Reabrimos la sección de problemas con un enfoque un poco diferente a lo que había sido anteriormente. En esta ocasión plantearemos un problema y daremos distintas soluciones, a lo largo de las cuales indicaremos claramente los teoremas y propiedades que sirven para resolverlo. Este tipo de técnicas son las que se están empezando a utilizar con los alumnos que se preparan para competir en las distintas Olimpiadas de Matemáticas.

Esperamos recibir comentarios de nuestros lectores, así como sus contribuciones, ya sea de propuestas de problemas únicamente o de problemas con su solución o soluciones, y también distintas soluciones a problemas propuestos.

El siguiente problema fue propuesto por México para la Olimpiada de la Cuenca del Pacífico, en 1992.

Problema

Sea ABC un triángulo con lados, a, b y c distintos, y tales que $a + b = 2c$. Demuestre que la recta que une al centro de gravedad de ABC con el incentro, es paralela a uno de los lados del triángulo ABC.

La primera propiedad que nos hará falta y que de hecho usamos en varias de las soluciones, es la siguiente:

(*) Si G es el centro de gravedad de ABC y M es el punto medio de AB, entonces $CG/MG = 2$.

Método 1: **Triángulos semejantes y proporciones**

Utilizaremos dos propiedades que enunciamos a continuación:

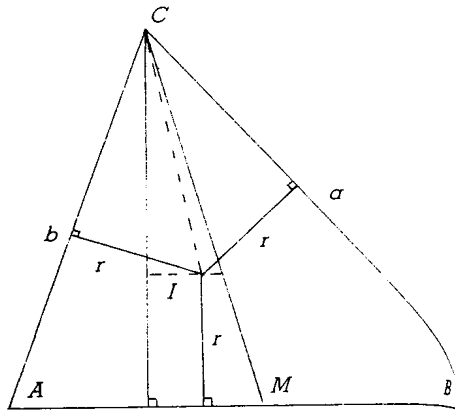
(*i*) El área de un triángulo es el producto de la longitud de la base por la de la altura, dividido esto entre 2.

(*ii*) Una recta paralela a uno de los lados corta a los otros dos lados proporcional y recíprocamente.

Carlos Bosch Giral

ITAM

Ahora ya estamos listos para empezar la prueba:



Sean r el radio del incírculo de ABC; H el pie de la altura por C; M el punto medio de AB; G el centro de gravedad, y denotemos por I al incentro de ABC. Por la propiedad (*) $CG/MG = 2$. Consideremos el triángulo CHM y la recta IG. Por (ii) basta probar que esta recta corta a CH en la proporción 2:1. Es decir, que $r = CH/3$. Apliquemos (i) a los triángulos ABC, ABI, BCI y CAI, respectivamente, y observemos que el área de ABC es la suma de las áreas de los otros tres triángulos. Así

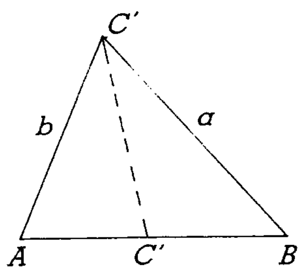
$$C \cdot CH/2 = ar/2 + br/2 + cr/2 = 3cr/2$$

ya que por hipótesis se tiene que $a + b = 2c$, de $CH = 3r$, o bien, $r = CH/3$, que es lo que queríamos demostrrar.

Observamos que la figura es un poco complicada pero que los medios que se usan en la demostración, son sumamente sencillos.

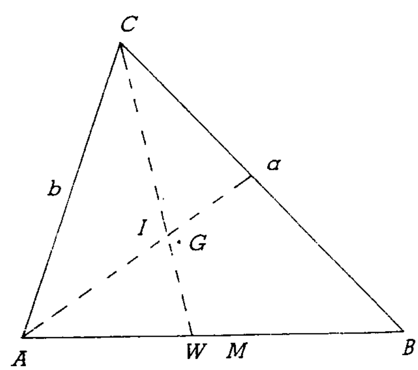
Método 2: **Teorema de la Bisectriz**

(*iii*) La bisectriz interior de un ángulo de un triángulo, divide al lado opuesto en la razón de los lados



$$b/a = AC'/C'B$$

Sea W la intersección de la bisectriz del ángulo ACB con el lado AB, y sea M el punto medio del segmento AB.

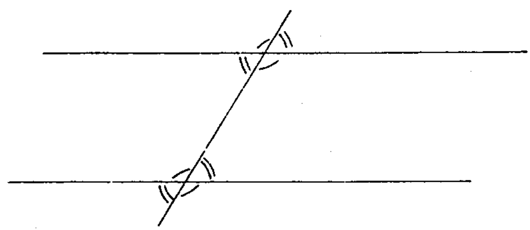


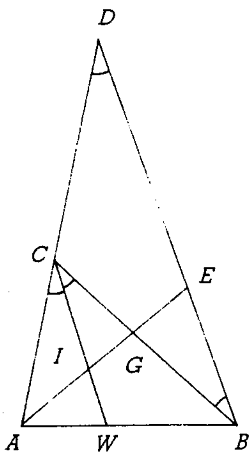
Por (iii) $b/a = AW/WB$, pero $a + b = 2c = 2AW + 2WB$, así que $(b/a)WB = AW$ y $a + b = 2WB \cdot b/a + 2WB = 2WB \cdot (b + a)/a$, de donde $WB = a/2$. Análogamente se obtiene que $AW = b/2$. Por (iii) en el triángulo AWC y en el ángulo CAW, del cual AI es bisectriz, se tiene $CI/IW = b/AW = b/b/2 = 2$.

Por (*ii*) y (*) aplicadas al triángulo CWM y a la recta IG, se tiene que IG es paralela a WM y por lo tanto a AB.

Método 3: **Rectas Paralelas**

(*iv*) Si una recta corta a dos paralelas, los ángulos correspondientes son iguales, y los ángulos alternos, internos o externos, son también iguales.





Sea CW la bisectriz del ángulo ABC. Sea D el punto de intersección de AC y la paralela a CW por B. Por (iv) $\angle\ CDB = WCB = \angle\ ACW = \frac{1}{2} \angle\ ACB$ y $\angle\ WBC = \angle\ CBD$. Así, el triángulo DBC es isóceles, y $CD = a = CB$. Denotemos por E a la intersección de AI con BD. Por (*iii*) $DE/EB = AD/AB = a + b/c = 2c/c = 2$.

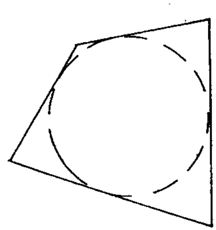
Además $CI/IW = CI/AI \cdot AI/WI = CI/AI : WI/AI$. Como CI es paralela a DE, los triángulos CAI y DAE son semejantes, y por ser paralelas IW y EB, los triángulos WAI y BAE son semejantes, así que se tiene $CI/AI = DE/AE$ y $WI/AI = BE/AE$, los cuales al sustituirlos en la ecuación anterior se obtiene:

$$CI/IW = DE/AE : BE/AE = DE/BE = 2$$

Esto es suficiente para establecer el resultado de manera similar a lo que se hizo en el Método 2.

Método 4: **Cuadriláteros con círculo inscrito**

(*v*) Un cuadrilátero $ABCD$ tiene un incírculo, y los lados son tangentes a uno y sólo un círculo si y sólo si $AB + CD = BC + DA$.



Por G y por el punto medio de CG, tracemos paralelas a AB, y sean A_1, A_2 las intersecciones en AC, y B_1, B_2 las intersecciones en BC. Por (*) se tiene $CG/GM = 2$, y por (ii) es fácil obtener $B_2B = 2a/3$, $A_2A = 2b/3$. Por la semejanza de ABC y A_2B_2C se tiene $A_2B_2 = C/3$ de donde obtenemos $A_2B_2 + AB = C/3 = 4c/3 = 2a/3 + 2b/3 = B_2B + A_2A$, por ser $a + b = 2c$. Por (v) ABB_2A_2 tiene un incírculo que coincide con el incírculo de ABC. Como AB, A_1B_1 y A_2B_2 son paralelos, y A_1B_1 equidista de AB y A_2B_2, el incentro I debe estar en A_1B_1, recta que también contiene a G.