Problemas

4ª Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Primer día

Ciudad de la Habana, Abril 10, 1989

1. Determinar todas las ternas de números reales que satisfacen el sistema de ecuaciones siguiente:

$$X + Y - Z = -1$$
$$X^2 - Y^2 = 1$$
$$-X^3 + Y^3 + Z^3 = -1$$

2. Sean x, y, z, tres números reales tales que $0 < x < y < z < \frac{\pi}{2}$. Demostrar la desigualdad

$$\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{sen} x \cos y + 2\operatorname{sen} y \cos z >$$
$$> \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} 2z$$

3. Sean a, b, c, las longitudes de los lados de un triángulo. Probar que

$$\left| \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} \right| < \frac{1}{16}$$

Tiempo: 4, 5 horas
Cada pregunta tiene un valor de 10 puntos.

Segundo día

Ciudad de la Habana, Abril 11, 1989

4. La circunferencia inscrita en el triángulo ABC, es tangente a los lados AC y BC en los puntos M y N respectivamente. Las bisectrices de A y B intersectan a MN en los puntos P y Q respectivamente. Sea O el incentro del triángulo ABC. *Probar que* $MP \cdot OA = BC \cdot OQ$.

5. Sea la función f definida sobre el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$ por

$$f(1) = 1;\ f(2n+1) = f(2n) + 1;$$
$$f(2n) = 3f(n)$$

Determinar el conjunto de valores que toma f.

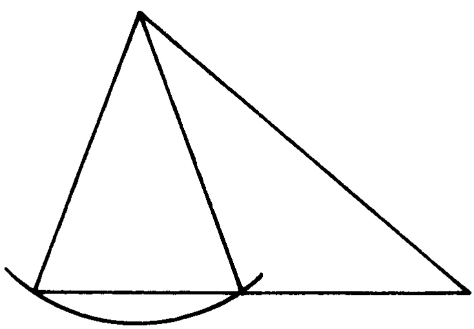
6. Mostrar que hay una infinidad de pares de números naturales que satisfacen la ecuación

$$2x^2 - 3x - 3y^2 - y + 1 = 0$$

Tiempo: 4, 5 horas
Cada pregunta tiene un valor de 10 puntos.

Problema sugerido por Alfinio Flores

En un triángulo isósceles ABC de lados de longitud 3, 3 y 2 (ver figura) se traza el arco AD de radio 2 y centro en C.



Demuestra que el ΔABC es semejante al ΔABC.

Solución del problema propuesto por Juan Llanos en el Núm. 2.

Un ejemplo de inducción matemática

Probar que para cada 'n' natural, el conjunto de puntos en el plano cartesiano con coordenadas enteras (x, y), tales que

$$|x| \leq n, \ |y| \leq n \quad \text{es } (2n + 1)^2$$

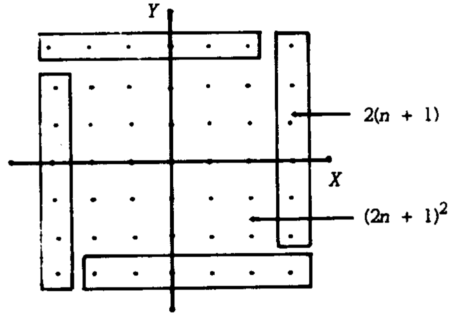
El paso inductivo consiste en mostrar que el número de puntos con coordenadas enteras (x, y), tales que $|x| \leq n + 1$, $|y| \leq n + 1$ es

$$[2(n + 1) + 1]^2$$

De los primeros hay $(2n + 1)^2$ puntos (Hipótesis de inducción), y de los segundos se tienen $4(2)(n + 1)$ (ver figura).

Donde se comprueba que:

$$(2n + 1)^2 + 4(2)(n + 1) = \\ = [2(n + 1) + 1]^2$$



Reseñas bibliográficas

---

101 Ways to learn mathematics using BASIC (K-8). ***Richard J. Shumway. Prentice Hall, 1987.***

Este libro contiene una gran riqueza de temas matemáticos e ideas que se pueden aprender en primaria y secundaria. Cada idea se ilustra o explora con la ayuda de un programa corto de computadora. Con estos programas cortos y las actividades sugeridas, las personas de varias edades pueden explorar las matemáticas por sí mismas. Las ideas discutidas en este libro son interesantes, emocionantes y algunas, inclusive, son hermosas. La mayoría de estas ideas matemáticas tienen un valor educativo perdurable, sin importar los medios que utilicemos para enseñarlas.

Los programas están escritos en BASIC, lo que los hace apropiados para la mayoría de las microcomputadoras actuales. Sin embargo, el valor de este libro no está restringido a este tipo de tecnología. De acuerdo con el propio autor, la gran mayoría de las ideas se pueden explorar de manera muy semejante con una calculadora gráfica.

El libro no presupone ningún conocimiento previo de computadoras o de programación. La mayoría de los programas son muy cortos, de modo que el mismo maestro o los alumnos los pueden teclear en poco tiempo. Sin embargo también los expertos pueden encontrar problemas interesantes en el libro. Se cubren temas importantes de matemáticas de primaria y secundaria: números naturales, decimales y fracciones, gráficas y geometría, medición, estimación y probabilidad y predicción. Además el libro tiene un capítulo interesante sobre la aritmética de la computadora y otro de conceptos básicos donde se exploran con mayor profundidad los conceptos matemáticos. Se dan las respuestas a la mitad de los ejercicios.

He tenido la oportunidad de observar a alumnos de pre-escolar, primaria y secundaria usar estos programas. También he utilizado estos programas con futuros maestros de primaria o de nivel medio y en cursos de actualización para maestros en ejercicio.

Los programas y las actividades del libro pueden ser usados con éxito con alumnos o con maestros en formación o en ejercicio. Es una fuente valiosa de ideas matemáticas y de cómo explorarlas.