

# Olimpiada de la Cuenca del Pacífico-1993

*Tiempo: 4 horas*

*No se permite el uso de calculadoras*

*Cada pregunta vale siete puntos*

## Pregunta 1

Sea  $ABCD$  un cuadrilátero tal que todos sus lados son iguales y el ángulo  $ABC$  es de  $60^\circ$ . Sea  $l$  una recta que pasa por  $D$  y no corta al cuadrilátero (excepto en  $D$ ). Sean  $E$  y  $F$  los puntos de intersección de  $l$  con  $AB$  y  $BC$ , respectivamente. Sea  $M$  el punto de intersección de  $CE$  con  $AF$ . Pruebe que  $CA^2 = CM \times CE$ .

## Pregunta 2

Encuentre el número total de valores enteros diferentes que toma la función

$$f(x) = [x] + [2x] + [5/3x] + [3x] + [4x]$$

para los números reales  $x$ , tales que  $0 \leq x \leq 100$

## Pregunta 3

Sean

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

y

$$g(x) = c_{n+1} x^{n+1} + c_n x^n + \dots + c_0$$

dos polinomios distintos de cero, con coeficientes reales, tales que  $g(x) = (x + r)f(x)$ , para algún real  $r$ . Si  $a = \max(|a_n|, \dots, |a_0|)$  y  $c = \max(|c_{n+1}|, \dots, |c_0|)$ . Demuestre que  $a/c < n + 1$ .

## Pregunta 4

Determine todos los enteros positivos  $n$  para los cuales la ecuación

$$x^n + (2 + x)^n + (2 - x)^n = 0$$

tiene solución entera.

Pregunta 5

Sean  $P_1, P_2, \dots, P_{1993} = P_0$ , puntos distintos en el plano  $xy$  con las siguientes propiedades:

- (i) Ambas coordenadas de  $P_i$  son enteras, para  $i = 1, 2, \dots, 1993$ ;
- (ii) No hay otro punto con coordenadas enteras, distinto de  $P_i$  y  $P_{i+1}$  en el segmento que une esos dos puntos, para  $i = 0, 1, \dots, 1992$ .

Pruebe que para algún  $i$ , para el que  $0 \leq i \leq 1992$ , existe un punto  $Q$  de coordenadas  $(q_x, q_y)$  en el segmento que une a  $P_i$  con  $P_{i+1}$ , tal que los dos números  $2q_x$  y  $2q_y$  son enteros impares.

## CALCULA CALDEMO

**JOSÉ LUIS ABREU (Ph. D., MIT) y M. en C. MARTA OLIVERO** Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas (IIMAS), Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), México, D.F., México

*Programa de experimentación en Cálculo para evaluar y graficar derivadas e integrales y sus funciones. Cuenta con **CALDEMO** como programa adicional que permite desarrollar presentaciones en forma de rutina continua, como para exposiciones en clase.*



## CÓNICAS CONDEMO

**JOSÉ LUIS ABREU (Ph. D., MIT) y M. en C. MARTA OLIVERO** Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas (IIMAS), Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), México, D.F., México

*Permite analizar las secciones cónicas gráficamente, observando los efectos de los cambios de variables en las ecuaciones y experimentar con la traslación de ejes.*

**CONDEMO** es un programa suplementario con el que podrá hacer dinámicas exposiciones en clase.

