ARTICULOS

Las ecuaciones diferenciales

I. INTRODUCCIÓN

La teoría de las ecuaciones diferenciales es una de las más amplias ramas de la matemática actual, y es también una de las que más se relaciona con las aplicaciones.

Al tratar de entender cualquier fenómeno físico —entendido éste como un evento bajo estudio que presente la variación de una variable respecto a otra u otras— la mente crea una idealización y la plasma en un modelo matemático, en donde tomando el aspecto central del fenómeno, estudia sus causas y lo describe en forma matemática; con frecuencia la expresión matemática, o ley emanada del estudio se expresa en forma de una ecuación diferencial.

El estudio de las propiedades de la ecuación obtenida permite sondear otras características, que no son tan evidentes, e incluso pueden predecirse hechos o fenómenos que de la observación no se obtienen; la historia de la ciencia está llena de casos de este tipo.

Así pues, el estudio de las ecuaciones diferenciales es de suma importancia para aquellos que por oficio o por propio interés quieren entender un fenómeno físico.

Podemos decir que una ecuación es una proposición abierta que establece que dos expresiones —en donde al menos una de ellas contiene una o más variables o incógnitas— son iguales.

Así es posible distinguir algunos tipos de ecuaciones: las algébraicas, las diferenciales, las integrodiferenciales, etc.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) son dos grandes grupos de ecuaciones diferenciales. La solución de una ecuación diferencial es una función o conjunto de funciones, y si la ecuación representaba un fenómeno físico, dicha solución representará el desarrollo del fenómeno en el tiempo y/o el espacio.

Es claro que si se quiere obtener buenos modelos de la naturaleza, es necesario desarrollar tres habilidades, a saber:

1. Observar un fenómeno físico, interpretarlo y plasmarlo en una ecuación diferencial o sistema de ecuaciones diferenciales.
2. Manejar y resolver la ecuación diferencial obtenida.
3. Conocer las limitaciones de las soluciones.

De estas tres habilidades la más simple de enseñar es la segunda, y aquí es donde el diagrama de flujo pretende incidir.

En carreras técnicas, como las ingenierías, se llevan uno o más cursos relacionados con las ecuaciones diferenciales, y tiempo después, cuando en cursos posteriores los estudiantes se enfrentan al problema de resolver una ecuación diferencial, se les dificulta la clasificación y, por lo tanto, la solución de la misma. Para tratar de facilitar el estudio y buen uso de las ecuaciones

Héctor René Vega C.,
Centro Regional de Estudios Nucleares de la Universidad Autónoma de Zacatecas

diferenciales se ha ideado un diagrama de flujo que permite, de manera relativamente fácil y rápida, clasificar y resolver la ecuación diferencial que esté describiendo su fenómeno físico.

II. CONCEPTOS BÁSICOS

Una *ecuación diferencial ordinaria* (EDO) es la que tiene una o varias derivadas o diferenciales ordinarias y ninguna de orden superior.

Una *ecuación diferencial parcial* (EDP) es la que tiene una o varias derivadas o diferenciales parciales.

El *orden* de una ED está definido por el orden de la derivada o el diferencial de más alto orden.

El *grado* de una ED está definido por el exponente que esté en la derivada o el diferencial de más alto orden.

El orden y el grado de una ED al ser definidos, se refieren a la derivada de más alto orden después de que la ecuación ha sido racionalizada.[1]

La solución de la ED o la incógnita a determinar, es una función que al sustituirla en la ED, la satisface.

Si se toma cualquier texto de EDs, para ciencias o ingeniería[2-7], se encontrará que en la mayoría de éstos las EDs de primer orden son abordadas mediante un conjunto de "recetas" aisladas que se aplican bajo ciertas circunstancias. Luego al pasar a las EDs de orden n, éstas se tratan, según cada autor, ya sea estudiando las de orden n desde el principio, o bien estudiando primero las EDs de segundo orden. Si en cursos posteriores el estudiante estudia las EDF, se genera una fuerte confusión en virtud de la gran cantidad de casos revisados.

Durante algunos semestres en la Escuela de Ingeniería, en la Maestría en Energéticos de la Facultad de Ciencias Químicas, así como con tesistas del Centro Regional de Estudios Nucleares en la Universidad Autónoma de Zacatecas, se puso a prueba el diagrama de flujo; los resultados que se obtuvieron fueron excelentes en virtud de que el diagrama permitió a los estudiantes ver a las ecuaciones diferenciales, no como un obstáculo sino como una herramienta muy poderosa en el estudio y comprensión de los fenómenos naturales.

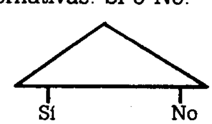
III. EL DIAGRAMA DE FLUJO

El diagrama de flujo[8] pretende establecer una ruta lógica para clasificar y resolver la mayoría de las EDs, o bien para indicar los posibles métodos analíticos de solución. En el caso de las EDP no se incluye la solución sino que sólo se indican los posibles métodos análiticos que pueden utilizarse; para las EDO se indica el método de solución. En el caso de la ecuación diferencial de *Bernoulli*, se incluyó en el diagrama la solución por separado para los casos en que el exponente es positivo y negativo. Esto se hizo debido a que en la mayoría de los textos sólo se maneja la solución del exponente positivo.

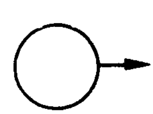
Para obtener mejores resultados se recomienda escribir el diagrama en una sola hoja para evitar un número muy grande bifurcaciones; la estructura abreviada del diagrama de flujo aparece en la Fig. 1, los detalles en las Figuras 2 al 7.

Para utilizar el diagrama de flujo es necesario entender el significado de los siguientes símbolos:

Este símbolo indica que lo que está en su interior se está preguntando, y sólo tiene dos alternativas: Sí o No.



Este símbolo indica que pasemos de donde nos encontremos en el diagrama, al número o literal que se encuentre en su interior.



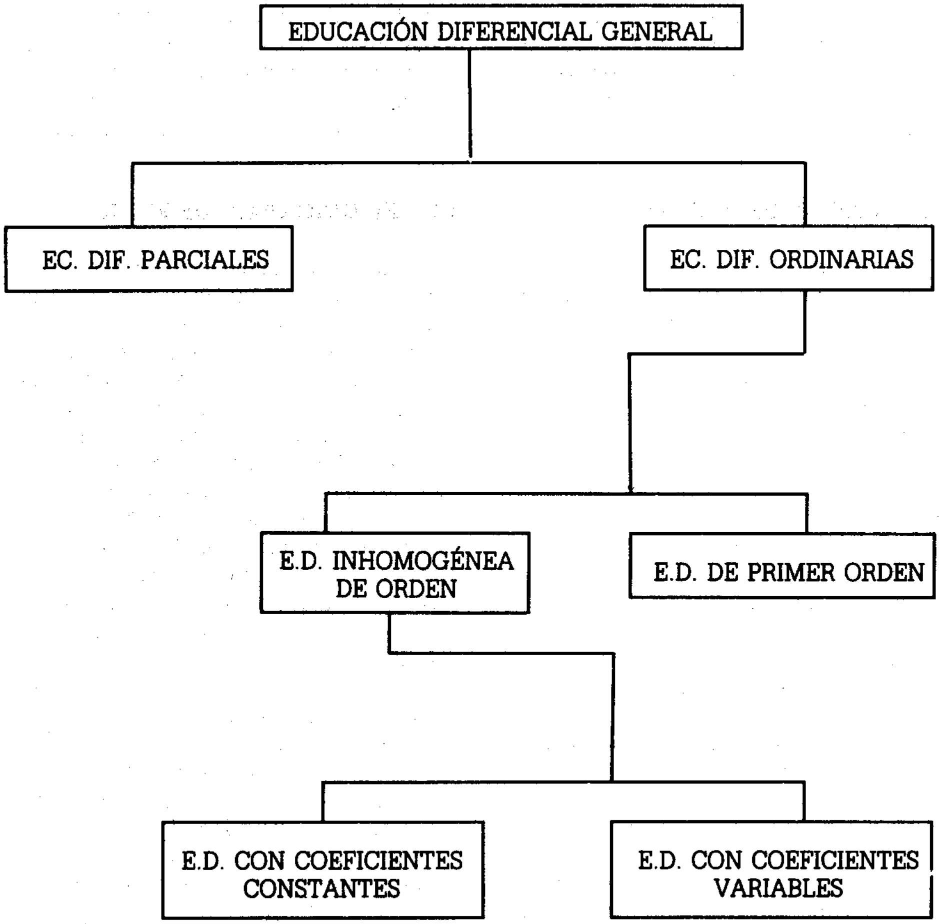
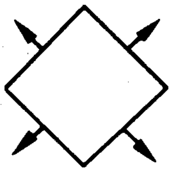
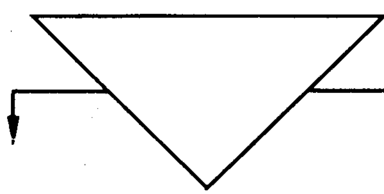


Figura 1

Este símbolo indica que lo que se encuentre en su interior se esta preguntando, y tiene cuatro opciones que se indican.



Este símbolo indica que lo que está en su interior se está preguntando y tiene sólo dos opciones a seguir que son indicadas.



Al inicio del diagrama se utiliza la literal griega delta con el fin de indicar la ecuación diferencial más general; es decir, en la δ están, en forma virtual, las derivadas o diferenciales parciales o las totales.

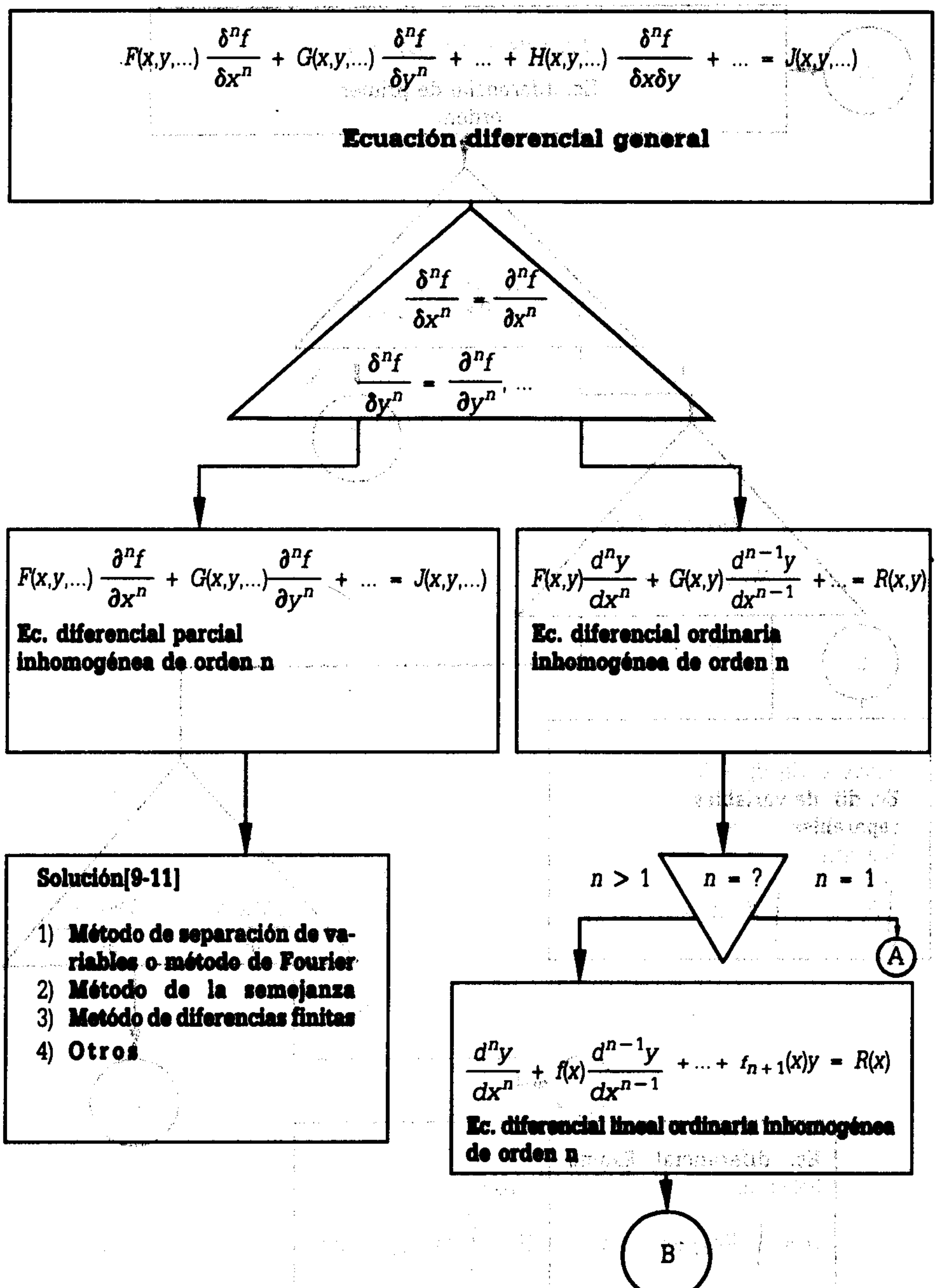

$F(x,y,...)\frac{\delta^n f}{\delta x^n} + G(x,y,...)\frac{\delta^n f}{\delta y^n} + ... + H(x,y,...)\frac{\delta^n f}{\delta x \delta y} + ... = J(x,y,...)$
Ecuación diferencial general
$\frac{\delta^n f}{\delta x^n} = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}$
$\frac{\delta^n f}{\delta y^n} = \frac{\partial^n f}{\partial y^n}, ...$
$F(x,y,...)\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + G(x,y,...)\frac{\partial^n f}{\partial y^n} + ... = J(x,y,...)$
Ec. diferencial parcial inhomogénea de orden n
$F(x,y)\frac{d^n y}{dx^n} + G(x,y)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... = R(x,y)$
Ec. diferencial ordinaria inhomogénea de orden n
Solución[9-11]
1) Método de separación de variables o método de Fourier
2) Método de la semejanza
3) Método de diferencias finitas
4) Otros
$n > 1$
$n = ?$
$n = 1$
A
$\frac{d^n y}{dx^n} + f(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + f_{n+1}(x)y = R(x)$
Ec. diferencial lineal ordinaria inhomogénea de orden n
B

Figura 2

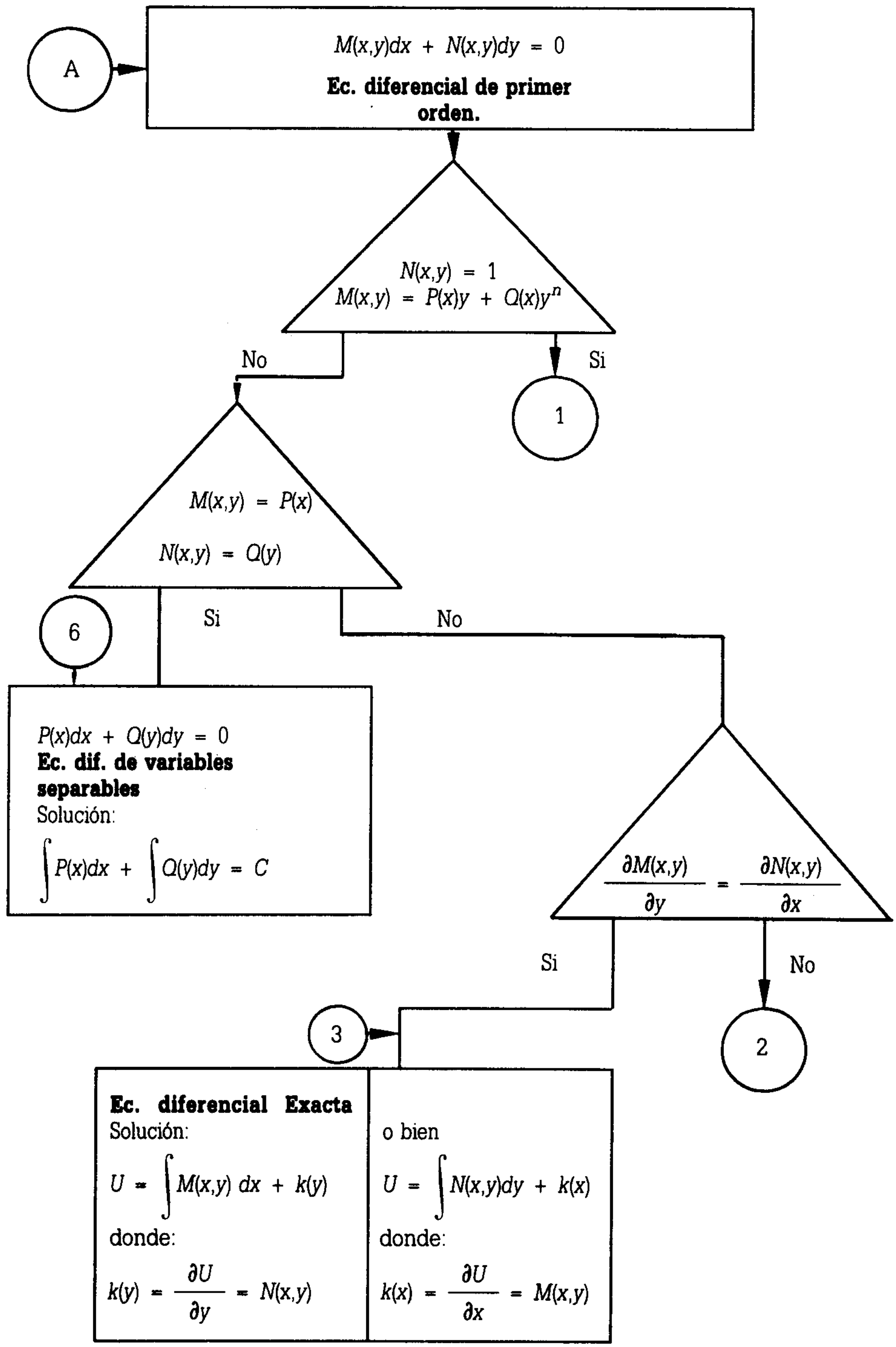

A
$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$
Ec. diferencial de primer orden.
$N(x,y) = 1$
$M(x,y) = P(x)y + Q(x)y^n$
No
Si
1
$M(x,y) = P(x)$
$N(x,y) = Q(y)$
6
Si
No
$P(x)dx + Q(y)dy = 0$
Ec. dif. de variables separables
Solución:
$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$
$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$
Si
No
3
2
Ec. diferencial Exacta
Solución:
$U = \int M(x,y)\,dx + k(y)$
donde:
$k(y) = \frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y)$
o bien
$U = \int N(x,y)dy + k(x)$
donde:
$k(x) = \frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y)$

Figura 3

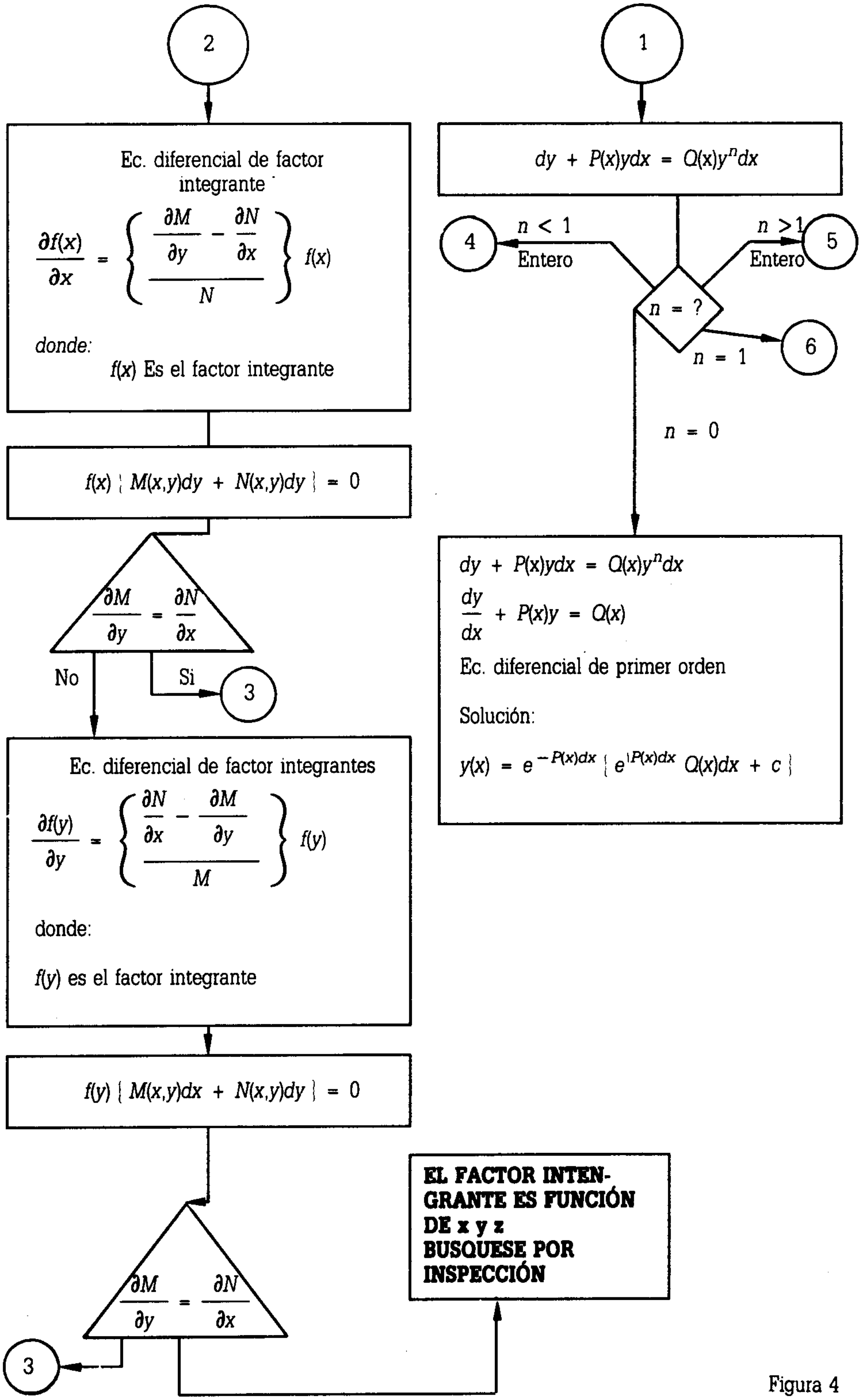

2
Ec. diferencial de factor integrante
$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left\{ \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \right\} f(x)$$
donde:
$f(x)$ Es el factor integrante
$f(x) \{ M(x,y)dy + N(x,y)dy \} = 0$
$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$
No
Si
3
Ec. diferencial de factor integrantes
$$\frac{\partial f(y)}{\partial y} = \left\{ \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \right\} f(y)$$
donde:
$f(y)$ es el factor integrante
$f(y) \{ M(x,y)dx + N(x,y)dy \} = 0$
$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$
3
EL FACTOR INTEN-GRANTE ES FUNCIÓN DE x y z BUSQUESE POR INSPECCIÓN
1
$dy + P(x)ydx = Q(x)y^n dx$
$n < 1$
Entero
4
$n > 1$
Entero
5
$n = ?$
$n = 1$
6
$n = 0$
$dy + P(x)ydx = Q(x)y^n dx$
$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$
Ec. diferencial de primer orden
Solución:
$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \{ \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + c \}$

Figura 4

5

$$dy + P(x)ydx = Q(x)y^{n}dx$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^{n}$$

Ec. dif. de Bernoulli

Solución:

$$\left[\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^{n}\right] (y^{-n})$$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \ldots (1)$$

Haciendo un cambio de variable

$$v = y^{1-n}$$

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo en (1)

$$\frac{1}{n-1}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$$

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$$

Si:

$$P_1(x) = (1-n)P(x)$$
$$Q_1(x) = (1-n)Q(x)$$

Entonces:

$$\frac{dv}{dx} + P_1(x)v = Q_1(x)$$

$$v(x) = e^{-\int P_1(x)dx}\left\{e^{\int P_1(x)dx}Q(x)dx + c\right\}$$

$$\therefore\ y(x) = [v(x)]^{1-n}$$

A

$$dy + P(x)ydx = Q(x)y^{-n}dx$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)^{-n}$$

Ec. dif. de Bernoulli

Solución:

$$\left[\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^{-n}\right] (y^{n})$$

$$y^{n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{n+1} = Q(x) \ldots (1)$$

Haciendo un cambio de variable

$$v = y^{n+1}$$

$$\frac{dv}{dx} = (n+1)y^{n}\frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo en (1)

$$\frac{1}{n+1}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$$

$$\frac{dv}{dx} + (n+1)P(x)v = (n+1)P(x)$$

Si:

$$P_1(x) = (n+1)P(x)$$
$$Q_1(x) = (n+1)Q(x)$$

Entonces:

$$\frac{dv}{dx} + P_1(x)v = Q(x)$$

$$v(x) = e^{-\int P_1(x)dx}\left\{e^{\int P_1(x)dx}Q_1(x)dx + c\right\}$$

$$\therefore\ y(x) = [v(x)]^{n+1}$$

Figura 5

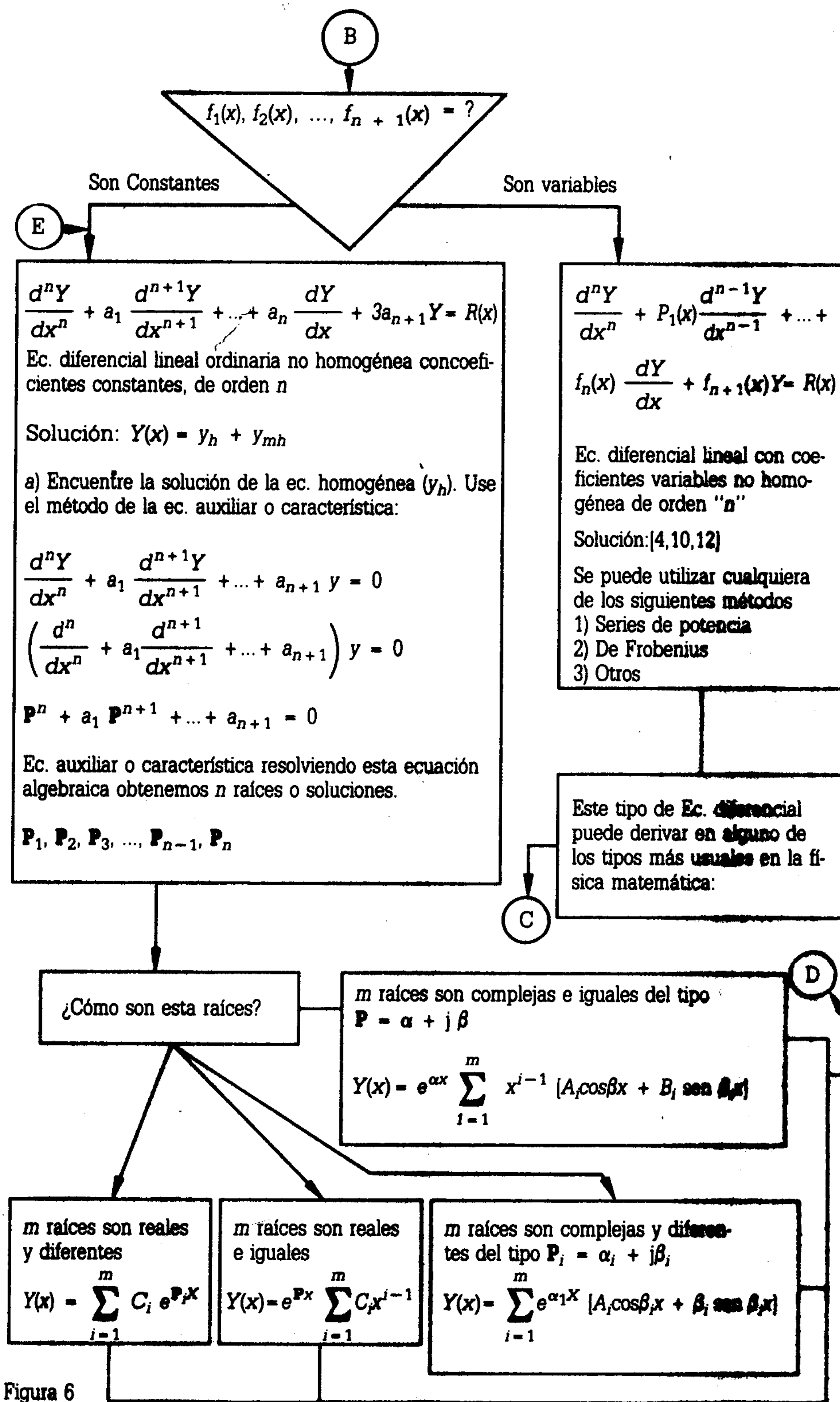

B
$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{n+1}(x) = ?$
Son Constantes
Son variables
E
$\frac{d^nY}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n+1}Y}{dx^{n+1}} + \ldots + a_n \frac{dY}{dx} + 3a_{n+1}Y = R(x)$
Ec. diferencial lineal ordinaria no homogénea concoeficientes constantes, de orden n
Solución: $Y(x) = y_h + y_{mh}$
a) Encuentre la solución de la ec. homogénea (y_h). Use el método de la ec. auxiliar o característica:
$\frac{d^nY}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n+1}Y}{dx^{n+1}} + \ldots + a_{n+1} y = 0$
$\left(\frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} + \ldots + a_{n+1}\right) y = 0$
$P^n + a_1 P^{n+1} + \ldots + a_{n+1} = 0$
Ec. auxiliar o característica resolviendo esta ecuación algebraica obtenemos n raíces o soluciones.
$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}, P_n$
$\frac{d^nY}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}Y}{dx^{n-1}} + \ldots + f_n(x) \frac{dY}{dx} + f_{n+1}(x)Y = R(x)$
Ec. diferencial lineal con coeficientes variables no homogénea de orden "n"
Solución:[4,10,12]
Se puede utilizar cualquiera de los siguientes métodos
1) Series de potencia
2) De Frobenius
3) Otros
Este tipo de Ec. diferencial puede derivar en alguno de los tipos más usuales en la física matemática:
C
¿Cómo son esta raíces?
m raíces son complejas e iguales del tipo $P = \alpha + j\beta$
$Y(x) = e^{\alpha x} \sum_{i=1}^{m} x^{i-1} [A_i \cos\beta x + B_i \operatorname{sen} \beta_i x]$
D
m raíces son reales y diferentes
$Y(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i e^{P_i X}$
m raíces son reales e iguales
$Y(x) = e^{Px} \sum_{i=1}^{m} C_i x^{i-1}$
m raíces son complejas y diferentes del tipo $P_i = \alpha_i + j\beta_i$
$Y(x) = \sum_{i=1}^{m} e^{\alpha_1 X} [A_i \cos\beta_i x + \beta_i \operatorname{sen} \beta_i x]$

Figura 6

D

b) ENCUENTRE LA SOLUCIÓN DE LA INHOMOGÉNEA *(y_{inh}) USANDO CUALQUIERA DE LOS MÉTODOS SIGUIENTES[2,3 y 12]*

i) Coeficientes indeterminados
ii) Operador inverso
iii) Variación de parámetros

C

Ec. DIFERENCIAL DE BESSEL — *SOLUCIÓN*

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (\lambda^2 n^2 - n^2)y = 0 \qquad Y(x) = C_1 J_n(\lambda x) + C_2 Y_n(\lambda x)$$

EC. DIFERENCIAL DE LEGENDRE — SOLUCIÓN

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \qquad Y(x) = C_1\, P_n(x) + C_2\, Q_n(x)$$

EC. DIFERENCIAL DE CAUCHY O DE EULER

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + by = S(x)$$

Solución:
Haciendo un cambio de variable $x = e^t$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = S(e^t)$$

E

Figura 7

IV. CONCLUSIONES

El diagrama de flujo no debe interpretarse como un sustituto del esfuerzo de entender el rigor matemático que estructura a la teoría de las ecuaciones diferenciales, sino como un instrumento auxiliar para inducir al raciocinio a seguir una ruta en la clasificación y solución de las EDs, así como también para tener un panorama general de las técnicas analíticas de solución de las ecuaciones diferenciales.

REFERENCIAS

1. Mathews J. and Walker R.L., Mathematical methods of physics, (*second edition, 1970*), The Benjamin Cummings. pag. 1.
2. Sokolnikoff, I.S. and Sokolnikoff, E. S., Higher mathematics for Engineers and Physicists, (1941) McGraw-Hill.
3. Ross, S.L., Introducción a las Ecuaciones Diferenciales, (1982) Interamericana.
4. Myskis, A.D., Introductory Mathematics for Engineers, (1966) Mir.
5. Mylie. C. R., Matemáticas Superiores para ingeniería, (1982) McGraw-Hill.
6. Kells, L.M., Ecuaciones Diferenciales Elementales, (1970) McGraw-Hill.
7. Spiegel. M.R., Ecuaciones Diferenciales Aplicadas, (1983) Prentice Hall Int.
8. Vega C., H.R., Revisión de las Ecuaciones Diferenciales, VÉRTICE, N° 6. (Febrero - 1985), pp. 28-30.
9. Tijonov A. y Samarsky A., Ecuaciones de la Física Matemática (Segunda edición 1980) Mir.
10. Butkov E., Mathematical Physics, (1983) Addison Wesley.
11. Hildebrand F.B., Advanced Calculus for Applications, (1976) Prentice Hall.
12. Kaplan W., Ordinary Differential Ecuations, (1967) Addison Wesley.