NOTAS DE CLASE

# Estabilidad en los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

**RESUMEN** Introducimos el concepto de estabilidad, según lo definió Liapunov hacia 1892, pretendiendo verificar con este parámetro, la existencia de equilibrio, en los sistemas de ecuaciones diferenciales. De esta forma analizamos las situaciones del equilibrio: i) asintóticamente estable, ii) estable neutro, iii) inestable, lo cual (por su caracterización didáctica) es generalizado al plano $R^2$ de acuerdo con la formación del sistema general de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{x} = ax + by + R^1(x, y)$$
$$\dot{y} = cx + dy + R^2(x, y)$$

donde la ecuación característica

$$\begin{bmatrix} a - \lambda_1 & b \\ c & d - \lambda_2 \end{bmatrix} = (a - \lambda_1)(d - \lambda_2) - bc = 0$$

da margen a dicha generalización. Al final exponemos ejemplos sencillos de cada uno de estos casos.

## Teoría de la Estabilidad, en la Resolución de Ecuaciones Diferenciales

La idealización de un fenómeno mediante ecuaciones diferenciales, permite la posibilidad de la descripción matemática del mismo. En esta idealización se hacen patentes factores sustanciales que tornan variable al fenómeno; la variabilidad final de la experiencia permite verificar el planteamiento de su situación inicial, tomando en cuenta la cercanía entre las soluciones, para un cierto intervalo. Ello resulta importante en las aplicaciones, esto es, considerar si las soluciones son *estables*.

Según Elsgoltz:[1]
"Si variaciones arbitrariamente pequeñas de los valores iniciales pueden cambiar mucho la solución, entonces, la solución determinada por las condiciones iniciales inexactas que hemos elegido, no tiene ningún valor práctico y no puede describir ni siquiera aproximadamente al fenómeno estudiado."

[1] Véase L. Elsgoltz, *Ecuaciones Diferenciales y Análisis Funcional*, Cap. IV pág. 207, MIR.

**Alberto Camacho Ríos**

De aquí la necesidad, de encontrar las condiciones según las cuales variaciones sucesivas pequeñas de las condiciones iniciales, determinan pequeñas variaciones en la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales (fenómeno).

***Definiciones***

*0. Las ecuaciones diferenciales de 2° orden,* $\ddot{x} = H(x, y)$, son reducibles al sistema:

$$\dot{x} = F(x, y)$$
$$\dot{y} = G(x, y)$$

con $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, denominado *sistema autónomo.*

Al par de variables $(x, y)$ se le denomina *fase* de un sistema físico.

Al plano $(x, y)$, donde se definen las soluciones del sistema autónomo (trayectorias, curvas integrales), se le denomina *plano de fase.*

1. A los puntos singulares (puntos de reposo del sistema autónomo), donde se anula el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x} = ax + by$$
$$\dot{y} = cx + dy$$

se les denomina *puntos de equilibrio* o *críticos.*

2. Los puntos de equilibrio son puntos aislados del plano $(x, y)$; es decir, pueden aislarse en un círculo $C$, cuyo centro es el punto de equilibrio $PE$ (Fig. 1).

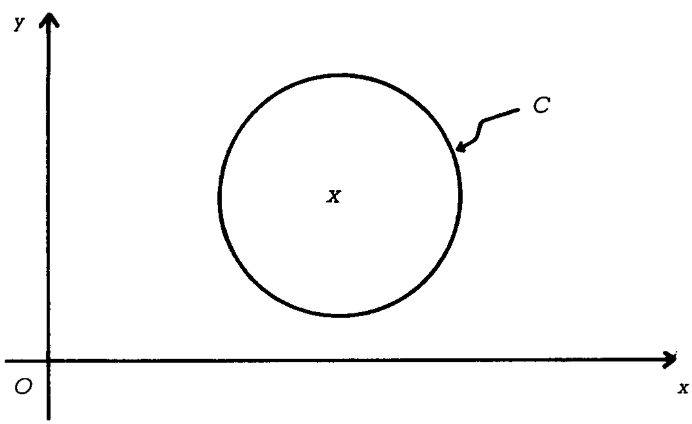



Figura 1

3. Los teoremas de existencia aseguran una solución única si:

$$\left.\begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array}\right\} \text{ de } \left| \begin{array}{l} \dot{x} = F(x, y) \\ \dot{y} = G(x, y) \end{array}\right. \quad \text{tal que } t = 0 \tag{1}$$

se tienen $x = x_0$; $y = y_0$.

En particular, si el punto inicial $(x_0, y_0)$ es un punto de equilibrio, la solución de (1) es $x = x_0$; $y = y_0$.

4. **Ejemplo.** ¿Cuál es la solución del sistema?

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = x$$

que pasa por $x_0 = y_0 = 0$.

Como $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$ es un punto donde simultáneamente $F = 0$, $G = 0$, se trata de un *punto de equilibrio*, y el sistema

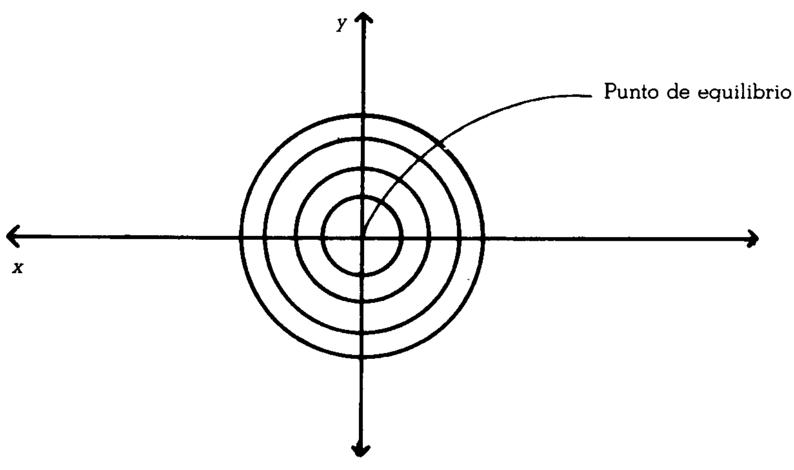
$$\begin{array}{l} \dot{x} - y = 0 \\ \dot{y} + x = 0 \end{array}$$

tiene por solución

$$x^2 + y^2 + x_0^2 + y_0^2 = C$$

y se cumplen las condiciones iniciales (c. i.). Véase la Fig. 2.

(Familia de los círculos concéntricos)




Si $x_0 = y_0 = c$, la única solución posible es $x = y = 0$

Figura 2

*5. Geométricamente:*

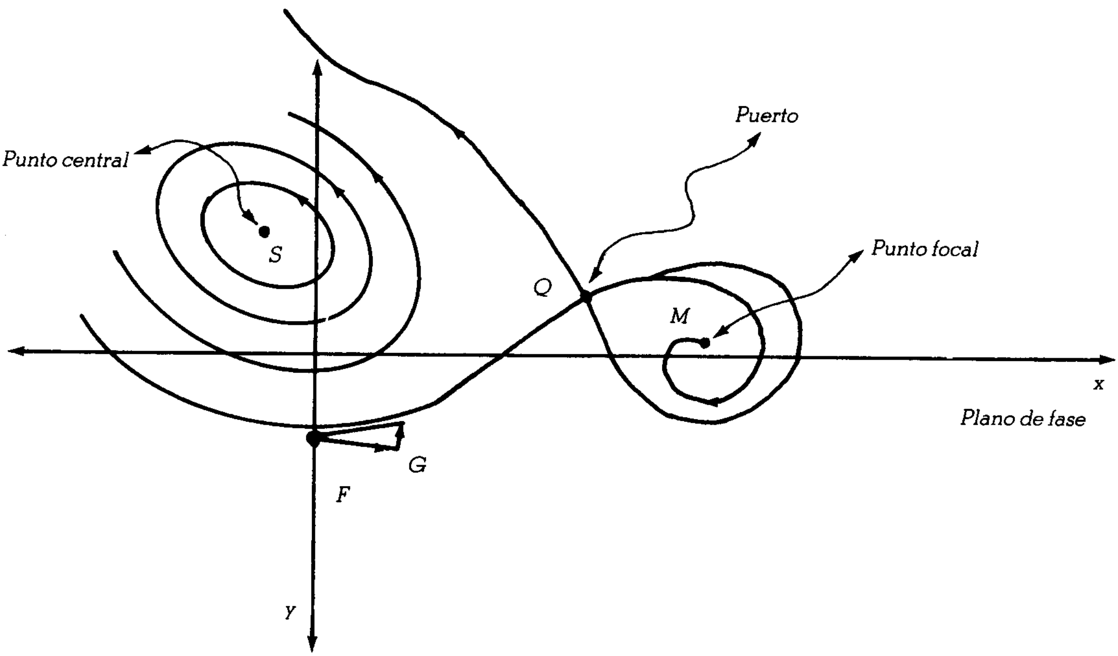



*Figura 3*

De aquí que los puntos de equilibrio son puntos donde la velocidad es cero (puntos de estacionamiento). En la Fig. 3 se tiene que $M$, $Q$ y $S$ son puntos de equilibrio.

De ahí que

i) El punto $M$ es un punto de estabilidad asintótica (la curva tiende a $M$ cuando el tiempo (o parámetro) $t \to \infty$).

ii) El punto $Q$ es un punto de inestabilidad, en donde aparentemente se cruzan dos soluciones, para el cual existe una curva resolvente que se aleja continuamente de él cuando $t \to \infty$ (puerto).

iii) El punto $S$ es un punto de estabilidad neutra.

6. Equilibrio asintóticamente estable. Un punto $(x_0, y_0)$, es asintóticamente estable[2] si existe $\in > 0$ para el cual se puede determinar $\delta > 0$, tal que cada solución que pase por $s(x_1, y_1)$, contenido dentro de $c$ con $r = \delta$ en un tiempo $t$, permanece dentro de un círculo de radio $\varepsilon > \delta$, tal que $t > t_1$ y tiende al punto $P(x_0, y_0)$ cuando $t \to \infty$ (Fig. 4).

[2] Según Liapunov.

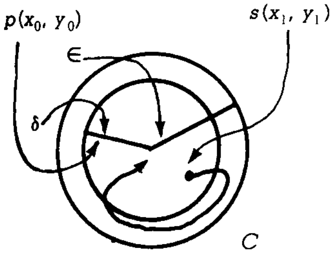



Figura 4

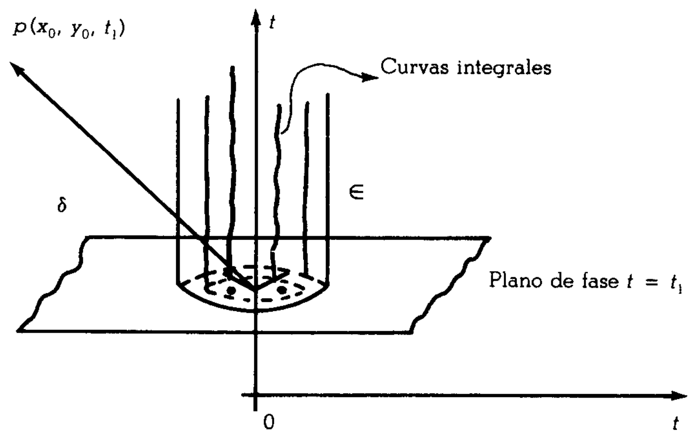



Figura 5

También por muy estrecho que sea el cilindro de radio ∈, con el eje $ot$, existe en el plano de fase $t = t_1$ un ∈ en torno tal que todas las curvas integrales que salgan de éste, se mantienen dentro del cilindro, para toda $t \geq t_1$ (Fig. 5).

7. Equilibrio estable neutro. Si una solución que pase por $s(x_1, y_1)$, para $t_1$, contenida en $c$, con $r = \delta$, permanece dentro de $\in > \delta$ tal que $t > t_1$ (no tiende a $P$ cuando $t \to \infty$), se dice que el sistema de ecuaciones diferenciales es estable neutro. Véase la Fig. 6.

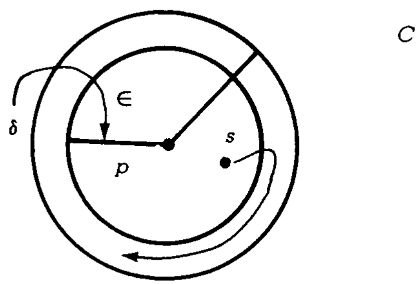



Figura 6

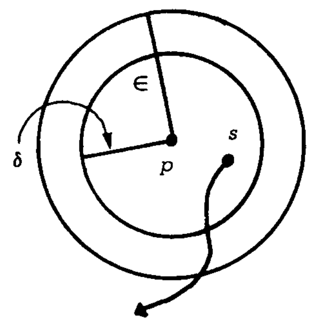



Figura 7

8. Equilibrio inestable. Si la solución que pasa por el punto $s(x_1, y_1)$, para $t_1$ contenido en $C$ de $r = \delta$, no permanece dentro de ningún círculo de $r$, $\in > \delta$, cuando $t \to \infty$ (Fig. 7).

9. Solución del sistema. El sistema lineal autónomo es un sistema homogéneo, puesto que no aparecen en él funciones independientes de $t$.

$$\dot{x} = F(x, y) \qquad \text{c. i.:} \qquad x(0) = x_0$$

$$\dot{y} = G(x, y) \qquad\qquad\qquad y(0) = y_0$$

cuya solución se indica en la Fig. 8,

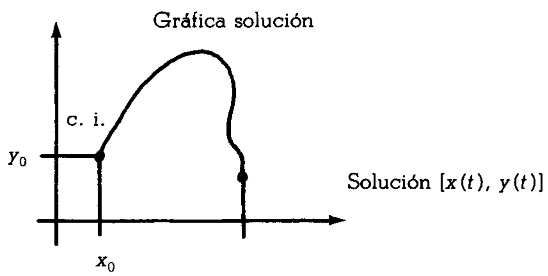



Figura 8

y cuyo conjunto de soluciones $P$ y $Q$, llenan el plano, son curvas ajenas (no se cortan) (Fig. 9).

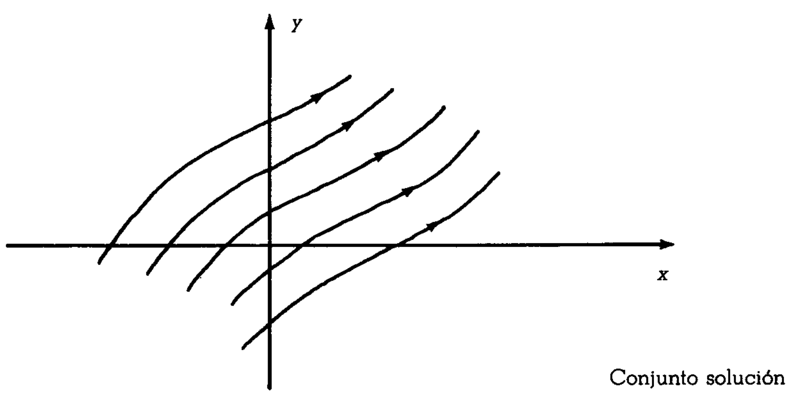



Figura 9

De donde

El sistema es de la forma[3]

$$\dot{x} = ax + by + R_1(x, y)$$

$$\dot{y} = cx + dy + R_2(x, y)$$

[3] Los residuos $R(x, y)$ obedecen a la serie de Taylor.

Si consideramos $R_1$ y $R_2 \equiv 0$, definimos la ecuación característica:

$$\begin{bmatrix} a-\lambda_i & b \\ c & d-\lambda_2 \end{bmatrix} = (a-\lambda_1)(d-\lambda_2) - bc = 0$$

Con

i) $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ Forma canónica para raíces distintas $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

ii) $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ o bien $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ para $\lambda_1 = \lambda_2$

iii) $\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix}$ Forma para raíces complejas

Siendo solución general la combinación lineal

$$x(t) = c_1\,\alpha_1\,e^{\lambda_1 t} + c_2\,\alpha_2\,e^{\lambda_2 t}$$

$$y(t) = c_1\,\beta_1\,e^{\lambda_1 t} + c_2\,\beta_2\,e^{\lambda_2 t}$$

con $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$ constantes arbitrarias.

**10**. Análisis de las raíces $\lambda_1$, $\lambda_2$.

I — $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son reales y distintas. Entonces:

i) $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ (Fig. 10)

ii) $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$ (Fig. 11)

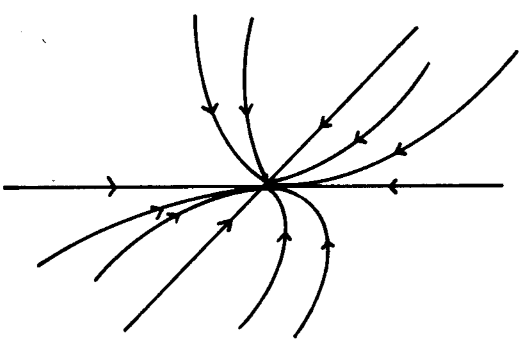


Figura 10

Punto singular de estabilidad (nodo)

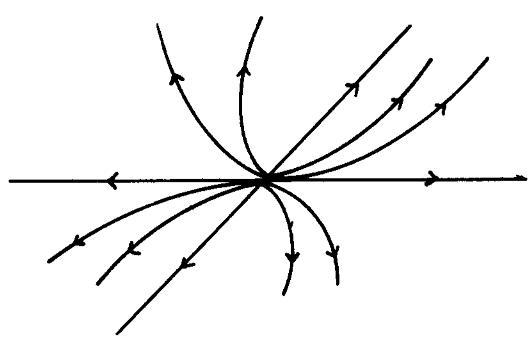
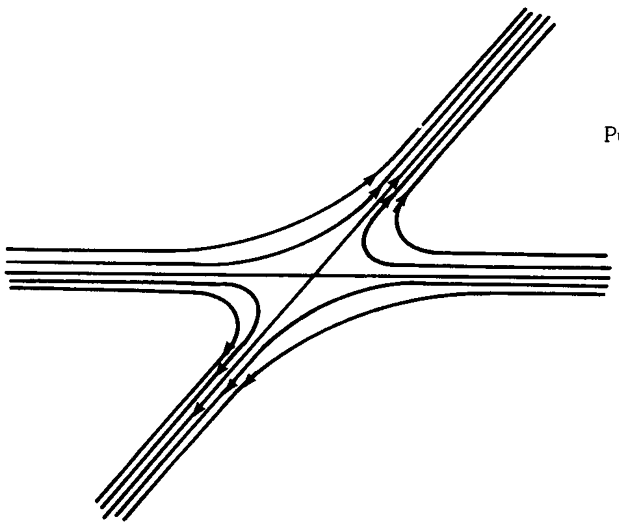


Figura 11

Punto singular, nodo inestable

iii) $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$ (Fig. 12)



Punto de reposo inestable
(Punto de ensilladura)

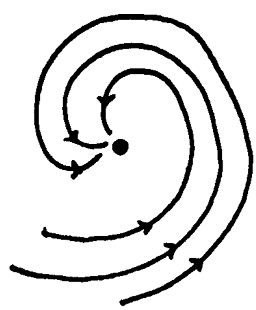
Figura 12

II — $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son complejas (conjugadas) de la forma

$$\lambda_1 = p + iq; \qquad \lambda_2 = p - iq$$

con $\alpha = p$; $\beta = q$.

i) $p < 0$; $q \neq 0$ (Fig. 13)



Punto de reposo de estabilidad asintótica (foco estable)

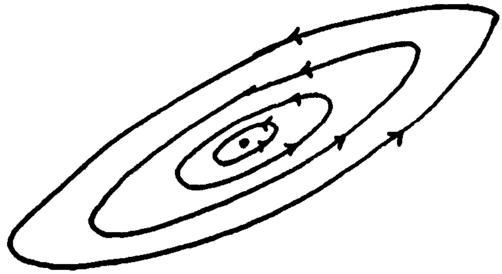
Figura 13

ii) $p > 0$; $q \neq 0$ (Fig. 14)

Punto de reposo inestable
(foco inestable)

Figura 14

iii) $p = 0$; $q \neq 0$ (Fig. 15)



Punto de reposo estable
(centro) Elipses

Figura 15

III — Las raíces son múltiples, $\lambda_1 = \lambda_2$

i) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ (Figs. 16 y 17)

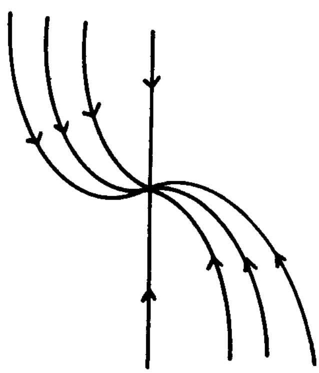


Figura 16

Estabilidad asintótica
(nodo estable)

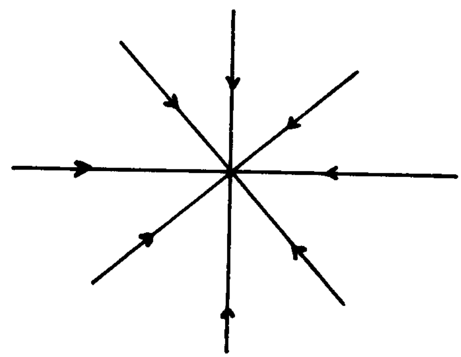


Figura 17

ii) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ (Fig. 18 y 19)

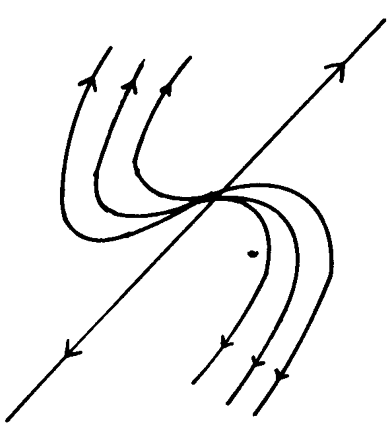


Figura 18

Punto de reposo inestable
(nodo inestable)

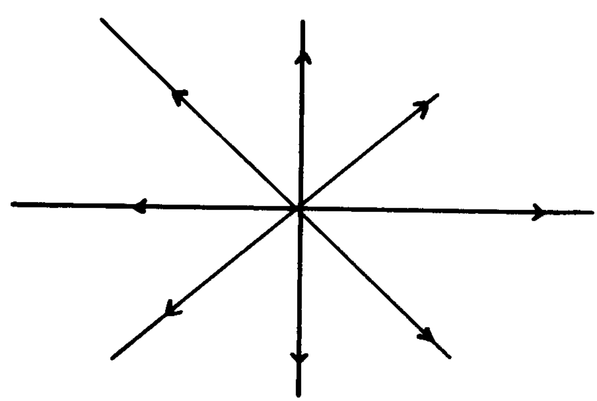


Figura 19

11. De 1 a 10 se desprende el

**A.** *Teorema de Estabilidad de Liapunov*[4]. El sistema

$$\dot{x} = F(x, y)$$
$$\dot{y} = G(x, y)$$

tiene un punto de equilibrio estable en (0, 0), cuando es posible expresarlo como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + R_1(x, y) \\ \dot{y} &= cx + dy + R_2(x, y) \end{aligned} \qquad (1)$$

Si las raíces características $\lambda_1$, $\lambda_2$ del sistema lineal

$$\dot{x} = ax + by$$
$$\dot{y} = cx + dy$$

tienen partes reales negativas.
Es decir si

$$p = (\lambda_1 + \lambda_2) < 0$$
$$q = \lambda_1\lambda_2 \quad >$$

Entonces el sistema no lineal (1) anterior tiene un punto de equilibrio estable en (0, 0).

**B.** *Teorema de Liapunov sobre la estabilidad asintótica.*

Si existe una función derivable de Liapunov $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfaga:

(a) $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiene un mínimo estricto en el origen $V(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

(b) La derivada de la función $V$, calculada a lo largo de las curvas integrales del sistema es

$$\frac{dV}{dt} \leq 0,$$

y fuera de un entorno arbitrariamente pequeño del origen, o sea para

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \delta_i^2 > 0$, $t \geq T_0 \geq t_0$, la derivada es

[4] Se omite la demostración, en la cual Liapunov introduce

$V(x, y) = Q(x, y) + q(x^2, y^2)$, ecuación cuadrática en la que

$Q(x, y) = (ax + by)^2 + (cx + dy)^2$, con $q = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$\frac{dV}{dt} \leq -\beta < 0$, donde $\beta$ es constante. Entonces el punto de reposo del sistema es asintóticamente estable.

En caso de no verificarse los teoremas $A$ y $B$, el punto de origen es inestable. Para este último efecto, puede verse el teorema de Chetáev sobre la inestabilidad.

Ejemplos:
1) Sea

$$\dot{x} = \dot{x}^3 - y \qquad \text{Sistema de ecuaciones diferenciales con}$$
$$\dot{y} = x + y^3 \qquad \text{c. i.: } x = y = 0.$$

El sistema ¿es estable?

Consideremos la ecuación cuadrática $V(x, y) = x^2 + y^2$ (arbitraria) la cual cumple $V(0, 0, \ldots, 0) = 0$, un mínimo en el origen.

Así,

$$\frac{dV}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = 2x(x^3 - y) + 2y(x + y^3) = 2x^4 + 2y^4 > 0$$

lo cual muestra que el sistema *no* es asintóticamente estable y la ecuación característica del sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 - x_i & -1 \\ 1 & -1 - \lambda_2 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

con

$$\lambda_1 = 1 + \frac{7}{2}i$$

$$\lambda_2 = 1 - \frac{7}{2}i$$

De aquí se desprende que $p > 0$ y $q \neq 0$ para raíces complejas. Luego el punto de reposo (foco) *es inestable* (así como el sistema).

2) Analizar la estabilidad de la solución trivial del sistema

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -y - x^3 \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = x - y^3$$

tomando nuevamente $V(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow$

(a) $V(x, y) \geq 0$; $V(0, 0)$ § 0

(b) $\frac{dV}{dt} = 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3) = -2(x^4 + y^4) \leq 0$

y fuera de un entorno del origen de coordenadas.

$$\frac{dV}{dt} \leq -\beta > 0$$

Por lo tanto, la solución $x \equiv 0$, $y \equiv 0$, es asintóticamente estable.

3) Analizar la estabilidad de la solución trivial $x \equiv 0$, $y \equiv 0$, del sistema

$$\dot{x} = -xy^4; \qquad \dot{y} = yx^4$$

Tomemos la función

$V(x, y) = x^4 + y^4$, la cual satisface:

i) $V(x, y) = x^4 + y^4 \geq 0$, $V(0, 0) = 0$

ii) $\frac{dV}{dt} = -4x^4y^4 + 4x^4y^4 \equiv 0$

Esto da un indicio para deducir que la solución trivial $x \equiv 0$, $y \equiv 0$, es estable. Además, por el teorema B:

La ecuación característica del sistema

$$\begin{bmatrix} -y^4 - x_1 & 0 \\ 0 & x^4 - \lambda_2 \end{bmatrix} = (-y^4 - \lambda_1)(x^4 - \lambda_2) = 0$$

donde

$$\lambda_1 = -y^4 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = x^4$$

Para cualquier real $(x, y)$ el sistema es estable neutro. (Por el teorema A).

## Bibliografía

**KISELOV-KRASNOV y MAKARENKO.** *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.* MIR.

**ELGOLTZ, L.** *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, MIR.

**IMAZ y VOREL.**, *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Limusa.

**LEFSCHETZ, S. y LA SALLE, J.**, *Stability by Liapunov Direct Method*, Academic Press. 1961.