$f(x) \simeq$ Fenómeno Físico

Resumen

$f(x) \simeq$ *fenómeno físico* representa el conjunto de algunos años de labor de investigación en el resumen del trabajo sobre *Cálculo Infinitesimal* realizado en México, hacia mediados del siglo pasado, por el ingeniero Francisco Díaz Covarrubias (1873); y es en su entorno didáctico, la parte preparatoria para su consecución en el aula. Experiencia, esta última, que contrasta con la forma discursiva actual de enseñar el Cálculo, y que involucra a más conceptos del mismo, que lo enriquecen y hacen más accesible su comprensión.

Una función $f(x, y, \ldots, w)$ del Cálculo surge cuando se pretende idealizar un fenómeno físico, en cuanto a sus cualidades de movimiento mecánico-geométrico. Es decir, $f(x, y, \ldots, w)$ representa una característica cuantitativa del fenómeno, donde —desde luego— cada una de estas características se analiza debido a su *variabilidad* e importancia dentro del fenómeno. Así, la analogía

$$f(x) \simeq \text{fenómeno físico}$$

implica que $f(x)$ sea la cualidad (volumen, área, peso, densidad, etc.) que se desea medir u optimizar del fenómeno y la aproximación ($\simeq$), depende del número de variables que intervienen en la analogía.

Por otra parte lograr $f(x) \simeq$ fenómeno físico, requiere de *geometrizar* la realidad propia del evento o bien la cantidad que se desea idealizar.

Alberto Camacho Ríos

Instituto Tecnológico de Chihuahua II
Chihuahua, México

De esta manera, la idealización pretendida se obtendrá mediante el siguiente trabajo:

(1) La observación directa del fenómeno.
(2) Representación geométrico-mecánica del mismo.
(3) Analogía analítica o funcional de la representación geométrica.
(4) Estudio de la variabilidad (movimiento) del fenómeno.

Por ello la función $f(x, y, \ldots, w)$ analogada contiene además la variabilidad del movimiento mencionado en el punto (4).

Ciertamente, la idealización de esta analogía es difícil de lograr en el contexto analítico normal, ya que —en este entorno— difícilmente se puede verificar la variabilidad deseada, pues aun cuando en la función buscada $f(x, y, \ldots, w)$, se caracteriza a $(x, y, \ldots, w)$ como *variables*, analíticamente aún no se *observa* la *actitud* variacional del movimiento del evento. Por ejemplo, el área de una superficie en dos variables, cuya analogía es

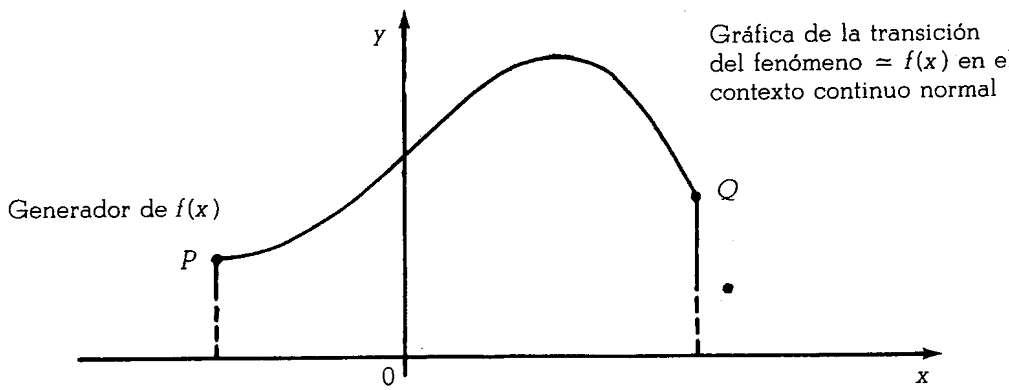
$$f(x, y) = xy^2$$

no predispone la variabilidad o movimiento del área.

De esta suerte, es necesario revalorar la función en otro contexto, en el cual no solamente sea posible *observar*, sino además *obtener* analíticamente dicha variabilidad.

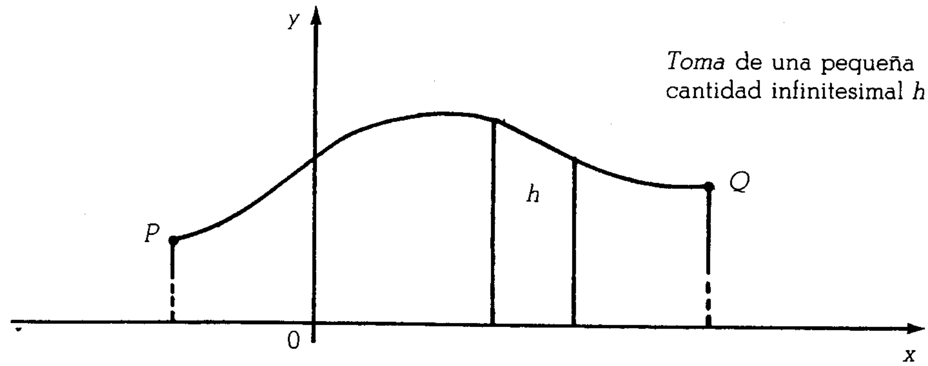
1. Situación gráfica del contexto infinitesimal

Consideramos que la figura representa la gráfica de la función $f(x)$, trazada por el punto o partícula (que en adelante llamaremos *generador* P), en la transición de ésta a Q, y que la ley que rige el movimiento del punto es precisamente $f(x)$.

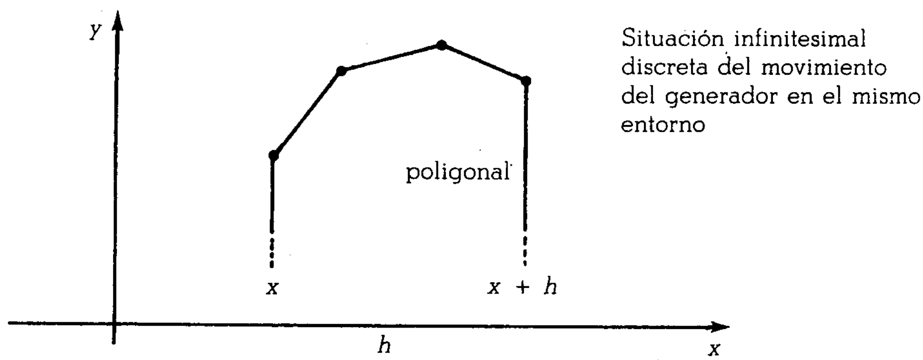


Ahora bien, ubiquémonos en el modelo infinitesimal del Cálculo, en el que la importancia fundamental es la *toma* de una pequeña cantidad infinitesimal, que llamaremos h o Δx, lo cual consiste en agregarla (sumar), a la variable en la función $f(x)$.

Hagamos esto con la gráfica anterior. *Tomemos h* geométricamente, como se muestra a continuación:

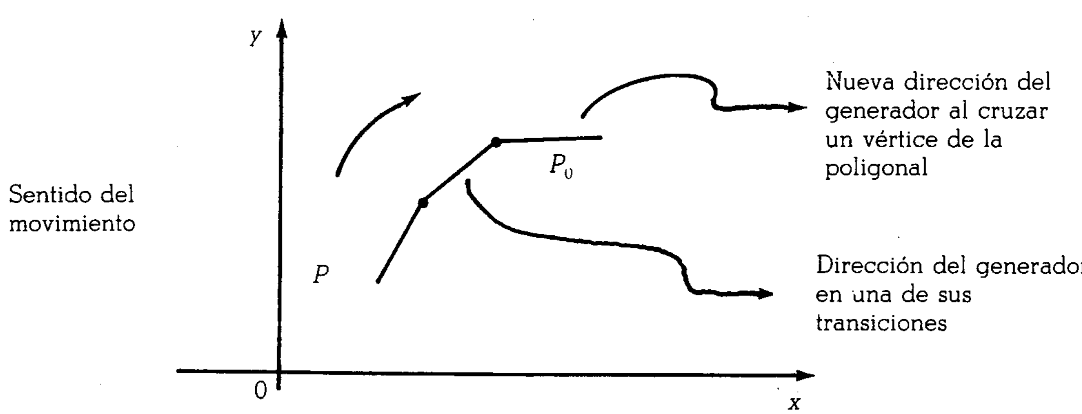


y grafiquemos esta situación a una escala más amplia. O sea:

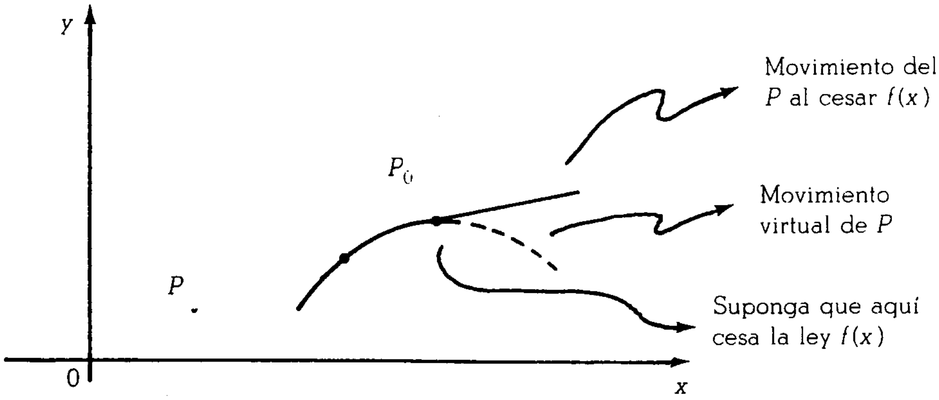


De modo que en este último esquema la poligonal representa el curso del generador P, entre x y $x + h$. Además, los vértices de la misma indican los *cambios* de transición del generador para poder llevar de un punto $[x, f(x)]$ a otro $[x + h, f(x + h)]$. Estos cambios, vértices o picos, son precisamente las *variaciones* realizadas por el fenómeno $f(x)$ en su movimiento.

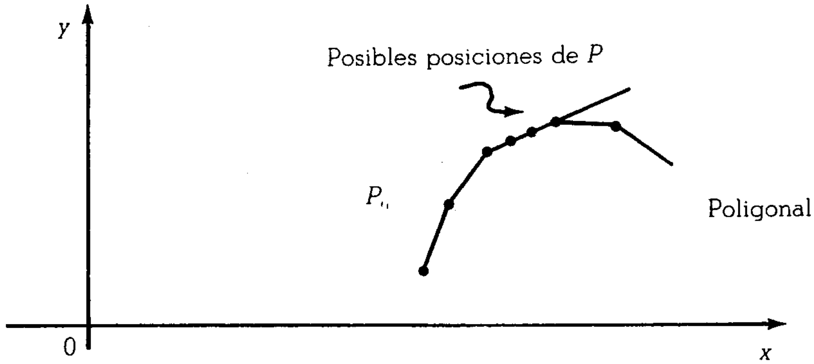
Viendo la situación se verifica que la ley $f(x)$ que rige el movimiento del generador P, modifica, su dirección en cada variación que experimenta.



Más aún, considerando que la ley $f(x)$ que rige el movimiento del generador P, deja de "actuar", es decir que $f(x) = 0$. Entonces sucederá que el punto P tenderá a *salirse* de la curva normal por la recta tangente.



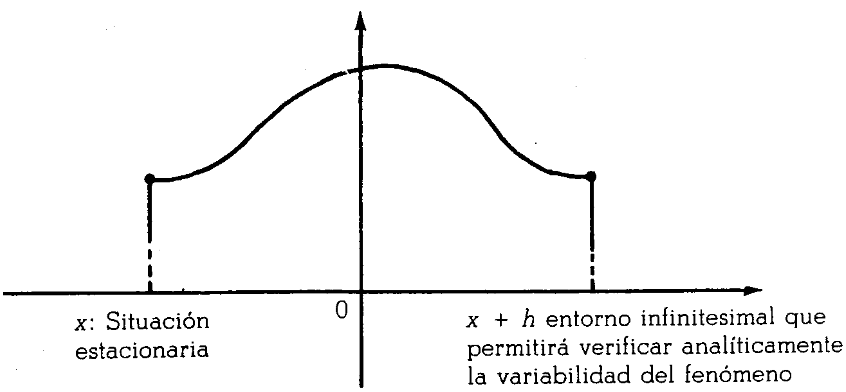
Nótese que al cesar la ley que rige el movimiento de P, éste queda *alojado* en uno de los lados de la poligonal, por el cual tenderá a "salirse" de la misma.



De esto último —como se puede observar— la recta tangente representa un elemento variacional más del fenómeno; es decir, representa, como es bien conocido, a la velocidad del evento, aun cuando no es nuestro propósito demostrarlo, sino sólo enfatizar que ello se logró gracias a su verificación en el contexto geométrico infinitesimal.

Utilizaremos este mismo modelo para describir analíticamente la variabilidad de la fenomenología indicada, pretendiendo con ello que la analogía lograda *prescriba* los estados del movimiento.

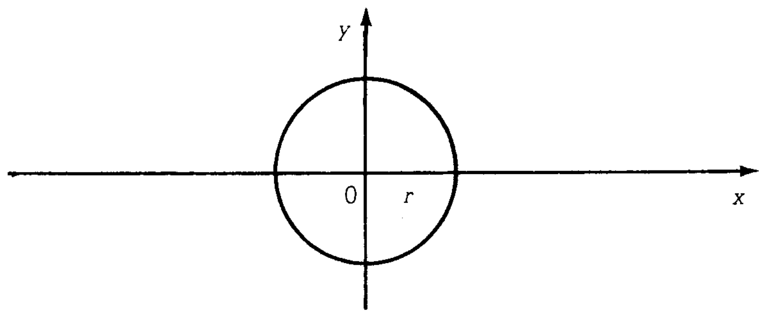
Así la gráfica anterior viene a ser:



De esta manera al obtener $f(x, y, \ldots, w)$ y hacer *variar* a x en $x + h$; $y + k$, etc., se obtiene que $f(x, y, \ldots, w)$ variará en $f(x + h, y + k, \ldots w + 1)$.

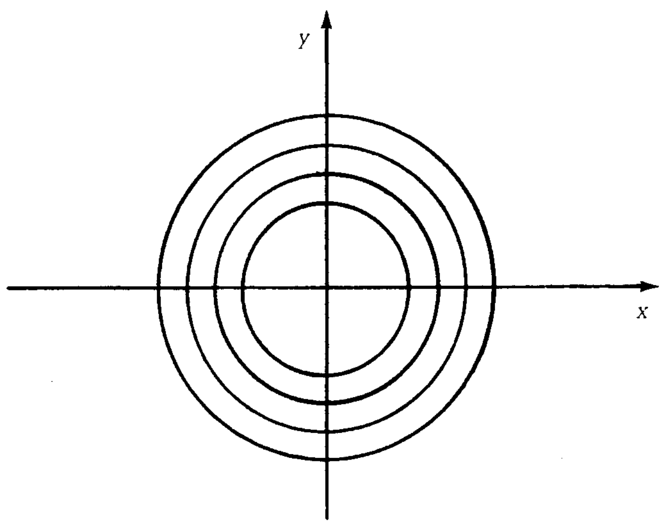
2. Ejemplo

Consideremos el círculo siguiente, cuya área

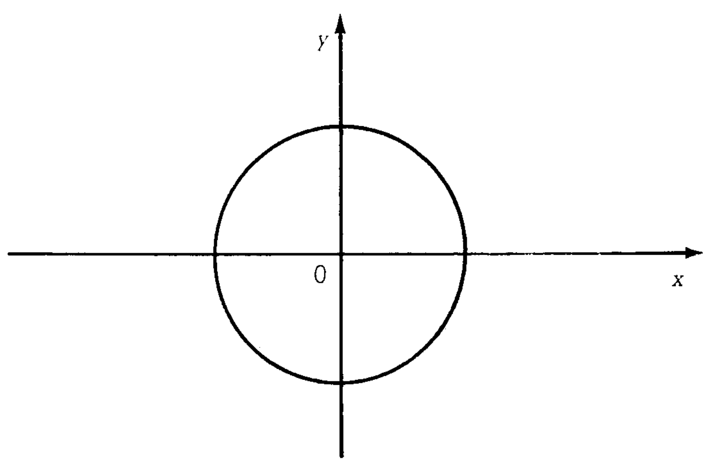


$A = \pi r^2$ es la manifestación estática del mismo; es decir, no contiene variabilidad alguna.

Sin embargo, tomemos el radio r, como un cantidad variable de suerte que el área del círculo se "expanda" en movimiento al variar aquel. Gráficamente ocurrirá que para diferentes **instantes** de tiempo t, tendremos diferentes **posiciones** del círculo (o cualquier área) en expansión. De aquí que cada *situación estacionaria* contiene el fluir continuo del área en expansión.



Ahora bien, de esta *variabilidad* tomemos cualesquier *situación*; por ejemplo, la de la siguiente gráfica,



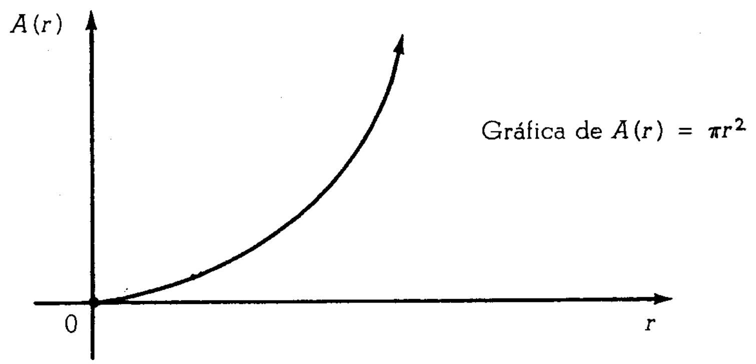
la cual queda idealizada como la entidad funcional

$$A(r) = \pi r^2$$

ya que r recibió la categoría de variable. De aquí que hemos logrado que:

Fenómeno físico →	Situación estacionaria →	Contexto Analítico
Área del círculo	$A = \pi r^2$	$A(r) = \pi r^2$

Por otra parte conocemos también la gráfica que relaciona la variación del área $A(r)$ respecto a la variación del radio r, o sea:



$$A(r + h) = \pi(r + h)^2 = \pi r^2 + 2\pi rh + \pi h^2$$

O sea,

$$A(r + h) = \pi r^2 + 2\pi rh + \pi h^2$$

Es decir, el modelo $A(r + h)$ logrado contiene la variabilidad

$$\pi r^2 + 2\pi rh + \pi h^2$$

de la expansión del área del círculo. Por otro lado obsérvese que esta variabilidad

$$A(r) = \pi r^2$$

es la situación estacionaria inicial y que

$$2\pi rh + \pi h^2$$

son variaciones contenidas, en el movimiento del fenómeno.

De manera que hasta aquí tenemos:

$$A(r + h) = A(r) + 2\pi rh + \pi h^2$$

De donde además es sencillo observar y probar que la variación $2\pi r$ es la primera derivada de la función (situación estacionaria)

$$A(r) = \pi r^2$$

o bien la velocidad del movimiento en expansión del área inicial. Es decir, $A'(r) = 2\pi r$, de suerte que podemos reescribir la última expresión como:

$$A(r + h) = A(r) + A'(r)h + \pi h^2$$

Y si observamos la analogía de esta con un esquema funcional de la forma:

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + Bh^2 + Ch^3 + \ldots \qquad (1)$$

de la cual en este ejemplo hemos logrado reconocer las primeras variaciones $f(x)$ y $f'(x)$ (posición y velocidad de fenómeno), e hicimos $B = \pi$, incluyéndose además de B los coeficientes C, D, E, etc. (todos son polinomios definidos en x), de los cuales de $B, C, D, E, \ldots$, desconocemos su contenido variacional.

Intentemos verificar su significado.

Hagamos variar la serie (1) en x y en h; es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x) + f''(x)h + \frac{dB}{dx}h^2 + \frac{dC}{dx}h^3 + \ldots$$

y con h:

$$\frac{\partial f}{\partial h} = f'(x) + 2Bh + 3Ch^2 + 4Dh^3 + \ldots$$

Si consideramos la continuidad en las derivadas parciales de $f(x + h)$ lograremos que:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial h}$$

O bien

$$f''(x) = 2B$$

$$\frac{dB}{dx} = 3C$$

$$\frac{dC}{dx} = 4D$$

$$\vdots$$

etc...

* Ello es suponiendo que existe $F(x + h)$, tal que

$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x + h)$ y $\frac{\partial F}{\partial h} = f(x + h)$, de suerte que por la continuidad en las derivadas

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial h}$$

De donde iterativamente obtenemos

$$B = \frac{f''(x)}{2!} = \frac{1}{2!}\,\frac{d^2f}{dx^2}$$

$$C = \frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2f}{dx^2}\right)}{2!\,(3)} = \frac{7}{3!}\,\frac{d^3f}{dx^3} = \frac{f'''(x)}{3!}$$

$$D = \frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^3f}{dx^3}\right)}{3!\,(4)} = \frac{1}{4!}\,\frac{d^4f}{dx^4} = \frac{f^{iv}(x)}{4!}$$

.
.
.
etc

3. La Serie de Taylor

De esta manera la Serie (1) se transformará en una serie más formal, esto es

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2!} + \frac{f'''(x)h^3}{3!} + \ldots \qquad (2)$$

conocida actualmente como *serie de Taylor en una variable*, cuya analogía con el ejemplo permitirá conocer la última de esas variaciones, o sea:

$$A(r + h) = \pi r^2 + 2\pi rh + \pi h^2$$

Análogamente,

$$f(x) \rightarrow A(r) = \pi r^2;\ f'(x) \rightarrow A'(r) = 2\pi r \text{ y } \frac{f''(x)}{2!} \rightarrow \frac{A''(r)}{2!}$$

$$= \pi \rightarrow A''(r) = 2\pi$$

(Nótese que hicimos analogía con la serie de Taylor, tomando de ésta sólo el número de elementos variacionales que surgen del fenómeno).

De esto último se tomará en consideración que la variabilidad del fenómeno contiene o prescribe la ley de estados del movimiento $[f(x); f'(x); f''(x); \ldots)$ del fenómeno que se trate.

Así, lo anterior nos permitirá redefinir algunos conceptos del Cálculo, para lo cual proponemos las siguientes definiciones:

1. La relación entre dos o más cantidades variables obedece a una *relación funcional*, lo cual surge de pretender idealizar los diversos problemas de la naturaleza y llevarlos a un contexto analítico.

2. El concepto de *función* queda definido como: Si a cada valor de cierta cantidad variable representada por x y perteneciente a cierto campo de varia-

ción, le corresponde un valor determinado por otra cantidad y (variable), entonces ésta última será función de x. Es decir

$$y = f(x)$$

donde

x es variable independiente
$f(x)$ es variable dependiente

3. Se llama *campo de variación* o *dominio* $f(x)$ al conjunto de valores que toma en su recorrido —variación— la cantidad x, para los cuales se determinan los valores de la cantidad y.

4. Por *variación* entendemos:
El cambio de estado que sufre una cantidad en movimiento y cuyo análisis se realiza para un instante determinado, o bien, son aquellos eventos o estados futuros de la situación inicial que surgen cuando $f(x)$ (su generador), realiza cambios infinitesimales de dirección.

5. El concepto de *derivada* es, en términos de la serie de Taylor:
La diferencia entre dos estados consecutivos (contiguos), los cuales son prescritos en el contexto infinitesimal, siendo:

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)h^2}{2!} + \ldots$$

de donde:

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + O(h)$$

con:

$$O(h) \simeq \frac{f''(x)h^2}{2!} + \frac{f'''(x)h^3}{3!} + \ldots$$

o bien, $O(h) \simeq 0$, ya que $h^2 \simeq h^3 \simeq h^4 \simeq \ldots \simeq 0$

luego:

$$f'(x) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad \text{para } O(h) \simeq 0$$

De aquí que $f'(x)$ hereda el campo de variación de $f(x)$.

6. Geométricamente la recta tangente representa a la derivada $f'(x)$, para un punto analizado, x_0, de $f(x)$. Físicamente es la dirección de la velocidad del fenómeno para un instante t_0 dado.

7. Para efectos de definir las derivadas de funciones como producto, suma, cociente, etc., es posible utilizar la definición más práctica de la serie de Taylor:

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + Bh^2 + Ch^3 + \ldots$$

Por ejemplo, si $u(x)$ y $v(x)$ son cantidades funcionales cuyas respectivas variaciones son:

$$u(x + h) = u(x) + u'(x)h + Bh^2 + Ch^3 + \ldots$$
$$v(x + h) = v(x) + v'(x)h + Ph^2 + Qh^3 + \ldots$$

entonces el producto de dos cantidades en variación $u(x)$ y $v(x)$ será:

$$u(x + h)\, v(x + h) = [u(x) + u'(x)h + Bh^2 + \ldots]$$
$$[v(x) + v'(x)h + Ph^2 + \ldots]$$

O sea

$$u(x + h)\, v(x + h) = u(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)h + u(x)\, Ph^2 + u'(x)h\, v(x)$$
$$+ \ldots + u'(x)\, v'(x)\, h^2 + \ldots$$

de donde

$$\frac{u(x + h)\, v(x + h) - u(x)\, v(x)}{h} = u(x)\, v'(x) + u'(x)\, v(x)$$

dado que

$$O(h) = u(x)\, Ph^2 + \ldots + u'(x)\, v'(x) h^2 + \ldots \simeq 0$$

y por lo definido en (5),

$$\frac{d}{dx}[u(x)\, v(x)] = \frac{u(x + h)\, v(x + h) - u(x)\, v(x)}{h} \quad \text{con } O(h) \simeq 0$$

O sea

$$\frac{d}{dx}[u(x)\, v(x)] = u(x)\, v'(x) + u'(x)\, v(x)$$

Invitamos al lector a encontrar las derivadas de la suma, cociente, composición, etc., de funciones.

La potencia del modelo en el diseño de un envase para conservas.

Siendo $f(x, y)$, la situación inicial de algún evento, del cual si hacemos variar a x, en $x + h$: y en $y + k$, con h, k cantidades infinitesimales, con ello surge la ecuación:

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \mathrm{h} + \frac{\partial f}{\partial y} k\right] + \frac{1}{2!}$$
$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + \frac{2\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} hk + \frac{\partial^2 f k^2}{\partial y^2}\right] + \ldots$$

o sea la serie de Taylor en dos variables, y cuya deducción es posible lograr gracias a su relación con el Teorema Generalizado del Binomio.

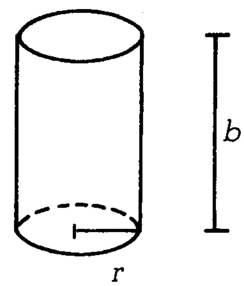
Ahora bien, se desea construir un envase cilíndrico con altura b y radio r, óptimos, de suerte que el área lateral A sea

$$A = 238 \text{ cm}^2$$

y que con estas condiciones su volumen, V, sea máximo.

Se tiene que

$$V(r, b) = \pi r^2 b$$



y su situación variacional será:

$$V(r + h, b + k) = \pi(r + h)^2(b + k) \quad \text{o sea}$$

$$V(r + h, b + k) = \pi r^2 b + \pi r^2 k + 2\pi rhb + 2\pi rhk + \pi h^2 b + \pi h^2 k$$

Es decir:

$$V(r + h, b + k) = \underbrace{\pi r^2 b}_{\text{Situación inicial}} + \underbrace{(2\pi rhb + 2\pi rhk + \pi r^2 k)}_{\text{la. variación}} + \underbrace{\pi h^2 b + \pi h^2 k}_{\text{variaciones contiguas}}$$

Analogando esta última con la serie de Taylor en dos variables se tiene:

$$V(r, b) = \pi r^2 b$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} h + \frac{\partial V}{\partial b} k = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial b} db = 2\pi rb + \pi r^2$$

ya que $h = dr$ y $k = db$.

Por otra parte,

$$b = \frac{238 - 2\pi r^2}{2\pi r} \text{ con}$$

$$\frac{db}{dr} = -1 - \frac{37.87}{r^2}$$

Sustituyendo b y db en dV:

$$dV = 2\pi r^2 dr + \pi r^2 db \quad \text{o sea}$$

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi r^2 \frac{dr}{dr} + \pi r^2 \frac{db}{dr} \quad \text{fijando } r.$$

Luego

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi r\left[\frac{238 - 2\pi r^{\cdot}}{2\pi r}\right] + \pi r^{\cdot}\left[-1 - \frac{37.87}{r^{\cdot}}\right]$$

y optimizando resulta $dV = 0$, o bien

$$238 - 2\pi r^{\cdot} - \pi r^{\cdot} - 37.87\pi = 0$$

Así

$$r = 3.55$$

y

$$b = \frac{238 - 2\pi r^{\cdot}}{2\pi r} = 7.12$$

Luego el volumen del envase es óptimo cuando

$$r = 3.55 \text{ cm y } b = 7.12 \text{ cm}$$

Bibliografía

Cantoral, Ricardo. Desequilibrio y Equilibración. CINVESTAV, I.P.N. (1990)

Díaz Covarrubias Francisco. Cálculo Infinitesimal. 1a. ed. (1873), México.