NOTAS DE CLASE

Ecuaciones Diferenciales con Calculadora

En la práctica de la ingeniería es frecuente recurrir al empleo de métodos aproximados de solución de ecuaciones diferenciales. Por esta razón, es deseable que el estudiante de ingeniería adquiera una sólida experiencia en el empleo de tales métodos. En el presente trabajo se muestra que el más sencillo de los modelos de calculadoras científicas, puede convertirse en un valioso auxiliar didáctico para utilizar tales métodos numéricos en el salón de clase o en el trabajo individual de los estudiantes.

1. Introducción

Muchos problemas de la ingeniería conducen a la necesidad de encontrar la solución de una ecuación diferencial que satisfaga ciertas condiciones iniciales. Sin embargo, sólo en casos aislados resulta posible obtener la solución exacta, y frecuentemente la expresión obtenida contiene en forma implícita a la función buscada, lo que complica el usar tal respuesta.

Por esta razón, en la práctica de la ingeniería se recurre al uso de métodos aproximados de integración de las ecuaciones diferenciales. De manera convencional, dichos métodos se clasifican en *métodos analíticos* (métodos de construcción de fórmulas aproximadas), *métodos numéricos* (cuando la solución buscada se obtiene mediante tabulación) y *métodos gráficos*.

Es de señalar que en nuestros cursos a estudiantes de ingeniería nos limitamos a los métodos de solución exacta y abandonamos los de solución aproximada.

El problema de encontrar la solución de una ecuación diferencial que satisfaga ciertas condiciones iniciales se conoce como *problema de Cauchy*.

Los métodos de solución numérica del problema de Cauchy se analizan con detalle en los cursos de análisis numérico[1][2] y ecuaciones diferenciales ordinarias[4][5]. En la práctica docente es común implementar dichos métodos con apoyo en la *computadora*. Sin embargo, en el aula existe ya un recurso alternativo: *la calculadora*, que también permite realizar dichos algoritmos en clase y en casa, abriendo la posibilidad de una participación más activa de los estudiantes. Por supuesto, las mejores posibilidades las ofrecen las calculadoras programables. Pero incluso las calculadoras científicas no programables pueden ser utilizadas con provecho. Su empleo planificado posibilita la asimilación consciente de los métodos de análisis numérico.

José Ramón Jiménez R.

Universidad de Sonora

El presente trabajo se propone ilustrar de qué modo las calculadoras científicas pueden servir para resolver ecuaciones diferenciales sencillas, en los casos siguientes:

a) Ecuación diferencial de primer orden

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

con la condición inicial:

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

b) Ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y'') \tag{3}$$

bajo las condiciones iniciales:

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y'_0 \tag{4}$$

c) Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} dx/dt = f_1(t, x, y) \\ dy/dt = f_2(t, x, y) \end{cases} \tag{5}$$

bajo las condiciones iniciales:

$$x(t_0) = x_0, \qquad y(t_0) = y_0 \tag{6}$$

En este caso se requiere encontrar las funciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, que son solución del sistema (5) y que satisfacen las condiciones iniciales (6).

2. El método de Euler simple

Uno de los métodos numéricos de un solo paso más sencillos para resolver el problema de Cauchy es el *método de Euler*, o *método de la línea tangente*. También se le conoce como *método de la pendiente constante*.

En el caso del problema de Cauchy (1)—(2) para la ecuación diferencial de primer orden, las soluciones aproximadas se obtienen mediante la *fórmula de Euler*:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \qquad x_{n+1} = x_n + h$$

El método de Euler se realiza mediante el siguiente algoritmo.

Algoritmo

Sea dado el problema (1)—(2) y el segmento $[x_0, x_0 + a]$.

1. Establecemos el número n de puntos de división del segmento $[x_0, x_0 + a]$, y se calcula el valor de paso, $h = a/n$. Tomamos los valores conocidos x_0 y y_0.

2. Supóngase que ya hemos determinado x_k y y_k. Sustituyendo estos valores de x_k y y_k en el segundo miembro de la ecuación (1):

$$y'(x_k) = f(x_k, y_k),$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \qquad x_{k+1} = x_k + h$$

3. Si $k + 1 = n$ $(x_{k+1} = x_0 + a)$, el proceso termina. Los números $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ dan los valores aproximados de la solución buscada para la ecuación (1) en los puntos de división $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. En cambio, si $k + 1 < n$ $(x_{k+1} < x_0 + a)$ repetimos el paso 2, tomando como datos iniciales x_{k+1}, y_{k+1}.

En el método de Euler es conveniente presentar los cálculos en forma de tabulación. Para visualizar más claramente la solución, puede dibujarse la gráfica de solución, la cual representa de manera aproximada la curva integral del problema de Cauchy (1)—(2). A este efecto es necesario localizar en el sistema de coordenadas los puntos (x_k, y_k), $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, y unirlos consecutivamente.

En general, la solución por el método de Euler se puede implementar de manera puramente gráfica, y por ello este método a veces se clasifica junto a los métodos gráficos de solución de una ecuación diferencial.

El error que se obtiene al calcular la solución $y(x)$ en el punto x_n es del orden $1/n$, o bien h. Por esto, mientras menor sea el paso de integración h, mejor será la aproximación a la solución exacta.

Análogamente, las soluciones aproximadas del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (5)—(6) por el método de Euler están dadas por las fórmulas

$$x_{k+1} = x_k + hf_1(t_k, x_k, y_k),$$

$$y_{k+1} = y_k + hf_2(t_k, x_k, y_k),$$

$$t_{k+1} = t_k + h.$$

El problema de Cauchy (3)—(4) para una ecuación diferencial de segundo orden se puede reducir al problema que acabamos de considerar. En efecto, tomemos la ecuación (3) y hagamos la sustitución $y' = z$, $y'' = z'$. La ecuación (3) se sustituye entonces por el sistema

$$y' = z$$
$$z' = f(x, y, z)$$

y las condiciones iniciales (4) se transforman en las condiciones

$$y(x_0) = y_0, \qquad z(x_0) = z_0, \qquad (z_0 = y_0')$$

De este modo, el problema de Cauchy (3)—(4) ha quedado reducido al problema (5)—(6) para $f_1 = z$, $f_2 = f(x, y, z)$.

3. Ejemplos de solución de ecuaciones diferenciales con la calculadora CASIO *fx-82c*

De entre los modelos de calculadoras científicas no programables que funcionan con base en la lógica algebraica de operaciones, éste es de los más simples y baratos, y también de los más difundidos. Por esta razón lo hemos elegido como prototipo para ilustrar su empleo en los algoritmos de solución de ecuaciones diferenciales arriba señalados. Las indicaciones que daremos a continuación pueden servir también para todos los modelos de calculadoras análogos a éste, haciendo las adaptaciones necesarias.

• EJEMPLO 1. En el intervalo [0, 1], encontrar la solución de la ecuación diferencial $y' = e^{-x^2}$ que satisface la condición $y(0) = ¼$. Tome $h = 0.1$.

SOLUCIÓN. En este caso, los puntos de división del segmento son

$x_0 = a = 0$ $x_1 = 0.1$ $x_2 = 0.2$ $x_3 = 0.3$ $x_4 = 0.4$ $x_5 = 0.5$
$x_6 = 0.6$ $x_7 = 0.7$ $x_8 = 0.8$ $x_9 = 0.9$ $x_{10} = b = 1$

Los valores aproximados de y se calculan mediante la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + 0.1e^{-x_n^2}.$$

Para aprovechar al máximo las posibilidades de la calculadora, almacenaremos en la única celda de memoria los valores de y_n ($n = 0, 1, 2, \ldots, 9$) para poder usarlos en cálculos consecutivos sin tener que introducirlos cada vez.

.25 Min

(almacenamos el valor $y_0 = ¼ = 0.25$ en la celda de memoria).

.1 × INV √‾ +/− INV ln = M+ MR

(el valor que aparece en la pantalla es y_1; no olvide copiar este valor a la tabulación).

.2 × INV √‾ +/− INV ln = M+ MR

.3 × INV √‾ +/− INV ln = M+ MR

. . . .

.9 × INV √‾ +/− INV ln = M+ MR

1 +/− INV ln = M+ MR

Después de cada ejecución, no olvide copiar el valor de y_n a la tabulación de la solución (Tabla 1).

Podemos resumir toda la secuencia de operaciones en un esquema:

. 25 Min

x_i × INV $\sqrt{\ }$ +/− INV ln = M+ MR → y_i

El primer renglón esquematiza el procedimiento para almacenar el valor de y_0 (¼ = 0.25) en la celda de memoria. En el segundo renglón se introducen los diferentes valores de x_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$) para obtener, al concluir el proceso de cada renglón, los valores de y_{i+1}.

• EJEMPLO 2. Resolver la ecuación diferencial $y' = e^{-xy}$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 1]$. Tome $h = 0.1$.

SOLUCIÓN. En este caso los puntos de división son idénticos a los del Ejemplo 1. La fórmula para calcular los valores aproximados de y es

$$y_{n+1} = y_n + .1e^{-x_n y_n}$$

o bien, en forma desplegada:

$$y_1 = y_0 + .1e^{-x_0 y_0} = 1.1$$
$$y_2 = y_1 + .1e^{-x_1 y_1} = 1.1 + .1e^{-.1}$$
$$y_3 = y_2 + .1e^{-x_2 y_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{10} = y_9 + .1e^{-x_9 y_9}$$

Al igual que en el Ejemplo 1, almacenaremos en la celda de memoria los valores de y_n y los utilizaremos en los cálculos sucesivos.

1.1 Min

(Almacenamos en la celda de memoria el valor $y_1 = 1.1$).

× .1 +/− INV ln = × .1 M+ MR

(El valor que aparece en la pantalla es el de y_2; lo podemos usar inmediatamente en el siguiente cálculo, pero es preciso copiarlo en este momento a la tabulación).

× .2 = +/− INV ln × .1 = M+ MR

× .3 = +/− INV ln × .1 = M+ MR

. . . .

× .9 = +/− INV ln × .1 = M+ MR

Los resultados de estos cálculos se consignan en la Tabla 2.

El esquema general para la secuencia de operaciones es:

1.1 Min

$\times\ x_i\ =\ +/-\ \text{INV}\ \ln\ \times\ .1\ =\ \text{M+}\ \text{MR} \rightarrow y_{i+1}$

• EJEMPLO 3. Encontrar, en el intervalo [1, 2], la solución de la ecuación diferencial $y' = \ln(x + y)$, $y(1) = 3$, $h = 0.1$.

SOLUCIÓN. Ahora tenemos los siguientes puntos de división:

$x_0 = a = 1$ $\quad x_1 = 1.1$ $\quad x_2 = 1.2$ $\quad x_3 = 1.3$ $\quad x_4 = 1.4$ $\quad x_5 = 1.5$

$x_6 = 1.6$ $\quad x_7 = 1.7$ $\quad x_8 = 1.8$ $\quad x_9 = 1.9$ $\quad x_{10} = b = 2$

La fórmula para cálculo es

$$y_{n+1} = y_n + .1 \ln(x_n + y_n).$$

Al igual que en los ejemplos anteriores, podemos encadenar los cálculos consecutivos, ya que

$$y_1 = y_0 + .1 \ln(x_0 + y_0) = 3 + .1 \ln(1 + 3) = 3 + .1 \ln 4 = 3.1386294$$

$$y_2 = y_1 + .1 \ln(x_1 + y_1),$$

$$y_3 = y_2 + .1 \ln(x_2 + y_2),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_{10} = y_9 + .1 \ln(x_9 + y_9).$$

La secuencia de cálculos es:

3.1386294 Min

(se almacena en la celda de memoria el valor de y_1).

$+\ \ x_i\ \ =\ \ \ln\ \ \times\ \ .1\ \ =\ \ \text{M+}\ \ \text{MR}\ \rightarrow y_{i+1}$

Véanse los resultados en la Tabla 3.

• EJEMPLO 4. Resolver el problema de Cauchy para el sistema de cuaciones diferenciales.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y-1}{y} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x-t}$$

donde $t \in [0, 1/2]$, bajo las condiciones iniciales $x(0) = -1$, $y(0) = 1$. Se sugiere usar cinco puntos de partición del segmento.

SOLUCIÓN. De acuerdo con el algoritmo arriba descrito, necesitamos primero encontrar los puntos de división del segmento. En este caso:

$$t_0 = 0,\ t_1 = 0.1,\ t_2 = 0.2,\ t_3 = 0.3,\ t_4 = 0.4,\ t_5 = 0.5 = 1/2$$

Los datos iniciales son $t_0 = 0$, $x_0 = -1$, $y_0 = 1$. También tenemos que

$$f_1(t, x, y) = \frac{y-1}{y} = 1 - \frac{1}{y}$$

$$f_2(t, x, y) \quad \frac{1}{x-t}$$

De acuerdo con el algoritmo arriba descrito, las aproximaciones a la solución las obtenemos mediante las fórmulas

$$x_{k+1} = x_k + .1\left(1 - \frac{1}{y_k}\right);$$

$$y_{k+1} = y_k + .1\,\frac{1}{x_k - t_k}$$

Entonces $x_1 = x_0 = -1$, $y_1 = 0.9$ como puede verse fácilmente. Para continuar el cálculo podemos implementar las siguientes secuencias:

y_k INV $1/x$ $+/-$ $+$ 1 $=$ $\times$ $.1$ $+$ x_k $=$ $\rightarrow x_{k+1}$

x_k $-$ t_k $=$ INV $1/x$ $\times$ $.1$ $+$ y_k $=$ $\rightarrow$ y_{k+1}

Es conveniente presentar la solución del sistema en forma de tabulación (Tabla 4).

• EJEMPLO 5. Resolver la ecuación diferencial $y'' = xy^2$ en el intervalo $[0, 1]$, bajo las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1/2$. Hágase $h = 0.2$.

SOLUCIÓN. Sustituimos la ecuación dada por un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Con este fin hacemos $y' = z$, $y'' = z'$. Entonces obtenemos el sistema.

$$z' = xy^2$$

$$y' = z$$

y las condiciones iniciales

$$z(0) = 1/2, \qquad y(0) = 1:$$

De acuerdo con el método de Euler, las soluciones aproximadas las podremos obtener usando las fórmulas

$$z_{k+1} = z_k + hx_k y_k^2$$

$$y_{k+1} = y_k + hz_k$$

$$x_{k+1} = y_k + hz_k$$

$$x_{k+1} = x_k + h.$$

Los datos iniciales son $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1/2$, $h = 0.2$. En consecuencia, los valores de x_k se pueden obtener sin la calculadora: $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, $x_4 = 0.8$. La secuencia para obtener las soluciones aproximadas es:

$$y_k \quad \text{INV} \quad \sqrt{} \quad \times \quad x_k \quad \times \quad .2 \quad + \quad z_k \quad = \quad \rightarrow z_{k+1}$$

$$z_k \quad \times \quad .2 \quad + \quad y_k \quad = \quad \rightarrow y_{k+1}$$

La solución aproximada se consigna en la Tabla 5.

Tabulación de las soluciones

Tabla 1

n	x_n	y_n
0	0	0.25
1	0.1	0.3490049
2	0.2	0.4450839
3	0.3	0.536477
4	0.4	0.6216914
5	0.5	0.6995715
6	0.6	0.7693391
7	0.7	0.8306017
8	0.8	0.883331
9	0.9	0.983331
10	1	1.020119

Tabla 2

n	x_n	y_n
0	0	1
1	0.1	1.1
2	0.2	1.1904837
3	0.3	1.2692964
4	0.4	1.3376286
5	0.5	1.3961925
6	0.6	1.4459457
7	0.7	1.4879429
8	0.8	1.5232338
9	0.9	1.552798
10	1	1.577519

Tabla 3

n	x_n	y_n
0	1	3
1	1.1	3.1386294
2	1.2	3.2830534
3	1.3	3.4330838
4	1.4	3.5885415
5	1.5	3.7492559
6	1.6	3.9150645
7	1.7	4.0658129
8	1.8	4.2613537
9	1.9	4.4415471
10	2	4.6262593

Tabla 4

k	t_k	x_k	y_k
0	**0**	−1	1
1	**0.1**	−1	0.9
2	**0.2**	−1.01111	0.8090909
3	**0.3**	−1.034706	0.7265221
4	**0.4**	−1.072348	0.6515992
5	**0.5**	−1.125817	0.5836805

Tabla 5

k	x_k	z_k	y_k
0	0	0.5	1
1	0.2	0.5	1.1
2	0.4	0.5484	1.2
3	0.6	0.6636	1.30968
4	0.8	0.8694314	1.4424
5	1	1.2023142	1.6162863

4. Conclusiones

Como hemos visto, las calculadoras científicas no programables de lógica algebraica de operaciones, del tipo CASIO *fx*-82*c*, permiten resolver algunos problemas sencillos de ecuaciones diferenciales y sistemas por el método de Euler. Ciertamente, el proceso de solución resulta laborioso. Sin embargo, el tiempo adicional que se invierte al usar la calculadora se recompensa con un más profundo acercamiento del estudiante al algoritmo. Hablando con propiedad, no es la calculadora la que resuelve el problema, sino el estudiante, y además lo tiene que hacer paso por paso, pues la calculadora no es programable. Esto le obliga a asimilar de manera consciente y profunda el algoritmo, lo que en sí ya tiene un alto valor pedagógico.

Referencias

[1] Chapra, Steven C. y Canale, Raymond P. ***Métodos Numéricos para ingenieros***. McGraw-Hill. México, 1991.

[2] Burden, Richard L. y Faires, J. Douglas. ***Análisis Numérico***. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1985.

[3] Spiegel, Murray R. ***Ecuaciones diferenciales Aplicadas***. Prentice-Hall Hispanoamericana. México, 1988.

[4] Edwards, C. H. y Penney, David E. ***Ecuaciones Diferenciales Elementales con aplicaciones***. Prentice-Hall Hispanoamericana. México, 1986.

[5] Calculadora Científica CASIO ***fx-82c. Manual***. SA022560910A. Impreso en español en Japón.

Grupo Editorial Iberoamérica

en su permanente interés de brindar cada vez más apoyo a los profesores de Matemáticas en el mundo de habla hispana, participa el lanzamiento de Educación Matemática, que ya se vislumbra como el medio más importante para la interacción de las ideas que coadyuven a la enseñanza cada vez mejor de las matemáticas.

Invitamos a todas las personas e instituciones relacionadas con la Educación Matemática a que participen en el desarrollo de esta publicación enviando sus artículos a:

Río Ganges No. 64 · Col. Cuauhtémoc · Apdo. Postal 5-076

THOMSON INTERNATIONAL PUBLISHING

Presenta: Software para el Profesor de matemáticas

EXP
Un procesador científico, rápido y poderoso a un precio económico

Un procesador de texto WYSIWYG de gran potencia, que incluye 13 frentes diferentes entre los que se encuentran símbolos matemáticos, letras griegas, rusas, alfabetos especiale: y símbolos en general.
Es excepcionalmente rápido por ser desarrollado en el lenguaje ensamblador 8086.
Permite el posicionamiento de símbolos y fórmulas preciso, impresión de alta resolución, el uso del espacio proporcional y muchas otras funciones.

Álgebra Mentor

Un instructor computadorizado para el Álgebra básica. Déle a sus alumnos un ambiente de soporte y apoyo para el aprendizaje y repaso del álgebra básica en la computadora.

TriGpack

Una herramienta de software que hace que el aprendizaje del álgebra se vuelva más rápido, fácil y divertido.

Obtenga más información de éstos y otros paquetes de software que ofrecemos.

Diríjase a:

Grupo Editorial Iberoamérica
Río Ganges no. 64
06500 México, D.F.
Tels. 2087681, 2086002
Fax 2086677

Thomson International Publishing
10 Davis Drive
Belmont, California 94002
U.S.A.
Tels: (415) 598 0784 y 598 0793
Fax: (415) 598 9953

THOMSON INTERNATIONAL PUBLISHING