NOTAS DE CLASE

El Paquete Mathematica y la Enseñanza de las Matemáticas por Computadora

I. Resumen

Se muestra un ejemplo de cómo se puede utilizar la computadora en la enseñanza, presentando la experiencia del curso preuniversitario: *Matemática Computacional Básica*, que se imparte totalmente por computadora y con ayuda del paquete **Mathematica**, para estudiantes de Actuaría, Física y Matemáticas de la Universidad de las Américas–Puebla. Se dan ejemplos de las prácticas computacionales y se comenta la continuación del proyecto en los cursos universitarios, tomando como curso piloto el curso de *Cálculo I*. Se concluye con un balance de las ventajas y desventajas encontradas al aplicar este nuevo enfoque.

II. Introducción

En los últimos años la computadora ha convertido a la matemática en una ciencia experimental y se usa cada vez más en la investigación. En este trabajo presento un ejemplo de cómo se puede usar la computadora en la docencia.

Se han publicado recientemente varios trabajos, en los que se debate sobre el uso de la computadora en la enseñanza; ver, por ejemplo [Murakami] y [Halmos]. El punto de vista planteado en este trabajo es que, ya que las computadoras existen en nuestro entorno y sus capacidades crecen día a día, podemos utilizarlas también para la enseñanza, teniendo cuidado, sin embargo, de como lo hagamos.

Guillermo Romero Meléndez

Universidad de las Américas-Puebla

En el semestre de otoño de 1991 se impartió en la UDLA-P por vez primera el curso preuniversitario: "Matemática Computacional Básica" para estudiantes de Actuaría, Física y Matemáticas. La idea del curso es: *no enseñar teoría a los alumnos*, sino que por medio de experimentos computacionales y preguntas como guía, *"descubran" ellos mismos la teoría*. El curso es impartido totalmente por computadora, los alumnos trabajan en equipos de tres personas por cada equipo de cómputo, en tres sesiones de laboratorio de una hora por semana, y acompañan a éstas dos sesiones de pizarrón semanales, en donde los alumnos exponen sus resultados.

Para el diseño de las prácticas se usó "**Mathematica**", un paquete poderoso creado por el Físico Stephen Wolfram,de la Universidad de Illinois, en 1988; ver [Wolfram]; sin embargo, los resultados alcanzados con el curso se podrían alcanzar también empleando otro paquete más modesto.

El curso se impartió nuevamente en el semestre de otoño de 1992, y el proyecto de utilizar la computadora en la enseñanza es continuado ahora más allá del nivel preuniversitario, tomando como curso piloto el curso de *Cálculo I* del semestre de primavera del 93.

Sin embargo, se modificó la filosofía presente en el curso preuniversitario, de impartir el curso exclusivamente por computadora. En los cursos pertenecientes al plan de estudios de la licenciatura, las sesiones de teoría se acompañarán de una sesión semanal de laboratorio computacional, utilizando también prácticas diseñadas con ayuda del paquete Mathematica, y que ilustren la utilización de los conceptos v istos en teoría con aplicaciones interesantes y actuales, o bien, ayuden al alumno a visualizar estos conceptos por medio de ejercicios computacionales.

III. Ejemplos

A) Ejemplos del Curso Preuniversitario:

Los temas del curso fueron:

- Expresiones algebraicas
- Funciones y relaciones
- Límites y continuidad

Se presentan ahora, como ejemplo, parte de algunas de las prácticas que se realizaron durante el curso:

PRÁCTICA No. 2
RAÍCES DE POLINOMIOS

Ejemplo: Las siguientes expresiones son polinomios:

$1 + x^3$, $1 - x + x^2$

En general, un polinomio es una expresión de la forma

$a_n + \ldots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n$

en donde a_0, a_1, . . . , a_n son números, y a_0 no es cero.

Ejemplo:

El número -1 es una raíz del polinomio

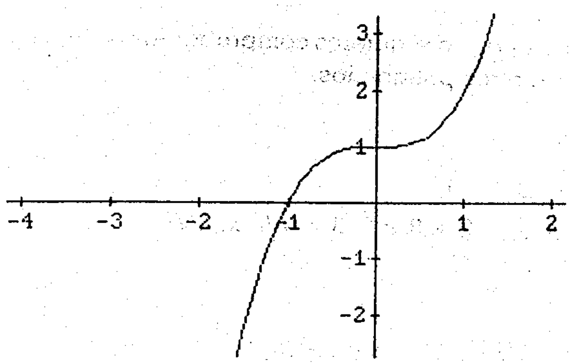
$1 + x^3$

porque se cumple

$1 + (-1)^3 = 0$

Gráficamente:

Plot[1 + *x* ^3, {x, -4, 2}]^



En general, un número r es raíz del polinomio

$a_n + \ldots + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n$

si la expresión se anula o es igual a cero al sustituir x por r. Es decir,

$$a_n + \ldots + a_1 r^{n-1} + a_0 r^n = 0$$

Lo que aprendimos de las ecuaciones cuadráticas nos hace preguntarnos ahora:

Pregunta 1

¿Qué significan gráficamente las raíces de un polinomio?

Pregunta 2

¿Se puede reconstruir un polinomio si se conocen sus raíces?

Pregunta 3

¿Cómo se obtienen las raíces de un polinomio?

Solución a la Pregunta 1

a) Resolver

$1 + x^3 = 0$

Solve [x^3 + 1 == 0, x] // N

Graficar: $1 + x^3$

Plot[x ^ 3 + 1, {x, -3, 1}]

¿Puedes concluir algo ? Si no es así, o si quieres comprobar tus afirmaciones, puedes repetir el proceso con otros polinomios.

b) Resolver

$-53 + 134x - 60x^2 + 8x^3 = 0$

Solve[-53 + 134 x - 60 x ^ 2 + 8 x ^ 3 == 0, x] // N

Graficar

$-53 + 134x - 60x^2 + 8x^3$

Plot[-53 + 134x - 60x ^ 2 + 8x ^ 3,{x, -5,5}]

Solución a la pregunta 2

a) Comparar el polinomio

$-53 + 134x - 60x^2 + 8x^3$

del inciso b) anterior, con el polinomio

$8\,(x-(3.5+I))\,(x-(3.5-I))\,(x-0.5)$

Expand[8 (x – (3.5 + I) (x – (3.5 – I) (x – 0.5)]

¿Qué puedes conjeturar para el caso general?

b) Compara los polinomios

$3-9x-9x^2+3x^3$

y

$3\,(x-1)^3$

Verifica si en este caso se cumple lo que concluiste.

Desarrollemos ahora el segundo polinomio.

Expand[3(x – 1) ^ 3]

¿Qué se puede decir en general de la factorización de un polinomio que tiene raíces múltiples?

¿Qué igualdad deben satisfacer sus componentes?

Solución a la pregunta 3

a) Comprobemos que 1/2 y –2/3 son raíces del polinomio

$-2+x+6x^2$

Resolviéndolo se obtiene

Solve [6x ^ 2 + x – 2==0, x] // N

¿Qué relación observas entre el numerador y el denominador de las raíces y los coeficientes 6 y 2 del polinomio?

a) Comprobemos que 5/3, $2^{1/2}$ y $-2^{1/2}$ son raíces del polinomio

$20-12x-10x^2+6x^3$

Solve[6x ^ 3 – 10x ^ 2 – 12x + 20 == 0, x] // N

¿Qué relación observas respecto al numerador y denominador de la raíz 5/3 por un lado, y el primero y último coeficiente del polinomio?

¿Que puedes conjeturar de los ejercicios a) y b) anteriores con respecto a las raíces racionales de un polinomio?

c) Verifica si tu conclusión se cumple para otros ejemplos.

NOTA: En tus cursos posteriores aprenderás métodos para encontrar raíces no racionales de polinomios.

PRÁCTICA No. 11
TIPOS DE LÍMITES

El objetivo de esta práctica es visualizar el concepto de límite de una función en sus diversas formas e inferir de las gráficas de las funciones el valor de sus límites.

Ilustremos primero el concepto de límite con los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1 ***LÍMITES LATERALES***

Consideremos la función:

$f(x) = x + \mathrm{Sign}(x)$

($\mathrm{Sign}(x) = 1$ si $x \geq 0$

y

$= -1$ si $x < 0$)

Tomemos varios valores de x cercanos a 0. Por ejemplo

.1, .01 , ... , .00001

y evaluemos la función f en estos puntos:

```
f[x_]:= x + Sign[x]
N[Do[print[10.0^(-i)]],{i,1,5,1}],10]
```

1.1

1.01

1.001

1.0001

1.00001

Observamos así, que si x se acerca a 0 por valores mayores que 0, entonces $f(x)$ se acerca a 1.

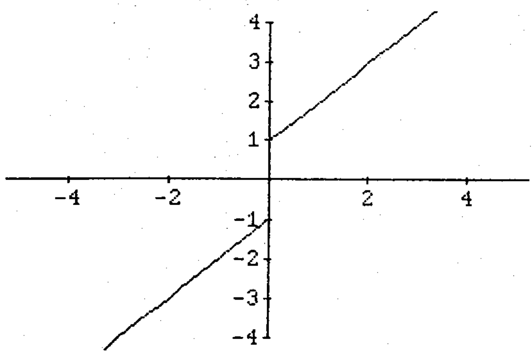
Esto se denota de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

y se le llama el "límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0 por la derecha".

Esto lo podemos observar también en la gráfica:

Plot[x + sign[x],{x, – 5, 5},PlotRange->{– 4, 4}]



Vemos que los valores de $f(x)$ tienden a 1, si los puntos x tienden a 0, tomando siempre valores mayores que 0.

EJEMPLO 2 ***LÍMITES AL INFINITO***

Observemos el comportamiento de la función:

$$k(x) = (x + 1)/x$$

cuando x toma valores cada vez mayores.

Evaluemos la función k en 1, 10, 100, . . . , 10^{10}

k[x_]:= (x + 1)/x

N[Do[Print[10 ^ i]], {i, 1, 10, 1}], 10]

1.1
1.01
1.001
1.0001
1.00001
1.
1.
1.
1.
1.

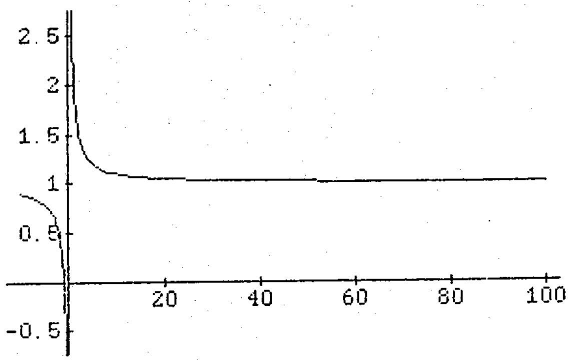
Observamos que $k(x)$ se acerca cada vez más a 1, cuando x toma valores cada vez mayores. Esto se denota así:

$$\lim_{x \to +\infty} k(x) = 1$$

Este límite significa:

"El límite de $k(x)$ cuando x tiende a más infinito". Observemos el comportamiento de la función en su gráfica:

Plot[k [x],{x, −10,100}]



EJERCICIO

Para cada una de las siguientes funciones escribir los límites que describen su comportamiento en los puntos indicados. Fundamentar las respuestas.

1. $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x^2 - 3}$, en $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$

   Plot[x ^ 3 + 1 / (x ^ 2 – 3), {x, –4, 4}]

2. $g[x] = [1/x]^2$, en 0,1

   Plot[(Floor[1/x]) ^ 2, [x, – 2, 2}]

3. $h(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$, en 0, + ∞, – ∞,

   Plot[(x ^2 = 10 / (x + 1), {x, –100, 100}]

B) Ejemplo del Curso Piloto de Cálculo 1.

PRÁCTICA No. 2
INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DINÁMICOS Y CAOS

En la práctica anterior estudiamos el método de Fibonacci para modelar el crecimiento de una población de conejos. En ese método no se consideraban limitaciones en el alimento y en el espacio disponible y la población podía crecer indefinidamente.

En tal práctica estudiamos otro modelo para el crecimiento de poblaciones en el que sí se toma en cuenta que existen limitaciones como el espacio, alimento, etc., que harán disminuir la tasa de crecimiento cuando el número de habitantes se aproxima a un número máximo permitido.

Este método fue utilizado por primera vez en 1845 por el matemático y sociólogo belga Pierre François Verhulst; nos permitirá utilizar el concepto de función y a la vez introducirnos en una teoría moderna que se está aplicando a muchas áreas: Teoría de los Sistemas Dinámicos y Caos.

La idea de la práctica es estudiar la función:

$$f: (0, 1) \to R$$
$$f(x) = r(1 - x)x$$

en donde, $1 \leq r \leq 4$.

La cual se puede interpretar así: $f(x)$ representa el crecimiento de la población x, el cual es proporcional a x, pero el factor de proporcionalidad $r(1 - x)$ disminuye si x se acerca al valor máximo 1.

La variación de la población puede estudiarse tomando un valor inicial x y aplicándole sucesivamente la función f, es decir, observando el comportamiento de los valores:

$$F(0) = x$$
$$F(1) = f(x)$$
$$F(2) = f(f(x))$$
$$F(3) = f(f(f(x))$$
$$\vdots$$
$$F(n) = f(f(f\ldots(f(x)\ldots)$$

Ejemplo

Tomamos $x = .3$ y $r = 2$, o sea, la función que vamos a iterar es $f(x) = 2(1 - x)x$. Obtenemos:

$$F(0) = .3$$
$$F(1) = 2(1 - .3)(.3) = .42$$
$$F(2) = 2(1. - 42)(.42) = .4872$$

$F(3) = 2(1 - .4872)(.4872) = .49967232$

$F(4) = 2(1 - .49967232)(.49967232) = 499999785$

$F(5) = 2(1 - .499999785)(.499999785) = .5$

$F(6) = 2(1 - .5)(.5) = .5$

.

.

.

$F(n) = .5$

Análogamente si empezamos con otro valor de x, por ejemplo $x = .9$ y aplicamos f sucesivamente, obtenemos:

$F(0) = .9$

$F(1) = 2(1 - .9)(.9) = .18$

$F(2) = 2(1. - 18)(.18) = .2952$

$F(3) = 2(1 - .2952)(.2952) = .41611392$

$F(4) = 2(1 - .41611392)(.41611392) = .485926251$

$F(5) = 2(1 - .485926251)(.485926251) = .499603859$

$F(6) = 2(1 - .499603859)(.499603859) = .499999686$

$F(7) = 2(1 - .499999686)(.499999686) = .5$

$F(8) = 2(1 - .5)(.5) = .5$

.

.

.

$F(n) = .5$

Se puede ver que también para otros valores de x, los valores que obtenemos se acercan a .5.

Entonces a .5 se le llama "atractor del sistema dinámico $f(x) = 2(1 - x)x$"

La tarea a realizar es:

1. Comenzando con $x = .3$, encuentra los atractores para varios valores de r entre 1 y 3.6.
2. Grafica los datos encontrados en el punto 1, situando en el eje x los valores de r, y en el eje y los valores de los atractores.
3. Interpreta la gráfica obtenida en el inciso 2., en términos de la población x. Para realizar la parte 1 puedes modificar las siguientes instrucciones, que calculan las primeras 100 iteraciones del sistema dinámico $f(x) = r(1 - x)x$, con $r = 2$, comenzando con $x = .3$.

```
r: = 2
x: = .3
f[x_]: = r(1 - x)x
F[n_]: = F[n] = f[F[n-1]]; F[1] = x
Table[N[F[n], 20],{n, 1, 100}]]
Clear[r]
Clear[f]
clear[f]
```

IV. Conclusiones

A) Ventajas del Nuevo Enfoque

1) La computadora y el paquete "Mathematica" permitieron visualizar los conceptos matemáticos.

2) Los alumnos pudieron elegir los ejercicios que quisieron, modificando las instrucciones dadas.

3) Cada equipo de alumnos avanza según su ritmo.

4) Se pueden abordar preguntas más elaboradas, o de nivel más alto de aprendizaje (análisis y síntesis), que en los cursos tradicionales.

5) Como las prácticas se hicieron en equipo, se promovió el trabajo en grupo.

B) Desventajas del Nuevo Enfoque

1) Disminuye la relación profesor-estudiante (el profesor se convierte en asesor).

2) Se depende de factores poco controlables: disponibilidad de la sala de cómputo y velocidad de la red.