

La Criba de Eratóstenes

—Una conjetura y una prueba

Introducción

La criba de Eratóstenes es un método bien conocido para encontrar números primos. Sin embargo, la actividad puede resultar más atractiva si acomodamos los números entre 2 y 100 en seis columnas. De esta manera, la criba conduce a un interesante patrón geométrico en la forma de tachar los múltiplos de los primos sucesivos. Los alumnos de secundaria lo aprecian, y el maestro puede utilizar este patrón para plantear preguntas relacionadas con divisibilidad, residuos, congruencia, etc. Además, para alumnos más avanzados, el resultado de la criba sugiere una conjetura acerca de cómo se pueden expresar los números primos y, al mismo tiempo, sugiere una forma de probar la conjetura.

Actividad 1

Halla los números primos menores que 100, siguiendo las instrucciones que se dan con la Tabla 1.

Tabla 1

2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61
62	63	64	65	66	67
68	69	70	71	72	73
74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97
98	99	100			

Alfinio Flores Peñafiel

Arizona State University

Procedimiento

- 1) Encierra el número 2 en un círculo. Determina todos los múltiplos de 2, y tacha todos los múltiplos de 2 (excepto el propio 2) con tres rayas verticales.
- 2) Encierra el número 3 en un círculo. Encuentra todos los múltiplos de 3; algunos ya fueron tachados. Tacha ahora todos los múltiplos de 3 (excepto el 3) con una raya vertical.
- 3) Encierra el número 5 en un círculo. Halla todos los múltiplos de 5; algunos ya fueron marcados. Tacha todos los múltiplos de 5 (excepto el 5) con cuatro rayas.
- 4) Encierra el número 7 en un círculo. Determina enseguida todos los múltiplos de 7; algunos ya fueron marcados. Tacha todos los múltiplos de 7 (excepto el 7) con tres rayas.
- 5) Por último, encierra en círculos cada uno de los números que no fueron tachados. Estos son los *números primos menores que 100*.

Actividad 2

Fue suficiente tachar los múltiplos de primos hasta 7 para que quedaran todos los primos menores que 100, ¿por qué? (Sugerencia: si $m < 100$, y $m = pq$, entonces al menos uno de los dos factores p o bien q debe ser menor que $\sqrt{100} = 10$)

Nótese que todos los números primos (excepto el 2 y el 3) se encuentran en la antepenúltima columna o en la última columna (ver la Tabla 2). Como hay seis columnas y los números de la penúltima columna son múltiplos de 6, estos primos difieren en 1 de un múltiplo de 6. Si continuamos la tabla indefinidamente, ¿será posible que todos los demás primos se encuentran en esas dos columnas? Es decir, que todos los demás números primos difieran en 1 de un múltiplo de 6.

Tabla 2

②	③	4	⑤	6	⑦
8	9	10	⑪	12	⑬
14	15	16	⑰	18	⑲
20	21	22	⑳	24	26
26	27	28	㉑	30	㉓
32	33	34	35	36	37
38	39	40	④①	42	④3
44	45	46	④7	48	49
50	51	52	⑤3	54	55
56	57	58	⑤9	60	⑥1
62	63	64	65	66	⑥7
68	69	70	⑦1	72	⑦3
74	75	76	77	78	⑦9
80	81	82	⑧3	84	85
86	87	88	⑧9	90	91
92	93	94	95	96	⑨7
98	99	100			

Conjetura

Si p es un número primo ($p > 3$), entonces p se puede expresar en la forma $p = 6n + 1$, o bien $p = 6n - 1$. La criba realizada antes sugiere la forma de demostrar la conjetura: si el número no está en la última columna o en la antepenúltima, entonces no es primo. En la columna que empieza con 2, 4, 6 todos los números son divisibles entre 2, y en la columna que empieza con 3 todos los números son divisibles entre 3.

Demostración

Cualquier número entero mayor que o igual a 5 se puede expresar en exactamente una de las siguientes formas, con $n \geq 1$:

$$6n - 1, 6n, 6n + 1, 6n + 2, 6n + 3, 6n + 4$$

Se tiene entonces que

$6n$	no es un número primo, ya que es divisible entre 6
$6n + 2$	no es un número primo, ya que es divisible entre 2
$6n + 3$	no es un número primo, puesto que es divisible entre 3
$6n + 4$	no es un número primo, puesto que es divisible entre 2

Por lo tanto, si p es un primo y, $p > 3$, las únicas posibilidades son $p = 6n - 1$, o bien $p = 6n + 1$

Referencias

Flores Peñafiel, A.; Mirabal, F.; Martínez, A.; Lerma, J. "Prácticas de matemáticas para primero de secundaria". Comunicaciones del CI-MAT, 1987, 52 p.

Johnson, D. A.; Hansen, V. P.; Peterson, W. H.; Rudnick, J. A.; Cleveland, R. Bolster, L. C. *Activities in mathematics -First course: Numbers*. Scott, Foresman and Co., 1971.