■ EDUCACIÓN MATEMÁTICA ■ Vol. 2 - No. 1 • Abril 1990 ■ © GEI ■ Pág. 63 ■

Solución del Problema 4

(Segundo día de la XXIX Olimpiada Internacional de Matemáticas)

Enunciado:

Demuestre que el conjunto de los números reales x que satisfacen:

$$\Sigma_{k=1,\ldots,70} \frac{k}{x-k} \geq 5/4$$

es la unión de intervalos disjuntos cuyas longitudes suman 1988.

Solución:

Denotemos por f la función

$$f(x) = \Sigma_{k=1,\ldots,70} \frac{k}{x-k}.$$

Es una función continua y derivable en su dominio: $\mathbb{R} - \{1, \ldots, 70\}$.

Tenemos:

$$f'(x) = \Sigma_{k=1,\ldots,70} \frac{-k}{(x-k)^2} < 0,$$

para todo x.

Por lo tanto, es decreciente en los intervalos $]-\infty, 1[$, $]k, k+1[$ $(1 \leq k \leq 69)$, $]70, +\infty[$.

Dado que

i) $x - k > 0$ para $k = 1, \ldots, 70$ si $x > 70$ (y entonces $f(x) > 0$ si $x > 70$)

ii) $x - k < 0$ para $k = 1, \ldots, 70$ si $x < 1$ (y entonces $f(x) < 0$ si $x < 70$)

iii) $\lim_{x \to k^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to k^+} f(x) = +\infty$ $(k = 1, \ldots, 70)$

iv) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

se deduce que

i) en cada intervalo $]k, k+1[$, $(1 \leq k \leq 69)$, f es una biyección decreciente de $]k, k+1[$ en $\mathbf{R}$.

ii) f es una biyección decreciente de $]70, +\infty[$ en $\mathbf{R}^*_+$.

iii) f es una biyección decreciente de $]-\infty, 1[$ en $\mathbf{R}^*_-$.

De i), ii), iii) concluimos que existe una única raíz de $f(x) = 5/4$ en el intervalo $]k, k+1[$ $(1 \leq k \leq 69)$, una única en $]70, +\infty[$, y ninguna en $]-\infty, 1[$. Denotémoslas por $x_1, \ldots, x_{70}$. La solución de la inecuación $f(x) \geq 5/4$ en $]k, k+1[$ es entonces el intervalo $]k, x_k[$, y en $]70, +\infty[$ el intervalo $]70, x_{70}[$.

La solución en $\mathbf{R}$ en $f(x) \geq 5/4$ es la unión de intervalos disjuntos:

$$U_{k=1,\ldots,70} \,]k, x_k[$$

La suma de las longitudes de los intervalos es pues:

$$S = \Sigma_{k=1,\ldots,70}(x_k - k) = \Sigma_{k=1,\ldots,70} x_k - \Sigma_{k=1,\ldots,70} k = \Sigma_{k=1,\ldots,70} x_k - 70 * 71/2$$

(*)

Para evaluar (*) basta entonces calcular $\Sigma_{k=1,\ldots,70} x_k$.

Dr. Jaime Lobo
Escuela de Matemáticas
Universidad de Costa Rica

Para ello notemos que las x_k, siendo raíces de $f(x) = 5/4$, satisfacen:

$$\Sigma_{k=1,\ldots,70} \frac{k}{x-k} - 5/4 = 0$$

es decir, después de reducir la expresión del miembro izquierdo a una fracción racional e igualando el numerador a 0, a la ecuación polinomial:

$$4\Sigma_{k=1,\ldots,70} (k\Pi_{p=1,\ldots,70,p\neq k} (x-p)) - 5\Pi_{k=1,\ldots,70} (x-k) = 0$$

El polinomio $p(x)$ de esta ecuación es de grado 70 y sus raíces son precisamente $x_1, \ldots, x_{70}$. El coeficiente de x^{70} siendo -5, de las fórmulas de Vieta sabemos que la suma $\Sigma_{k=1,\ldots,70} x_k$ se obtiene dividiendo el coeficiente a_{69} de x^{69} en $p(x)$ entre 5:

$$x_1 + \cdots + x_{70} = a_{69}/5 \qquad (**)$$

Calculamos entonces a_{69} asociando coeficientes en la fórmula de $p(x)$: los de los polinomios en la sumatoria $\Sigma_{k=1,\ldots,70}$ que valen todos $4k$, y el del último término $\Pi_{k=1,\ldots,70}$ que vale $5(1 + \cdots + 70)$.

Obtenemos así

$$a_{69} = \Sigma_{k=1,\ldots,70} 4k + 5\Sigma_{k=1,\ldots,70} k = 9 * 70 * 71/2$$

Finalmente, de (*) y de (**):

$$S = 9 * 70 * 71/10 - 70 * 71/2 = 1988$$

Q.E.D.

Problemas de la XXX Olimpiada Internacional de Matemáticas

Celebrada en Braunschweig, Niedersachsen, Alemania Federal, el 18 de julio de 1989.

1. Demuestre que el conjunto $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ puede expresarse como la unión de subconjuntos disjuntos A_i, $(i = 1, 2, \ldots, 117)$ tales que:
   i) cada A_i tiene 17 elementos
   ii) la suma de los elementos de cada A_i es la misma, para $i = 1, 2, \ldots, 117$.

2. Sea ABC un triángulo acutángulo. La bisectriz del ángulo A corta al circuncírculo de ABC en A_1. Se definen los puntos B_1 y C_1 de forma análoga. Sea A_0 el punto de intersección de AA_1 con las bisectrices de los ángulos exteriores en B y C. Se definen B_0 y C_0 de forma análoga. Demuestre que:
   a) área del triángulo $A_0B_0C_0 = 2 \times$ área del hexágono $AC_1BA_1CB_1$.
   b) área del triángulo $A_0B_0C_0 \geq 4 \times$ área del triángulo ABC.

3. Sean n y k enteros estrictamente positivos. Sea S un conjunto con n puntos de un plano, tal que:
   i) no hay tres puntos en S que estén en una misma recta.
   ii) para todo punto P de S existen al menos k puntos en S los cuales están a la misma distancia de P.

Demuestre que:

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$

4. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo, tal que:*
   i) los lados AB, AD y BC verifican $AB = AD + BC$
   ii) existe un punto P en el interior de *$ABCD$ a distancia h* de la recta CD, tal que $AP = h + AD$ y $BP = h + BC$. Demuestre que:

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}.$$

5. Demuestre que para cada entero estrictamente positivo n existen n enteros estrictamente positivos y consecutivos, tales que ninguno de ellos es potencia entera de un número primo.

6. Una permutación $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ del conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, con n entero positivo, tiene la propiedad P si $|x_i - x_{i+1}| = n$ para al menos un i en $\{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$. Demuestre que para cada n hay más permutaciones con la propiedad P que sin ella.

Concurso Pierre Fermat

Los siguientes problemas son del concurso Pierre Fermat, realizado en la Escuela Superior de Física y Matemáticas el 31 de marzo de 1990. El concurso se hizo a 2 niveles para estudiantes de secundaria y para estudiantes de bachillerato.

PIERRE FERMAT SECUNDARIA

PROBLEMA 1.

¿Cuál de las dos cantidades siguientes

$x = 1990\,(1 + 2 + \ldots + 1990 + 1991),$
$y = 1991\,(1 + 2 + \ldots + 1989 + 1990)$

es más grande? ____________________

PROBLEMA 2.

Sean a, b, c tres enteros positivos de modo que:

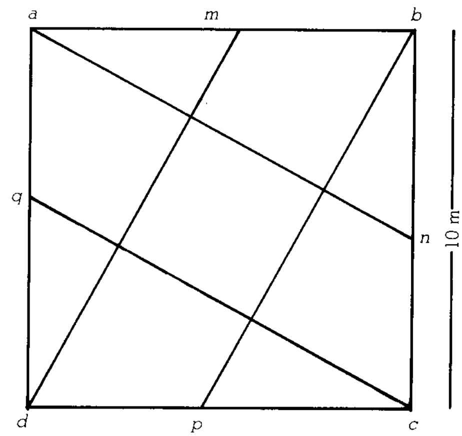
$$ab < c.$$

Demuestre que entonces:

$$a + b \leq c.$$

PROBLEMA 3.

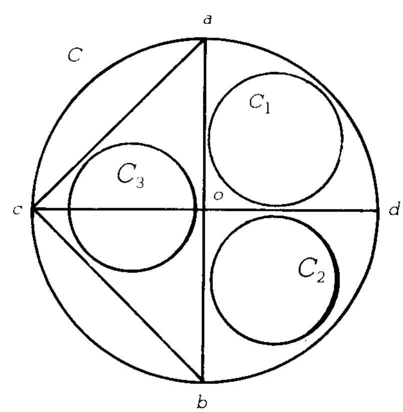
Si m, n, p, q son los puntos medios de los lados del cuadrado $\square\, abcd$. *¿Cuál es el área de la parte sombreada?*



PROBLEMA 4.

Si ab y cd son diámetros perpendiculares del círculo C, con punto de intersección 0; C_1 es un círculo tangente a $0a$ y od y al círculo C; C_2 es un círculo tangente a od, ob y al círculo C, y C_3 es tangente a ca, cb y ab.

Demuestra que C_1, C_2 y C_3 tienen la misma área.



PRIMER EXAMEN PIERRE FERMAT

PROBLEMA 1.

Suponga que el $\Delta\, ABC$ es equilátero y sea P un punto interior de este triángulo. Sea $\overline{PD}$ el segmento perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por P, y donde D cae en $\overline{AB}$; $\overline{PE}$ perpendicular a $\overline{BC}$ con E en $\overline{BC}$, y $\overline{PE}$ perpendicular a $\overline{CA}$ con F en $\overline{CA}$. Demuestre que entonces

$$\frac{PD + PE + PF}{AB + BC + CA} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

PROBLEMA 2.

¿Cuántos triángulos no congruentes existen de modo que las longitudes de sus lados son números enteros y su perímetro es 90? Justifique.

PROBLEMA 3.

¿Cuántas maneras existen de factorizar el número $m = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 18$ en dos factores $m = a \cdot b$, donde a y b son primos relativos? Justifique su respuesta.

Nota: Dos factorizaciones se consideran la misma si y sólo si difieren por el orden de los factores.

PROBLEMA 4.

Considere el $\triangle ABC$ y sean

$$x = AB, \quad y = BC, \quad z = CA.$$

Demuestre que si

$$(2x^3 - x^2y - x^2z) + (2y^3 - y^2x - y^2z) + (2z^3 - z^2x - z^2y) = 0$$

$$(2z^3 - z^2x\, z^2y) = 0$$

entones $\measuredangle ABC$ mide 60°.

FASE ELIMINATORIA
PIERRE FERMAT