

# Solución del Problema 4

## (Segundo día de la XXIX Olimpiada Internacional de Matemáticas)

### Enunciado:

Demuestre que el conjunto de los números reales  $x$  que satisfacen:

$$\sum_{k=1, \dots, 70} \frac{k}{x-k} \geq 5/4$$

es la unión de intervalos disjuntos cuyas longitudes suman 1988.

### Solución:

Denotemos por  $f$  la función

$$f(x) = \sum_{k=1, \dots, 70} \frac{k}{x-k}.$$

Es una función continua y derivable en su dominio:  $\mathbb{R} - \{1, \dots, 70\}$ .

Tenemos:

$$f'(x) = \sum_{k=1, \dots, 70} \frac{-k}{(x-k)^2} < 0,$$

para todo  $x$ .

Por lo tanto, es decreciente en los intervalos  $]-\infty, 1[$ ,  $]k, k+1[$  ( $1 \leq k \leq 69$ ),  $]70, +\infty[$ .

Dado que

i)  $x - k > 0$  para  $k = 1, \dots, 70$  si  $x > 70$  (y entonces  $f(x) > 0$  si  $x > 70$ )

ii)  $x - k < 0$  para  $k = 1, \dots, 70$  si  $x < 1$  (y entonces  $f(x) < 0$  si  $x < 70$ )

iii)  $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = -\infty$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = +\infty$  ( $k = 1, \dots, 70$ )

iv)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

se deduce que

i) en cada intervalo  $]k, k+1[$ , ( $1 \leq k \leq 69$ ),  $f$  es una biyección decreciente de  $]k, k+1[$  en  $\mathbb{R}$ .

ii)  $f$  es una biyección decreciente de  $]70, +\infty[$  en  $\mathbb{R}_+^*$ .

iii)  $f$  es una biyección decreciente de  $]-\infty, 1[$  en  $\mathbb{R}_+^*$ .

De i), ii), iii) concluimos que existe una única raíz de  $f(x) = 5/4$  en el intervalo  $]k, k+1[$  ( $1 \leq k \leq 69$ ), una única en  $]70, +\infty[$ , y ninguna en  $]-\infty, 1[$ . Denotémoslas por  $x_1, \dots, x_{70}$ . La solución de la inecuación  $f(x) \geq 5/4$  en  $]k, k+1[$  es entonces el intervalo  $]k, x_k[$ , y en  $]70, +\infty[$  el intervalo  $]70, x_{70}[$ .

La solución en  $\mathbb{R}$  en  $f(x) \geq 5/4$  es la unión de intervalos disjuntos:

$$U_{k=1, \dots, 70} ]k, x_k[$$

La suma de las longitudes de los intervalos es pues:

$$S = \sum_{k=1, \dots, 70} (x_k - k) = \sum_{k=1, \dots, 70} x_k - \sum_{k=1, \dots, 70} k = \sum_{k=1, \dots, 70} x_k - 70 \cdot 71/2$$

(\*)

Para evaluar (\*) basta entonces calcular  $\sum_{k=1, \dots, 70} x_k$ .

**Dr. Jaime Lobo**  
Escuela de Matemáticas  
Universidad de Costa Rica

Para ello notemos que las  $x_k$ , siendo raíces de  $f(x) = 5/4$ , satisfacen:

$$\sum_{k=1, \dots, 70} \frac{k}{x-k} - 5/4 = 0$$

es decir, después de reducir la expresión del miembro izquierdo a una fracción racional e igualando el numerador a 0, a la ecuación polinomial:

$$4 \sum_{k=1, \dots, 70} (k \prod_{p=1, \dots, 70, p \neq k} (x-p)) - 5 \prod_{k=1, \dots, 70} (x-k) = 0$$

El polinomio  $p(x)$  de esta ecuación es de grado 70 y sus raíces son precisamente  $x_1, \dots, x_{70}$ . El coeficiente de  $x^{70}$  siendo  $-5$ , de las fórmulas de Vieta sabemos que la suma

$\sum_{k=1, \dots, 70} x_k$  se obtiene dividiendo el coeficiente  $a_{69}$  de  $x^{69}$  en  $p(x)$  entre 5:

$$x_1 + \dots + x_{70} = a_{69}/5 \quad (**)$$

Calculamos entonces  $a_{69}$  asociando coeficientes en la fórmula de  $p(x)$ : los de los polinomios en la sumatoria  $\sum_{k=1, \dots, 70}$  que valen todos  $4k$ , y el del último término  $\prod_{k=1, \dots, 70}$  que vale  $5(1 + \dots + 70)$ .

Obtenemos así

$$a_{69} = \sum_{k=1, \dots, 70} 4k + 5 \sum_{k=1, \dots, 70} k = 9 \cdot 70 \cdot 71/2$$

Finalmente, de (\*) y de (\*\*):

$$S = 9 \cdot 70 \cdot 71/10 - 70 \cdot 71/2 = 1988$$

Q.E.D.

## Problemas de la XXX Olimpiada Internacional de Matemáticas

Celebrada en Braunschweig, Niedersachsen, Alemania Federal, el 18 de julio de 1989.

1. Demuestre que el conjunto  $\{1, 2, \dots, 1989\}$  puede expresarse como la unión de subconjuntos disjuntos  $A_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, 117$ ) tales que:  
i) cada  $A_i$  tiene 17 elementos  
ii) la suma de los elementos de cada  $A_i$  es la misma, para  $i = 1, 2, \dots, 117$ .

2. Sea  $ABC$  un triángulo acutángulo. La bisectriz del ángulo  $A$  corta al circuncírculo de  $ABC$  en  $A_1$ . Se definen los puntos  $B_1$  y  $C_1$  de forma análoga. Sea  $A_0$  el punto de intersección de  $AA_1$  con las bisectrices de los ángulos exteriores en  $B$  y  $C$ . Se definen  $B_0$  y  $C_0$  de forma análoga. Demuestre que:

a) área del triángulo  $A_0B_0C_0 = 2 \times$  área del hexágono  $AC_1BA_1CB_1$ .

b) área del triángulo  $A_0B_0C_0 \geq 4 \times$  área del triángulo  $ABC$ .

3. Sean  $n$  y  $k$  enteros estrictamente positivos. Sea  $S$  un conjunto con  $n$  puntos de un plano, tal que:

i) no hay tres puntos en  $S$  que estén en una misma recta.

ii) para todo punto  $P$  de  $S$  existen al menos  $k$  puntos en  $S$  los cuales están a la misma distancia de  $P$ .

Demuestre que:

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$

4. Sea  $ABCD$  un cuadrilátero convexo, tal que:

i) los lados  $AB$ ,  $AD$  y  $BC$  verifican  $AB = AD + BC$

ii) existe un punto  $P$  en el interior de  $ABCD$  a distancia  $h$  de la recta  $CD$ , tal que  $AP = h + AD$  y  $BP = h + BC$ . Demuestre que:

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

5. Demuestre que para cada entero estrictamente positivo  $n$  existen  $n$  enteros estrictamente positivos y consecutivos, tales que ninguno de ellos es potencia entera de un número primo.

6. Una permutación  $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$  del conjunto  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ , con  $n$  entero positivo, tiene la propiedad  $P$  si  $|x_i - x_{i+1}| = n$  para al menos un  $i$  en  $\{1, 2, \dots, 2n - 1\}$ . Demuestre que para cada  $n$  hay más permutaciones con la propiedad  $P$  que sin ella.

**Concurso Pierre Fermat**

Los siguientes problemas son del concurso Pierre Fermat, realizado en la Escuela Superior de Física y Matemáticas el 31 de marzo de 1990. El concurso se hizo a 2 niveles para estudiantes de secundaria y para estudiantes de bachillerato.

PIERRE FERMAT SECUNDARIA

**PROBLEMA 1.**

¿Cuál de las dos cantidades siguientes  $x = 1990(1 + 2 + \dots + 1990 + 1991)$ ,  $y = 1991(1 + 2 + \dots + 1989 + 1990)$  es más grande? \_\_\_\_\_

**PROBLEMA 2.**

Sean  $a, b, c$  tres enteros positivos de modo que:

$$ab < c.$$

Demuestre que entonces:

$$a + b \leq c.$$

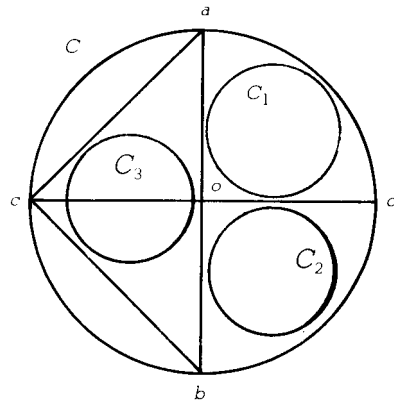
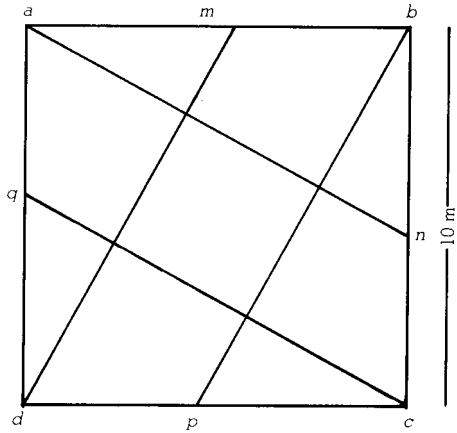
**PROBLEMA 3.**

Si  $m, n, p, q$  son los puntos medios de los lados del cuadrado  $\square abcd$ . ¿Cuál es el área de la parte sombreada?

**PROBLEMA 4.**

Si  $ab$  y  $cd$  son diámetros perpendiculares del círculo  $C$ , con punto de intersección  $O$ ;  $C_1$  es un círculo tangente a  $Oa$  y  $od$  y al círculo  $C$ ;  $C_2$  es un círculo tangente a  $ob$  y  $cb$  y al círculo  $C$ , y  $C_3$  es tangente a  $ca$ ,  $cb$  y  $ab$ .

Demuestra que  $C_1, C_2$  y  $C_3$  tienen la misma área.



PRIMER EXAMEN PIERRE FERMAT

**PROBLEMA 1.**

Suponga que el  $\Delta ABC$  es equilátero y sea  $P$  un punto interior de este triángulo. Sea  $\overline{PD}$  el segmento perpendicular a  $\overline{AB}$  que pasa por  $P$ , y donde  $D$  cae en  $\overline{AB}$ ;  $\overline{PE}$  perpendicular a  $\overline{BC}$  con  $E$  en  $\overline{BC}$ , y  $\overline{PF}$  perpendicular a  $\overline{CA}$  con  $F$  en  $\overline{CA}$ . Demuestre que entonces

$$\frac{PD + PE + PF}{AB + BC + CA} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

**PROBLEMA 2.**

¿Cuántos triángulos no congruentes existen de modo que las longitudes de sus lados son números enteros y su perímetro es 90? Justifique.

**PROBLEMA 3.**

¿Cuántas maneras existen de factorizar el número  $m = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 18$  en dos factores  $m = a \cdot b$ , donde  $a$  y  $b$  son primos relativos? Justifique su respuesta.

**Nota:** Dos factorizaciones se consideran la misma si y sólo si difieren por el orden de los factores

**PROBLEMA 4.**

Considere el  $\triangle ABC$  y sean

$$x = AB, \quad y = BC, \quad z = CA.$$

Demuestre que si

$$(2x^3 - x^2y - x^2z) + (2y^3 - y^2x - y^2z) +$$

$$(2z^3 - z^2x - z^2y) = 0$$

$$(2z^3 - z^2x - z^2y) = 0$$

entonces  $\angle ABC$  mide  $60^\circ$ .

FASE ELIMINATORIA  
PIERRE FERMAT

**Grupo Editorial Iberoamérica**



**CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA - 2/e.**

**EARL W. SWOKOWSKI** *Marquette University, E.U.A.*

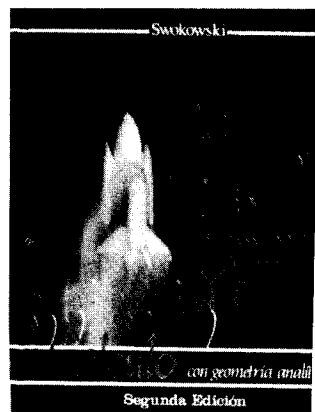
**Traductores:**

**JOSÉ LUIS ABREU** (Ph. D., MIT) y **MARTA OLIVERÓ** *Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), México, D.F., México*

**Revisores técnicos:**

**M. en C. RICARDO CANTORAL URIZA** y **M. en C. ROSA MA. FARFÁN MÁRQUEZ** *Instituto Politécnico Nacional (IPN), México, D.F., México* • **Dr. IVÁN CASTRO CHADÍO** *Postifia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia* • **MIGUEL MORENO** *Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España* • **RICARDO BÁEZ DUARTE** *Universidad Metropolitana, Caracas, Venezuela* • **Ing. JUAN SACERDOTE** *Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina* • **Profa. CARMEN CORTÁZAR** *Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile* • **Dr. GENTIL A. ESTÉVEZ** *Universidad Interamericana, San Germán, Puerto Rico; Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta, Colombia* • **Profa. BEATRIZ URQUIDI DE SEN** *Universidad Iberoamericana, México, D.F., México* • **Ing. ANIBAL SILVESTRI** *Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Monterrey, México* • **Dr. EUGENE A. FRANCIS** *Universidad de Puerto Rico, Mayagüez, Puerto Rico* • **Profa. MARÍA TRIGUEROS** *Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM), México, D.F., México*

**Revisor editorial:** **Ing. FRANCISCO PANIAGUA BOCANEGRA** *Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), México, D.F., México*



**ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA CON GEOMETRÍA ANALÍTICA - 2/e.**

**EARL W. SWOKOWSKI** *Marquette University, E.U.A.*

**Traductores:**

**Mat. MARÍA TRIGUEROS**, **Mat. BEATRIZ BALMaceda PÉREZ**, **Mat. CARLOS MUÑOZ ABOGADO**, **Mat. LETICIA QUINTERO DE PINTO** y **M. en C. SERGIO VARGAS GALINDO**

*Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM), México, D.F., México*

**Revisores técnicos:**

**Ing. ANDRÉS ROJAS** *Universidad de las Américas (UDLA), Puebla, México* • **Ing. HORMOZ PEZESHKI I.** *Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Lago de Guadalupe, México* • **Ing. FRANCISCO PANIAGUA BOCANEGRA** *Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), México, D.F., México* • **Ing. MARIANO PERERO** *Escuela Internacional de las Naciones Unidas, Nueva York, E.U.A.*

