PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Problemas de la XXIX Olimpiada Internacional de Matemáticas

Esta sección está dedicada a problemas y sus soluciones. Queremos invitar a todos nuestros lectores para que envíen problemas con su solución o que propongan soluciones originales e ingeniosas a los problemas que aquí se formulen. Empezaremos esta sección con los problemas que se plantearon en la XXIX Olimpiada Internacional de Matemáticas, los cuales están dirigidos a estudiantes preuniversitarios de menos de veinte años. Se les dio un tiempo de cuatro horas y media en cada sesión. Las sesiones se llevaron a cabo los días 9 a 21 de julio de 1988 en Canbe-

Educación Matemática

Se publica en los meses de abril, agosto y diciembre.
Vol. 1 • No. 1 • Abril, 1989 • Tiraje: 7000 ejemplares

Suscripción
anual, incluidos gastos de envío, en México: MN$ 25,000. Otros países: US$ 17.00.
Envíe cheque, giro postal o bancario a

Grupo Editorial Iberoamérica

Río Ganges No. 64 - Col. Cuauhtémoc - Apdo. Postal 5-076
Tels. 5112517, 5530798 - Fax 5352009 - 06500 México, D.F.

Publicidad
Deborah Stockdale - Tel. 2087681

Envíe sus colaboraciones a la Redacción, en la misma dirección y/o apartado. Las opiniones expresadas en los artículos son responsabilidad de sus autores.

ISSN 0187-8298 - Impresa en México
Revisión General: Francisco Paniagua Bocanegra
Diseño y Producción: Publicaciones Mundonuevo, S.A. de C.V. (Tel. 7032931)
Impresión: Tipográfica Barsa, S.A. (Pino 343 Loc. 71-72, Tel. 5410454)

rra, Australia. En la sección Notas y Noticias de este número se encuentra un informe sobre la Olimpiada de Matemáticas en México y la XXIX Olimpiada Internacional.

Problemas del primer día

Canberra, 15 de julio de 1988

1. Se consideran dos circunferencias concéntricas y coplanares de radios R y r ($R > r$). Sea P un punto fijo de la circunferencia menor y B un punto variable de la circunferencia mayor. La recta BP vuelve a cortar a la circunferencia mayor en el punto C. La perpendicular l a BP por P vuelve a cortar a la circunferencia menor en el punto A (si l es tangente a la circunferencia en P, entonces $A = P$).

i. Determine el conjunto de valores de $BC^2 + CA^2 + AB^2$.

ii. Determine el lugar geométrico descrito por el punto medio de AB.

2. Sea n un número entero estrictamente positivo. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ subconjuntos de un conjunto B tales que

a. cada A_i tiene exactamente $2n$ elementos.

b. para todo (i, j), $1 \leq i < j \leq 2n + 1$, $A_i \cap A_j$ contiene uno y sólo un elemento.

c. cada elemento de B pertenece al menos a dos de los conjuntos A_i.

Determinar para qué valores de n se puede asignar a cada uno de los elementos de B uno de los números 0 o 1, de tal manera que cada uno de los conjuntos A_i tenga exactamente n elementos a los cuales se ha asignado 0.

Carlos Bosch Giral
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional
Autónoma de México
(UNAM)
México, D.F., México

3. Sea f la función cuyo dominio es el conjunto de los enteros estrictamente positivos definida por

$$\begin{aligned} f(1) &= 1,\ f(3) = 3, \\ f(2n) &= f(n), \\ f(4n+1) &= 2f(2n+1) - f(n), \\ f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n), \end{aligned}$$

para todo n.

Determine el número de enteros estrictamente positivos n, menores o iguales que 1988, tales que $f(n) = n$.

Tiempo: 4.5 horas
Cada problema vale 7 puntos.

Problemas del segundo día

Canberra, 16 de julio de 1988

4. Demuestre que el conjunto de los números reales x que satisfacen

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

es unión de intervalos disjuntos cuyas longitudes suman 1988.

5. En el triángulo ABC, sea D el pie de la altura correspondiente a la hipotenusa BC. Sean K y L los puntos de intersección de la recta determinada por los incentros de los triángulos ABD y ACD con los lados AB y AC, respectivamente. Las áreas de los triángulos ABC y AKL se denotan por S y T, respectivamente. Demuestre que $S \geq 2T$.

6. Sean a y b números enteros estrictamente positivos tales que $ab + 1$ divide a $a^2 + b^2$. Demuestre que $\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ es un cuadrado perfecto.

Tiempo: 4.5 horas
Cada problema vale 7 puntos.