

El mismo cumpleaños

Explorando el azar con una microcomputadora

Un hecho que sorprende a muchas personas es que en un grupo no demasiado numeroso, digamos 30 personas, es muy frecuente que dos de ellas tengan su cumpleaños el mismo día. La intuición probabilística, al igual que la intuición geométrica y la numérica, no se desarrolla por sí sola, sino que es necesario que el alumno tenga experiencias con fenómenos aleatorios. Como en el caso de la intuición probabilística se requieren muchas veces un gran número de experimentos para observar tendencias, muchas personas no alcanzan a formarse una idea correcta de los fenómenos basándose en experiencias que se limitan a un pequeño número de casos. Simular fenómenos aleatorios con una microcomputadora nos permite realizar en poco tiempo un gran número de experimentos a fin de desarrollar una mejor intuición probabilística de ellos.

Simular un fenómeno para predecir un resultado es un proceso ampliamente utilizado cuando la observación directa o la experimentación son muy costosas, riesgosas, o imprácticas. Así mismo, los métodos de Monte Carlo se utilizan para calcular la probabilidad de un fenómeno aleatorio cuando resulta demasiado complicado calcularla directamente por otros medios.

Es interesante realizar la siguiente experiencia con un grupo. Se van preguntando las fechas de cumpleaños, hasta que se repita una fecha. Se anota el total de personas preguntadas. Si se trata de un grupo de 40 personas, es muy frecuente que algún cumpleaños se repita antes de que se haya preguntado a todos. Cuando así sucede, no deja de causar sorpresa a

la mayoría. Veremos que la probabilidad de que un cumpleaños se repita es mucho más alta de lo que la gente se imagina. Para esto se proponen las siguientes actividades. También se persigue que los alumnos practiquen la organización de datos.

Actividades para el alumno

Actividad 1

El siguiente programa simula la situación de los cumpleaños.

La computadora va escogiendo números al azar entre 1 y 365, los que corresponden a las diferentes fechas del calendario. El número 1 corresponde al 1o. de enero, el 2 al 2 de enero, el 32 al 1o. de febrero y así sucesivamente hasta el 365 que corresponde al 31 de diciembre. El programa se detiene cuando uno de los cumpleaños se repite. El programa nos da el total de números escogidos, es decir, nos dice después de cuántas personas se repitió el cumpleaños. (Los programas están escritos en la versión de BASIC de la MicroSEP, pero se pueden adaptar fácilmente a cualquiera otra computadora.)

```
5 REM LISTA FECHAS
10 DIM V(365)
20 LET R = RND(365)
```

Alfinio Flores Peñafiel
Centro de Investigación en
Matemáticas
Guanajuato, México, D.F.

```

30 LET V(R) = V(R) + 1
40 LET C = C + 1
50 PRINT R;
60 IF V(R) = 1 THEN GOTO 20
70 PRINT: PRINT "PERSONAS";C
    
```

Corre el programa y anota cuántas personas se llevaban cuando se repitió el cumpleaños: _____

Corre el programa un par de veces y observa los resultados.

Actividad 2

Una vez que se ha corrido el programa anterior varias veces, se puede abreviar el proceso anotando sólo el número de personas que se necesitaron para que se repitiera un cumpleaños. El siguiente programa hace esto.

```

5 REM CUENTA PERSONAS
10 DIM V(365)
20 LET R = RND(365)
30 LET V(R) = V(R) + 1
40 LET C = C + 1
50 IF V(R) = 1 THEN GOTO 20
60 PRINT: PRINT "PERSONAS";C
    
```

Corre el programa varias veces y observa los resultados.

Actividad 3

Para no tener que estar tecleando RUN cada vez que queramos que se repita el experimento, podemos modificar el programa. El siguiente programa repite el experimento indefinidamente. Al igual que el programa anterior, sólo anota en la pantalla el total de personas que fueron necesarias para que se repitiera el cumpleaños.

```

5 REM REPITE INDEFINIDAMENTE
10 DIM V(365)
20 LET R = RND(365)
30 LET V(R) = V(R) + 1
40 LET C = C + 1
50 IF V(R) = 1 THEN GOTO 30
60 PRINT C,
70 RUN
    
```

Corre el programa y deténlo cuando se llene la pantalla. Anota los resultados de los experimentos en la lista siguiente. La

forma más fácil es ir haciendo marcas en el número correspondiente. Vuelve a correr el programa anotando los resultados en la lista anexa hasta completar 100 experimentos.

Actividad 4

Cuenta las marcas en cada número y anota la cantidad de marcas correspondiente.

En la siguiente columna anota el número de marcas acumulado, es decir tienes que ir sumando las marcas que hubo en el 2, más las que hubo en el 3, anotar el resultado y así sucesivamente. El acumulado para un renglón es la suma de las marcas en los renglones anteriores más las marcas de ese renglón. Al llegar a la que corresponde a más de 50, el total acumulado debe ser 100.

Contesta las preguntas:

¿Cuál es la mediana? _____ Recuerda que la mediana es el dato que divide al conjunto de datos en dos partes iguales. Para encontrar la mediana localiza en la columna de los valores acumulados el 50 (o el primer número mayor de 50). El número para el que la cantidad acumulada de marcas es 50, ese es la mediana.

Esto quiere decir que en la mitad de los casos bastó un grupo de _____ personas o menos para encontrar dos personas que tuvieran su cumpleaños el mismo día.

¿Para qué tamaños de grupo es mayor que $\frac{1}{2}$ la probabilidad de que dos personas tengan su cumpleaños el mismo día?

¿Cuál es aproximadamente la probabilidad de que en un grupo de 40 personas se repita un cumpleaños? _____

¿Y en uno de 50? _____

Conclusiones

Los totales acumulados tomados como porcentos representan una aproximación a la probabilidad de que se repita un cumpleaños en un grupo del tamaño dado. Puedes observar que rápidamente aumenta esta probabilidad, aún para grupos que comparados con 365 parecen de tamaño pequeño, como es el caso de 30.

Nota para el profesor:

La probabilidad de que un cumpleaños se repita en un grupo se puede calcular también de la siguiente manera.

Si hay dos personas, la probabilidad Q de que NO se repita el cumpleaños es $364/365$, pues para la segunda se puede escoger cualquiera de los 364 días restantes. Y la probabilidad de que esto suceda es precisamente $364/365$. La probabilidad P que se repita el cumpleaños es entonces $1 - Q$.

Si hay tres personas la probabilidad Q de que NO se repita ningún cumpleaños, es $364/365 * 363/365$ pues para la segunda se pueden escoger cualquiera de los 364 días no ocupados por la primera y la probabilidad de esto es $364/365$, y para la tercera persona cualquiera de los 363 no ocupados por las dos primeras, y la probabilidad de esto es $363/365$. Como se tienen que dar simultáneamente las dos condiciones, y se consideran eventos independientes, la probabilidad es el producto de las dos probabilidades. La probabilidad de que se repita el cumpleaños es $1 - Q$.

Del mismo modo, si hay n personas, la probabilidad Q de que no se repita ningún cumpleaños es de $364/365 * 363/365 * \dots * (365 - n)/365$. La probabilidad P de que se repitan es $1 - Q$.

El siguiente programa calcula las probabilidades de que se repitan cumpleaños para grupos de tamaño 2 hasta 117.

```
5 REM PROBABILIDAD REPE-
TICION
```

```
10 LET Q=1
20 FOR N=1 TO 116
30 LET Q=Q*(365-N)/365
40 PRINT N+1, 1-Q
50 NEXT N
```

Al correr el programa se observa que para $N = 23$ la probabilidad de que se repitan es mayor que $1/2$. También se observa que para el tamaño de grupo que es frecuente en las escuelas se tiene una probabilidad muy alta de que se repita algún cumpleaños. Por ejemplo para $N = 30$ la probabilidad es 0.70, para $N = 40$ es de 0.89, para $N = 50$ es de 0.97.

Es interesante comparar estas probabilidades con los valores que se obtuvieron empíricamente en la Tabla 1.

TABLA 1

número de personas	veces	número de marcas	total acumulado
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	8		
	9		
	10		
	11		
	12		
	13		
	14		
	15		
	16		
	17		
	18		
	19		
	20		
	21		
	22		
	23		
	24		
	25		
	26		
	27		
	28		
	29		
	30		
	31		
	32		
	33		
	34		
	35		
	36		
	37		
	38		
	39		
	40		
	41		
	42		
	43		
	44		
	45		
	46		
	47		
	48		
	49		
	50		
<i>más de</i>	50		

CUPÓN DE SUSCRIPCIÓN



TÍTULO (Lic., M. en . . . , Dr., etc.)

NOMBRE(S)

PRIMER APELLIDO

SEGUNDO APELLIDO

DIRECCIÓN (PARTICULAR)

COLONIA

CÓDIGO POSTAL (O ZONA POSTAL)

CIUDAD

ESTADO

PAÍS

TELÉFONO(S)

INSTITUCIÓN

DIRECCIÓN

CÓDIGO POSTAL (O ZONA POSTAL)

CIUDAD

ESTADO

PAÍS

TELÉFONO(S)

CARGO /

CURSO(S)

No. ALUMNOS

FICHA PARA ENVÍO DE ARTÍCULO/NOTAS DE CLASE

NOMBRE: _____

DIRECCIÓN: _____

_____ CP. _____

TEL: _____

INSTITUCIÓN: _____

_____ CP. _____

TEL: _____

NOMBRE DEL ARTÍCULO: _____

NÚMERO DE CUARTILLAS: _____ NÚMERO DE FIGURAS: _____

SE ANEXA CURRÍCULUM BREVE SI NO

FAVOR HACER ENVÍO DE ARTÍCULOS AL APARTADO POSTAL 5-076
MÉXICO 06500, D.F.

Descubra en éste y en próximos números lo que están haciendo los profesores de Matemáticas en nuestro medio, los novedosos métodos de enseñanza de la Matemática que se están implementando, las más importantes actividades, experiencias didácticas, interesantes problemas para desarrollar, y mucho más, lo que dará como resultado, junto con su esfuerzo, una mejor preparación de sus alumnos.

Educación Matemática

se publica en los meses de abril, agosto y diciembre.

Suscripción anual, incluidos gastos de envío, en México:

MN\$ 25,000. Otros países: US\$ 17.00. Envíe cheque, giro postal o bancario.

La revista Educación Matemática le ofrece el medio y la oportunidad de presentar sus ideas, experiencia e investigación en la enseñanza de las matemáticas.

Estas pueden ser en forma de artículos completos o escritos mas concisos para la nueva sección que aparecerá a partir de Abril de 1990 como "Notas de Clase". También lo invitamos a presentar problemas interesantes y a participar en el Foro del Lector.

Envíe su material, junto con esta ficha cuanto antes