NOTAS DE CLASE

Bloques lógicos de Dienes

*En este número iniciamos una nueva sección, a la cual hemos denominado **Notas de Clase**. Esta sección es un espacio para que los profesores de matemáticas comuniquen las experiencias de su práctica docente, en particular aquellas que consideren significativas. Deseamos que **Notas de Clase** se convierta en un foro donde se intercambien experiencias e ideas sobre la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos.*

Los trabajos que se publiquen en esta sección no se someterán a un arbitraje riguroso y serán seleccionados por el Comité Editorial. Esperamos sus colaboraciones y comentarios.

Función educativa:

Apoyo didáctico para el área de matemáticas, en el tercer año de secundaria. Productos notables y su factorización.

1. Introducción

El material está basado en las investigaciones realizadas por el matemático húngaro Zoltan P. Dienes y el sicólogo Jerome S. Bruner. Nosotros tuvimos conocimiento de este material a través del profesor Fortino Escareño Soberanes en el curso de actualización y capacitación profesional organizado por la Dirección General de Educación Secundaria (1985).

Este material considera tres etapas del aprendizaje, que permiten al alumno redescubrir el conocimiento al pasar por las etapas objetiva (concreta), figurativa (gráfica) y simbólica (abstracta) del aprendizaje de la matemática.

Ante la necesidad de que el alumno relacione la matemática con la realidad y no crea que los conocimientos adquiridos son algo que no puede ser materializado y en consecuencia que no le hacen falta, este material hace que los conocimientos sean "*aprehendidos*".

Se presenta la manera como hemos adecuado este material al aula ante grupos de alumnos de secundaria, se presentan ejemplos típicos así como algunas indicaciones de dificultades que hemos percibido.

No se desarrolla el tema de la factorización debido a limitaciones de espacio.

2. El material

2.1 Para el profesor:

12 cuadrados de 15 cm de lado (x^2).
20 tiras de 15 × 3.5 cm de lado (x).
36 cuadrados de 3.5 cm de lado (1).

Lo recomendable es que el material sea de lámina del número 16, con tiras de cinta de imán por detrás, pintados de la siguiente manera:

Los cuadrados grandes de color azul (positivos), 12 tiras de color azul y 8 de color rojo (negativos), 20 cuadrados pequeños de color azul y 16 rojos (pueden usarse otros colores.

2.2 Para el alumno:

12 cuadrados de lado x.
20 tiras de lado x y una unidad de ancho.
36 cuadrados de una unidad de lado.

De un tamaño tal, que el alumno lo pueda manipular en el área de la paleta de su silla cuidando que, el cuadrado grande no sea múltiplo de las tiras (por ejemplo que cuatro tiras no cubran un

Dionisio Méndez Echeverría
Esc. Sec. Dna. Núm. 2

Josefina Fernández Araiza
Esc. Sec. Dna. Núm. 82

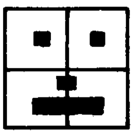
Manuel C. Reyes Galinda
Esc. Sec. Dna. Núm. 53

área igual a la del cuadrado grande) y que la tira no sea múltiplo de los cuadrados pequeños.

3. Etapas del aprendizaje

3.1 Familiarizándose con el material.

3.1.1 Que el alumno manipule el material formando cualquier figura y diga qué área tiene. Por ejemplo:



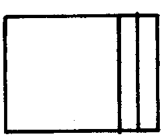
Es un juego y como tal existen reglas, éstas son:

a) Cada cuadrado grande mide de lado x, entonces su área es de x^2.
b) Cada tira mide de largo x y de ancho 1, entonces su área es x.
c) Cada cuadrado pequeño mide de lado la unidad, por tanto su área es 1.
d) Las figuras de color azul serán positivas.
e) Las figuras de color rojo serán negativas.
f) Una figura de color azul con otra de la misma área pero de color rojo dan como resultado cero (afirmación del concepto de inversos).

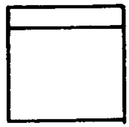
3.1.2 Que el alumno forme cuadrados y rectángulos con el material indicando:

— medida del área.
— medida de la base.
— medida de la altura

Por ejemplo:



área: $x^2 + 2x$
base: $x + 2$
altura: x



área: $x^2 - x$
base: x
altura: $x - 1$

3.2 Producto de binomios con término común (P.B.T.C.)

3.2.1 Términos no comunes positivos.

Se inicia con este producto notable porque el cuadrado de un binomio, así como el producto de binomios conjugados pueden ser tratados como casos particulares de éste.

Se recomienda usar al principio sólo cuadrados de color azul (positivos).

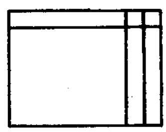
— El alumno obtendrá el área de rectángulos (todo cuadrado es un rectángulo) teniendo:
  a) La medida de la base.
  b) La medida de la altura.
  c) Material suficiente para formar el modelo físico.

— Se representa en el pizarrón de la siguiente manera, por ejemplo:

Datos

$b = x + 2$
$h = x + 1$
$A = ?$
$A =$

Modelo físico



Modelo matemático
Área del rectángulo
(base)(altura) = Área
$(x + 2)(x + 1) = ?$
$(x + 2)(x + 1) = x^2 + 3x + 2$

El área del rectángulo se obtiene contando el área de las piezas utilizadas en el modelo físico, empezando por las piezas más grandes.

Después de varios ejercicios, mediante lluvia de ideas el maestro, dejará establecido:

— Que a la multiplicación efectuada se le identifica con el nombre de producto.
— Que en ambos binomios existe un término que se repite, al que se le llama término común.

— Concluya y justifique que el ejercicio anterior trata del producto de binomios con término común y que el resultado es un trinomio de segundo grado.

El maestro explica que existen 2 tipos de constantes: "*absolutas y parámetros. Una constante absoluta es aquella en que todos los problemas tiene siempre el mismo valor. Por ejemplo, 2 y π son constantes absolutas. Un parámetro es una constante que conserva el mismo valor en un problema particular o situación determinada, pero que puede tener un valor diferente en otro problema o situación*".[1]

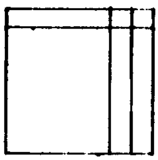
Así, en el producto de binomios $(x + a)(x + b)$, x es una variable, en tanto a y b son parámetros.

De esta forma el alumno, guiado por el maestro llega a la generalización del P.B.T.C., teniendo que explicar dicha regla con sus propias palabras.

Así el ejemplo anterior tendrá otra columna, quedando finalmente:

Datos:
$b = x + 2$
$h = x + 1$
$A = ?$
$A = x^2 + 3x + 2$

Modelo físico



Modelo matemático
Área del rectángulo
(base)(altura) = área
$(x + 2)(x + 1) = ?$
$(x + 2)(x + 1) =$
$= x^2 + 3x + 2$

Modelo matemático
P.B.T.C.
Generalización
(base)(altura) = área
$(x + a)(N + b) = ?$
$(x + a)(x + b) =$
$= x^2 + (a + b)x + ab$

El alumno utiliza la regla obtenida efectuando el P.B.T.C. sin utilizar el modelo físico.

[1] H. Lehmann Charles. *Algebra*, pág. 67.

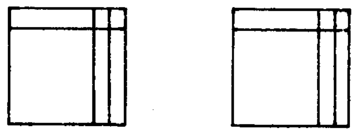
3.2.1.1 Términos no comunes de signo diferente.

Ejemplo:

base: $x + 2$; altura: $x - 1$

Comúnmente se dan 2 tipos de representación con el modelo físico.

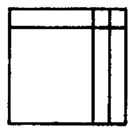
a) Una que superpone las piezas de color rojo.
b) Otra que coloca las piezas de color rojo como una extensión de las azules.



Nosotros optamos por la representación a) porque en la mayoría de los alumnos el signo negativo se asocia con la idea de "quitar".

Datos
$b = x + 2$
$h = x - 1$
$A = ?$
$A = x^2 + x - 2$

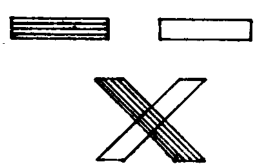
Modelo físico



Modelo Matemático
Área del rectángulo
(base)(altura) = Área
$(x + 2)(x - 1) = ?$
$= x^2 - x - 2$

Modelo Matemático.
P.B.T.C.
(base)(altura) = Área
$(x + a)(x - b) = ?$
$(x + a)(x - b) =$
$= x^2 + (a - b)x + (a)(-b) =$
$= x^2 + (a - b)x - ab$

El área se obtiene separando las piezas del modelo físico y recordando que:



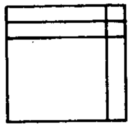
3.2.1.2 Términos no comunes de signo negativo.

Ejemplo:

Datos

$b = x + 1$
$h = x - 2$
$A = ?$
$A = x^2 - 3x + 2$

Modelo físico



Modelo Matemático
Área del rectángulo
(base)(altura) = Área
$(x - 1)(x - 2) = ?$
$(x - 1)(x - 2) =$
$= x^2 - 3x + 2$

Modelo Matemático
P.B.T.C.
Generalización
(base)(altura) = Área
$(x - a)(x - b) = ?$
$(x - a)(x - b) =$
$= x^2 + (-a - b)x + (-a)(-b) =$
$= x^2 + (-a - b)x + ab$

En este caso en la zona con doble sombreado se han superpuesto dos áreas rojas, puesto que a cualquier superficie sólo se le puede quitar otra, sólo una vez, es necesario que encima de la primera área roja se superponga —en este caso— dos cuadrados pequeños azules, con esta acción se repondrá la parte roja que se había quitado en el cuadrado grande y así se podrá quitar de nuevo.

Como puede observarse no se han utilizado en los ejercicios anteriores casos particulares como:

$(x + 3)(x + 3) =$

$(x - 3)(x - 3) =$

$(x - 3)(x - 3) =$

Que aunque pueden ser resueltos con la secuencia y regla citadas, se han reservado para ser tratados en forma especial y sean identificados con sus nombres respectivos. De esta manera la primera regla obtenida por el alumno sirve de apoyo para tratar estos casos.

Para el caso de la factorización además del proceso inverso son necesarias otras consideraciones.

Algunas observaciones con respecto al uso del material en favor:

— Se ha hecho fácil el aprendizaje en la mayoría de los alumnos porque están *"viendo"* y pueden *"tocar"* las respuestas.
— El trabajar con el material es una vivencia fácil de ser recordada.
— Permite fijar el concepto de área para su aplicación posterior.
— Es posible el trabajo por equipos dando lugar a la comparación y discusión de resultados entre los alumnos.
— Da oportunidad al profesor de realizar una actividad dinámica, agradable y permite una comunicación directa con aquellos alumnos que requieren una explicación más amplia.

Obstáculos:

— Si no se tiene el concepto de área bien definido el trabajo se dificulta.
— Es necesario el dominio de las leyes de los signos porque frecuentemente los alumnos confunden la adición con la multiplicación al hacer:

$(-)(-) = +$ $\qquad$ $(-) + (-) = +$

— Es indispensable que el alumno asista a todas las sesiones en que se trabajó con este material porque si se pierde la secuencia el proceso enseñanza-aprendizaje puede no resultar efectivo.

Conclusión:

Esta alternativa de enseñanza-aprendizaje es un camino donde todavía queda mucho por explorar y donde los maestros podemos aprender y aportar mucho. Donde la memoria no es principal requisito para aprender, sino que se conjugan y desarrollan varias habilidades y cualidades del alumno. El material en sí no es la solución al problema de enseñar-aprender productos notables y factorización, se requiere también de la buena voluntad y el deseo de que el alumno en realidad aprenda, razone y no solo mecanice.