexo, mientras que el esquema en un grupo humano representado en la Fig. 8 es conexo.

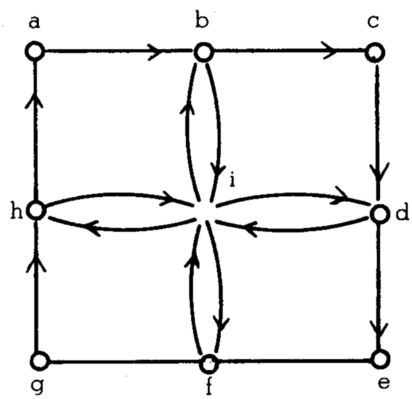


Figura 7

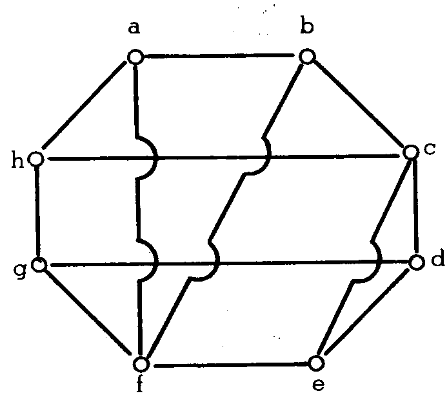


Figura 8

6. Grafos planos

Sea el siguiente problema, conocido con el nombre de *problema de las tres utilidades*: a, b, c son tres casas, y e, f, g corresponden a servicios de agua, eletricidad y gas. ¿Puede dotarse a cada casa con los tres servicios de manera que las conexiones no se crucen y estén en un mismo plano?

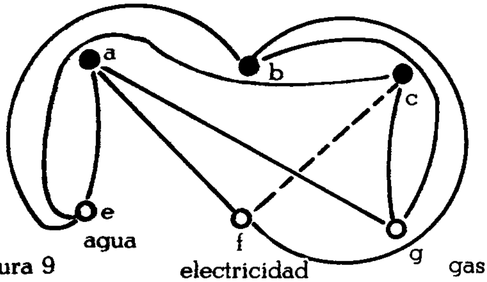


Figura 9

Como puede apreciarse en la Fig. 9 la respuesta es negativa. Inevitablemente, la novena conexión cruza alguna otra, y ello se debe a que el grafo no es plano, y la materialización de este problema exigiría que una de las conexiones eléctricas, por ejemplo, se hiciera aérea, en lugar de subterránea.

La posibilidad de realizar geométricamente ciertos grafos en el plano está ligada intrínsecamente a características del plano y de dichas configuraciones. Diremos que un grafo es *plano* si existe un grafo isomorfo que puede dibujarse en el plano de modo que las aristas sólo se crucen en los vértices. Por ejemplo, los grafos de la Fig. 10 aparentemente no son planos, pues sus aristas se cortan. Sin embargo, es fácil encontrar dos grafos isomorfos a los anteriores en los que esto no sucede (Fig. 11). En conclusión, los grafos de la Fig. 10 son planos.

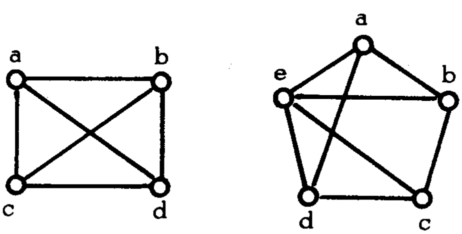


Figura 10

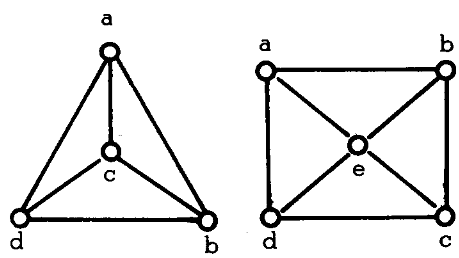


Figura 11

El problema es encontrar un método eficaz para reconocer la planitud de un grafo, sin recurrir a sus posibles representaciones isomorfas. Este problema fue resuelto por Kuratowski, matemático polaco, que descubrió que existen dos grafos no planos —el correspondiente al problema de las tres casas y las tres utilidades (Fig. 12) y el grafo de cinco vértices— tales que cada vértice está conectado con los restantes (Fig. 13). Llamaremos al primero $K_{3,3}$ y al segundo K_5.

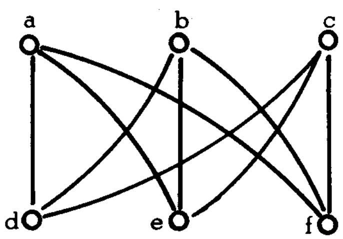


Fig. 12 ($K_{3,3}$)

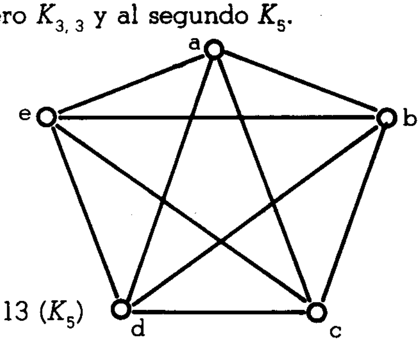


Fig. 13 (K_5)

El resultado fundamental es el:

Teorema de Kuratowski: Un grafo es plano si y sólo si no contiene ningún subgrafo isomorfo al $K_{3,3}$ o al K_5.

La demostración de este teorema está más allá del alcance de estas notas, pero su utilidad es indudable, pues permite caraterizar clara y explícitamente los grafos planos.

7. Grafos poligonales

Llamaremos *grafo poligonal* a un grafo plano conexo que es reunión de ciclos, y tal que existe un ciclo mínimo y uno máximo. Intuitivamente, esto significa que un grafo poligonal divide al plano en zonas poligonales. El interior de cada ciclo se llama *cara*, y se supone que la parte infinita exterior que rodea al grafo es una cara, la *cara del infinito* que tiene como ciclo limitante el ciclo máximo del grafo o polígono envolvente.

En consecuencia, en todo grafo poligonal se cuentan no sólo el número de vértices V y el de aristas A, sino también el de caras C (incluyendo la cara del infinito).

Para los cinco poliedros regulares: tetraedro, octaedro, icosaedro, hexaedro (o cubo) y dodecaedro, vale la fórmula de Euler que establece:

Fórmula de Euler: $C + V = A + 2$

Es fácil comprobar su validez en la siguiente tabla:

Nombre	**Polígonos que forman caras**	V	A	C	**Núm. de A por V**	**Núm. de A por C**
Tetraedro	Triángulos	4	6	4	3	3
Octaedro	Triángulos	6	12	8	4	3
Icosaedro	Triángulos	12	30	20	5	3
Cubo	Cuadrados	8	12	6	3	4
Dodecaedro	Pentágonos	20	30	12	3	5

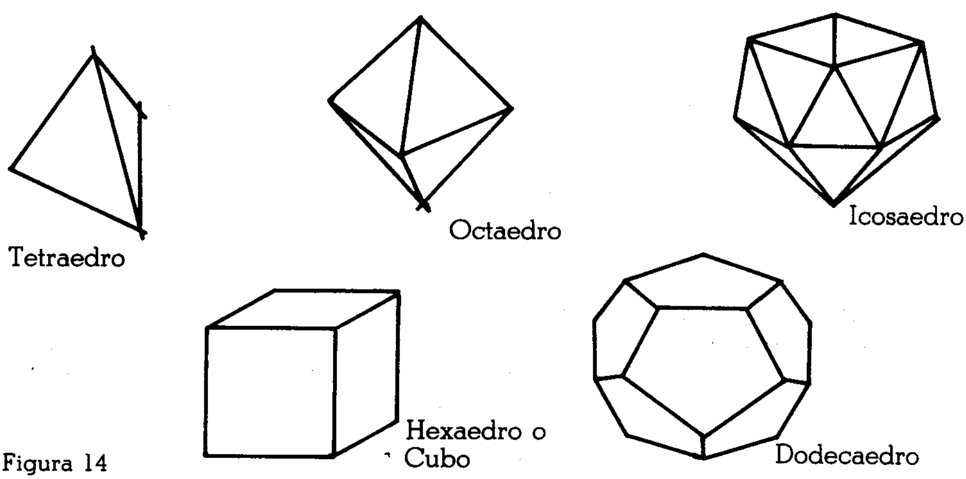


Figura 14

La relación de Euler también es válida en cualquier grafo poligonal. Diremos que un grafo poligonal es *regular* si en cada vértice concurre igual número de aristas. Si además de ser regular tiene la propiedad de que cada cara posee el mismo número de aristas limitantes, se dice que el grafo es *completamente regular*.

Vamos a probar que los grafos completamente regulares no triviales son sólo los cinco polígonos asociados a los poliedros regulares. En efecto, como en cada vértice la suma de ángulos debe ser menor que 2π, y en cada vértice inciden por lo menos 3 caras, cada uno de los ángulos debe valer menos que $2\pi/3$. En consecuencia, los únicos polígonos que pueden intervenir en las caras son los de 3, 4, 5 lados, ya que para el hexágono, el ángulo vale justo $2\pi/3$. Los ángulos de un cuadrado son rectos; esto es, en un vértice pueden concurrir a lo sumo 3 cuadrados y no más de 3 pentágonos.

En cambio, pueden incidir en un vértice 3, 4, o bien 5 triángulos equiláteros, ya que con 6 triángulos equiláteros tendríamos un ángulo de 2π.

Las configuraciones de los cinco grafos completamente regulares no triviales son las de la Fig. 15.

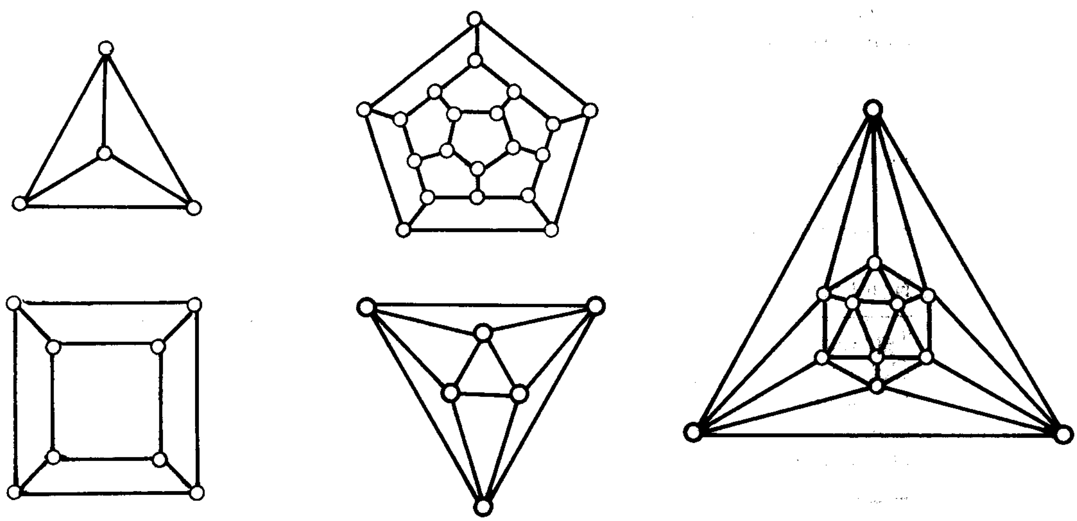


Figura 15

La fórmula de Euler resulta útil, asimismo, para probar que los grafos $K_{3,3}$ y K_5 no son planos.

(1) $K_{3,3}$ tiene $A = 9$; $V = 6$. Entonces si fuera plano sería:

$$C = 9 - 6 + 2 = 5$$

Pero este grafo no admite regiones triangulares, ya que en este caso 2 de los 3 vértices serían ambos casas, o ambos utilidades, y estarían unidos, en contra de la hipótesis constructiva. Es decir, cada región debe tener por lo menos 4 aristas en su borde y entonces se tendría que

$$20 = 4C < 2A = 18 \;.$$

lo cual constituye un absurdo.

(2) K_5

Si fuera plano sería:

$$C = 2 + A - V = 2 + 10 - 5 = 7$$

Pero cada una de las caras tiene por lo menos tres aristas en su contorno. Además, cada arista sirve de límite a dos regiones. Entonces resulta que $3C < 2A$, o sea $21 < 20$, lo cual es absurdo.

8. Mosaicos regulares

Un tipo especial de recubrimiento del plano es el mosaico. Los diferentes tipos de mosaicos se obtienen siguiendo un principio general de repetición de un módulo en dos direcciones, con condiciones restrictivas de acoplamiento y regularidad. Supongamos que se toman polígonos regulares del mismo tipo como módulo, con la condición de que los vértices se toquen con otros vértices. Sea N el número de aristas de cada polígono. El ángulo interior en cada vértice del polígono vale $(N - 2/N) * 180$ grados. En cada vértice tendremos,

$$\frac{360 \text{ grados}}{\frac{N-2}{N}\ 180 \text{ grados}} = \frac{2N}{N-2} = 2 + \frac{4}{N-2}$$

tales polígonos. Como este número debe ser entero para $N > 2$ debemos tener $N = 3$, 4 o 6. Ello significa que el plano puede recubrirse totalmente con mosaicos triangulares, cuadrados o hexagonales.

Cada uno de estos mosaicos es un grupo poligonal y hemos probado lo siguiente:

Si se desea cubrir el plano con un conjunto de polígonos regulares congruentes que se toquen vértice con vértice, estos polígonos deben tener 3, 4 o 6 aristas.

Como la demostración anterior no depende de ninguna propiedad geométrica de las figuras generadoras del mosaico, podemos también cubrir el plano con grafos isomorfos a los de la Fig. 16, tal como se aprecia en la Fig. 17.

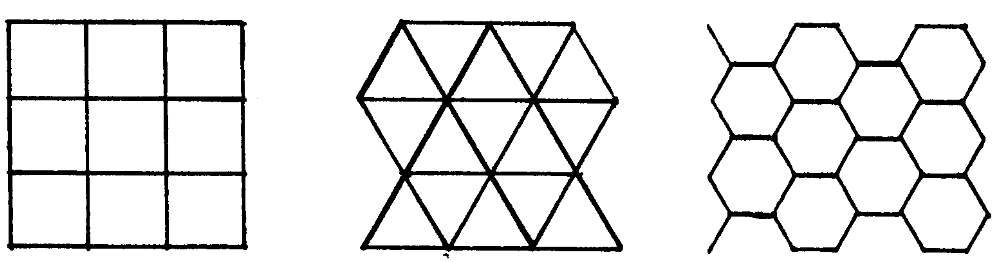


Figura 16

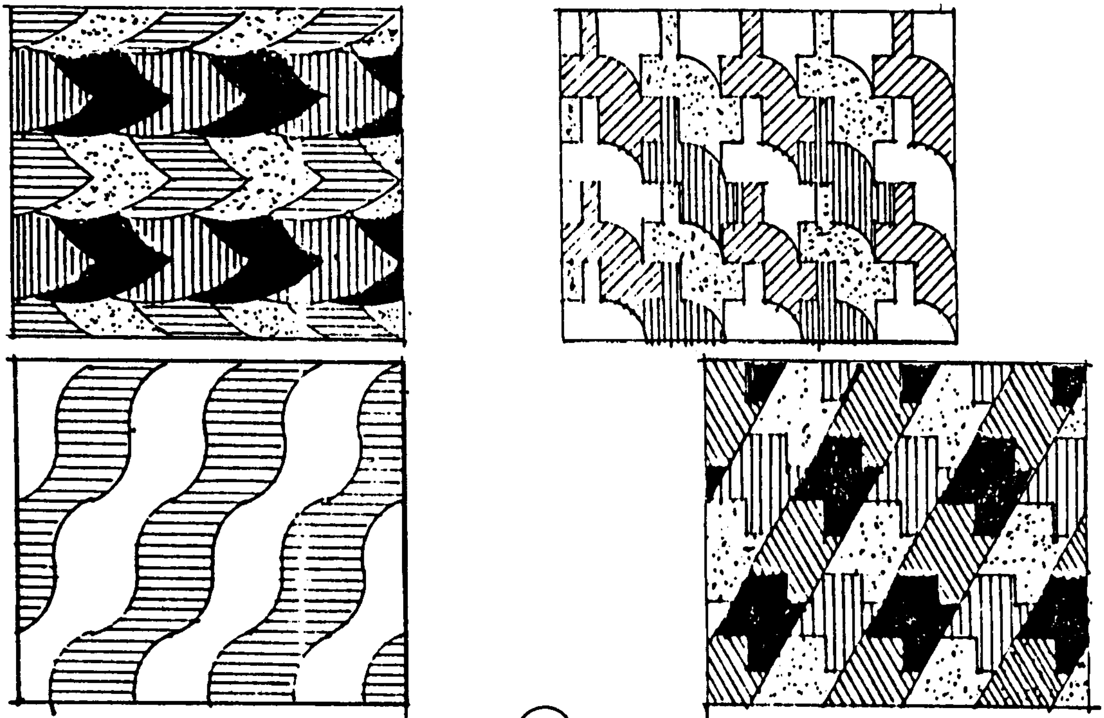


Figura 17

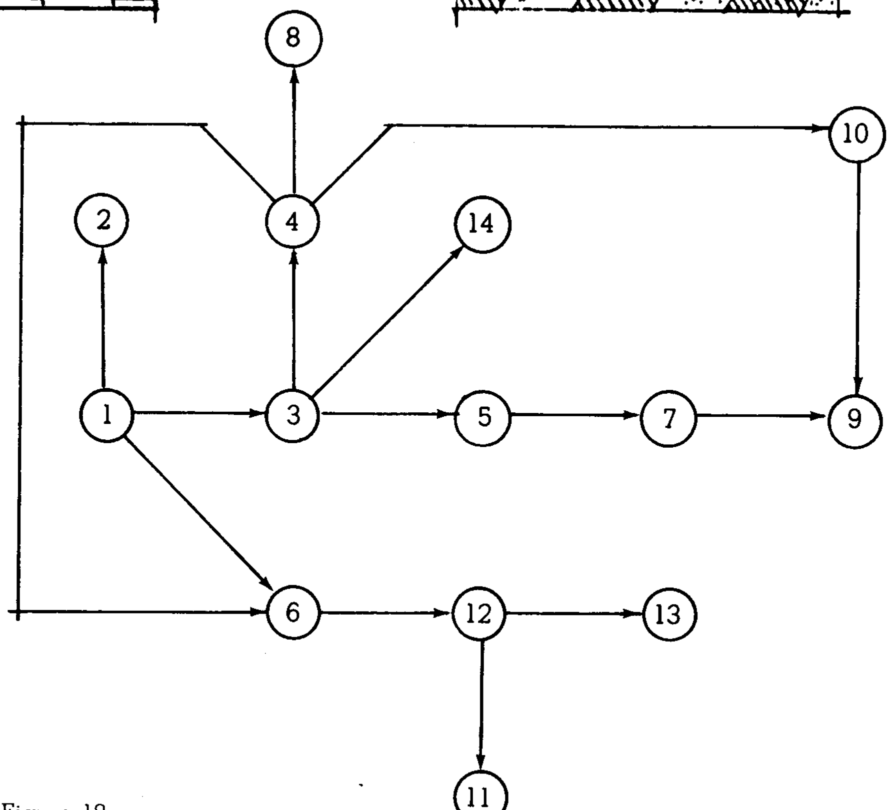
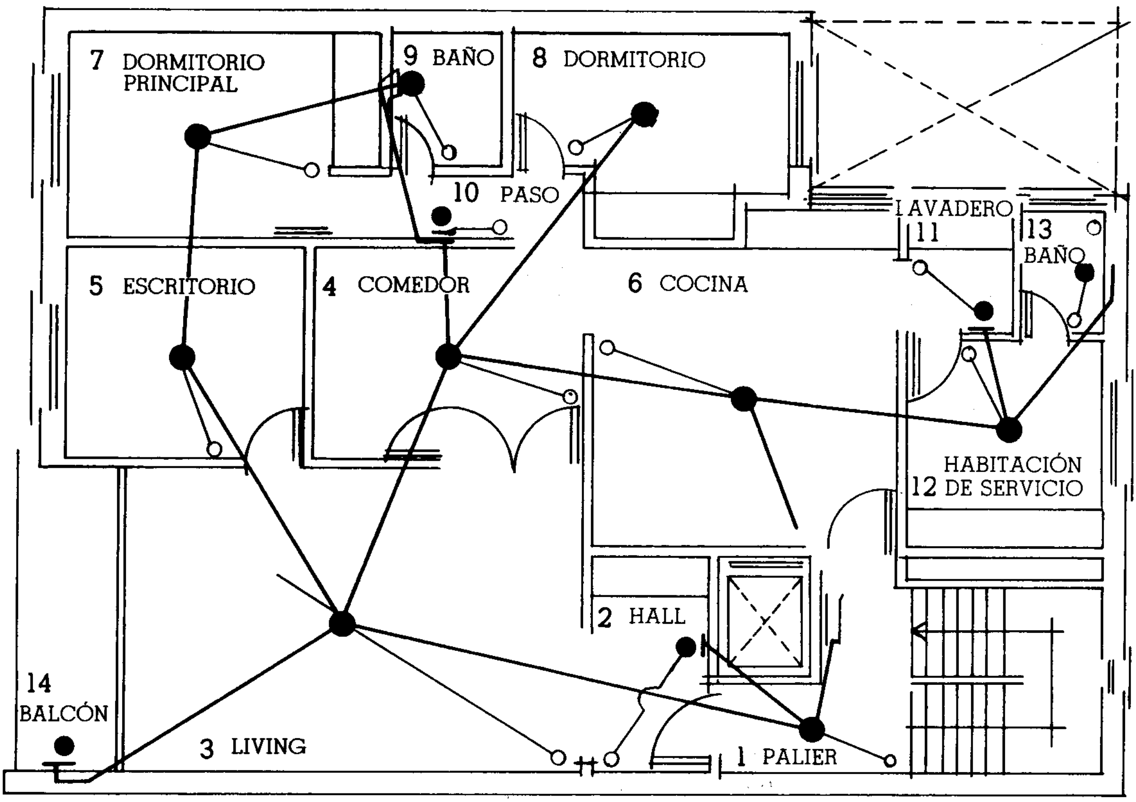


Figura 18

En la Fig. 18 se tiene el plano de las instalaciones a que se hace referencia.



1 PALIER
2 HALL
3 LIVING
4 COMEDOR
5 ESCRITORIO
6 COCINA
7 DORMITORIO PRINCIPAL
8 DORMITORIO
9 BAÑO PRINCIPAL
10 PASO
11 LAVADERO
12 HABITACIÓN DE SERVICIO
13 BAÑO DE SERVICIO
14 BALCÓN

El ejemplo muestra una instalación eléctrica de una vivienda tipo perteneciente a un edificio de varios pisos. Se ha graficado la instalación eléctrica a partir del tablero seccional del piso correspondiente.

El grafo tiene por vértices los distintos locales, y los arcos (orientados) indican la vinculación entre locales de la instalación y la dirección en que se van conectando los diversos tramos a partir de la fuente original.

Resulta incluso de utilidad posterior a la finalización del trabajo, como elemento orientador de posibles reparaciones o modificaciones.

Bibliografía

1. **ALSINA, Claudi y TRILLAS, Enric.** *Lecciones de Álgebra y Geometría*, Editorial Gustavo Gili, 1984.

2. **APPEL, K. y HAKEN, W.** *The Four-Color Problem*, Math. Today: Twelve Informal Essays, Springer-Verlag, 1978, 153-180.

3. **BERGE, Claude.** *Teoría de las Redes y sus Aplicaciones*, CECSA, 1970.

4. **BROADBENT, Geoffrey.** *Diseño Arquitectónico*, Editorial Gustavo Gili, 1976.

5. **COZZENS, Margaret B. y PORTER, Richard.** *Mathematics and its Applications*, D.C. Heath & Co., 1987.

6. **KAUFMANN, A. y PRECIGOUT, M.** *Curso de Matemáticas Nuevas*, CECSA, 1970.

7. **KOENIG, D.** *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*, Akad. Verlag, 1936, y Nueva York, Chelsea, 1950.

8. **TORANZOS, Fausto.** *Introducción a la Teoría de Grafos*, OEA, Monografía No. 15, 1976.