Reseñas bibliográficas

A survey of minimal surfaces, **Robert OSSERMAN.** *Dover 1986. 203 págs.*

Reedición del libro publicado en 1969, que es a su vez una traducción de un artículo publicado originalmente en ruso. Es una introducción muy accesible a un tema muy interesante en geometría diferencial. El tema ha aportado aplicaciones muy importantes recientemente, sobre todo a topología. En esta nueva edición se ha actualizado la bibliografía y se ha añadido un apéndice en el que se explican los logros en el área desde 1970 a 1986. Se recomienda a quien haya llevado un curso introductorio de Geometría diferencial.

Ricardo Vila Freyer
Centro de Investigaciones Matemáticas (CINVESTAV)
Guanajuato, México

Modern Geometry: Methods and Applications, **M. DUBROVIN, A. FOMENKO y S. NOVIKOV.** *Springer Verlag: GTM Nos. 93 y 104, 404, 430 págs.*

También fue publicado por MIR en francés, y sería muy deseable que se distribuyera en México la versión francesa.

Ambos volúmenes son una recopilación excelente de geometría Riemanniana, cálculo de variaciones y aplicaciones a física y topología. Contiene numerosos ejemplos, especialmente tomados de física, por lo que se recomienda para personas con intereses en física y aplicaciones. El primer volumen cubre geometría de curvas y superficies, cálculo tensorial y cálculo de variaciones; y es una excelente referencia en estas áreas. El segundo volumen es un compendio de variedades diferenciales, teoría de conexiones, haces principales, aplicaciones a topología, una introducción a sistemas dinámicos, y problemas variacionales en varias dimensiones, incluyendo ecuaciones de Yang-Mills. Ambos volúmenes son un compendio enciclopédico muy bien elaborado. Se promete un tercer volumen en inglés, que cubre homología y cohomología en variedades. No se sabe si existe la traducción al francés de este tercer volumen.

El fracaso de la Matemática Moderna —*Por qué Juanito no sabe sumar.* **Morris KLINE.** *SIGLO XXI EDITORES, S.A. 12ª Edición, México, 198, 195 pp.*

Título original: Why Johny can't add: the Failure of the New Math. N. York 1973, Sn Martin's Press.

La "búsqueda de la formalización", que marcó en gran medida el quehacer matemático de finales del siglo XIX y principios del XX, tuvo un papel determinante en las reformas educativas que se gestaron en todo el mundo en los años 50. Morris Kline, en el libro que nos ocupa, analiza cómo la tendencia formalista predominante ha determinado, en gran parte, el enfoque y contenido de los planes de estudio de matemáticas en los niveles elemental, medio y medio superior, conformando lo que se conoce como "matemática moderna" o "nueva matemática", y cómo este punto de vista rigorista no solamente no ha solucionado los antiguos problemas inherentes al plan tradicional, sino que ha dado lugar a nuevas dificultades en el campo de la enseñanza.

El autor empieza su análisis con una crítica al plan de estudios tradicional que lo llevará a concluir la necesidad de una reforma en los métodos y contenidos de la enseñanza matemática. Los defectos que marca en el antiguo plan de estudios son los siguientes:

- Se fuerza al alumno a memorizar antes de comprender. A través de gran cantidad de ejercicios se logra memorizar un procedimiento.
- Se presentan los procedimientos desconectados entre sí. Para el alumno representan temas aislados.
- Tiene un cambio repentino del tratamiento del álgebra (mecánica) al de la geometría (deductiva).

- Se tratan temas que han perdido actualidad.
- Tiene defectos lógicos que surgen al no especificar la clase de números que se manejan en determinado nivel.
- Los libros de texto son obscuros, pobremente escritos y concebidos con fines comerciales.

Pero principalmente Morris Kline señala como el más grave defecto del plan tradicional la falta de motivación, ya que el estudiante nunca ve la necesidad real de estudiar matemáticas. Se ofrecen razonamientos acerca de la utilidad del estudio de las matemáticas que lo único que provocan es falta de motivación.

- "Son temas que pueden necesitarse en años sucesivos", no obstante las aplicaciones que se podrían ofrecer, en el momento de su estudio, no tienen ningún interés para los jóvenes.
- "Son requisitos para la siguiente escuela". Esto en muchos casos provoca un cambio de carrera.
- "Son entrenamiento mental". Pero podría pensarse en otros procedimientos más agradables para lograr el mismo fin.
- "La asignatura es bella". Sin embargo los estudiantes no pueden apreciar algo que no conocen.
- "Presenta un estímulo intelectual". Son pocos los que pueden apreciarlo, los más sufrirán desconcierto y confusión.
- Se aprende resolviendo problemas", pero la mayoría de éstos son inútiles, irreales y rebuscados, por lo que no convencen a nadie.

En suma el autor sostiene que toda esta "motivación" resulta negativa y el alumno estudia matemáticas por obligación.

Los argumentos anteriores, evidenciados por el bajo nivel académico, la aversión hacia la asignatura, así como las dificultades en la comprensión de la misma, hicieron inevitable una revisión de los planes de estudio de matemáticas. La reforma debía abarcar tanto la metodología como el contenido, remediando los defectos anteriormente descritos, del plan tradicional.

La tendencia general de los grupos abocados al estudio de este problema, estuvo dirigido a presentar las Matemáticas en una forma rigurosamente acabada, con base en el método axiomático deductivo predominante en la mayoría de las universidades actuales.

Morris Kline critica esta posición excesivamente rigorista presentando los siguientes argumentos en contra de la enseñanza deductiva de los diversos temas de Matemáticas:

- A través de la historia se observa que las bases del conocimiento han sido empíricas; los egipcios y babilonios no desarrollaron la demostración deductiva; los primeros que lo hicieron fueron los griegos, siendo su aportación máxima los Elementos de Euclides que, a pesar de considerarse el prototipo del sistema deductivo, tiene argumentos intuitivos, definiciones injustificadas y demostraciones inadecuadas. Además es el resultado de más de 300 años (desde Tales hasta Euclides) de titubeos y exploraciones.
- En el desarrollo del cálculo, antes de crearse la estructura deductiva, se había trabajado con los conceptos, temas y aplicaciones de una manera intuitiva con argumentos físicos, dibujos y generalizaciones.
- La historia muestra que la lógica ha aparecido siempre después de la creación y de la experimentación.
- La teoría historicista pregona que el individuo debe pasar por todas las experiencias que ha tenido la raza en su desarrollo, en forma rápida pero sin omitir alguna. Esto implica que al estudiante se le debe iniciar con temas sencillos llevándolo lentamente hacia temas complejos y finalmente hacia las formulaciones abstractas. Los fundamentos lógicos, en todas las épocas han sido difíciles de captar.
- La organización lógica apareció con posterioridad y como medio para justificar las propiedades que se establecieron con el uso y las aplicaciones.
- Cuando las demostraciones llegan al alumno ya pulidas y simplificadas, no dan una idea del desarrollo natural que se siguió, por lo que no pueden ser captadas y deben ser aprendidas de memoria.
- El hecho de que un estudiante deba justificar cada paso y citar los axiomas en que se apoya, hace muy lento el desarrollo de operaciones que podrían hacerse casi sin pensar en ellas.
- El poder introducir axiomas libremente produce confusión en los alumnos.
- Los descubrimientos en matemáticas no se deben a la lógica deductiva; interviene la imaginación, la intuición, la experimentación, el tanteo y las analogías; el papel de la lógica aquí es secundario.
- Las estructuras lógicas pueden ayudar a pensar deductivamente, pero no son útiles para solucionar problemas de la vida diaria.

Aunque estos argumentos parecen ser contundentes, el autor asegura que las demostraciones deductivas no se deben rechazar, sino usarlas con moderación y a su tiempo.

En cuanto al rigor, Kline afirma que éste no sólo es necesario sino que, por el contrario, entorpece la comprensión y el aprendizaje, y apoya sus aseveraciones con los siguientes argumentos:

- El rigor depende de la época; las exigencias de rigor están cambiando constantemente y crecen en complejidad.
- El estudiante que se está iniciando en el conocimiento de la Matemática no advierte la falta de rigor en muchos axiomas y teoremas que le parecen evidentes, por tanto sentirá inútiles todos los detalles rigurosos que se pretenden demostrar.
- Exagerar el rigor tiene como consecuencia que los rasgos principales de un tema se obscurezcan en medio de los detalles.
- Al igual que el razonamiento deductivo, el rigor juega un papel importante en el desarrollo de las matemáticas, afirmando sus estructuras lógicas; pero esta afirmación no tiene sentido para quien no tiene conocimientos profundos de la materia.
- No hay razón para pensar que lo que fue intuitivamente aceptable para los grandes matemáticos de la antigüedad, no lo sea para los estudiantes de la actualidad.
- Algunas veces lo menos evidente se usa para demostrar lo más evidente.

El lenguaje matemático fue otro de los puntos que sufrieron modificación al reformar el plan de estudios tradicional ya que, en opinión de los reformadores, la ambigüedad e imprecisión de la matemática tradicional constituía un obstáculo para su comprensión. Sin embargo, en la opinión de Morris Kline, el lenguaje simbólico, preciso de la Matemática moderna tiene grandes defectos:

- El perfeccionamiento del lenguaje lleva a introducir nuevas palabras que aún no se comprenden bien y que sólo causan confusión.
- De lo anterior surgió la necesidad de definir claramente cada uno de los términos usados, lo que llevó a crear una gran cantidad de términos abstractos que deben ser memorizados.
- El abuso de la simbología crea confusión y hace más difícil al alumno la lectura y comprensión de un tema, ya que debe memorizar el significado y en cada caso traducir el símbolo.
- Aparentemente se ha usado la simbología para ocultar la pobreza de ideas y dar apariencia de profundidad a cosas simples.

De la misma manera, como el autor señala, que el más grave defecto del plan tradicional es el de la falta de motivación, así afirma que esta falla subsiste en el nuevo plan, agravado con el divorcio tácito de la Matemática respecto de la Naturaleza. Se pretende convencer al estudiante que la Matemática se debe estudiar por ella misma, ocultando sus conexiones vitales con otras ramas del conocimiento. De esta manera, al quedar aislada, la Matemática se vuelve inútil y carente de atractivo. Se repiten de nuevo los argumentos de motivación del plan tradicional llegándose, como antes, a los mismos resultados negativos.

Además de los cambios metodológicos ya señalados, la nueva matemática supone una reforma profunda en cuanto al contenido, argumentando la falta de actualidad de los temas estudiados en el plan tradicional. Sin embargo, en la opinión del autor, este contenido ha prevalecido casi sin modificación, agregándose solamente algunos temas que carecen de la importancia que se les ha pretendido dar, cuando menos a este nivel del conocimiento.

Así, uno de los temas principales del nuevo contenido es el de la Teoría de Conjuntos, introducido con la justificación de que son conceptos básicos en Matemáticas y de que unifica varias ramas de ellas. Sin embargo, aunque constituye un fundamento lógico, su estudio no ayuda a comprender la matemática elemental ni a trabajar en ella, causando confusión en temas que son más fáciles de comprender intuitivamente.

Otro de los nuevos temas que se tratan en el plan reformado es el de los sistemas de numeración en distintas bases, argumentando que esto ayuda a la comprensión de la base diez y de los algoritmos de las operaciones aritméticas. Esto, sin embargo, parece crear problemas pedagógicos difíciles de resolver, algo semejante según el autor a los problemas causados cuando se pretende estudiar dos idiomas diferentes simultáneamente.

Por otro lado, las aplicaciones de este tema a la computación resultan de poco interés y significación para los niños de primaria.

La congruencia, otro de los temas introducidos, no tiene aplicaciones a nivel elemental y se enseña sólo como una novedad matemática. Lo mismo sucede con las desigualdades y el álgebra de Boole que no tienen aplicaciones inmediatas en los niveles elemental y medio.

La lógica simbólica se ha agregado al plan de estudios para enseñar a razonar. Sin embargo, esto es falso, ya que los símbolos y tablas de verdad se construyen a consecuencia de un razonamiento intuitivo y no al contrario. La lógica simbólica se debe dejar a los especialistas como una expresión compacta del pensamiento real.

El nuevo plan pretende lograr una introducción al álgebra abstracta mediante el manejo de las matrices, pero el hacer esto sin ninguna finalidad para el alumno se convierte en una materia mecánica, tan criticable como las que se le achacan al plan tradicional.

El estudio de grupos y campos presupone enfrentar al estudiante a abstracciones que están por encima de su nivel de madurez. Por lo tanto, es igualmente negativo intentar introducir al estudiante de bachillerato al álgebra abstracta por este camino.

La opinión general de Morris Kline es que en el nuevo plan "se subrayan sofisticadas versiones finales de ideas simples, mientras que se tratan superficialmente las ideas más profundas, lo que conduce necesariamente al dogmatismo" y al aprendizaje mecánico de nuevas rutinas "mucho más inútiles que las rutinas tradicionales".

Los defensores de la nueva Matemática pretenden acumular evidencias a su favor en los exámenes practicados a grupos experimentales, que han sido enseñados según este nuevo enfoque. Sin embargo, Morris Kline señala cómo los exámenes nunca han sido un instrumento de medición confiable, en los resultados obtenidos en este caso, no se pueden apreciar diferencias significativas que permitan establecer las ventajas de uno u otro plan. Además, esta evaluación resulta ser muy complicada, puesto que es difícil saber quién ha estudiado matemáticas modernas, ya que muchos cursos que pretenden ser modernos son realmente mezclas de las matemáticas moderna y tradicional.

A pesar del rechazo que ha producido el nuevo plan en muchos sectores, se ha visto favorecido y promocionado por un gran núcleo de escuelas y profesores. Morris Kline explica este fenómeno argumentando que los matemáticos de los últimos cien años se han separado radicalmente de las Ciencias Naturales, y la mayoría de ellos no se preocupa de las aplicaciones, de forma que la Matemática se ha cerrado en sí misma, se ha vuelto más abstracta y se concibe como algo independiente del mundo físico. En la educación claramente se reflejan estas ideas y la enseñanza ha descuidado, y hasta despreciado, las aplicaciones que se refieren a la realidad y al mundo físico.

El plan de matemática moderna fue formulado por matemáticos que se dedican a las abstracciones, reconocidos por sus conocimientos y prácticas en la investigación, pero no por su habilidad pedagógica. Estos hombres no comprenden los objetivos de las escuelas primaria y secundaria, ni conocen los intereses y capacidades de los estudiantes de estos niveles, y por lo tanto, el enfoque que le dieron al nuevo plan carece de los elementos pedagógicos más elementales.

Para concluir su análisis de la reforma educativa en matemáticas, Morris Kline señala cuál es la dirección más conveniente para esta finalidad. Los puntos básicos de su tesis son los siguientes en cuanto a la metodología.

- Se deben conocer claramente cuáles son los objetivos o fines de estas fases de la educación.
- La educación a estos niveles debe ser más amplia que profunda.
- Debe resaltarse el lugar de las Matemáticas como una parte del total del conocimiento, subrayando su relación con otros intereses humanos.
- Sería deseable combinar la enseñanza de la Matemática y la Ciencia.
- Se debe justificar la introducción de cada tema. La motivación natural es el estudio de temas reales, en gran parte físicos. Junto con cada nuevo concepto se debe explicar el motivo de su interés.
- El profesor debe ser el primero en conocer por qué es importante lo que enseña para poder explicarlo a sus alumnos.
- El problema de la traducción de información verbal a la forma matemática queda resuelto cuando las matemáticas surgen de problemas reales.
- Las matemáticas deben desarrollarse contructivamente y no deductivamente, permitiendo al estudiante pensar de modo intuitivo y adquirir confianza en su propia capacidad.
- No se debe ocultar a los estudiantes la existencia de tanteos y esfuerzos infructuosos, ya que se corre el riesgo de hacer creer que los matemáticos razonan directa o indefectiblemente hacia sus conclusiones.
- El principio genético puede ser una enorme ayuda para desarróllar las matemáticas constructivamente.
- El planteamiento básico de cualquier nueva materia a cualquier nivel debe ser intuitivo.
- Las matemáticas se comprenden a través de los sentidos, por tanto hay que usar el dibujo como un recurso didáctico importante.

- El razonamiento por analogía puede emplearse con gran utilidad.
- Se puede facilitar la intuición mediante argumentos físicos.
- La intuición puede inducir a error, pero cometer errores y aprender a controlar los propios resultados es parte del proceso de aprendizaje.
- Después de que el estudiante conoce a fondo un resultado y comprende que un argumento es admisible, el profesor puede plantear una demostración deductiva.
- El nivel de rigor en una demostración debe adecuarse al nivel de desarrollo del estudiante.
- Se debe desarrollar la capacidad del estudiante para pensar críticamente.
- En lugar de conceptos abstractos se deben presentar ejemplos concretos, mientras sea posible.
- Se deben usar palabras comunes, preferiblemente las que son familiares al estudiante. La terminología especial debe reducirse al mínimo.

En cuanto al contenido, Morris Kline sugiere los siguientes puntos:

- En el momento de determinar el contenido de las enseñanzas primaria y secundaria debe tener prioridad la necesidad de motivar a los alumnos.
- Por lo anterior, sólo se deben incluir aquellos temas cuyo interés y significado se puede justificar.
- Dada la naturaleza secuencial de las matemáticas, se deben incluir los temas que normalmente se enseñan a varios niveles.

Sin embargo, en opinión del autor, no es suficiente modificar los planes de estudio ya que el problema más grave es la educación de los profesores. De hecho, la formación de buenos docentes es mucho más importante que el plan de estudios, ya que un buen profesor supera las deficiencias de cualquier plan.

De acuerdo con Kline, el profesor de matemáticas debe poseer amplitud de juicio en las diversas áreas en las que la Matemática ha influenciado, además de ser educadores; esto es, deben saber qué demostraciones y abstracciones pueden manejar los alumnos así como qué es lo que más les interesa.

Por estas razones, debe ser función primordial de las universidades formar buenos profesores de matemáticas para las enseñanzas primaria y secundaria.

Hay que mencionar que Kline no pone en tela de juicio la tendencia formalista de la matemática actual, aunque es indudable su preferencia por una matemática menos abstracta; su crítica se dirige, por una parte, hacia la enseñanza de un método deductivo riguroso en los niveles elementales, en detrimento de las nociones intuitivas.

Y por la otra a la forma en que muchos profesores han interpretado el contenido de los nuevos planes que, cabe mencionar, es un punto, que también preocupa a los reformadores.

Una de las pruebas de que la Matemática Moderna ha fracasado, la sitúa Morris Kline en los exámenes aplicados a los grupos experimentales; sín embargo, tal y como se plantea, esto no permite obtener conclusiones. Ciertamente, como lo asegura el autor, no se puede decir, a partir de estos exámenes, que la Matemática Moderna ha mostrado su superioridad; pero tampoco puede decirse, usando los mismos argumentos que usa Kline, que sea un fracaso. De hecho, la dificultad para determinar las ventajas de cualquier plan subsistirá mientras persista la indefinición en los métodos evaluatorios.

El libro en suma, da una serie de razones intuitivamente aceptables que abogan por una Matemática más "natural" en los primeros años de su estudio. Puede ser un análisis simplista de la situación en donde se impone la opinión del autor, pero es un libro que lleva a la reflexión, más que nada acerca de la metodología de la enseñanza matemática.

Para el caso de México resulta interesante la lectura de este libro, por la innegable influencia de las tendencias extranjeras, en particular de los Estados Unidos, en las reformas educativas que han tenido lugar en nuestro país. Estas tendencias han determinado en gran medida, la selección y estructuración de los contenidos matemáticos de los programas de estudio, llevándonos, en ocasiones, a poner en práctica deformaciones de planes extranjeros que obedecen a objetivos y realidades diferentes.

M. D. González
Universidad Autónoma Metropolitana (UAM)
México, D.F., México

Guillermina Waldegg
Sección de Matemática Educativa,
Instituto Politécnico Nacional (IPN)
México, D.F., México