Raíces y Potencias

Dedicado a:

Consuelo
Guillermo
Margarita

Resumen

Este trabajo contiene dos partes:

I. Obtención de la Raíz Enésima de un Número

En el siglo VI de nuestra era los hindúes ya conocían las reglas para la extracción de las raíces cuadrada y cúbica, pero históricamente fue sólo a partir del siglo XVII —con el descubrimiento del Cálculo Diferencial e Integral por parte de Newton y Leibnitz— que se pudo determinar un método iterativo númerico (método de Newton-Raphson), para encontrar la raíz enésima (o n-ésima) de un número, sin considerar el método de los logaritmos que fue descubierto por Napier (o Neper) y publicado en 1614, ni las aproximaciones seriales del Teorema del Binomio que son largas y tediosas.

Así, sin la aplicación de logaritmos ni los otros métodos que son temas del Álgebra Superior y el Cálculo Diferencial, no se ha conocido, hasta la presente publicación, ningún procedimiento sencillo que haga posible resolver el problema anterior.

El método presentado aquí parte sólo del conocimiento de la aritmética y el álgebra elemental, y aplicando un algoritmo de cálculo iterativo-convergente permite extraer cualquier raíz de índice entero de toda base real.

Jorge Zedeño Cárdenas

Facultad de Ingeniería Civil
Unidad Académica de Matemáticas
Pontificia Universidad Católica del Ecuador
Quito, Ecuador

Por esta razón, el sistema de análisis propuesto viene a llenar el vacío —en esta parte de las matemáticas— que se ha presentado hasta ahora en la enseñanza secundaria, ya que siempre ha sido de gran dificultad para el estudiante que todavía no conoce el álgebra superior ni está familiarizado con los fundamentos del cálculo diferencial, el salto abrupto entre el aprendizaje de la resolución de las raíces cuadrada y cúbica, y el método de los logaritmos, porque sencillamente no existe ninguna relación aparente entre los dos procedimientos.

Además, se expone la ventaja adicional de que el estudiante de secundaria comienza, de manera natural, a utilizar adecuadamente las máquinas electrónicas de cálculo, cuyo correcto conocimiento y manejo son tan importantes ahora en toda actividad profesional, al realizar las iteraciones sucesivas necesarias para la obtención de la raíz pedida.

II. Potenciación de un Número a un Exponente Entero-Decimal

Este procedimiento no ha sido expuesto por ningún autor conocido hasta el momento.

Es la primera vez que se da una alternativa al método de los logaritmos, para elevar cualquier base real a un exponente entero-decimal.

De la misma manera que en el caso anterior, esta formulación nace espontáneamente del álgebra elemental y, sin lugar a dudas, será de gran utilidad académica al estudiante de secundaria, que encontrará aquí una explicación razonable para el *Principio de potenciación en base diez*, quedando así preparado el camino para el estudio posterior de los logaritmos.

Por último, también se demuestra que solamente con la aplicación sucesiva de la raíz cuadrada es posible extraer cualquier otra raíz, o generalizando, es posible elevar un número real a cualquier exponente entero-decimal, simplificando así notablemente la potenciación en base diez.

I. Obtención de la Raíz Enésima de un Número

PRIMER POSTULADO

Todo número entero de dos cifras elevado a la potencia enésima es igual a un número de dos periodos, estando el primer periodo ($P1$) formado por las primerasa n cifras contadas de derecha a izquierda, y el segundo periodo ($P2$) por las cifras restantes.

El número máximo de cifras de un periodo es n; por lo tanto, ningún número de dos cifras elevado a la potencia enésima dará otro número que tenga un número de cifras mayor que dos periodos.

Ejemplos

(a) $32^5 = \dfrac{335}{P2} \quad \dfrac{54432}{P1}$ (b) $11^3 = \dfrac{1}{P2} \quad \dfrac{331}{P1}$ (c) $32^5 = \dfrac{98}{P2} \quad \dfrac{01}{P1}$

SEGUNDO POSTULADO

La cifra de las decenas de la raíz enésima, entera por defecto, de un número, es igual a la raíz enésima, entera por defecto, del segundo periodo del número.

Ejemplos

(a) $\sqrt[5]{\underbrace{\underline{384}35628}_{P2\,P1}} = \underline{3}2;\ R$ (residuo) $= 4881196;\ 3^5 = 243 < 384$

(b) $\sqrt[3]{\underbrace{\underline{1}526}_{P2P}} = \underline{1}1;\ R = 195;\ 1^3 = 1$

(c) $\sqrt{\underbrace{\underline{99}99}_{P2P}} = \underline{9}9;\ R = 198;\ 9^2 = 81 < 99$

HIPÓTESIS

1. $a = 10d + u$ (número de dos cifras)

2. $A = a^n + R = (10d + u)^n + R;\ n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

3. $A < (a + 1)^n;\ a^n + R < (a + 1)^n \quad \rightarrow \quad R < (a + 1)^n - a^n$

Lo anterior implica que A es un número de dos periodos.

Ahora, como d se obtiene directamente de A, por observación, el problema consiste en determinar u para así poder obtener a y R de las fórmulas anteriores.

Determinación de u

Por hipótesis:

$$A = (10d + u)^n + R$$

O también,

$$A = 10^n d^n + [(10d + u)^n - 10^n d^n] + R$$

$$A = 10^n d^n + \frac{1}{u}\{[(10d + u)^n - 10^n d^n] + R\}u$$

Despejando u:

$$\boxed{u = \frac{A - 10^n d^n}{\frac{1}{u}[(10d + u)^n - 10^n d^n] + \frac{R}{u}}}\text{; y sin considerar } \frac{R}{u}\text{:}$$

$$\boxed{u \approx \frac{A - 10^n d^n}{\frac{1}{u}[(10d + u)^n - 10^n d^n]} = \frac{A - 10^n d^n}{Q}}$$

Como se podrá ver, se ha obtenido u en función de sí mismo, lo que sugiere una fórmula iterativa de proceso convergente.

Determinación de Q

Aplicando la fórmula del Binomio de Newton, se tiene:

$$Q = \frac{1}{u}[10^n d^n + n10^{n-1}d^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{2!}10^{n-2}d^{n-2}u^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}10^{n-3}d^{n-3}u^3 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)}{(r-1)!}10^{n-r+1}d^{n-r+1}u^{r-1}$$

$$+ \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(4)(3)}{(n-2)!}10^2 d^2 u^{n-2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(4)(3)(2)}{(n-1)!}10du^{n-1} + u^n$$

$$-10^n d^n]; \; (2 < r < n+1)$$

Simplificando, y como r se convierte en $r + 1$, y todos los términos quedan divididos para u, finalmente se tiene:

$$Q = n10^{n-1}d^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}10^{n-2}d^{n-2}u + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

$$10^{n-3}d^{n-3}u^2 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

$$10^{n-r}d^{n-r}u^{r-1} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(4)(3)}{(n-2)!}$$

$$10^2d^2u^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(4)(3)(2)}{} 10du^{n-2} + u^{n-1}$$

$(1 < r < n)$

Cálculo de ***Q***

De la fórmula anterior, dando distintos valores a n, se pueden obtener los correspondientes valores de Q, como se indica a continuación en la tabla donde se han calculado los primeros cinco valores de esta variable.

n	Q
1	1
2	$20d + u$
3	$300d^2 + 30du + u^2$
4	$4000d^3 + 600d^2u + 40du^2 + u^3$
5	$50000d^4 + 10000d^3u + 1000d^2u^2 + 50du^3 + u^4$

Aquí se puede ver muy claramente, para todo valor de n, el patrón de formación del polinomio $Q(d, u)$:

1) El número de términos es igual a n.

2) Las bases de la primera potencia de d y de la última de u están elevadas al exponente $n - 1$.

3) En cada término, con respecto al anterior, el exponente de d disminuye en una unidad, y el de u aumenta en la misma cantidad.

4) En cada término, la suma de los exponentes de d y u es siempre igual a $n - 1$.

Quedan por estudiar los coeficientes numéricos.

Triángulo de Pascal

El Triángulo de Pascal (o de Tartaglia) sirve para determinar los coeficientes numéricos del Binomio de Newton $(a + b)^n$, cuando n es entero positivo.

A continuación se presentan los coeficientes correspondientes a los cinco primeros valores de n.

n	COEFICIENTES										
1					1		1				
2				1		2		1			
3			1		3		3		1		
4		1		4		6		4		1	
5	1		5		10		10		5		1

Estudiando el Triángulo de Pascal se observa lo siguiente:

1. Para todo valor de n, el número de los coeficientes numéricos del binomio $(a + b)^n$, es $n + 1$.
2. Las dos diagonales exteriores del triángulo están formadas por la unidad.
3. En cada fila, los coeficientes están distribuidos simétricamente respecto al centro.
4. Cualquier coeficiente interno del triángulo es igual a la suma de los dos coeficientes adyacentes de la fila superior.

Por lo tanto, la formación del Triángulo de Pascal hasta cualquier valor de n, sigue un proceso elemental de sumas sucesivas.

Triángulo Modificado de Pascal

Al Triángulo de Pascal se lo puede modificar, por ejemplo, de la siguiente manera:

n	COEFICIENTES										
1					1^0		1^0				
2				1		2^1		1^0			
3			1		3^2		3^1		1^0		
4		1		4^3		6^2		4^1		1^0	
5	1		5^4		10^3		10^2		5^1		1°

Para modificar al Triángulo de Pascal se han seguido los siguientes pasos:

1. Se ha sombreado la diagonal exterior izquierda del Triángulo, ya que esos coeficientes no van a ser considerados.

2. Se han colocado ciertos valores numéricos, en el extremo superior derecho de cada coeficiente restante, de forma que en cada fila, el primer valor corresponde a $n-1$ y el último es cero, habiendo cada valor disminuido sucesivamente en una unidad con respecto al anterior.

El motivo del haber modificado al Triángulo de Pascal de esta manera es que cada coeficiente, del Triángulo Modificado, represente un valor igual al inicial del triángulo original, multiplicado por una potencia de diez que tenga como exponente el número del extremo superior derecho antes mencionado.

Así por ejemplo, en el Triángulo Moficiado, cuando n vale 2, los dos coeficientes que hay que considerar son: 2×10^1 y 1×10^0, lo que da 20 y 1, respectivamente.

Con esta explicación, si se comparan los coeficientes del Triángulo Modificado con los correspondientes del polinomio $Q(d, u)$, se notará que son los mismos; por lo tanto, queda demostrado que la formación de los coeficientes numéricos del polinomio antes mencionado, para cualquier valor de n, sigue un proceso elemental.

Resumen de Fórmulas

$A = (10d + u)^n + R$	$R < (a+1)^n - a^n$	$u \approx \dfrac{A - 10^n d^n}{Q}$

Hasta aquí, con las fórmulas anteriores se está en aptitud de determinar la raíz enésima de un número A de dos periodos, que da como resultado una raíz de dos cifras $10d + u$, más un residuo R.

Ejemplos

1. $\sqrt{\underset{P2\,P1}{\underline{9999}}}$; $n = 2$; $u \approx \dfrac{A - 10^n d^n}{Q}$; $Q = 20d + u$

La raíz cuadrada, entera por defecto, del segundo periodo es 9. Por lo tanto,

$d = 9$; $9^2 = 81 < 99$ (correcto)

$A - 10^n d^n = 9999 - (10^2)(9^2) = 1899$

$Q = (20)(9) + u = 180 + u$

$u_0 = \dfrac{1899}{180 + 0} = 11$ (haciendo cero el primer valor de u)

$u_1 = \dfrac{1899}{180 + 11} = 10$

$u_2 = \dfrac{1899}{180 + 10} = 10 \rightarrow 9$

Como u no puede ser mayor que 9, se toma $u_2 = 9$.

$R = A - (10d + u)^n = 9999 - (90 + 9)^2 = 198$

$R < (99 + 1)^2 - (99)^2 = 199$ (correcto)

Luego

$\mathbf{a = 99; R = 198}$

$\sqrt[4]{\underbrace{6799}_{P2}\underbrace{9431}_{P1}}$; $n = 4$; $Q = 4000d^3 + 600d^2u + 40du^2 + u^3$

$d = 9$; $9^4 = 6561 < 6799$ (correcto)

$A - 10^n d^n = 67999431 - (10^4)(9^4) = 2389431$

$Q = 2916000 + 48600u + 360u^2 + u^3$

$u_0 = \dfrac{2389431}{2916000 + 0} = 1$

$u_1 = \dfrac{2389431}{2916000 + (48600)(1) + (360)(1^2) + (1^3)} = 1$

$R_1 = 67999431 - (90 + 1)^4 = -575530$

Como R no puede ser menor que cero, se resta una unidad a u_1 y se tiene:

$u_2 = 0$

$R_2 = 67999431 - (90 + 0)^4 = 2389431$

$R_2 < (90 + 1)^4 - (90)^4 = 2964961$ (correcto)

Luego

$\mathbf{a = 90; R = 2389431}$

Como obviamente el proceso hasta este punto está muy limitado, se requiere generalizarlo para obtener la raíz enésima de un número A' de cualquier cantidad de periodos.

Generalización del Método

Sea $A' = 10^{pn}A + C'$; donde $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$; $C' \leq R'$

Reemplazando,

$$A' = 10^{np}(10d + u)^n + 10^{pn}R + C'$$

$$A' = [10^p(10d + u)]^n + 10^{np}R + C'$$

Haciendo

$\boxed{d' = 10^p d}$ $\boxed{u' = 10^p u}$ $\boxed{a' = 10^p a}$ $\boxed{R' = 10^{pn}R + C'}$

Se tiene que

$$A' = (10d' + u')^n + R' = (a')^n + R'$$

Por lo tanto, el proceso es similar y se puede demostrar que se cumple:

$$\boxed{u' \approx \frac{A' - 10^n(d')^n}{Q'}}$$

Ejemplos

1. $\sqrt{103681}$; $n = 2$; $Q = 20d + u$
   $P2\,P1$

Nótese que a los últimos dos periodos se los denomina primero y segundo respectivamente.

$d = 30$; $3^2 = 9 < 10$ (correcto)

El 3 es la raíz cuadrada, entera por defecto, de 10, y el 0 corresponde al periodo adicional de la derecha.

$$A - 10^n d^n = 103681 - (10^2)(30^2) = 13681$$

$$Q = (20)(30) + u = 600 + u$$

$$u_0 = \frac{13681}{600 + 0} = 23$$

$$u_1 = \frac{13681}{600 + 23} = 22$$

$$u_2 = \frac{13681}{600 + 22} = 22$$

$R_1 = 103681 - (300 + 227^2 = -3$

$u_3 = 21$

$R_2 = 103681 - (300 + 21)^2 = 640$

$R_2 < (321 + 1)^2 - (321)^2 = 643$ (correcto)

Luego

$a = 321$; R 3 640

2. $\sqrt[3]{\underset{P2}{\underline{8}}456\underset{P1}{\underline{742}}}$; $n = 3$; $Q = 300d^2 + 30du + u^2$

$d = 20$; $2^3 = 8$ (correcto)

$A - 10^n d^n = 8456742 - (10^3)(20^3) = 456742$

$Q = (300)(20^2) + (30)(20)u + u^2 = 120000 + 600u + u^2$

$$u_0 = \frac{456742}{120000} = 4$$

$$u_1 = \frac{456742}{120000 + (600)(4) + (4^2)} = 4$$

$R_1 = 8456742 - (200 + 4)^3 = -32922$

$u_2 = 3$

$R_2 = 8456742 - (200 + 3)^3 = 91315$

$R_2 < (203 + 1)^3 - (203)^3 = 124237$ (correcto)

Luego

$a = 203$; $R = 91315$

Caso Particular: $R \approx 0$

Cuando no se desea obtener un residuo R, sino más bien una aproximación decimal determinada, se procede de la siguiente manera:

En vez de $A = (10d + u)^n + R$, se toma:

$$\boxed{A = (10d + u \cdot D)^n}$$

donde $u \cdot D$ representa la cifra de las unidades con todos los decimales deseados, obtenidos por iteraciones sucesivas. El resto sigue un proceso similar.

Ejemplos

1. Obtener $\sqrt{7827003}$, con cuatro decimales.

$\sqrt{\underbrace{7827003}_{P1\ \ P2}}$; $n = 2$; $Q = 20d + u$

$d = 200$; $2^2 = 4 < 7$ (correcto).

Los dos ceros corresponden a los dos periodos adicionales de la derecha.

$$A - 10^n d^n = 7827003 - (10^2)(200^2) = 3827003$$

$$Q = (20)(200) + u = 4000 + u$$

$$u_0 = \frac{3827003}{4000} = 957$$

$$u_1 = \frac{3827003}{4000 + 957} = 772$$

$$u_2 = 802$$

$$u_3 = 797$$

y por iteraciones sucesivas:

$$u = 797.6781$$

de donde

$$a = 10d + u = 2000 + 797.6781$$

Luego

$a = \mathbf{2797.6781}$

2. Obtener $\sqrt[3]{526.02}$ con tres decimales.

$$\sqrt[3]{526.02} = \sqrt[3]{\underbrace{526}_{P2}\underbrace{020}_{P1}} \times 10^{-1}$$

Primeramente se han formado dos periodos.

$n = 3;\ Q = 300d^2 + 30du + u^2$

$d' = 8;\ 8^3 = 512 < 526$ (correcto)

$A' - 10^n d'^n = 526020 - (10^3)(8^3) = 14020$

$Q' = (300)(8^2) + (30)(8)u' + u'^2 = 19200 + 240u' + u'^2$

$$u'_0 = \frac{14020}{19200} = 0.73$$

$$u'_1 = \frac{14020}{19200 + (240)(0.73) + (0.73^2)} = 0.72$$

$$u'_2 = \frac{14020}{19200 + (240)(0.72) + (0.72^2)} = 0.72$$

de donde:

$a' = 10d' + u' = 80 + 0.72 = 80.72$

Pero,

$a = 10^{-1}a' = (10^{-1})(80.72)$

Luego

$a = \mathbf{8.072}$

3. Obtener $\sqrt[4]{0.900012345}$ con cinco decimales.

$$\sqrt[4]{0.900012345} = \sqrt[4]{\underbrace{9000}_{P2}\underbrace{1234.5}_{P1}} \times 10^{-2}$$

$n = 4;\ Q = 4000d^3 + 600d^2u + 40du^2 + u^3$

$d' = 9;\ 9^4 = 6561 < 9000$ (correcto)

$A' - 10^n d'^n = 90001234.5 - (10^4)(9^4) = 24391234.5$

$Q' = (4000)(9^3) + (600)(9^2)u' + (40)(9)u'^2 + u'^3$

$Q' = 2916000 + 48600u' + 360u'^2 + u'^3$

$$u'_0 = \frac{24391234.5}{2916000} = 8$$

$$u'_1 = \frac{24391234.5}{2916000 + (48600)(8) + (360)(8^2) + (8^3)} = 7$$

y por iteraciones sucesivas:

$u' = 7.401$

de donde

$a' = 10d' + u' = 90 + 7.401 = 97.401$

Pero

$a = 10^{-2}a' = (10^{-2})(97.401)$

Luego

$\mathbf{a = 0.97401}$

4. Obtener $\sqrt[5]{2}$, con seis decimales.

$$\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{\underset{P2\ P1}{\underline{200000}}} \times 10^{-1}$$

$n = 5;\ Q = 50000d^4 + 10000d^3u + 1000d^2u^2 + 50du^3 + u^4$

$d' = 1;\ 1^5 = 1 < 2$ (correcto)

$A' - 10^n d'^n = 200000 - (10^5)(1^5) = 100000$

$Q' = 50000 + 10000u + 1000u^2 + 50u^3 + u^4$

$$u'_0 = \frac{100000}{50000} = 2$$

$$u'_1 = \frac{100000}{50000 + (10000)(2) + (1000)(2^2) + (50)(2^3) + (2^4)} = 1$$

y por iteraciones sucesivas:

$$u' = 1.48698$$

de donde

$$a' = 10d' + u' = 10 + 1.48698 = 11.48698$$

Pero,

$$a = 10^{-1}a' = (10^{-1})(11.48698)$$

Luego

$$a = 1.148698$$

II. Potenciación de un Número a un Exponente Entero-decimal

Sea el número a elevado a la potencia $rst.xyz$. Por lo tanto se tiene:

$$(a)^{rst.xyz} = (a^{10^2 r})(a^{10^1 s})(a^{10^0 t})(a^{10^{-1} x})(a^{10^{-2} y})(a^{10^{-3} z})$$

de donde:

$$(a)^{rst.xyz} = (a^r)^{10^2}(a^s)^{10}(a^t) \qquad (a^x)^{1/10}(a^y)^{1/10^2}(a^z)^{1/10^3}$$

Observaciones

(1) Existen tantos factores como cifras significativas hay en el exponente $rst.xyz$.

(2) La base a está elevada a cada una de las cifras significativas del exponente.

(3) El fundamento del asunto consiste en obtener la raíz décima, cuantas veces sea necesaria, de las potencias correspondientes a las cifras decimales.

Ahora se tratará de obtener la raíz décima de un número, en función de la raíz cuadrada, por ser obviamente ésta, la de resolución más sencilla.

TRIÁNGULO MODIFICADO DE PASCAL

N	COEFICIENTES																				
1	1	1^{0}																			
2	1	2^{1}	1^{0}																		
3	1	3^{2}	3^{1}	1^{0}																	
4	1	4^{3}	6^{2}	4^{1}	1^{0}																
5	1	5^{4}	10^{3}	10^{2}	5^{1}	1^{0}															
6	1	6^{5}	15^{4}	20^{3}	15^{2}	6^{1}	1^{0}														
7	1	7^{6}	21^{5}	35^{4}	35^{3}	21^{2}	7^{1}	1^{0}													
8	1	8^{7}	28^{6}	56^{5}	70^{4}	56^{3}	28^{2}	8^{1}	1^{0}												
9	1	9^{8}	36^{7}	84^{6}	126^{5}	126^{4}	84^{3}	36^{2}	9^{1}	1^{0}											
10	1	10^{9}	45^{8}	120^{7}	210^{6}	252^{5}	210^{4}	120^{3}	45^{2}	10^{1}	1^{0}										
11	1	11^{10}	55^{9}	165^{8}	330^{7}	462^{6}	462^{5}	330^{4}	165^{3}	55^{2}	11^{1}	1^{0}									
12	1	12^{11}	66^{10}	220^{9}	495^{8}	792^{7}	924^{6}	792^{5}	495^{4}	220^{3}	66^{2}	12^{1}	1^{0}								
13	1	13^{12}	78^{11}	286^{10}	715^{9}	1287^{8}	1716^{7}	1716^{6}	1287^{5}	715^{4}	286^{3}	78^{2}	13^{1}	1^{0}							
14	1	14^{13}	91^{12}	364^{11}	1001^{10}	2002^{9}	3003^{8}	3432^{7}	3003^{6}	2002^{5}	1001^{4}	364^{3}	91^{2}	14^{1}	1^{0}						
15	1	15^{14}	105^{13}	455^{12}	1365^{11}	3003^{10}	5005^{9}	6435^{8}	6435^{7}	5005^{6}	3003^{5}	1365^{4}	455^{3}	105^{2}	15^{1}	1^{0}					
16	1	16^{15}	120^{14}	560^{13}	1820^{12}	4368^{11}	8008^{10}	11440^{9}	12870^{8}	11440^{7}	8008^{6}	4368^{5}	1820^{4}	560^{3}	120^{2}	16^{1}	1^{0}				
17	1	17^{16}	136^{15}	680^{14}	2380^{13}	6188^{12}	12376^{11}	19448^{10}	24310^{9}	24310^{8}	19448^{7}	12376^{6}	6188^{5}	2380^{4}	680^{3}	136^{2}	17	1			
18	1	18^{17}	153^{16}	816^{15}	3060^{14}	8568^{13}	18564^{12}	31824^{11}	43758^{10}	48620^{9}	43758^{8}	31824^{7}	18564^{6}	8568^{5}	3060^{4}	816^{3}	153^{2}	18^{1}	1^{0}		
19	1	19^{18}	171^{17}	969^{16}	3876^{15}	11628^{14}	27132^{13}	50388^{12}	75582^{11}	92378^{10}	92378^{9}	75582^{8}	50388^{7}	27132^{6}	11628^{5}	3876^{4}	969^{3}	171^{2}	19^{1}	1^{0}	
20	1	20^{19}	190^{18}	1140^{17}	4845^{16}	15504^{15}	38760^{14}	77520^{13}	125970^{12}	167960^{11}	184756^{10}	167960^{9}	125970^{8}	77520^{7}	38760^{6}	15504^{5}	4845^{4}	1140^{3}	190^{2}	20^{1}	1^{0}

Obtención de la Raíz Décima en Función de la Raíz Cuadrada

Para el efecto se van a comparar las potencias inversas de 2, con la fracción

$$\frac{1}{10}$$

Así:

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{8} > \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{16} < \frac{1}{10}$$

Además,

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{2}{32} + \frac{1}{32} = \frac{3}{32} < \frac{1}{10}$$

y por consiguiente:

$$\frac{3}{32} + \frac{0.2}{32} = \frac{3.2}{32} = \frac{1}{10}$$

de donde

$$\frac{1}{10} = \frac{3}{32} + [\frac{2}{32}][\frac{1}{10}]$$

Simplificando:

$$\frac{1}{10} = \frac{3}{32} + \frac{1}{16}][\frac{1}{10}]$$

Aproximación de la fracción $\frac{1}{10}$:

De la fórmula anterior, la primera aproximación de 1/10, es:

$$\frac{1}{10} \approx \frac{3}{32}$$

La segunda aproximación es:

$$\frac{1}{10} \approx \frac{3}{32} \S \left[\frac{1}{16}\right]\left[\frac{3}{32}\right] = \left[\frac{3}{32}\right]\left[1 + \frac{1}{16}\right]$$

La tercera es;

$$\frac{1}{10} \approx \frac{3}{32} + \left(\frac{1}{16}\right)\Bigg]\frac{3}{32} + \left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{3}{32}\right)\Bigg] = \frac{3}{32} +$$

$$\left(\frac{3}{32}\right)\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) = \left(\frac{3}{32}\right)\left(1 + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{16^2}\right)$$

Continuando con este procedimiento se obtiene:

$1/10 = [3/32][1 + 1/16 + 1/16^2 + 1/16^3 + \ldots + 0] = [3/2^5][1 + 1/2^4 + 1/2^8 + 1/2^{12} + \ldots + 0]$

O también:

$1/10 = (3)[1/2^5 + 1/2^9 + 1/2^{13} + 1/2^{17} + \ldots + 0]$

habiéndose logrado, de este modo, expresar la fracción $\frac{1}{10}$ en función de las potencias inversas correspondientes de 2. Finalmente, de lo anterior se obtiene que:

$$a^{1/10} = [a^3]^{1/2^5}[a^3]^{1/2^9}[a^3]^{1/2^{13}}[a^3]^{1/2^{17}} \ldots [a^3]^0$$

donde el último factor es igual a la unidad.

De esta manera se ha demostrado que puede extraerse la raíz décima de cualquier número real, aplicando sucesivamente sólo la raíz cuadrada.

Por último, la fórmula anterior permite elevar directamente cualquier base real a un exponente positivo decimal.

Ejemplos

1. Obtener $(1234567890)^{1/10}$, con nueve decimales.

   El primer factor se obtiene elevando la base al cubo y extrayendo sucesivamente cinco veces la raíz cuadrada. Lo anterior da:

   7.117533650

El segundo factor se obtiene extrayendo sucesivamente cuatro veces la raíz cuadrada al anterior:

1.130500075

El tercero, de la misma manera:

1.007695715

El cuarto: 1.000479255

El quinto: 1.000029946

El sexto: 1.000001871

El séptimo: 1.000000116

El octavo: 1.000000007

El noveno: 1.000000000

Multiplicando todos los factores anteriores se obtiene:

$$(1234567890)^{1/10} = 8.112439957$$

Una mejor aproximación se logra guardando todos los valores en una calculadora digital y operando directamente.

Realmente, para el cálculo de la *raíz décima*, sólo se necesitan dos memorias de máquina. Así, finalmente se tiene:

$$(1234567890)^{1/10} = 8.112439991$$

2. Obtener $1.23^{4.56}$, con seis decimales.

$$1.23^{4.56} = [1.23^4][1.23^5]^{1/10}[1.23^6]^{1/10^2}$$

$$1.23^4 = 2.88866$$

$$[1.23^5]^{1/10} = (2.815306)^{1/10} = 1.109054$$

$$[1.23^6]^{1/10^2} = (3.462826)^{1/10^2} = (1.132252)^{1/10} = 1.012498$$

de donde:

$$1.23^{4.56} = (2.288866)(1.109054)(1.012498)$$

Luego

$$\mathbf{1.23^{4.56} = 2.570202}$$

3. Obtener $7.8^{-1.03}$, con seis decimales.

$$7.8^{-1.03} = \frac{1}{7.8^{1.03}}$$

Además:

$$7.8^{1.03} = [7.8^{1}][7.8^{0}]^{1/10}[7.8^{3}]^{1/10^2}$$

$$7.8^{1} = 7.8$$

$$[7.8^{0}]^{1/10} = 1^{1/10} = 1$$

$$[7.8^{3}]^{1/10^2} = (474.552)^{1/10^2} = (1.851946)^{1/10} = 1.063562$$

de donde

$$7.8^{1.03} = (7.8)(1)(1.063562) = 8.295784$$

Luego

$$7.8^{-1.03} = \frac{1}{8.295784}$$

$$7.8^{-1.03} = 0.120543$$

4. Obtener $\sqrt[5]{2}$, con seis decimales.

$$\sqrt[5]{2} = (2)^{1/5} = 2^{0.2} = [2^{0}][2^{2}]^{1/10}$$

$$2^{0} = 1$$

$$[2^{2}]^{1/10} = (4)^{1/10} = 1.148698$$

De donde:

$$\sqrt[5]{2} = (1)(1.148698)$$

Luego:

$$\sqrt[5]{2} = 1.148698$$

Por último, compárese este problema con el similar de la Parte I.

Bibliografía

Baldor, Aurelio. *Aritmética*. Ed. 1983. Compañía Cultural Editoria y Distribuidora de Textos Americanos, S.A./Ediciones y Distribuciones Códice, S.A., Madrid, España.

Baldor, Aurelio. *Álgebra*. Ed. 1986. Compañía Cultural Editora y Distribuidora de Textos Americanos, S.A./Ediciones y Distribuciones Códice, S.A., Madrid, España.

Hall y Knight. *Álgebra Superior*. Reimpr. 1963. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana (UTEHA), México, D.F., México.