Estudio de cónicas con papel

RESUMEN

Ya en el siglo pasado se estudió por completo el poder de construcción de la regla y el compás. Es más, Mohr, Mascheroni, Steiner y otros disfrutaron restringiendo el material a utilizar sólo regla o sólo compás), y la forma (compás con un tope de apertura, todas la circunferencias pasan por un mismo punto) de abordar "problemas de construcción".

El presente trabajo trata del modo de atacar dichos problemas por "plegado de papel", con una simple hoja de papel que doblada adecuadamente permita localizar el punto o la recta-pliegue solución.

Se dan las "reglas de juego" y como muestra se ven y se proponen algunos problemas simples de construcción con cónicas.

Antes de empezar, véase la **Nomenclatura Internacional** de **Papiroflexia**, que se tiene al final de este trabajo.

Un planteamiento pedagógico de la Geometría, constructivo, que centra el aprendizaje de un concepto en el paso de lo concreto a lo abstracto, ha de cubrir tres etapas: (1) De construcción o manipulativa; (2) Representativa o de construcción gráfica, y (3) Deductiva o de construcción formal.

En el Instituto de Bachillerato, de Requena (Valencia-España) se ha introducido la **Papiroflexia** como recurso en el aula de Matemáticas, y se propone a los alumnos resolver "problemas de construcción" por plegado de papel, con

Antonio Ledesma López

una simple hoja que doblada adecuadamente permita localizar el punto o la recta-pliegue solución. (Véase la Nomenclatura Internacional de Papiroflexia, al final.)

Se pretende con ello que la fase manipulativa de "palpar" conceptos, visualizar y modelar propiedades, esté presente siempre, al inicio, durante y después de todo el proceso.

A. DETERMINACIÓN DE UN PUNTO POR PLEGADO

Un punto es "construible por plegado de papel" (Fig. 1) si se obtiene como intersección de: dos pliegues (*H*), un pliegue y un borde (*E, G, L, M´, I´, I˝*) *o bien dos bordes tras plegar (I).*

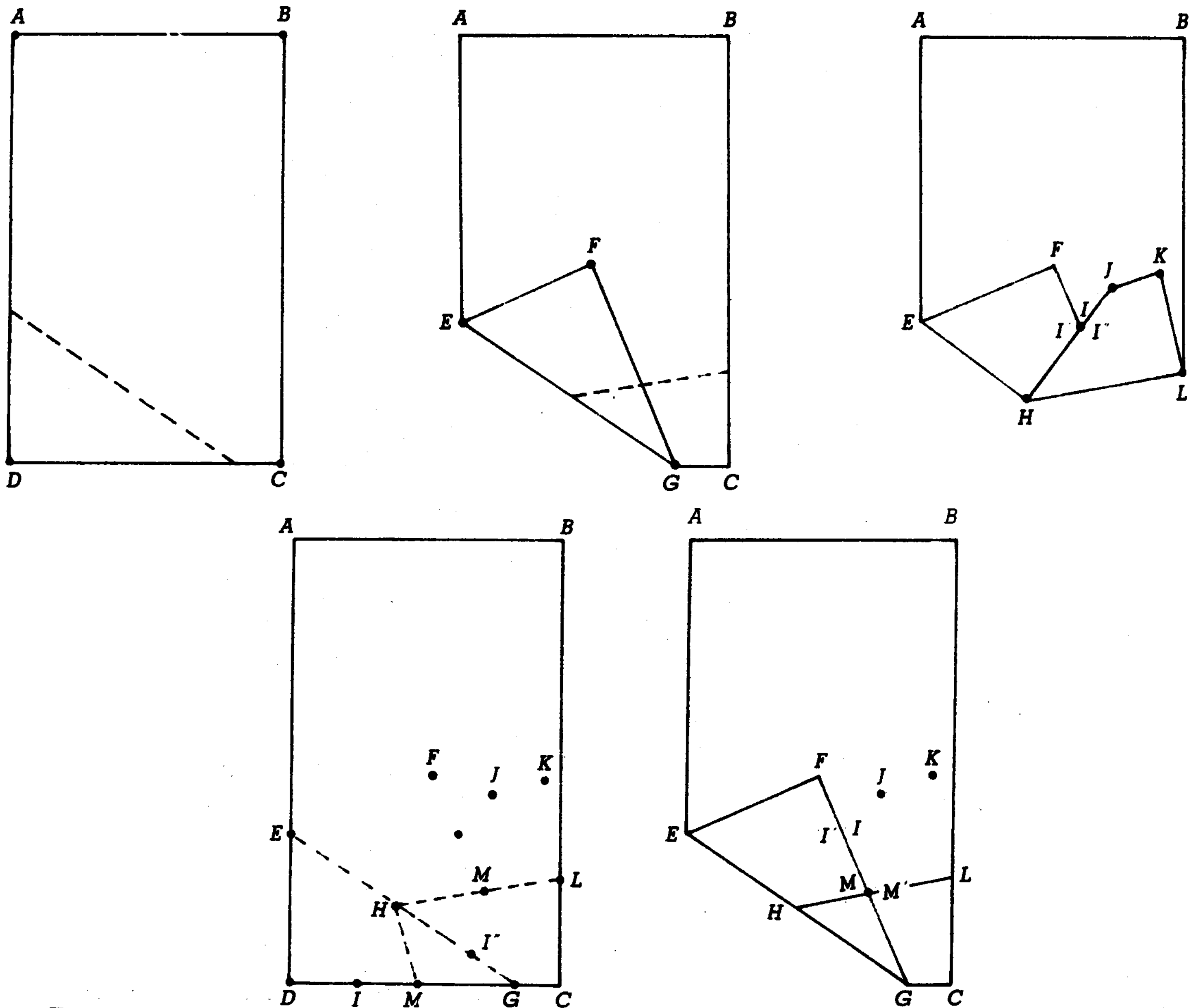


Figura 1

El punto se considerará "construido" si es característico del *folio* (es decir la hoja de papel) antes del plegado (esquinas A, B, C y D), o una vez doblado (F, J, K, M).

B. ¿QUÉ OCURRE AL DOBLAR UNA HOJA DE PAPEL?

1) Por un punto se pueden trazar infinidad de pliegues, y por dos puntos, sólo uno, bien en valle, bien en monte. Un borde del folio siempre se puede hacer pasar, al plegar el papel, por un punto de muchas formas [Fig. 2(a) y Fig. 2(b)] y por dos puntos de una sola [Fig. 2(c)].

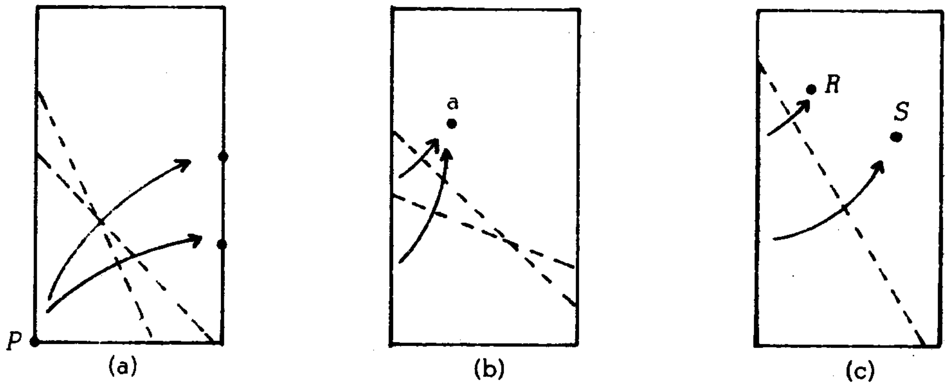


Figura 2: (a) La esquina P se lleva sobre el borde opuesto de muchas formas; (b) e igualmente el borde izquierdo sobre Q; (c) el borde izquierdo se hace pasar por R y S, de forma única.

2) Un pliegue que junta dos puntos del papel da la mediatriz del segmento, imaginario o no, con dichos puntos por extremos (Fig. 3).

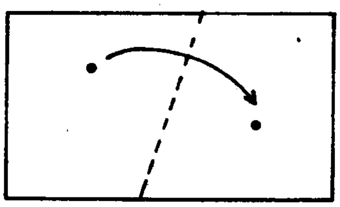


Figura 3

3) Un pliegue q .. une dos bordes del papel (o referencias dibujadas) marca la bisectriz del ángulo que forman los dos bordes [Fig. 4(a) y Fig. 4(c)], o la recta equidistante si los bordes son paralelos [Fig. 4(b) y Fig. 4(d)].

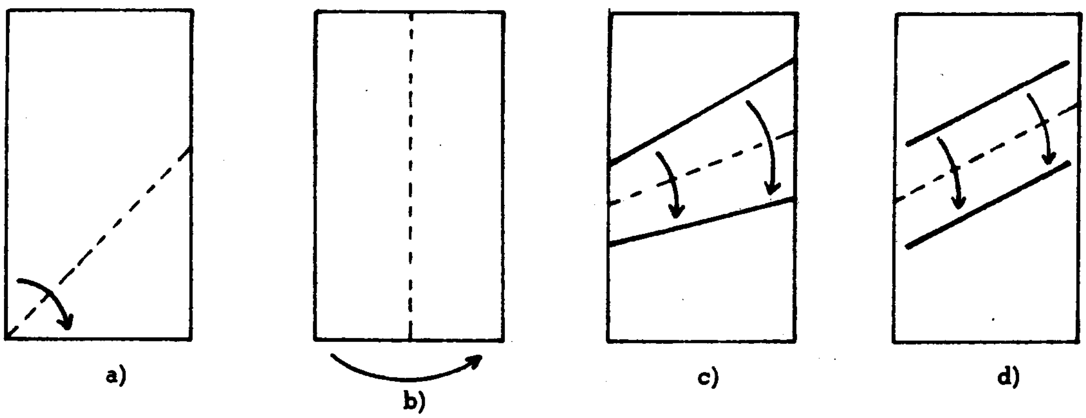


Figura 4

4) Un pliegue que une dos partes de otro, de un mismo borde o de un segmento, produce otro perpendicular (Fig. 5).

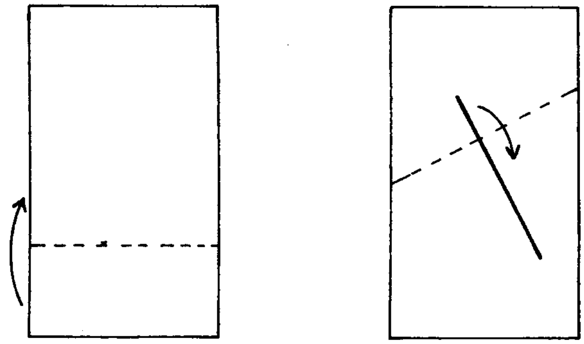


Figura 5

- Así pues, con un pliegue podemos.
- — Unir puntos (Fig. 3).
- — Transportar medidas (Fig. 6).

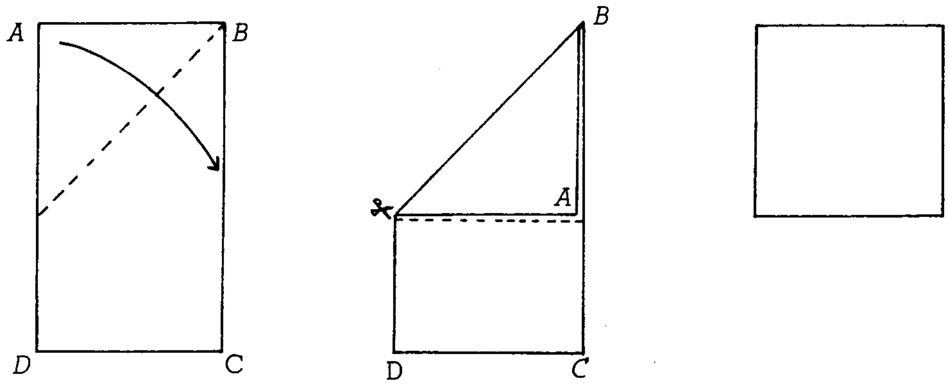


Figura 6: Para obtener un cuadrado se lleva la longitud AB sobre el lado BC.

Dividir ángulos y segmentos [Fig. 4(a) y Fig. 4(b)].
Hacer un pliegue perpendicular a otro dado (Fig. 5) o uno paralelo.
Aprovechar referencias del folio, de la forma del papel que empleemos.
Por ejemplo: obtener un pliegue paralelo al trazado en la (Fig. 7) y que pase por P.

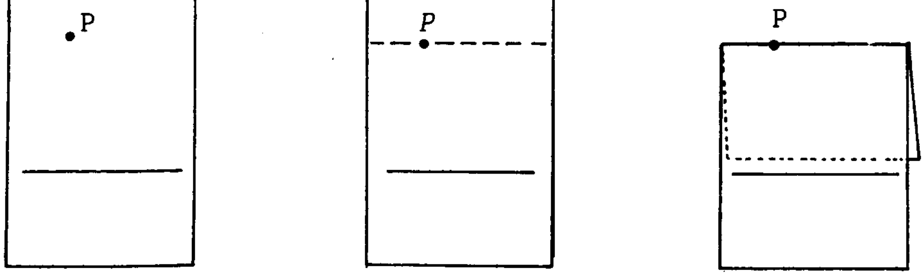


Figura 7

Llevar un punto sobre un pliegue (Fig. 8).

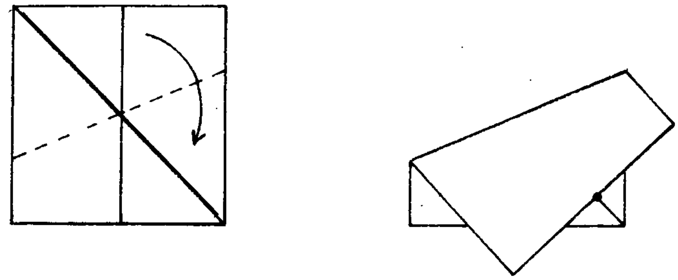


Figura 8

EJERCICIOS DE PLEGADO

Para familiarizarse con el "plegado de papel" he aquí dos primeros ejercicios: uno manipulativo y otro especulativo.

Ejerc. 1. a) Obtenga un pliegue perpendicular y otro paralelo a la dobladura "p" y que pasen por Q (Fig. 9).

b) Corte triángulos de papel de diversas formas o dibújelos en una cuartilla. Trace por "plegado" las líneas y puntos notables del triángulo (Fig. 10).

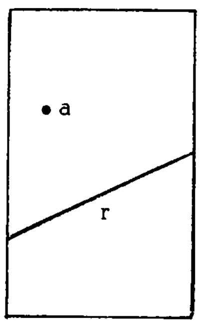
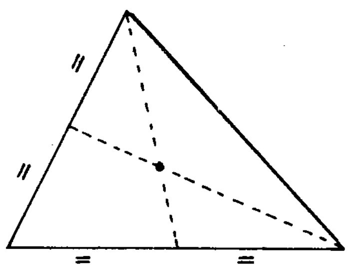
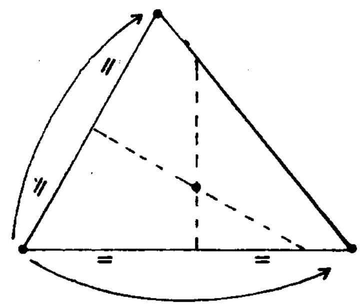


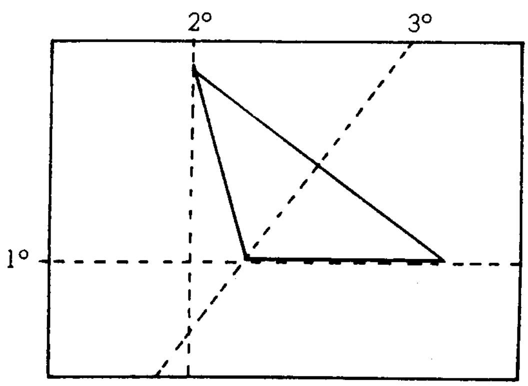
Figura 9



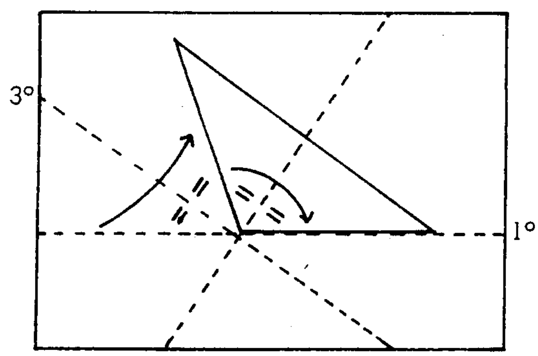
Medianas - Baricentro (c.g.).



Mediatrices-Circuncentro.



Alturas-Ortocentro



Bisectrices interiores-Incentro.
Bisectrices exteriores-Excentros.

Figura 10

Ejerc. 2. Numero de Euler para la hoja de papel. Pliegue varias veces una cuartilla. Por ejemplo, como muestra la Fig. 11. Trate de probar o refutar la aseveración:

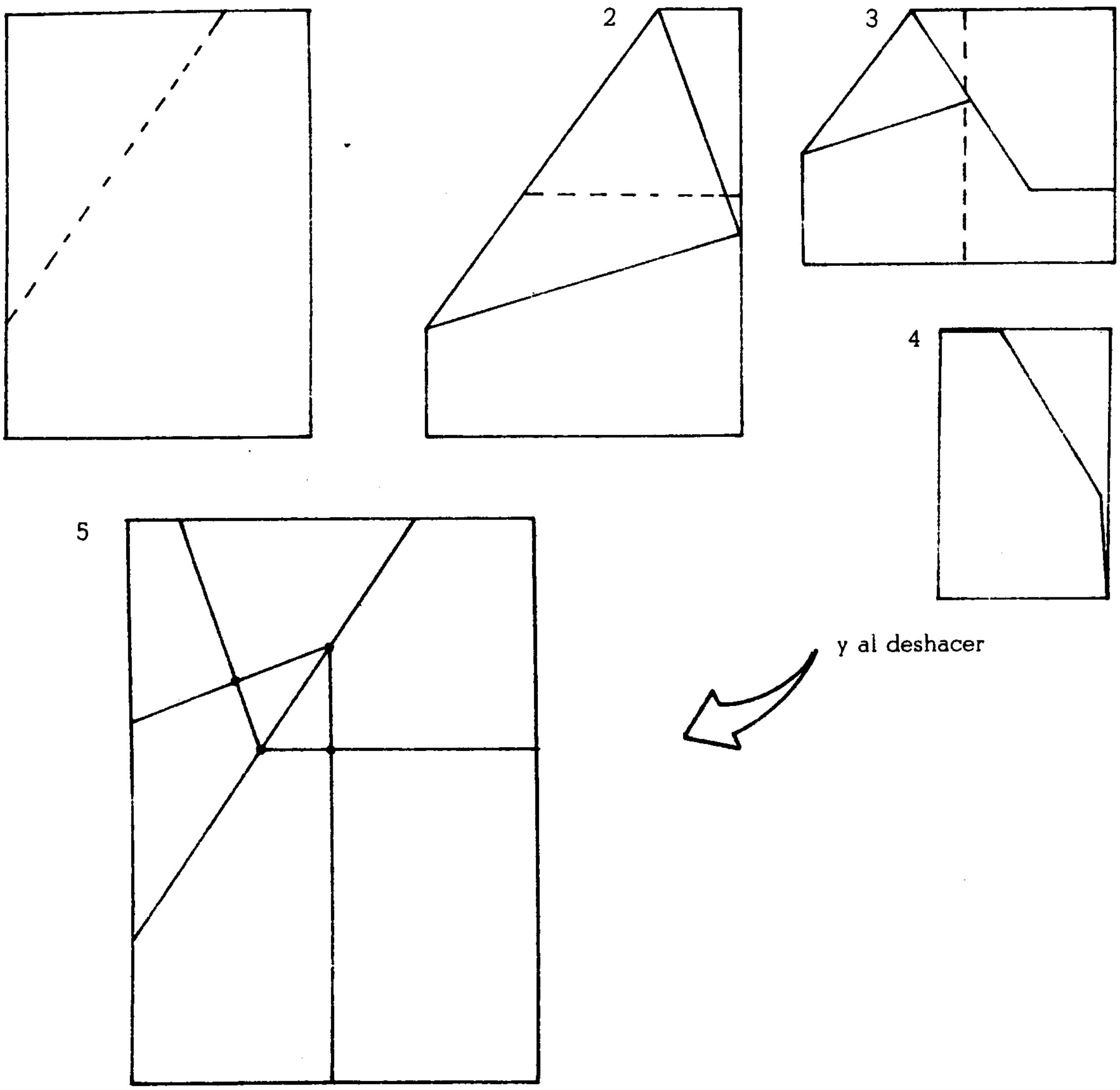


Figura 11: Número de Euler del papel plegado. Caras (c) = 8, Aristas (A) = 11 y Vértices (V) = 4

$$C + V - A = 1$$

PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN CON CÓNICAS

Prob. 1 a) Recorte un círculo de papel o dibújelo en el folio. Detertermine por plegado su centro.

b) Obtenga el pliegue que pasa por los centros de dos círculos trazados en una hoja de papel.

Prob. 2 a) Dibujadas dos circunferencias cualesquiera en el folio, obtenga el pliegue (por eje) radical.[1]

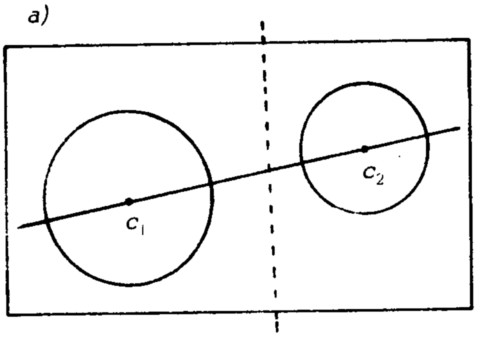
Veamos el caso de la Fig. 12(a).

b) Primero consiga [según Prob. 1, b)] el pliegue que pase por los centros.

c) El eje radical es perpendicular a dicho pliegue. Bastará, pues, con encontrar un punto del eje y obtener el pliegue perpendicular a la línea que une los centros.

d) El punto se puede determinar así:

Doble el papel de modo que se corten las dos circunferencias y, a trasluz, verá que son secantes en P y Q [Fig. 12(b)].



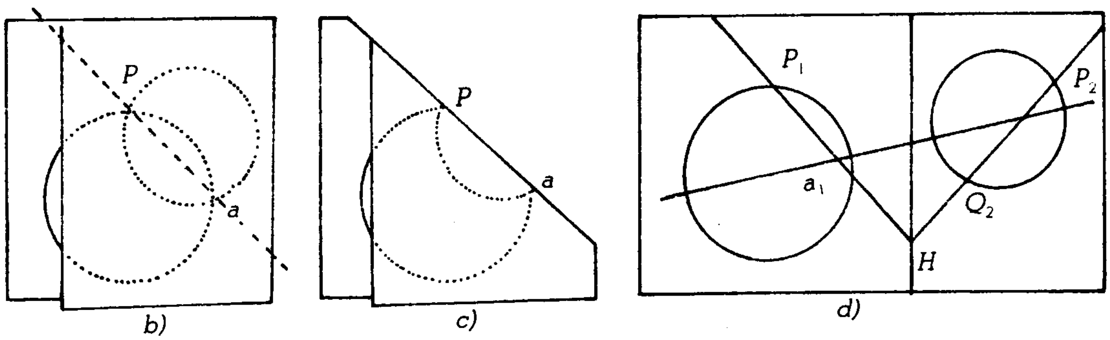
Trace el pliegue que pase por P y Q [Fig. 12(c)] y deshaga todo el plegado [Figs. 12(c) y (d)].

Así tendrá el punto H que es del eje radical (igual potencia respecto de las dos circunferencias).

$$HQ_1 = HQ_2 \qquad HP_1 = HP_2$$

$$\text{pot}(P,\ 1^{a}) = HQ_1 \cdot HP_1 = HQ_2 \cdot HP_2 = \text{Pot}(P,\ 2^{a})$$

Lleve un centro, C_1, sobre la línea que une los dos centros de forma que la dobladura pase por H. Ese será el "pliegue radical" [Fig. 12(e)].



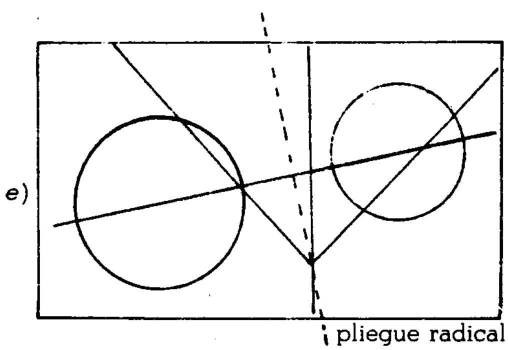


Figura 12

[1] NOTA: Sean dados una circunferencia de radio r y centro C, y un punto P, que se encuentra de C a la distancia d. La magnitud $d^2 - r^2$ se denomina *orden* o *potencia* del punto P respecto de la circunferencia.

Prob. 3. a) Señale un punto en el folio. Marque una doblez haciendo coincidir el borde del folio con el punto. Haga lo mismo con muchos puntos del borde y obtendrá muchos pliegues. Las dobleces delimitan una curva [Fig. 13(a)].

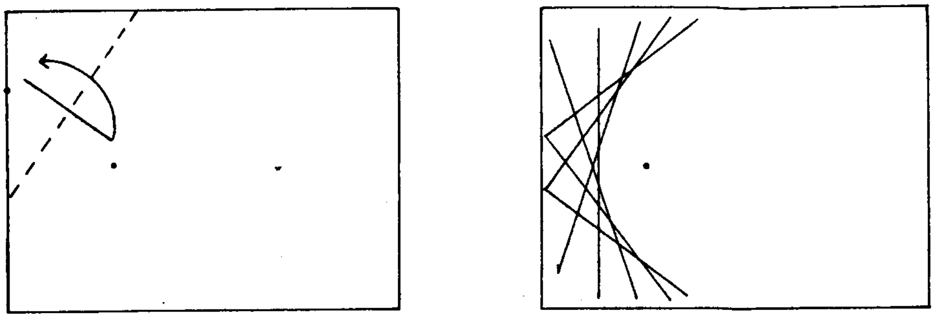


Figura 13(a)

Probemos que dicha curva es una parábola y el punto su foco [Fig. 3(b)].

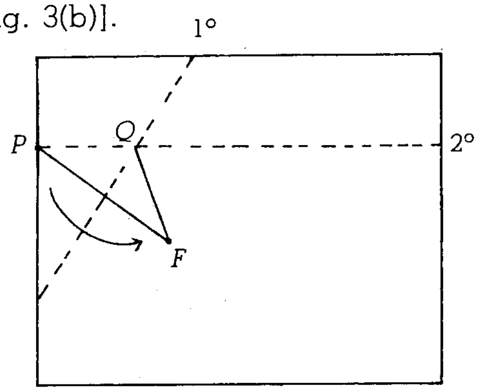


Figura 13(b)

— La dobladura "d" es mediatriz del segmento PF. Trace desde P una perpendicular al borde que cortará a "d" en Q.

— Q es el punto de la parábola, pue $QF = QP$, F es el foco, y el borde de la cuartilla su directriz.

b) Recorte un círculo de papel o dibújelo simplemente. Marque un punto en su interior. Señale una doblez haciendo coincidir el borde del círculo con el punto. Hágalo con muchos puntos de la circunferencia y obtendrá los pliegues que delimitan una elipse.

Justifique que la curva así obtenida es una elipse de focos el punto y el centro del círculo (Fig. 14).

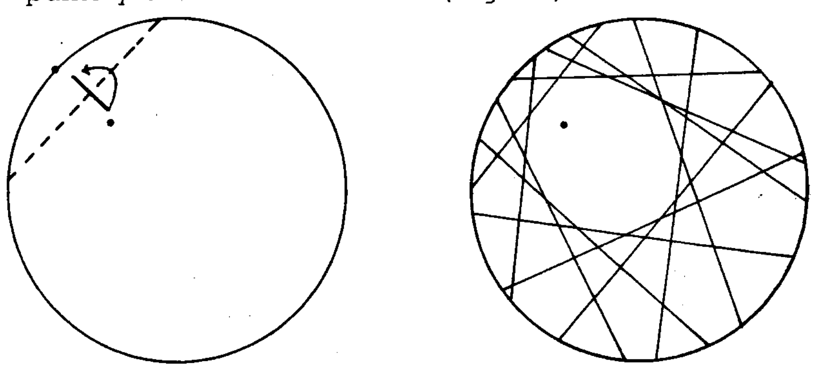


Figura 14

c) Análogamente, marque el punto en el exterior del círculo y actúe como antes. Tendrá una hipérbola (Fig. 15).

Hágalo y demuéstrelo.

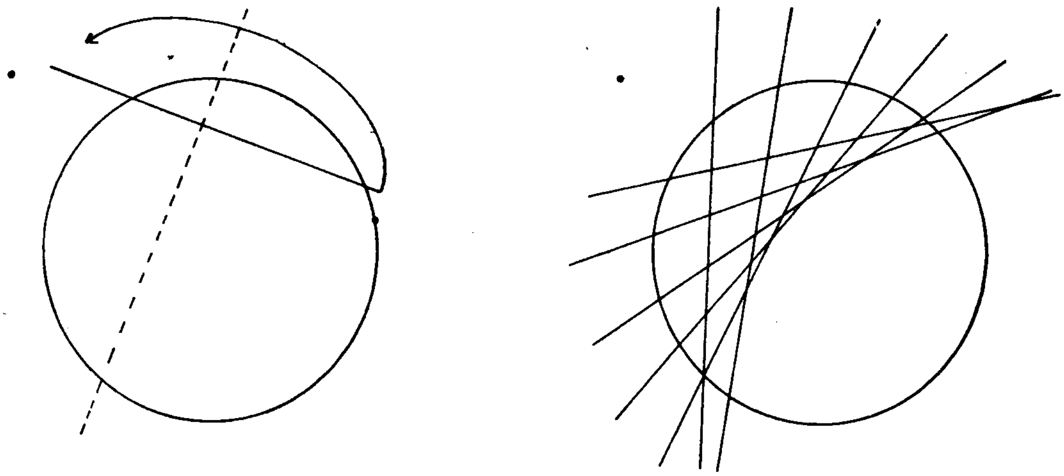


Figura 15

Prob. 4. *Rectángulo fundamental* (r.f.), de dimensiones eje transverso por eje no transverso (Fig. 16).

— Si el folio es el r.f. en el que se inscribe una elipse, determine por plegado los focos.

— Igualmente puede verse en caso que el r.f. esté dibujado en el folio.

— Resuelva análogamente la cuestión en el caso de la hipérbola.

— Marque las asíntotas de la hipérbola.

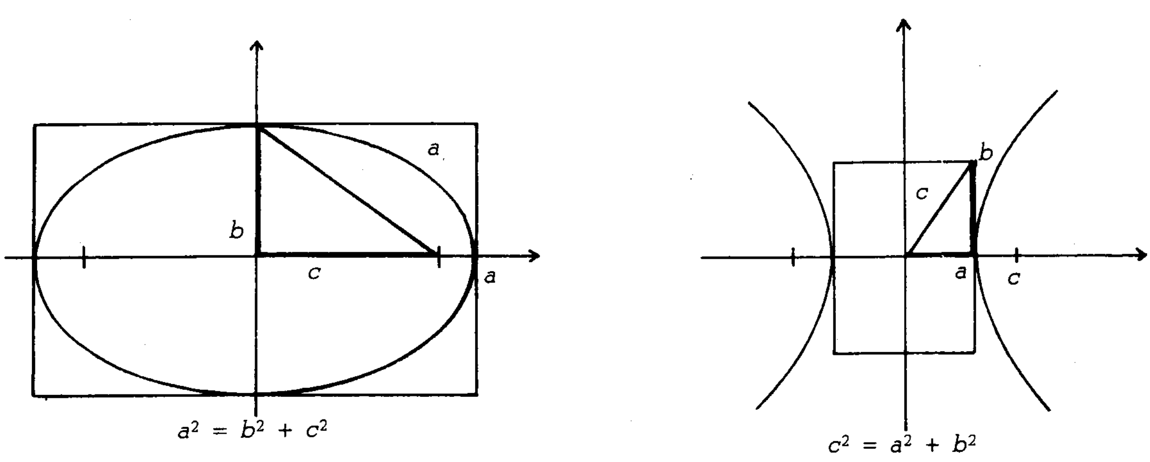


Figura 16

Prob. 5. Dibuje una cónica cualquiera en el folio.
Determine el(los) pliegue(s) directriz(ces).
Veámoslo en el caso de la elipse (Fig. 17).

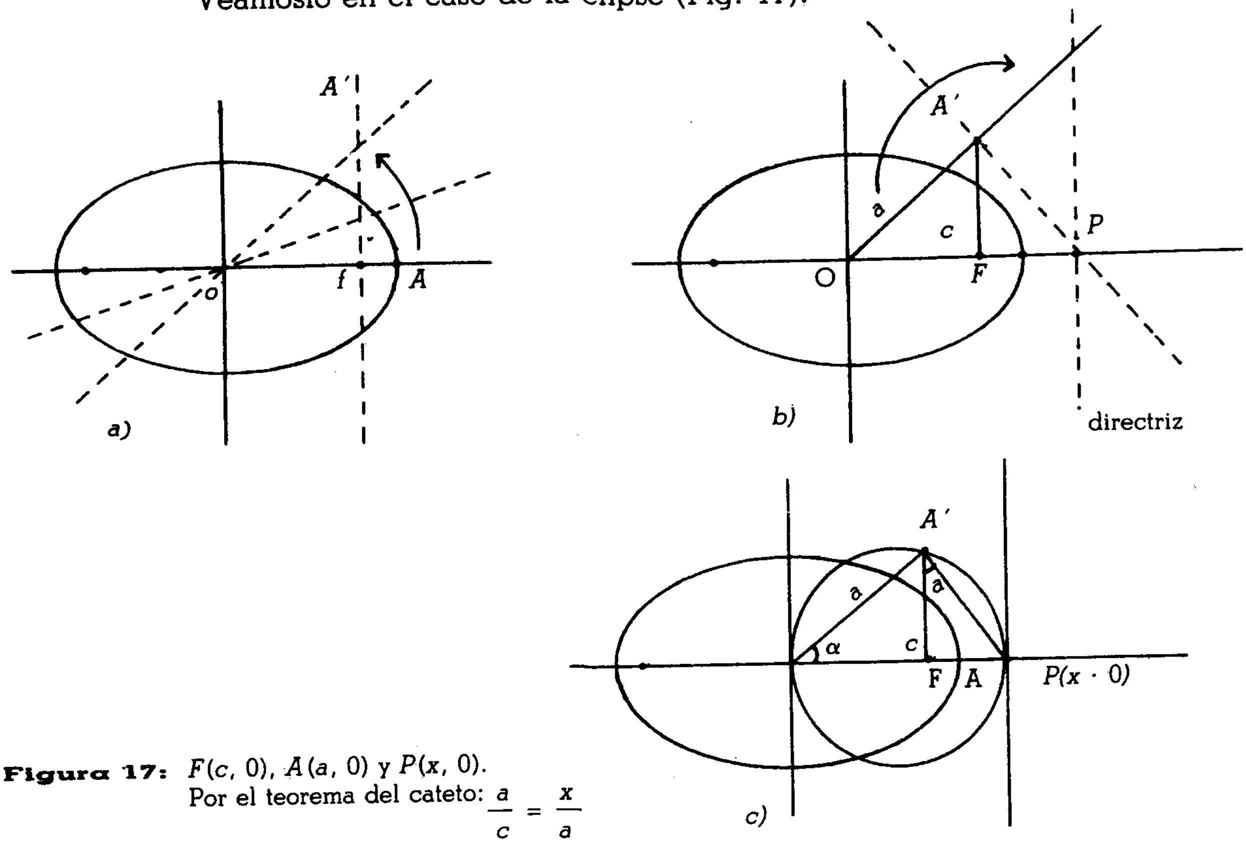


Figura 17: $F(c, 0)$, $A(a, 0)$ y $P(x, 0)$.
Por el teorema del cateto: $\frac{a}{c} = \frac{x}{a}$

— Construya el r.f. y determine los focos (Prob. 4)

— Considerando la elipse centrada en el origen de coordenadas, queremos construir la recta de ecuacion $x = a/e$ siendo la excentricidad $e = c/a$

Es decir, hemos de buscar puntos del plano con abscisa x que cumpla $x \cdot c = a^2$

— Pliegue por F perpendicularente al eje focal.

— ' Lleve la longitud "a", desde O, sobre ese pliegue. Obtendrá A'.

— Consiga el pliegue que pasa por O y A'.

— Trace una doblez perpendicular a A' que cortará a la línea de los focos por un punto P, que será de la directriz.

— La perpendicular al eje focal que pase por P será la directriz.

Jutificación en (Fig. 17(c).

• Actúese análogamente en el caso de la hipérbola o parábola.

Prob. 6. Trazar el pliegue tangente y normal a una cónica en uno de sus puntos.

Veámoslo en el caso de la hipérbola (Fig. 18).

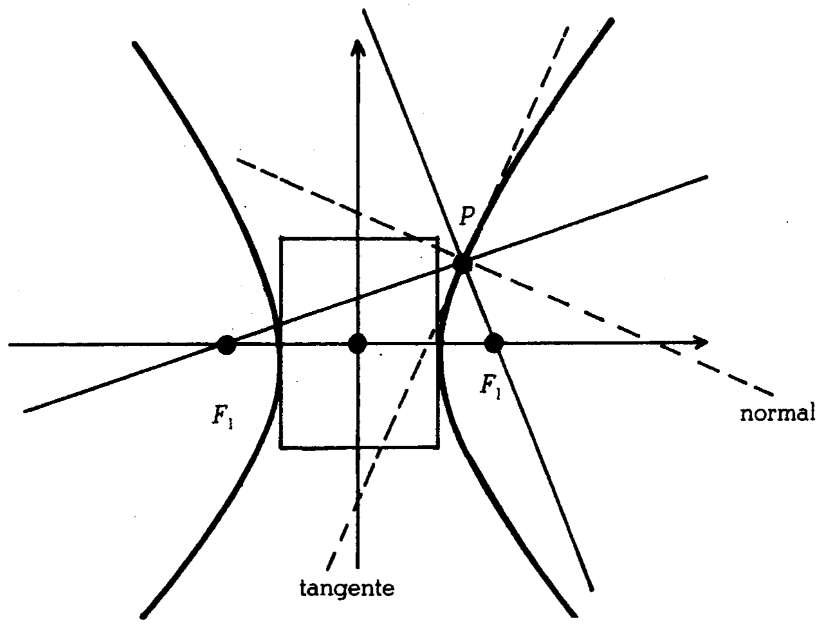


Figura 18

— Basta determinar los focos (Prob. 4) y saber que la tangente a la hipérbola en uno de sus puntos es la bisectriz del ángulo que forman los radios vectores que van a dicho punto.

— La normal es el pliegue perpendicular a la tangente en el punto en cuestión.

Hasta aquí una pequeña muestra de las posibilidades que ofrece el plegado de papel para resolver "problemas de construcción geométrica".

CONCLUSIÓN

Incidiendo en la "manipulación", constantemente se facilita la comprensión de conceptos geométricos, se les dota de significado para los alumnos, y se propicia la asimilación de sus propiedades. Se desarrolla la intuición, se fomenta la creatividad y, lo que es más importante, no se pierde en ningún momento el carácter lúdico.

[ABRIL 1993].

NOMENCLATURA INTERNACIONAL DE PAPIROFLEXIA

En Papiroflexia existe un lenguaje con símbolos reconocidos universalmente. Tales símbolos indican las manipulaciones que han de realizarse con el papel. En el cuadro adjunto se muestran, entre las más usuales, las que se precisan para seguir debidamente el presente estudio.

Recomendaciones

1. Utilice papel común. El que usa normalmente para escribir puede servir muy bien.

2. Conviene familiarizarse con la simbología de Papiroflexia cuanto antes.

3. Siga rigurosamente el número de orden que lleva cada paso.

4. Cuando vaya a realizar un plegado, observe bien como ha de quedar mirando el dibujo siguiente.

5. Es muy importante que las dobladuras queden marcadas con precisión. Antes de pasar el dedo y marcar la dobladura (o doblez) con firmeza compruebe que el plegado está correctamente realizado.

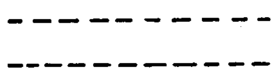
6. Conviene trabajar sobre una superficie lisa y consistente.

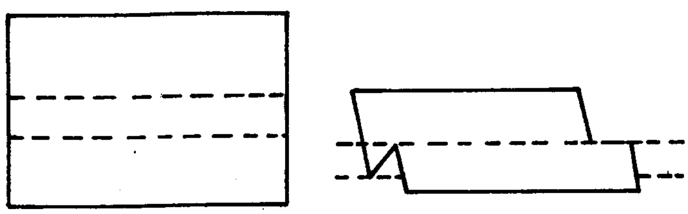
7. No se desanime si la primera vez que intenta seguir las instrucciones, el plegado no le queda muy bien. La próxima resultará mejor.

8. Si al ir siguiendo las instrucciones ve otra posibilidad, le surgen preguntas o su curiosidad le incita a ir por otro lado, no lo dude; deje el trabajo, tome nota de su idea y prosiga sus investigaciones. Puede así plantear un nuevo problema, aportar una solución más elegante, o bien encontrar una variante de interés.

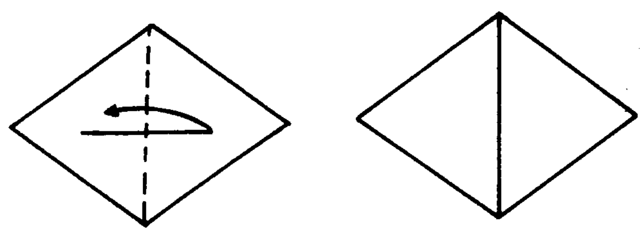
NOMENCLATURA INTERNACIONAL DE PAPIROFLEXIA

1. Plegado en valle y en monte.

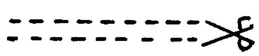




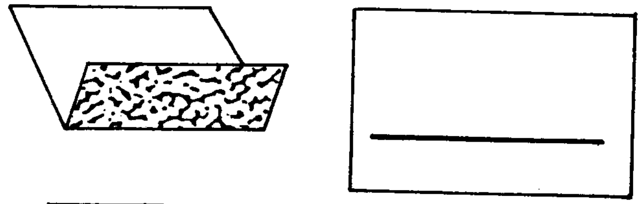
2. Hacer y deshacer un pliegue.



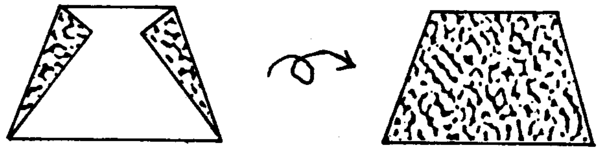
3. Cortar.



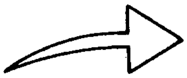
4. Marca de un pliegue deshecho.

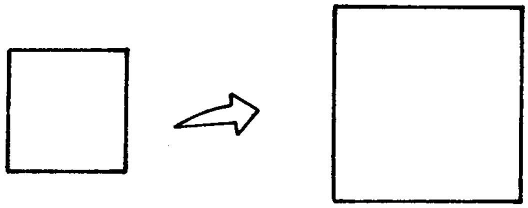


5. Dar vuelta al modelo.

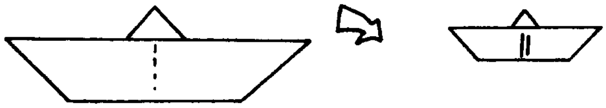


6. Agrandar el dibujo.

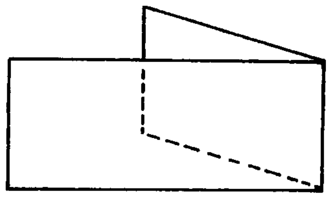




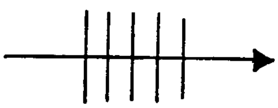
7. Reducir el dibujo.

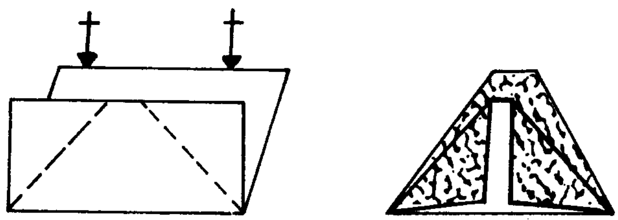


8. Vista por "rayos X".

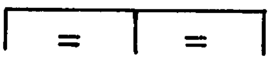


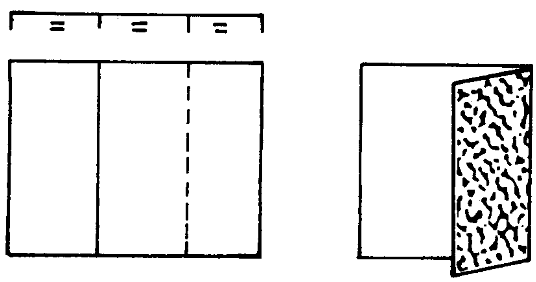
9. Plegar tantas veces como rayas transversales haya.





10. Partes iguales.





BIBLIOGRAFÍA

Alsina, Burgués y Fortuny (1988). *Construir la Geometría* Ed. Síntesis S.A. (Madrid).

Bolt, B. (1988). *Actividades Matemáticas*, Ed. Labor S.A. (Barcelona).

Bolt, B. (1988). *Más actividades matemáticas*. Ed. Labor, S.A. (Barcelona).

Bolt, B. (1989). *Aún más activiades matemáticas*. Ed. Labor S.A. (Barcelona).

Bolt, B. y Hobbs, D. (1991). *101 Proyectos matemáticos*. Ed. Labor (Barcelona).

Castelnuovo, Ed. (1966). *Geometría intuitiva*. Ed. Labor (Barcelona).

Del Río, J. (1990). *Aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento. Una aplicación al estudio de las cónicas*. IUCE (Salamanca).

Gardner, M. (1990). *Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas*. Ed. Labor S.A. (Barcelona).

Gardner, M. (1991). *Rompecabezas mentales*. Selector Actualidad Editorial (México D.F.).[2]

González García-Gutiérrez, J. (1987). Cómo hacer figuras de papel. Hermann Blume (Madrid).

Ignatiev, Ed. (1989). *En el reino del ingenio*. Mir (Moscú).

Ledesma, A. (1989). *La Papiroflexia: una ayuda para el salto de la 2ª a la 3ª dimensión*. Trabajo final del curso "Estrategias para la Innovación Didáctica" de la UNED.

Ledesma, A. (1991). *La Papiroflexia*. XIII Concurso Santillana de Experiencias Escolares (inédito).

Ledesma A. (1991). Papiroflexia en el aula de Matemáticas. V. Jornadas Andaluzas de Educación Matemática THALES. (Granada).

Martínez, Baena y Coriat. (1991). *Recursos para el aula: Papiroflexia*. V JAEM (Castellón).

[2] NOTA: Los tres últimos textos son recopilación de los artículos del autor en la revista *Scientific American*.