NOTAS
DE
CLASE

Raíz cuadrada a travéz de medias

Educación Matématica
Vol. 11 No. 1 Abril 1999
pp. 135-142

Fecha de recepción: Enero 1997

José Paulo Q. Carneiro
Universidade Santa Úesula-Rio de Janeiro
Brasil

RESUMEN: *El profesor puede extraer de la historia de las Matemáticas cuestiones interesantes, que permitan a sus alumnos investigar métodos instructivos y diferentes de los usuales. Aquí se propone calcular la raíz cuadrada de un número positivo utilizando las medias aritmética, geométrica y armónica. Este proceso, equivalente al eficiente método de Newton, pero conocido desde la más remota antiguidad por mesopotamios y griegos, prolonga de forma natural el procedimiento de factorización, utilizado en la enseñanza elemental para calcular la raíz cuadrada de cuadrados perfectos; es mucho más claro y rápido que el cansativo algoritmo tradicional para la raíz cuadrada y se situa bien en el espíritu actual de los procesos iterativos del cálculo numérico y de la utilización de la calculadora y de la computadora.*

ABSTRAC: *Teachers can draw from History of Mathematics interesting questions, allowing their students to investigate instructive methods different from the usual ones. It is proposed here to compute the square root of a positive number using arithmetic, geometric and harmonic means. This procedure, equivalent to the efficient Newton's Method, but known since remote times in Mesopotamia and Greece, is a natural extension of the factorization process, employed in elementary school to compute the square root of perfect squares. It is much clearer and faster than the tiresome traditional algorithm for square root and is well placed within the modern spirit of iterative processes of numerical calculus and the use of calculators and computers.*

1. Introducción

Cuando se buscan valores aproximados para la raíz cuadrada de un número positivo, en general se piensa en dar estos valores en forma decimal. Además, es así que ellos aparecen en una calculadora, por ejemplo. Esto es equivalente a exigir que el número racional utilizado como aproximación tenga como denominador una potencia de 10. Los griegos, que ni siquiera tenían notación decimal, se sentían satisfechos con cualquier otro denominador. Cuando Arquímedes, en su notable libro *La medida del círculo*, aproxima la longitud de la circunferencia a través de los perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos, usa, sin dar ninguna explicación, valores aproximados para $\sqrt{3}$, tales como 265/153 y 1,351/780. De hecho, $(265/153)^2=3-(2/153^2)$, mientras que $(1,351/780)^2=3+(1/780^2)$. Los historiadores han especulado sobre el método por el cual los griegos habrían llegado a estas aproximaciones (ver [1]). Una de las hipótesis sugeridas es la del uso de medias.

Dados dos números positivos a y b, los siguientes hechos son bastante conocidos a respecto de sus medias geométrica G, aritmética A y armónica H:

(i) $$H = \frac{2a}{a+b} = \leq G = \sqrt{ab} \leq a = \frac{a+b}{2}$$

(ii) La igualdad ocurre solamente cuando

(iii) $$\sqrt{HA} = G$$

La demostración de estas propiedades es simple (ver [2]), y las ideas básicas son las siguientes: Como, $0 \leq \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$ sigue inmediatamente que, y que la igualdad solamente ocurre cuando $a = b$. Aplicándose este mismo resultado a $1/a$ y a $1/b$, se obtiene: $\sqrt{\frac{1}{a}\frac{1}{b}} \leq \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} = \frac{a+b}{2ab}$, de donde se concluye que $H \leq G$. La afirmación (iii) resulta del cálculo directo.

Parece conveniente observar, para uso en la sala de clases, que estas propiedades tienen interpretaciones geométricas muy sugestivas, ilustradas en la Figura 1, donde todas las construcciones se pueden realizar de modo sencillo con regla y compás.

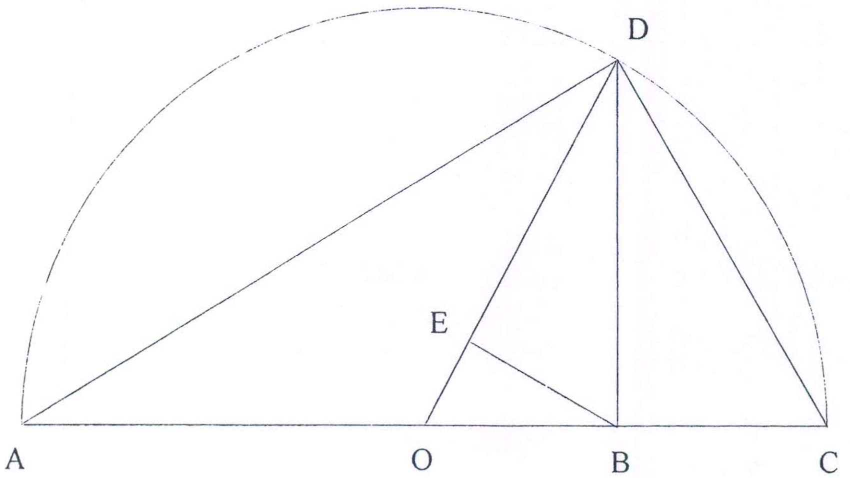


Figura 1

En la Figura 1, dados los números a y b, se construyen sobre una misma recta los segmentos AB = a y BC = b, la semicircunferencia de diámetro AC (con centro en el punto medio O de AC), y la perpendicular a AC trazada por B, que corta a la semicircunferencia en el punto D. Finalmente, se traza la perpendicular a OD por B, que corta OD en el punto E. La longitud del radio OD es claramente igual a $\frac{a+b}{2}$, o sea, la media aritmética de a y b. La longitud de BD es la media geométrica de a y b, porque el ángulo ADC es recto (inscrito en una semicircunferencia) y por tanto, en el triángulo rectángulo ADC, se tiene: BD^2=AB.BC (consecuencia de la semejanza de los triángulos ABD y DBC). La longitud de DE es la media armónica de a y b, en virtud de la propiedad (iii) y del hecho de que en el triángulo rectángulo OBD, se tiene: $BD^2 = OD.DE$ (consecuencia de la semejanza de los triángulos BED y OBD). Cuando varían las longitudes de a y b, se puede ver que DE (la media armónica) no puede superar BD (la media geométrica), porque un cateto no supera la hipotenusa, y que BD (la media geométrica) no puede superar OD (la media aritmética), por la misma razón. Más aún, en la figura se observa que la igualdad de las tres medias ocurre solamente cuando los puntos B y E coinciden con O, esto es, cuando $a = b$.

2. Utilización de medias para aproximar raíces cuadradas

Vamos a usar estos hechos para calcular, por ejemplo, aproximaciones racionales de $\sqrt{3}$ Primero, como $3 = 1 \times 3$, tenemos, por las propiedades (i) y (ii):

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 1 \times 3}{1+3} \langle \sqrt{1 \times 3} \langle \frac{1+3}{2} = 2$$

Como, por la propiedad (iii), la media geométrica de estas dos nuevas fracciones sigue siendo igual a $\sqrt{3}$, tenemos que:

$$\frac{12}{7} = \frac{2 \times \frac{3}{2} \times 2}{\frac{3}{2} + 3} \langle \sqrt{\frac{3}{2} \times 2} \langle \frac{\frac{3}{2} + 2}{2} = \frac{7}{4}$$

Aplicando sucesivamente el mismo procedimiento:

$$\frac{3}{2} \langle \sqrt{3} \langle 2$$

$$\frac{12}{7} \langle \sqrt{3} \langle \frac{7}{4}$$

$$\frac{168}{97} \langle \sqrt{3} \langle \frac{97}{56}$$

$$\frac{32{,}592}{18{,}817} \langle \sqrt{3} \langle \frac{18{,}817}{10{,}864}$$

En decimales, las aproximaciones obtenidas son, aproximadamente:

$$1.5 \langle \sqrt{3} \langle$$

$$1.714286\ldots \langle \sqrt{3} \langle 1.750000$$

$$1.731959\ldots \langle \sqrt{3} \langle 1.732143$$

$$1.732051\ldots \langle \sqrt{3} \langle 1.732051$$

El último valor ya es una aproximación excepcional. Se puede medir la precisión de cada aproximación, observando sus cuadrados:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{3}{2^2} < 3 < 3 + \frac{1}{1^2} = 2^2$$

$$\left(\frac{12}{7}\right)^2 = 3 - \frac{3}{7^2} < 3 < 3 + \frac{1}{4^2} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{168}{97}\right)^2 = 3 - \frac{3}{97^2} < 3 < 3 + \frac{1}{56^2} = \left(\frac{97}{56}\right)^2$$

$$\left(\frac{32{,}592}{18{,}817}\right)^2 = 3 - \frac{3}{18{,}817^2} < 3 < 3 + \frac{1}{10{,}864^2} = \left(\frac{18{,}817}{10{,}864}\right)^2$$

$$\left(\frac{32{,}592}{18{,}817}\right)^2 = 3 - \frac{3}{18{,}817^2} < 3 < 3 + \frac{1}{10{,}864^2} = \left(\frac{18{,}817}{10{,}864}\right)^2$$

$$\cdots$$

3. El procedimiento general

Generalizando, el proceso consiste en lo siguiente: dado un número $M > 1$, del cual se quiere calcular la raíz cuadrada, se factoriza dicho número en la forma $M = ab$, con $0 < a < b$. En seguida, se forman:

$$\boldsymbol{H_0 = a} \qquad\qquad A_0 = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{H_{n+1}} = \frac{2\boldsymbol{H_n A_n}}{\boldsymbol{H_n + A_n}} \qquad A_{n+1} = \frac{H_n + A_n}{2} \qquad \text{para... } n = 0, 1, \ldots$$

Vamos a verificar ahora que el proceso funciona siempre. En primer lugar, por las propiedades de las medias recordadas en el inicio, se tiene, para todo n:

$$H_n < \sqrt{H_n A_n} = \sqrt{H_{n-1} A_{n-1}} = \cdots = \sqrt{ab} = \sqrt{M} < A_n$$

Ademas:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{1 + \dfrac{H_n}{A_n}}{2} < \frac{1+1}{2} = 1 \Rightarrow A_0 > A_1 > \cdots$$

$$\frac{H_{n+1}}{H_n} = \frac{A_n}{A_{n+1}} > 1 \Rightarrow H_0 < H_1 < \cdots$$

Esto es, los H_n son aproximaciones por falta, cada vez mejores, de $\sqrt{M}$, mientras que los A_n son aproximaciones por exceso, cada vez mejores, de $\sqrt{M}$.

$$H_0 \quad H_1 \quad \cdots \quad H_n \quad \cdots \quad \sqrt{M} \quad \cdots \quad A_n \quad \cdots \quad A_1 \quad A_0$$

Aún más, la sucesión creciente formada por los H_n es acotada superiormente por, $\sqrt{M}$ mientras que la sucesión decreciente formada por los A_n es acotada inferiormente por $\sqrt{M}$

Por lo tanto, existen necesariamente números c y d tales que $H_n \to c$ y $A_n \to d$, siendo $0 < c \leq \sqrt{M} \leq d$. Pero:

$$A_{n+1} - H_{n+1} = \frac{H_n + A_n}{2} - \frac{2H_n A_n}{H_n + A_n} = \frac{(H_n + A_n)^2 - 4H_n A_n}{2(H_n + A_n)} = \frac{(A_n - H_n)^2}{4A_{n+1}} \qquad (2)$$

Pasando al límite, se obtiene:

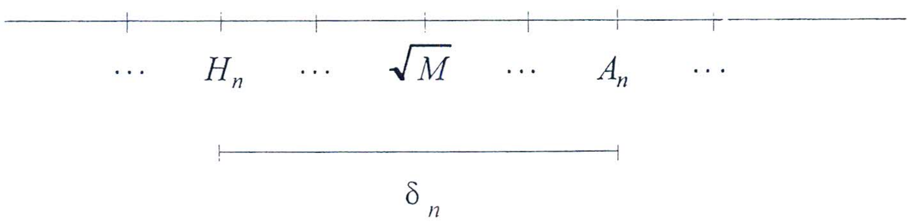
$$d - c = \frac{(d-c)^2}{4d}$$

Si d ¹ c, tendríamos $4d = d - c$, o $3d + c = 0$, lo que es imposible, con c y d positivos. Por eso, $c = d \sqrt{M}$.

Conclusión: las sucesiones de medias armónicas y aritméticas obtenidas en el proceso forman aproximaciones cada vez mejores de $\sqrt{M}$, por falta y por exceso, respectivamente, y se aproximan de $\sqrt{M}$ tanto cuanto se quiera, bastando para esto tomar términos de la sucesión en número suficente.

4. La precisión del proceso

Vamos a analizar ahora el error cometido en las aproximaciones. Como $H_n < \sqrt{M} < A_n$, tanto el error cometido al tomar la n-ésima aproximación por exceso, esto es, $A_n - \sqrt{M}$, cuanto el error cometido al tomar la n-ésima aproximación por falta, esto es, $\sqrt{M} - H_n$, son menores que $\delta_n = A_n - H_n$.



Pero la igualdad (2) muestra que:

$$\delta_{n+1} = \frac{\delta_n^{\,2}}{4A_{n+1}}$$

Siendo u una aproximación por falta de $\sqrt{M}$, se tiene que $u < \sqrt{M} < A_{n+1}$, de modo que:

$$\delta_{n+1} < \frac{1}{4u}\delta_n^{\,2}$$

Esta desigualdad permite verificar que el error decrece muy rápidamente, a partir del momento en que sea menor que 1, lo que obligatoriamente termina por ocurrir, ya que $\delta_n \to 0$.

Por ejemplo , supongamos que se quiera calcular $\sqrt{114}$. Se puede tomar $u = 10$, de modo que $\delta_{n+1} < \frac{1}{40}\delta_n{}^2 = 0.025\delta_n{}^2$. Esto significa que si, en alguna etapa del proceso δ_n , es, digamos, $0.01 = 10^{-2}$, entonces, en la etapa siguiente, no excederá a 25×10^{-7} , en la siguiente a 625×10^{-14} , y así en adelante, lo que representa una convergencia muy rápida. Si escogemos ahora la factorización 114 = 6 + 19, entonces las primeras aproximaciones serán demasiado pobres: $H_1 = 228/\ 115 \cong 1.982609$ y $A_1 = 115/\ 2 \cong 57.5$, con $\delta_0 = 113$ y $\delta_1 \cong 55.517391$, lo que es ridículo. Pero si se toma la factorización $114 = 6 \times 19$, la situación ya es mucho mejor:

n	H_n	A_n	δ_n	$0.025\delta_n{}^2$
0	6	19	13	4.225
1	$\frac{228}{25} = 9.12$	$\frac{25}{2} = 12.5$	3.38	0.285610
2	$\frac{11{,}400}{1{,}081} \cong 10.545791$	$\frac{1{,}081}{100} = 10.81$	0.264209	0.001745
3	$\frac{24{,}646{,}800}{2{,}308{,}561} \cong 10.67626$	$\frac{2{,}308{,}561}{216{,}200} \cong 10.677895$	0.001634	0.000000

El último valor en realidad no es 0, sino 0.00000007, aproximadamente, pero en todo caso muestra que las aproximaciones\ siguientes (por falta y por exceso) van a coincidir hasta las seis casillas decimales que estamos usando. El lector podrá comprobar que son iguales a 10.677078, lo que corresponde a $\sqrt{114}$ con seis decimales exactas.

Como $\delta_0 = b - a$, se ve que la convergencia será tanto más rápida cuanto más próximos estén los dos factores que fueron escogidos inicialmente. Por fin, se debe notar que, si el objetivo es obtener solamente aproximaciones en decimales, nada impide que sean utilizados valores iniciales no enteros. Por ejemplo, para $\sqrt{114}$, se puede utilizar $a = 10$ y $b = 114/10 = 11.4$, lo que equivale a $\delta_0 = 1.4$. La convergencia será bastante rápida:

n	H_n	A_n	δ_n
0	10	11.4	1.4
1	10.654206	10.700000	0.045794
2	10.677054	10.677103	0.000049
3	10.677078	10.677078	0.000000

5. Comentarios

Si en la relación de recurrencia (1), se toma en cuenta que $H_n A_n = M$, se obtiene:

$$A_{n+1} = \frac{A_n + \frac{M}{A_n}}{2}$$

Esto significa que cada aproximación por exceso obtenida durante el proceso es la media aritmética entre la aproximación por exceso anterior A_n y M/A_n. De modo enteramente análogo, el lector puede comprobar que cada aproximación por falta H_{n+1} es la media armónica entre la aproximación por falta anterior y H_n y M/H_n.

Pero lo más interesante es que el proceso descrito por la fórmula (3), además de ser, como vimos, altamente eficaz, constituye el proceso más antiguo y más utilizado para el cálculo de raíces cuadradas. Es probable que la calculadora que usted usa calcule de esta manera las raíces cuadradas. Este proceso es más conocido como el "método de Newton (1642-1727)", por ser un caso particular de un método más general de aproximación, debido al gran matemático inglés, y que equivale a trazar sucesivas tangentes a la gráfica de $y = x^2 - M$, a partir de una aproximación inicial por exceso A_n, como ilustra la Figura 2.

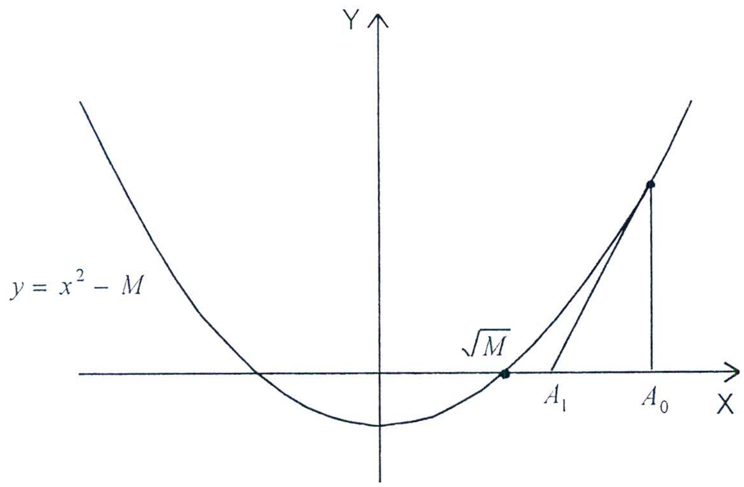


Figura 2

Específicamente para la raíz cuadrada, esta sucesión de aproximaciones ya era conocida por el matemático griego Hierón de Alexandría (100 d.C.), y es atribuída por algunos a Arquitas de Taranto (428-365 a.C.). Pero en la primera mitad de nuestro siglo, se descubrió que ella ya era utilizada por los mesopotamios (donde hoy es el Iraq), hace unos 3,500 años (ver [3]).

6. Conclusión

Una vez más se constata que, al estudiar la historia de las Matemáticas, el profesor puede extraer de allí no solamente episodios curiosos, sino también cuestiones interesantes, que permitan a sus alumnos investigar métodos diferentes de los usuales, e igualmente instructivos.

El método propuesto aquí de utilizar factorización y medias para calcular la raíz cuadrada presenta, en nuestra opinión, las siguientes ventajas:

1) rescata una técnica antigua, ilustrando la historia;
2) prolonga de forma natural el procedimiento de factorización, utilizado ampliamente en la enseñanza elemental para calcular la raíz cuadrada de cuadrados perfectos;
3) es mucho más claro y rápido que el cansativo algoritmo tradicional para calcular la raíz cuadrada;
4) se situa bien en el espíritu más actual de los procesos iterativos del cálculo numérico y de la utilización de la calculadora y de la computadora.

Por todas estas razones, creemos que los maestros puedan aprovechar estas ideas para mejorar su enseñanza.

Bibliografía:

[1] Heath,T.L., *The works of Archimedes*, Dover, New York, 1897.

[2] Niven,I., *Maxima and Minima whithout Calculus*, The Mathematical Association of America, 1981.

[3] Boyer,C.B., *A History of Mathematics*, John Wiley, 1968.