Problemas

En espera de sus problemas y soluciones publicamos los problemas que sirvieron para examinar a los participantes en el Concurso Nacional de la 2a. Olimpiada de Matemáticas. Ésta se llevó a cabo en Hermosillo, Son. y constó de dos sesiones, una el martes 22 de noviembre y la otra el miércoles 23 de noviembre de 1988.

2a. OLIMPIADA DE MATEMÁTICAS CONCURSO NACIONAL

Primera Fase: 22 de Noviembre de 1988

Problemas

1. ¿De cuántas formas se pueden acomodar en línea recta siete pelotas blancas y cinco negras, de tal manera que no estén dos pelotas negras juntas?
2. Si a y b son enteros positivos, pruebe que 19 divide a $11a + 2b$ si y sólo si 19 divide a $18a + 5b$.
3. Considere dos circunferencias tangentes exteriormente y de radios distintos; sus tangentes comunes forman un triángulo. Calcule el área de dicho triángulo en términos de los radios de las circunferencias.
4. ¿De cuántas formas se pueden escoger ocho enteros $a_1, a_1, \ldots a_8$ no necesariamente distintos, tales que $1 \leq a_2 \leq a_2 \leq \ldots \leq 8$?

Duración: 4 horas y media.

2a. OLIMPIADA DE MATEMÁTICAS CONCURSO NACIONAL

Segunda Fase: 23 de Noviembre de 1988

Problemas

1. Si a y b son enteros positivos primos relativos y n es un entero, pruebe que el máximo común divisor de $a^2 + b^2 - nab$ y $a + b$ divide a $n + 2$.
2. Considere dos puntos fijos B y C de una circunferencia c. Encuentre el lugar geométrico de las intersecciones de las bisectrices de los triángulos ABC, cuando A es un punto que recorre c.
3. Si A y B son subconjuntos ajenos del conjunto $\{1, 2, \ldots m-1, m\}$ y la suma de los elementos de A es igual a la suma de los elementos de B, pruebe que el número de elementos de A y también de B es menor que $\frac{1}{\sqrt{2}} m$.
4. Calcule el volumen del octaedro que circunscribe a una esfera de radio igual a 1.

Duración: 4 horas y media.

El siguiente problema ha sido enviado por Juan Llanos Ramírez.

Encontrar para cada n el número de puntos que hay en el plano cartesiano con coordenadas enteras (x, y) tales que $|x| \leq n$, $|y| \leq n$.

Favor de mandar sus soluciones a:
Educación Matemática
Sección Problemas
Apartado Postal 5-076
México 06500, D.F.