ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN https://doi.org/10.24844/EM3801.08

Diseño colectivo de situaciones de enseñanza aprendizaje para la actividad matemática comprometida en escenarios de diversidad

Collaborative Design of Teaching and Learning Situations for Engaged Mathematical Activity in Contexts of Diversity

Angelina Alvarado Monroy,[1] Luis Miguel García Velázquez[2]

Resumen: Ante el bajo desempeño en matemáticas del alumnado mexicano de educación básica, informado en pruebas estandarizadas, las prácticas de enseñanza que impulsan la actividad comprometida ofrecen una alternativa; particularmente en escenarios de experimentación que articulen las dimensiones afectivas y cognitivas. Este artículo propone condiciones para el diseño didáctico colectivo de secuencias que promuevan una diversidad de ideas y formas de hacer en matemáticas, en armonía con los escenarios complejos y diversos de México. La Red de Enseñanza Creativa de las Matemáticas (RECREA-Matemáticas), en los últimos seis años, ha diseñado colaborativamente situaciones de enseñanza aprendizaje que propicien la actividad matemática comprometida. En ello, el diseño multiseriado ha permitido incorporar las experiencias y voces de estudiantes, docentes, profesionistas de diferentes disciplinas y personas comprometidas desde la investigación, para informar el proceso. Presentamos aquí la forma en que esta propuesta de condiciones teórico-metodológicas para el diseño despliega el compromiso en quienes participan en la actividad matemática; además, a través de un estudio con docentes es posible anticipar su incidencia en las prácticas de enseñanza.

Fecha de recepción: 3 de diciembre de 2023. **Fecha de aceptación:** 23 de de diciembre de 2025.

[1] Universidad Juárez del Estado de Durango, aalvarado@ujed.mx, https://orcid.org/0000-0001-6063-1822
[2] ENES Morelia, UNAM, luism_garcia@enesmorelia.unam.mx, https://orcid.org/0000-0002-2779-7203

Palabras clave: *Diseño Multiseriado, Compromiso con la Actividad Matemática, Principios Didácticos para la Diversidad*

Abstract: Given the low performance of Mexican basic education students in mathematics, as reported in standardized assessments, teaching practices that foster engaged activity offer a potential solution–particularly in experimental settings that integrate both affective and cognitive dimensions. This paper proposes conditions for the collective didactic design of learning sequences that motivates a diversity of ideas and approaches to doing mathematics, aligned with the complex and diverse educational contexts of Mexico. Over the past six years, the Network (Red de Enseñanza Creativa de las Matemáticas, RECREA-Matemáticas) has collaboratively designed teaching and learning situations to promote committed mathematical activity. In this process, multitiered design has enabled the inclusion of experiences and perspectives from students, teachers, professionals from various disciplines, and individuals engaged in research to inform the process. This article outlines how the proposed theoretical and methodological conditions for design foster engagement among participants in mathematical activity. Furthermore, through a study involving teachers, it is possible to anticipate the impact of these conditions on teaching practices.

Keywords: *Multitiered Design, Engagement with Mathematical Activity, Didactic Design Principles for Diversity*

1. INTRODUCCIÓN

El Proyecto Nacional de Incidencia e Investigación en Enseñanza de las Matemáticas surge de un llamado del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México para repensar su enseñanza frente a los deficientes resultados obtenidos en pruebas estandarizadas (Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación, 2020). En la literatura, este problema se ha abordado desde la consideración de la dimensión afectiva, a partir de prácticas de enseñanza que impulsan el compromiso con la actividad matemática (Chamberlin, 2019; Murphy & Ingram, 2023). En particular, en México se reconocen factores como el miedo y el prejuicio ante la disciplina, al igual que la prevalencia de estrategias de

enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que no fomentan su aprecio y no promueven la creatividad y el interés.

Durante 2020-2022 la Red de Enseñanza Creativa de las Matemáticas (RECREA-Matemáticas) estuvo a cargo del proyecto y siguió este enfoque. Entonces se anticipaban cambios estructurales con la Nueva Escuela Mexicana hacia un currículum en búsqueda de la pertinencia y la contextualización, con un enfoque vinculante entre lo que se enseña en las aulas y las necesidades comunitarias, centrado, más que en contenidos, en problemáticas y desafíos que necesitaran saberes de distintas disciplinas y del entorno. Estas prácticas resultan consonantes con los hallazgos sobre la vinculación entre compromiso y logro en matemáticas (Murphy & Ingram, 2023; Kloosterman, 2019).

La Red está integrada por un grupo heterogéneo de profesionales provenientes de más de veinte instituciones y programas en México, con miradas diversas que incluyen la docencia, la divulgación y la investigación, tanto en educación como en matemáticas. El primer reto fue alcanzar un entendimiento colectivo sobre esta preocupación, para ello se convocó a un laboratorio con integrantes de la Red y docentes de los diferentes niveles y sistemas educativos: desde preescolar hasta posgrado, incluyendo educación indígena y multigrado. En este foro acordamos que nuestras propuestas buscarían responder a una multiplicidad de realidades, toda vez que reconocerían y escucharían al profesorado como principal agente para contribuir al desarrollo integral del estudiantado y propiciar alternativas de solución ante las dificultades específicas relativas al aprendizaje.

Quienes participamos en el laboratorio compartimos diseños de materiales y recursos que nos han permitido motivar el compromiso durante la actividad matemática. A partir de la sistematización de estas experiencias se identificaron dos características comunes: (1) la construcción de variados significados matemáticos personales entreverados en los modelos –que el estudiantado propone para explicar, resolver o interpretar una situación, o bien decidir la veracidad de una afirmación–; y (2) el aprovechamiento de las interacciones sociales para potenciar los aprendizajes en diversidad y profundidad.

En reconocimiento a la riqueza, la multiplicidad y considerando la profunda inequidad de los contextos educativos en México, establecimos como prioridad reimaginar las prácticas de diseño para repensar, en colectivo, prácticas pedagógicas flexibles. Ante este escenario nos propusimos, en primera instancia, trabajar con docentes para responder: ¿qué condiciones para el diseño didáctico colectivo promueven el compromiso con la actividad matemática para convocar la diversidad de ideas y formas de hacer?

Así, este escrito inicia con un marco teórico metodológico para establecer principios que guíen el diseño didáctico hacia una actividad matemática comprometida, estimulando múltiples maneras de pensar y hacer, a la par que promuevan el acceso y la permanencia en la resolución de la tarea. Enseguida, se presenta la metodología para el trabajo de investigación de codiseño que permita ilustrar y describir una situación de enseñanza-aprendizaje y el análisis de su funcionamiento, con un grupo multidisciplinario de docentes de educación secundaria, para promover la actividad matemática comprometida.

2. MARCO TEÓRICO-METODOLÓGICO

Nuestra propuesta se inscribe con base en la teoría de aprendizaje siguiendo los principios para el diseño didáctico que se desprenden de ella. Introducimos claves conceptuales sobre la actividad comprometida en matemáticas y un enfoque metodológico para estudiar la funcionalidad de los principios al convocar la diversidad de ideas y formas de hacer en matemáticas.

2.1 La teoría de Dienes para impulsar el aprendizaje

La construcción de significados personales relevantes y de un entorno de interacción colaborativo y dialógico son dimensiones que reconocemos para proponer diseños didácticos que provoquen actividad matemática comprometida. Para ello, la teoría de la cognición situada propone dos ejes fundamentales (1) dotar de relevancia cultural y contextualizada cada diseño didáctico y (2) gestionar una actividad colaborativa de alta interacción en función de los intereses de aprendizaje (Díaz Barriga, 2003; López et al., 2021). En educación matemática, el trabajo de Dienes se considera fundamental para la aproximación situada al aprendizaje (Sriraman & Lesh, 2007). A continuación, retomamos elementos importantes de ella.

La actividad matemática se caracteriza por tratar con estructuras, más allá de manipular símbolos, dado que emerge de notar relaciones entre objetos, propiedades y regularidades. Dienes (2000) llamó corporizaciones a los objetos dotados de rasgos matemáticos perceptibles, donde la estructura se reconoce a partir de la experiencia directa y apelando a la intuición, mediante una autoevaluación, una reorganización y una reconstrucción progresivas.

Además, siempre se busca despertar interés por notar, entender, explicar o manipular matemáticamente las regularidades de las corporizaciones.

En el trabajo de Dienes, es importante notar que el diseño didáctico siempre es para un grupo: primero en equipos pequeños y luego en el grupo completo. Este enfoque nos recuerda que en cada colectivo habrá tantas trayectorias como individualidades, pero que la circulación de ideas entre estas distintas posiciones, a partir de una situación común, propicia la progresión del aprendizaje.

Dienes, propone una teoría en la que el uso de múltiples corporizaciones, que se exploran e interpretan por un mismo grupo, permite motivar el acceso a estructuras conceptuales desde la experiencia. Para Dienes el conocimiento matemático se organiza en torno a la experiencia, tanto como a la abstracción, por ello introducir sistemas simbólicos prematuramente supone un choque para el alumnado e impide el aprendizaje de las matemáticas. Su teoría propone seis etapas para motivar progresivamente el aprendizaje situado desde la experiencia: Interacción libre, Interacción con reglas, Comparación, Representación, Simbolización y Formalización.

La Interacción libre es una actividad para el ensayo y error que permite familiarizarse con una situación nueva a través de la percepción de rasgos en las corporizaciones. Las regularidades que surgen tras la interacción libre favorecen un comportamiento sistemático, que lleva hacia el establecimiento de reglas para actuar, es decir, para la Interacción con reglas, que es pensar en diferentes situaciones con una esencia común, cuyas reglas coincidan con alguna estructura matemática, es una estrategia pedagógica para que el grupo aprenda interactuando con ellas. Al utilizar distintos materiales se propicia la Comparación y el reconocimiento de la estructura común, de forma que, a cada elemento y a cada operación de una situación, le corresponda un único elemento u operación en otra.

La estructura de reglas para manipular cada corporización empujará al grupo a dar los primeros pasos hacia la abstracción, que se revela inventando una Representación o mapa (diagrama de flechas, tabla, sistema de coordenadas, entre otras) a partir de las diversas actividades. Las reglas establecidas pueden "mapearse" en esta representación, que permitirá observar rasgos comunes. Esto da paso a la etapa de Simbolización para estudiar la representación y deducir o descubrir algunas propiedades y ponerlas a prueba regresando a interactuar con reglas. Se puede desarrollar un lenguaje elemental para describir estas propiedades del mapa y aproximarse al simbólico convencional de la profesión matemática o se pueden inventar otros sistemas, que en cualquiera

de los casos serán útiles para describir. Finalmente, llega la etapa de Formalización para ordenar el laberinto de descripciones donde se hace un ejercicio de síntesis para encapsular lo obtenido y comunicar, argumentar y transferir hacia situaciones similares, con un grado de certidumbre que pueda ser compartido por el grupo. En este sentido, se legitiman las formas de hacer.

Como ejemplo de un diseño que aprovecha estas etapas presentamos el siguiente: Se interactúa libremente con una colección de fichas de dos tipos para decidir cuál tiene más. En la siguiente etapa se propone usar esa corporización para representar pasos hacia adelante o hacia atrás en un camino recto, proponiendo reglas para analizar la secuencia y determinar si se volverá al punto de origen, o bien imaginando nuevos pasos que, al añadirse, regresen al inicio. Como corporización alternativa se entrega una caja con retazos rectangulares de dos colores y se solicita confeccionar banderas bicolores, proponiendo cantidades de retazos que se podrían añadir a la caja para que no se desperdicie ninguno. En esta etapa surge la noción del cero como un punto de equilibrio y, en la etapa posterior de comparación, se complejiza la noción intuitiva de inverso aditivo. En la etapa de representación, la recta numérica, dibujos de flechas, esquemas de emparejamiento pueden aparecer, para avanzar hacia las siguientes etapas: una introducción gradual del simbolismo matemático de los números enteros y una formalización de las reglas de operación aditivas, apoyándose en nociones previamente interiorizadas.

En Dienes (2000) se desarrolla un ejemplo de aprendizaje de números enteros –similar al descrito– que conduce a las reglas de la multiplicación; hay más ejemplos para los números racionales en Dienes (2001).

Dado que las primeras etapas habilitan la coexistencia de distintas formas de hacer y representar ante una misma situación, la teoría de Dienes (2000) resulta adecuada para la diversidad de ideas. En particular, hay apertura al no haber una carga simbólica excesiva desde el inicio. En el proyecto se exploraron interacciones y complejidades entre las diferentes etapas, haciendo ver que varias de ellas suceden en paralelo y por aproximaciones sucesivas; por ejemplo, la Interacción libre y con reglas se puede traslapar durante la exploración. De igual manera, la Representación y la Simbolización pueden ocurrir en simultáneo, alternar entre una y la otra tendrá que ver con que se habiliten mutuamente para dar mayor sentido y utilidad hacia una comprensión más fina. Además, es posible activar las seis etapas descritas de manera cíclica a partir de una misma situación, utilizando distintas corporizaciones, como se verá más adelante en un ejemplo.

Se observó también, que no siempre se requiere alcanzar un alto grado de Formalización para lograr la abstracción; por ejemplo, solicitar al alumnado que describa su proceso de forma que otra persona pudiera reproducirlo sería suficiente. De hecho, para Dienes, la abstracción toma referentes concretos y, a partir de la agrupación, sugiere clases más refinadas, dotadas de posibilidades para explorar con ellas. En sus palabras, "Empezamos con elementos y, con el tiempo, los agrupamos en una clase a partir de un atributo definitorio que nos indujo a determinar esta clase con los elementos, quizá sin ser conscientes [...]" (Dienes, 1967, p. 95).

Así, la abstracción se sirve de la intuición informada por experiencias –tanto previas como inmediatas–; esto proporciona confianza para continuar la exploración, requiriendo cada vez menos volver a una situación particular. Además, es posible activar la reorganización y la reconstrucción del conocimiento a través de experiencias que propician la abstracción sin que, por ejemplo, el lenguaje simbólico sea una barrera (entrevista a Dienes en Sriraman & Lesh, 2007). Esto constituye una oportunidad para el diseño de situaciones que incluyan a un amplio rango de estudiantes participando de forma comprometida en la actividad matemática.

2.2 Principios de diseño para provocar compromiso durante la actividad matemática

Con la intención de que los diseños habiliten las etapas descritas, se seleccionaron referentes de diseño didáctico que activaran el compromiso y fueran compatibles con esta visión situada. Esto nos llevó a proponer un conjunto de principios para guiar los diseños: *Exploración, Necesidad intelectual, Emergencia de la estructura matemática* y *Autoevaluación*.

El primer principio, de *Exploración*, habilita el funcionamiento de las dos primeras etapas de Dienes (2000), la Interacción libre y con reglas; en un diseño requerirá proveer condiciones intencionales que brinden acceso a los grupos para experimentarlas. Estas incluirán dedicar tiempo suficiente para la interacción con objetos compartidos en un espacio común, que sugieran formas e intuiciones de relacionarse con ellos. Nicolopoulou y Cole (1996), describen que Durkheim, Vigotsky, Piaget y Giddens compartían como premisa que el desarrollo cognitivo involucra la participación como actividad social, compartiendo un sistema de reglas entendido y aceptado de manera voluntaria; de ahí la relevancia de este principio que promueve que el alumnado establezca o adopte reglas.

Asumimos que esta aceptación y entendimiento del espacio compartido favorece una exploración libre y una identificación de regularidades; estas hacen notar detalles que permiten entender o explicar, delineando reglas y anticipando sus efectos, con curiosidad. De igual manera, el principio habilita diversas formas de Representación y la interacción entre ellas, al tiempo que propicia la Comparación y apoya la Simbolización.

Para que el estudiantado se comprometa francamente en un desafío, debe verlo a partir de una o varias *Necesidades intelectuales* (Harel, 2013; 2018), que es el segundo principio. Este establece que, para modificar concepciones preexistentes es necesario enfrentarse a un reto donde se recuperen nociones previas que, en ocasiones, se modifican al encontrar conflictos cognitivos; al hacerlo cada participante establece una necesidad personal que lo engancha para plantear sus propias preguntas y perseguirlas. Al desarrollar la perspectiva de diseño DNR (Dualidad, Necesidad y Repetición), Harel (2013) da ejemplos de diferentes necesidades intelectuales –certeza, causalidad, cuantificación, comunicación y estructura–, mismas que pueden ocurrir de forma paralela e impulsan el tránsito entre las distintas etapas de aprendizaje propuestas por Dienes. Más aún, estas necesidades están arraigadas en todos los aspectos de la práctica matemática.

El tercer principio es el de la *Emergencia de la estructura matemática*. En la situación de aprendizaje que se proponga se anticipa que surjan ideas matemáticas fundamentales que subyacen a la actividad de exploración, así como patrones o regularidades. Este principio está ligado con las propuestas de diseño generativo para grupo (Stroup et al., 2020) y de variación perceptual (Dienes, 1967). Al diseñar será necesario dotar a los objetos de exploración con características perceptibles que provean a una corporización de elementos matemáticos, propiedades y formas sugeridas para relacionarse con ellos. En Dienes, por ejemplo, la experiencia con distintas corporizaciones habilita la Comparación, lo que permite notar regularidades para representarlas y que sean útiles para participar en una conversación.

En nuestro caso, postulamos que la Comparación es posible también al hallar similaridades entre distintas estrategias de solución; más aún, ante características compartidas de diferentes objetos abstractos, surgen formas comunes de tratarlos. Por lo anterior, a partir de una situación compartida y para favorecer la permanencia, en este principio resulta importante acompañar múltiples trayectorias de exploración, construcción y solución para atender las diversas necesidades intelectuales de quienes son aprendices.

Es importante conversar y reconocer elementos en común, aunque las estrategias sugieran rutas distintas. Para asegurar este principio se espera que, durante el diseño, se anticipen las posibilidades que se abrirán a través de la estructura matemática, así como los momentos y las maneras en que podrán emerger sin ser impuestas.

El cuarto principio propuesto es el de *Autoevaluación*, convocado desde la perspectiva de modelos y modelación (Lesh et al., 2012). En nuestro caso, se asegurará –mediante el diseño– que el desafío sugiera criterios claros para que el estudiantado evalúe la calidad de sus aproximaciones y que provoque momentos para refinar las formas actuales de pensar, comparar ideas alternativas y seleccionar aquellas que sean más y menos útiles, a fin de ampliar o perfeccionar las interpretaciones más prometedoras. Esto sentará condiciones propicias para la progresión del entendimiento, las construcciones, las explicaciones y las interpretaciones que puedan aportar quienes participan en la experiencia. Lo anterior conecta con la etapa de Simbolización propuesta por Dienes, puesto que da oportunidad para estudiar las representaciones en un formato óptimo, más próximo al lenguaje abstracto de las matemáticas que permite alcanzar la Formalización.

Por otra parte, para Stroup et al. (2020) –desde el diseño generativo– este principio debe garantizar múltiples oportunidades para que cada participante o equipo autoevalúe sus aproximaciones y decida cuándo es pertinente o necesario contribuir con ellas al espacio común, es decir, valore su potencial para aportar a la estructura matemática al inscribirlo en el universo de todas las participaciones. Así, este es un principio que habilita el compromiso permitiendo que las propuestas individuales puedan ser reconocidas o adoptadas por el grupo.

Cabe señalar que en las perspectivas que fundamentan los principios de diseño –DNR, modelos y modelación y diseño generativo– se reconocen explícitamente las conexiones con la teoría de aprendizaje de Dienes. Más adelante ejemplificamos, a partir del caso estudiado, de qué forma este conjunto de principios propicia la progresión de aprendizaje que postula Dienes. Antes, en la próxima sección, presentaremos claves que nos permitan describir las formas en que los principios disponen al estudiantado para comprometerse con la tarea matemática de forma sostenida y personal, habilitando un espacio colectivo para el intercambio.

2.3 Estructuras del compromiso en espacios colaborativos

Nuestro abordaje hacia la dimensión afectiva es relacional; consideramos que los afectos no residen en los sujetos ni en los objetos, sino que son efecto de la movilización de los vínculos entre ellos, es decir, de la circulación (Ahmed, 2014). El principio de diseño de exploración específicamente está orientado a generar un vínculo entre quien aprende y los elementos y sujetos de la situación donde aprende; en este sentido, es la primera invitación para comprometerse con la situación.

En general, se espera que los cuatro principios favorezcan la actividad matemática comprometida, a través de la circulación de objetos que promuevan vínculos positivos con los sujetos. Esta dinámica estimula la percepción mediante la curiosidad, provocando impulsos para actuar, detonando emociones, produciendo ideas y generando confianza que fortalezca la capacidad personal de hacer las cosas. De esta manera, se visualiza el compromiso como un enlace entre la cognición y el afecto.

Los diseños de la Red consideran siempre en grupo a quien participa en la actividad matemática, lo que agrega la dimensión social para valorar la implicación de cada persona. Para ello, utilizamos el constructo de estructuras de compromiso, que alude a la constelación social, afectiva y de comportamiento que se manifiesta en cada individuo (docente o estudiante) en un contexto de actividad matemática compartida (Warner & Schorr, 2019). Según Goldin (2021) las estructuras de compromiso pueden orientar la actividad matemática asociada a los afectos, por ejemplo, para actuar hacia la satisfacción de una necesidad intelectual cuando nos emociona un descubrimiento. Con las estructuras del compromiso se ha estudiado el funcionamiento de diseños didácticos vinculando la dimensión afectiva con intereses específicos de aprendizaje en matemáticas, con estudiantes (Pierri, 2022) y docentes (Irigoyen et al., 2026; en prensa).

Dienes insistía en que las situaciones para habilitar el aprendizaje no deberían ser competitivas, sino que funcionan únicamente si el grupo colabora. Luego, el reto es crear un entorno colaborativo y de disfrute para ello (Sriraman & Lesh, 2007). Las estructuras de compromiso también posibilitan acercarse al comportamiento grupal mediando la complejidad entre comportamiento individual y colectivo (Campbell & Lawson, 2024; Campbell et al., 2024); así, permiten dar cuenta de la diversidad al interior de un grupo.

Enseguida extendemos cinco de las estructuras propuestas por Warner y Schorr (2019) para utilizarlas como categorías de análisis, a fin de reflejar la compleja relación entre la persona y la tarea dentro de un grupo:

- **Mira esto (ME):** Percibe en la tarea una ganancia o un estímulo, de inmediato o en el futuro, o bien identifica una idea prometedora; con ello genera interés intrínseco o extrínseco.
- **Esto me atrapó (EMA):** Experimenta una concentración profunda que le abstrae del resto del entorno.
- **No meterse en problemas (NMP):** Experimenta una sensación de riesgo o anticipa un conflicto, deseando evitarlo.
- **No dejar el grupo abajo (NDGA):** Actúa siguiendo un deseo subyacente de contribuir positivamente con el grupo y mantenerlo integrado.
- **Completar la tarea (CT):** Siente la responsabilidad o la obligación de completar (bien) el trabajo que asumió, lo que impone un ritmo por encima del disfrute.

Cada estructura registra que el compromiso se constituye de forma diversa dentro de un grupo, aunque la actividad matemática sea compartida. Cuando participa un grupo heterogéneo de personas –estudiantes o docentes– puede comprometerse o resistirse desde la curiosidad, la frustración, el deseo de que las cosas funcionen, la vulnerabilidad y la confianza (o desconfianza) en sus habilidades. En nuestras experiencias de diseño proporcionamos un espacio para que el grupo pueda acercarse alternadamente a lo concreto y a lo abstracto, adquirir certezas desde la experiencia, dudar, probar, conflictuarse cuando aquello no resulta como se esperaba, replantear un rumbo y generar criterios de validación.

Al postular la supremacía de una razón artificialmente separada de la emotividad e insistir en imaginarios de competencia y éxito académico, la escuela no resulta un espacio de confianza para explorar (hooks, 2022a, 2022b; Pérez-Bustos, 2015; Sánchez-Sáinz, 2021). Las condiciones de la mayoría de los sistemas educativos son inequitativas por causas estructurales, como el género, la clase, la etnia o la discapacidad, que se incrementan al tener pretensiones de universalidad que niegan y combaten la heterogeneidad en las aulas (hooks, 2022b). Ng (2021) resalta que las estructuras del compromiso ofrecen la posibilidad de observar estas variables contextuales en el seguimiento de

individualidades durante la actividad matemática, lo que favorece una práctica investigativa más sensible.

Hasta ahora, hemos hecho este recorrido teórico-conceptual a fin de elegir una ruta metodológica de investigación educativa para el codiseño que posibilite la actividad matemática comprometida, misma que describimos en el siguiente apartado.

2.4 Diseño multiseriado de grupos diversos para grupos heterogéneos

La investigación basada en diseño multiseriado (Lesh et al., 2018) es un enfoque robusto para el diseño didáctico, aprovechado en las últimas décadas tanto en matemáticas como en ciencias. En particular, resulta conveniente para el diseño colectivo con grupos de múltiples perfiles (Sidik et al., 2023). En este estudio adoptamos esta metodología con enfoque colaborativo, para responder a contingencias y singularidades en un aula (figura 1). La metodología se organiza en ciclos que se desarrollan en un proceso iterativo. A continuación, se describen las fases que integran cada uno de ellos.

2.4.1 Fases de un ciclo de diseño

En la fase de análisis prospectivo, una idea inicial propuesta por un grupo multidisciplinario se trabaja hasta convertirse en un prototipo implementable. Este proceso implica delimitar una situación problemática que, al enfrentarla, provoque la necesidad de utilizar conocimiento matemático previo y refinarlo hacia un interés de aprendizaje. Con la intención de apresurar el compromiso con la actividad matemática se recurre a la base conceptual, en este caso constituida por los principios de diseño (sección 2.2), con ello se moldea la propuesta. El diseño del producto requiere estabilizar el prototipo, esto implica desarrollar materiales concretos, secuenciar tareas y plantear preguntas detonadoras que provoquen y extiendan formas de pensar conducentes a la resolución. La validación en contexto de uso sucede cuando este prototipo se enfrenta a miradas expertas en la teoría y la práctica que imaginan escenarios concretos para su funcionamiento. Posteriormente, se pone a prueba con otros actores (docentes y estudiantes) y se analiza a la luz de las estructuras de compromiso. El proceso descrito no sucede necesariamente de forma lineal ni fragmentada.

En la fase del análisis retrospectivo los hallazgos de esta implementación pueden motivar ajustes en el prototipo, por ejemplo, para delimitar o expandir la

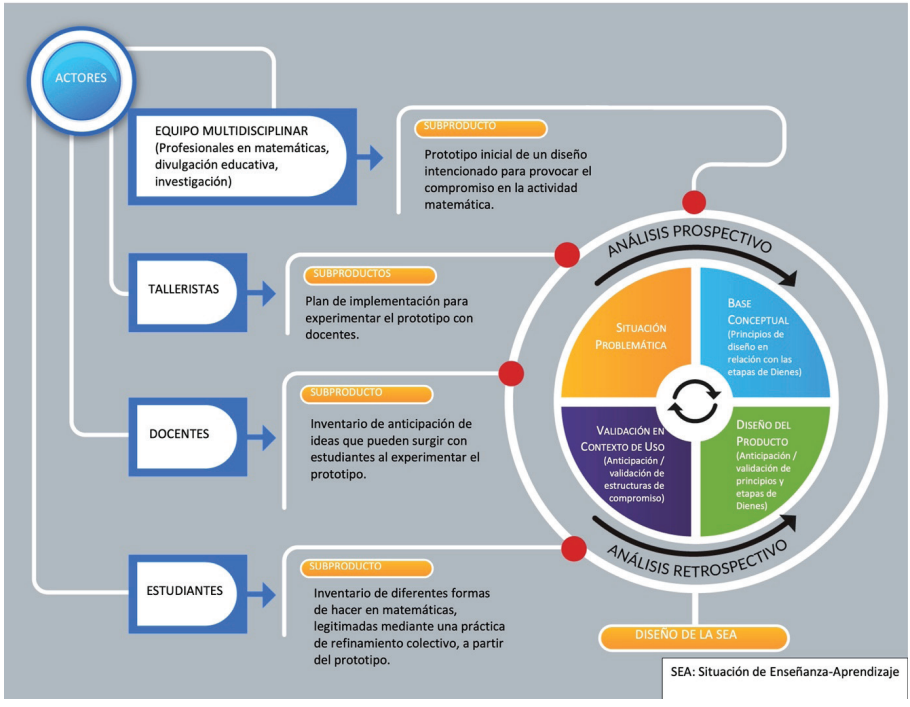


Figura 1. Diseño multiseriado de Situaciones de Enseñanza Aprendizaje de la Red.

intención de aprendizaje y establecer conexiones con otros objetivos curriculares. En esta fase se visitan los cuatro momentos (situación problemática, base conceptual, diseño del producto, validación en contexto de uso). Tanto en la fase prospectiva como en la retrospectiva, se considera la forma en que los principios de diseño promueven la progresión de aprendizaje propuesta por Dienes, para anticipar o validar, respectivamente. Más adelante se mostrará un ejemplo de cómo esto puede hacerse (tabla 2).

2.4.2 Ciclos de diseño multiseriado y producto final

En cada ciclo de diseño participan actores distintos, que informan para robustecer y comprender mejor el funcionamiento del prototipo y generan subproductos relativos a ello (Lesh et al., 2018). En el segundo ciclo, un grupo de talleristas (no

necesariamente integrantes del grupo multidisciplinar) elabora un plan de implementación del prototipo orientado a docentes. Además, el grupo de docentes mejora sustancialmente el prototipo al añadirle un inventario de soluciones, que ayudará a anticipar escenarios donde el estudiantado revele su compromiso, disfrute y colabore. El tercer ciclo sucede cuando el prototipo se implementa en el aula por cada docente, para experimentar y recoger las formas de pensar del estudiantado sobre la situación, ampliando sus posibilidades en el aula a partir de esta experiencia.

El producto final del proceso es una situación de enseñanza–aprendizaje (SEA) para provocar una actividad matemática comprometida, cristalizada en un documento que recupere todos los subproductos del proceso, los recursos, una descripción de los momentos de actividad como pauta para implementarla y, un listado de orientaciones didácticas para que cada docente pueda realizar adaptaciones convenientes a su contexto.

En este apartado hemos construido un engranaje de principios de diseño para provocar actividad matemática comprometida hacia un aprendizaje progresivo, que pueda observarse haciendo uso de las estructuras del compromiso. Además, hemos referido el proceso de creación y estudio como una adopción de la metodología de diseño multiseriado, orientada a trabajar con grupos diversos y atendiendo la heterogeneidad de las aulas. Para ilustrar el potencial de este ensamblaje, en las siguientes secciones presentaremos un estudio de caso con énfasis en el ciclo de experimentación con docentes.

3. PARTICIPANTES Y MÉTODOS DE RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

En la fase de análisis prospectivo participaron 10 personas con perfiles de docencia, divulgación, investigación en matemáticas y en educación matemática. Para la validación en el sistema de uso participaron 2 personas en rol de talleristas, ambas con perfil de formadoras de docentes en matemáticas y ciencias, 2 personas con perfil de investigación educativa que realizaron observación no participante y 28 docentes pertenecientes a una misma escuela secundaria suburbana en Michoacán, México, en las áreas de matemáticas, ciencias, arte y educación física. El grupo docente experimentó el prototipo de la SEA como "alumnado" y, posteriormente, aportó claves para mejorarlo. Después, docentes implementaron con estudiantes e hicieron llegar relatorías. En este documento nos hemos enfocado en el profesorado. En la fase de análisis de análisis

retrospectivo, participamos quienes presentamos este estudio, con apoyo de una tercera persona para la codificación.

Durante la implementación, se recolectaron las producciones escritas de docentes (en equipos), quienes experimentaron tres momentos (tabla 1) en dos sesiones de 2 horas cada una. Se transcribieron audios y observaciones, además, se describieron los registros de sus acciones en video. Dos integrantes del grupo de investigación revisaron los datos y seleccionaron segmentos donde identificaron contribuciones matemáticas para la tarea, así como aquellos donde se manifestaron reflexiones que vinculaban el prototipo de la SEA con la práctica docente. Dichos segmentos se codificaron para identificar evidencias de la activación de las estructuras de compromiso propuestas por Warner y Schorr (2019) según se extendieron para este artículo (sección 2.3), o bien para atribuir la presencia de alguno de los principios de diseño (sección 2.2). Después de llegar a un acuerdo sobre la codificación, revisado por una tercera persona del grupo de investigación en caso de discrepancia, los segmentos que pasaron por este proceso de selección constituyeron el conjunto base de datos para este estudio.

Posteriormente, se agregaron códigos en aquellos segmentos donde se identificó alguna de las etapas de aprendizaje de Dienes, siguiendo un proceso de etiquetado similar al anteriormente descrito, contrastando dos propuestas individuales y conciliando con una tercera opinión en caso necesario. Para el análisis, la autora y el autor agruparon los segmentos en correspondencia con los momentos del diseño (tabla 1), respetando la organización de docentes en equipos durante la actividad y la secuencia de aparición en el tiempo.

En todo el proceso fue necesario regresar a la revisión de transcripciones, videos y producciones escritas, a veces de forma iterativa. Damos un ejemplo de ello. Los segmentos donde se argumentan cambios en los puntajes asignados, después de realizar el análisis de los datos, fueron seleccionados por su contribución matemática. En un caso donde se agregaron puntajes a secciones del juguete que no se habían considerado (las intersecciones entre regiones), los códigos de estructuras de compromiso coincidieron entre dos integrantes del grupo de investigación, pero se requirió una tercera visión para establecer un acuerdo sobre el principio de diseño relacionado. En un siguiente momento, regresaron dos personas sobre estos segmentos para codificar la etapa de aprendizaje presente.

3.1 Diseño de la SEA "Reglas justas"

Una virtud particular del análisis prospectivo es que, provee momentos donde es posible tomar decisiones para intensificar la presencia de los principios de diseño, mientras que el análisis retrospectivo nos permite recuperar indicios sobre su funcionamiento y las enunciaciones del profesorado donde se reconocen ideas matemáticas y estructuras de compromiso que están ancladas a alguno de estos principios. La SEA "Reglas justas" es resultado del proceso descrito en la figura 1. Presentamos aquí algunos momentos de la fase prospectiva del segundo ciclo de diseño que permitieron anticipar su funcionamiento, en tanto que la implementación informó cómo el prototipo convocó la actividad matemática comprometida. Describiremos partes de la fase retrospectiva con mayor detalle.

3.1.1 Fase de análisis prospectivo

El proceso de diseño de la SEA comenzó cuando una integrante de la Red, con perfil de investigadora en educación matemática y formadora de docentes, propuso a un grupo multidisciplinar de diseño una idea antes explorada (Alvarado et al., 2017): entregar a equipos de estudiantes una pelota con una cauda seccionada en tres colores (rojo, azul y amarillo), invitando a diseñar un juego que les resulte entretenido y les parezca justo. En este planteamiento la situación requería abordar contenidos estadísticos en educación secundaria y promovía conexiones entre asignaturas. Un subgrupo de la Red se propuso extender y potenciar las conexiones disciplinares y propiciar el compromiso con la actividad matemática, asegurando la instrumentación de los principios de diseño.

El grupo decide confeccionar dos juguetes de apariencia similar (figura 2), usando distintos materiales para variar sus propiedades físicas y, en consecuencia, su comportamiento. En uno, la pelota es tejida y rellena de semillas, mientras que, en el otro, la pelota es de béisbol. Estas dos corporizaciones promueven la emergencia de *Estructura matemática* al habilitar la comparación de regularidades durante el juego y potenciar con ello conexiones disciplinares (por ejemplo, hacia la física); al promover una conversación entre los equipos al final de la experiencia, se podrían analizar similitudes y diferencias entre el comportamiento de los dos juguetes.

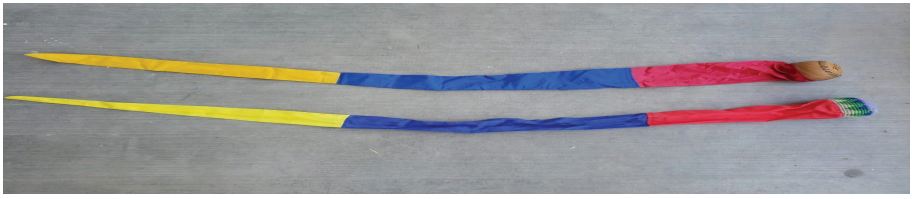


Figura 2. Las dos pelotas con cauda utilizadas en "Reglas Justas".

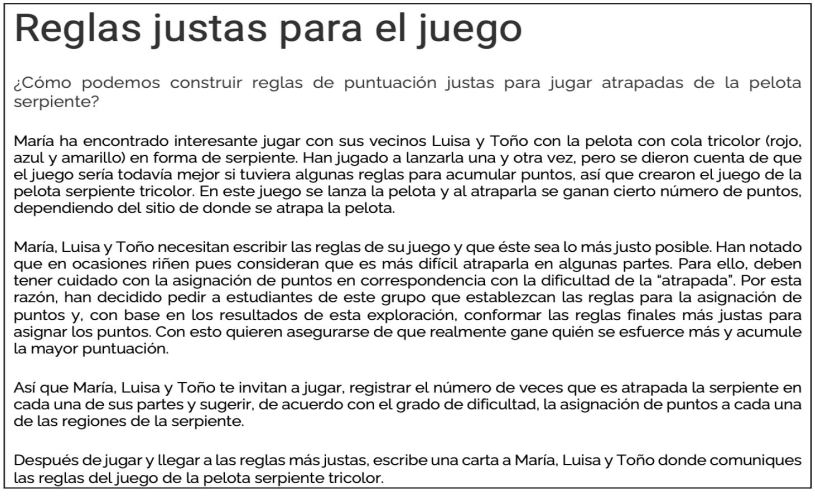
La situación queda propuesta en los tres momentos descritos en la tabla 1.

Tabla 1. Descripción de los momentos de la situación "Reglas Justas"

Momentos	Tareas que realizan los equipos	Consideraciones para quien implementa
M1. Exploración libre	Observar el juguete y distinguir sus partes: pelota, regiones roja, azul y amarilla. Atrapar de distintas maneras el juguete, es decir, jugar sin reglas explícitas, lo que permite familiarizarse con su comportamiento en distintos lanzamientos.	Se entregan los juguetes sin hacer ver que son dos tipos.
M2. Alcanzar un objetivo compartido	Reconocer la necesidad de diseñar un juego que resulte entretenido y parezca justo, conectando con la experiencia personal. Elegir una forma de lanzar y atrapar y, con ello, establecer reglas y proponer una asignación de puntos por atrapada en función de las partes del juguete. Argumentar por qué su propuesta es viable.	Cada equipo mantiene su juguete.
M3. Diseñar y realizar un experimento	Planear y ejecutar un diseño de experimentos. Establecer criterios de evaluación para sus propias reglas. Sistematizar el registro y análisis de la información incorporando elementos estadísticos que permitan sugerir patrones, hasta encontrar una asignación justa de puntos por atrapada.	Se revela que hay dos pelotas diferentes y se conversa sobre sus comportamientos.

En cada uno de los momentos (tabla 1), podemos reconocer la intencionalidad de los principios de diseño:

M1) Al proporcionar un objeto compartido (el juguete) y tiempo suficiente se promueve un espacio para reconocer sus atributos y posibles comportamientos regulares, que motiven a imaginar formas de jugar con él; esto será posible a través del despliegue de tiros y destrezas; con esto se detona el principio de *Exploración*.
M2) Para crear la necesidad de diseñar un juego que resulte entretenido y parezca justo, se comparte con los equipos un relato (figura 3). Para establecer la forma de tirar, los equipos son libres de volver a jugar de forma organizada; con ello se espera que reconozcan y amplíen formas en que el juego sea entretenido, al tiempo que notan criterios de justicia, incluyendo que los tiros sean realizables para todas las singularidades corporales presentes en el equipo. Este proceso habilita los principios de *Necesidad intelectual* y *Emergencia de estructura matemática* en algunas de sus formas. Hasta este momento los equipos no son conscientes aún de que hay dos variantes de juguetes.



Reglas justas para el juego

¿Cómo podemos construir reglas de puntuación justas para jugar atrapadas de la pelota serpiente?

María ha encontrado interesante jugar con sus vecinos Luisa y Toño con la pelota con cola tricolor (rojo, azul y amarillo) en forma de serpiente. Han jugado a lanzarla una y otra vez, pero se dieron cuenta de que el juego sería todavía mejor si tuviera algunas reglas para acumular puntos, así que crearon el juego de la pelota serpiente tricolor. En este juego se lanza la pelota y al atraparla se ganan cierto número de puntos, dependiendo del sitio de donde se atrapa la pelota.

María, Luisa y Toño necesitan escribir las reglas de su juego y que éste sea lo más justo posible. Han notado que en ocasiones riñen pues consideran que es más difícil atraparla en algunas partes. Para ello, deben tener cuidado con la asignación de puntos en correspondencia con la dificultad de la "atrapada". Por esta razón, han decidido pedir a estudiantes de este grupo que establezcan las reglas para la asignación de puntos y, con base en los resultados de esta exploración, conformar las reglas finales más justas para asignar los puntos. Con esto quieren asegurarse de que realmente gane quién se esfuerce más y acumule la mayor puntuación.

Así que María, Luisa y Toño te invitan a jugar, registrar el número de veces que es atrapada la serpiente en cada una de sus partes y sugerir, de acuerdo con el grado de dificultad, la asignación de puntos a cada una de las regiones de la serpiente.

Después de jugar y llegar a las reglas más justas, escribe una carta a María, Luisa y Toño donde comuniques las reglas del juego de la pelota serpiente tricolor.

Figura 3. Relato "Reglas justas para el juego".

M3) Con la finalidad de gestionar la información para asignar los puntos dependiendo de dónde se atrapa la pelota, hasta encontrar un esquema que parezca justo, se motiva un incremento de la actividad matemática. Este momento trae consigo los cuatro principios de diseño, al convocar *Necesidades intelectuales* en un ejercicio de *Exploración* con reglas, que a su vez requerirá registro y análisis sistemático de datos que sugieran regularidades (*Emergencia de estructura matemática*) y criterios de *Autoevaluación*

para sus propias reglas. Cabe señalar que este momento también permite hacer las adecuaciones necesarias para que el juego sea más emocionante.

A partir de esta estructuración en momentos, el prototipo se estabilizó en un documento con la descripción de la SEA y los materiales, así como las orientaciones didácticas; este sirvió como insumo para que el grupo de talleristas realizara un plan de implementación con docentes de diferentes asignaturas, organizados en equipos. Aquí se introdujo una variación: que cada integrante del equipo dedicara tiempo para experimentar a profundidad dos ideas de juego con pelotas distintas, o bien una en dos ambientes. Así, se habilitó la Comparación para intensificar el principio de *Emergencia de estructura matemática*. La modificación fue la siguiente: dado que en el momento 1 se entregaron 2 juguetes distintos sin que esto fuera evidente para los equipos, en el momento 3 – en lugar de solo mencionarlo – los equipos intercambiaron el juguete, el juego y los puntajes convenidos, manteniendo el propósito de poner a prueba las reglas y, de ser necesario, realizar ajustes. Con la finalidad de que la idea traída de otro equipo se conservara y que las conclusiones resultaran útiles, se decidió que también se intercambiaría una persona de cada equipo.

En esta fase se realizó un ejercicio de anticipación para valorar el potencial de cada principio de diseño para provocar el aprendizaje matemático progresivo que sugiere Dienes con sus etapas (sección 2.1). Hemos incluido la tabla 2 con ejemplos de estos cruces para ilustrar la interacción entre los principios y las etapas.

Tabla 2. Ejemplos de interacción entre principios de diseño y etapas propuestas por Dienes.

	Exploración	Necesidad intelectual	Emergencia de la estructura matemática	Autoevaluación
Interacción sin reglas	Propone formas de relacionarse con el juguete	Tiene curiosidad por extraer rasgos del juguete	Nota rasgos matemáticos en el juguete	Conoce mejor el juguete
Interacción con reglas	Propone formas de jugar que permitan asignar puntos de manera justa	Establece reglas para un juego compartido	Nota regularidades que informan la asignación de puntos	Establece reglas que sean comprensibles
Comparación	Experimenta otras formas de jugar con otro juguete y propone formas de estudiar la justicia	Cuantifica tiradas y resultados para entender la dificultad	Establece relaciones entre los juguetes, su uso y las asignaciones de puntos	Reconoce la justicia incluso con diferentes reglas
Representación	Busca apoyos para registrar y trabajar en colectivo	Selecciona un formato apropiado para analizar los datos	Conecta distintas formas de presentar la situación	Toma decisiones para explicar mejor
Simbolización	Traduce los registros de un mismo experimento a símbolos, para considerar distintas asignaciones	Trabaja con porcentajes para facilitar la interpretación	Conecta frecuencias y probabilidades	Emplea la probabilidad para valorar la justicia
Formalización	Establece un dominio donde su asignación es justa	Busca formas de lidiar con la incertidumbre	Argumenta en qué sentido matemático es justa su asignación de puntos	Amplía significativamente los experimentos para aumentar la certeza

Como parte de la validación, el documento fue retroalimentado por profesionales en práctica docente y teoría didáctica disciplinar. Con ello se completan los elementos que integran la fase de análisis prospectivo.

3.1.2 Fase de análisis retrospectivo

La implementación se llevó a cabo con docentes de diversas áreas, lo que permitió emular las condiciones de heterogeneidad en el aula; además, fue propicio para motivar la integración disciplinar sugerida por el marco curricular vigente. En la experiencia, los distintos equipos buscaron un equilibrio entre dificultad, justicia, inclusión y disfrute. La observación de las estructuras del compromiso permitió identificar puntos críticos en la progresión de ideas matemáticas e informó sobre un aprendizaje asequible y disfrutable, que respondió favorablemente a la diversidad.

Durante el segundo momento, cada equipo elaboró una propuesta de asignación de puntos para estructurar su juego, indicando las condiciones de lanzamiento, el espacio para hacerlo y las formas en que las personas participarían (Tabla 3). De esta manera, fue posible activar el principio de la *Emergencia de estructura matemática* a partir del uso de distintas pelotas y propuestas de juego. Con esto, se hace evidente el potencial de este diseño para convocar una diversidad de ideas y formas de hacer en matemáticas.

Esto fue patente en el trayecto seguido por el equipo F que, en la *Exploración* del primer momento, notó que es más fácil atrapar el juguete por la pelota. Una observación geométrica les llevó a pensar que la sección roja, pegada a la pelota y a la vista la de mayor área, era la segunda más fácil de atrapar y que esta dificultad se distribuiría linealmente a lo largo de la cauda (Interacción sin reglas). Con ello, consideraron restar puntos cuando se atrapa la pelota, a fin de hacer el juego más interesante al eliminar la región más sencilla e imprimir dificultad en la sección roja. Sin embargo, el equipo decidió no seguir este camino para que las reglas no incluyeran un castigo al atrapar el juguete ni tener que lidiar con números negativos (NMP), aunque siguió haciéndose preguntas sobre la dificultad ya con las reglas que establecieron (Interacción con reglas).

Tabla 3. Diversidad en la estructuración del juego según los distintos equipos de docentes.

Equipo	Puntuación por regiones del juguete, de la pelota hacia la punta	Condiciones de tiro y espacio	Participación
	Juguete con pelota de béisbol		
A	Asignación lineal: 5, 10, 15, 20.	Rebote en una pared a modo de frontón, con línea de tiro a 3 m.	Torneo con sets de 10 minutos, una persona tira, dos atrapan y otra cuenta. Lanza enseguida quien atrapó.
B	Asignación lineal inversa salvo la pelota: 0, 4, 3, 2. Intersecciones: 1.	Lanzamiento hacia arriba sin girar, se atrapa dentro de un área circular.	Lanzamiento por turnos. Todas pueden atrapar el juguete.
C	Asignación lineal: 1,2,3,4.	Lanzamiento libre: girando, rebotando en el piso o en parabólico. Dos equipos se colocan enfrentados.	Lanzamientos alternados por equipos. Sets de 20 minutos.
	Juguete con pelota tejida rellena de semillas		
D	Asignación lineal: 1,2,3,4. Atrapada de dos o más franjas: media aritmética de ellas.	Giro con fuerza y lanzamiento vertical, dentro de un círculo amplio.	Lanzamiento por turnos. Cada jugador tiene un área asociada y si cae en ella puede atrapar.
E	Asignación lineal: 1,2,3,4.	Lanzamiento vertical, hasta 4 m, enrollando el juguete, dentro de un círculo.	Lanzamiento por turnos. Todas pueden atrapar. Hay un premio.
F	Asignación lineal: 0,1,2,3. No atrapada: -1 Dos o más franjas: se repite.	Giro tomando la franja azul y tiro vertical hasta 3m.	En una ronda, alguien lanza y el resto atrapa por turnos. Cada persona lanza una ronda. Si hay empate, se alternan turnos y quien no atrape en la franja amarilla pierde.

En el tercer momento, se logró que la recolección de un "buen número de datos" y su sistematización ayudara a establecer una mejor puntuación (Comparación), propiciando una conversación sobre la ley de los grandes números. Los equipos modificaron su puntaje a partir de un registro sistemático de 100 lanzamientos que organizaron en tablas y gráficas (Representación), con ello buscaron que el puntaje correspondiera con las frecuencias de atrapadas, como indicador de dificultad.

El equipo F distribuyó equitativamente las tiradas entre 5 personas para que la destreza no fuera un sesgo. Encontró información que le llevó a contrastar la hipótesis informada por su intuición geométrica y rechazarla. Un integrante declaró:

> P1: "Ayer se nos ocurrió restar puntos al atrapar la pelota para que fuera más difícil agarrarla en la parte roja que justo está pegada a ella. Al final decidimos alejarnos de esa idea porque era un castigo. Pero hoy, al jugar y estar apuntando, nos dimos cuenta de que la parte roja ya era de por sí la más difícil".

Si bien al inicio creen que un puntaje negativo modificará la forma de atrapar, el proceso experimental les lleva a observar que, aun con las reglas que eligieron, a la región más fácil le sucede justo la más difícil por el peso de la pelota, lo que contradice su intuición; así, deciden invertir la asignación de puntos e incluir las intersecciones, pues resulta casi tan frecuente atraparla de ahí como de la parte amarilla. Buscan que la asignación corresponda a la probabilidad que les sugieren las frecuencias y esta queda: 0 la pelota, 4 la franja roja, 3 la azul, 2 la amarilla y 1 las intersecciones (Simbolización). Decidieron además restar un punto al no atrapar y afrontar los cálculos con números negativos, porque les permitía marcar la diferencia entre atrapar y no atrapar, lo que les resultaba significativo en términos de justicia y a partir de lo que registraron en sus tablas.

Además de la *Estructura matemática* presente para modelar, este testimonio pone en evidencia la sorpresa (ME) que les lleva a refinar su modelo frente a una decisión que habían elegido evitar (NMP). En esta búsqueda de los puntajes, la *Necesidad intelectual* de cuantificar está presente. Posteriormente, una *Necesidad intelectual* de certidumbre conduce a perseguir la idea de que en la medida en que se incrementen las tiradas tiende a estabilizarse la proporción de las atrapadas, impulsando la idea de probabilidad (Formalización).

Es interesante notar que el equipo B desde un principio asignó puntajes con consideraciones similares (tabla 3), pero anticipó que dar 0 puntos por no atrapar

el juguete o hacerlo de la pelota, modificaría la forma de sujetar. En su caso, la experimentación justificó su asignación. En cambio, el equipo F solo supuso que la pelota era lo más fácil, sin anticipar que restar 1 punto por no atrapar haría que eso fuera más deseable que fallar; el equipo F contrasta su producción con la del B (Comparación) y conjetura que los puntajes negativos sí producen una diferencia y, que habría sido más robusto su análisis con un experimento sobre ello, respondiendo al principio de *Autoevaluación*. Al refinar las reglas, la estadística fue más que una herramienta para validar, dirigiendo los esfuerzos para conseguir reglas justas y divertidas, con el aprendizaje de que realizar cambios en las reglas modifica los resultados esperados.

En los diversos momentos de exploración y registro fue posible observar que los equipos estaban inmersos en la dinámica, ofreciendo resistencia a regresar al aula porque:

> P2: "Nos olvidamos por un momento de que somos adultos" (EMA).

A partir del intercambio del momento 3, la atención se centró en verificar si la asignación de puntos propuesta por otro equipo –usando el otro juguete y sus reglas– es justa, lo que da un sentido distinto a la experimentación sistemática como práctica estadística para producir información útil. El consenso de los equipos fue profundizar en la probabilidad frecuencial valorando la exploración con grandes números, dando mayor fiabilidad a la experimentación. Adicionalmente, esto motivó un distanciamiento crítico con la propuesta del propio equipo; esto se ve reflejado cuando una docente expresa:

> P3: "Yo puedo ver los datos diferentes por haberlos construido con otro equipo y puedo regresar para ver si queremos de verdad estas reglas o no" (ME).

Algo latente en el diseño del taller fue reducir la competencia y que esto fuera notado por el grupo de docentes, retomando las ideas de colaboración propuestas por Dienes (Sriraman y Lesh, 2007) y hooks (2022a) para superar las formas unidimensionales de pensar, ser y vivir. El intercambio en el momento 3 fomenta la colaboración y reduce la tensión de conseguir las "mejores reglas del salón" al cooperar con otro equipo para poner a prueba sus reglas (NDGA); sobre esto, un profesor comenta en plenaria sus interpretaciones pedagógicas rescatando

algo que encuentra como esencial en la experiencia con un grupo multidisciplinar de docentes:

> P4: "Algo que veo en esta actividad que vivimos es que nos apartamos del sentido de la competencia para ir a lo común; veo que la propuesta es promover el sentido colaborativo y mutualista en el aula. Para eso, construimos una gramática común. Aquí tenemos todos distintas formaciones y culturas: tener la misma gramática pedagógica nos permite tomar acuerdos".

El principio de *Autoevaluación* se presenta en la voluntad compartida por todos los equipos para establecer criterios de justicia que, en plenaria, se describieron como proporcionalidad, sistematización y aplicabilidad universal. En este último criterio emerge el deseo de que todas las personas se impliquen en el juego, lo que lleva a tomar decisiones para que sus capacidades motrices no sean una barrera. Esto queda manifiesto en el siguiente testimonio:

> P5: "En mi equipo decidimos no dar cero al atrapar la pelota [que es lo más fácil] para que más personas pudieran ganar puntos y sentirse parte del juego, esto no modifica mucho la dinámica [los resultados a partir de los puntajes]" (NDGA).

Es interesante observar que también se invoca el análisis de la distribución de las atrapadas al jugar, para sopesar si habría un cambio sustancial al mantener puntajes positivos. En esta misma línea, otro equipo ajustó los estilos de tirada –con ambas pelotas– para asegurar que una participante con movilidad reducida en la cadera tuviera oportunidad justa de conseguir puntos, siendo su forma de verificación el análisis de la distribución de puntos entre todas las personas para revisar –a partir de las reglas– si el puntaje de alguna persona se veía atípico (Formalización, *Emergencia de la estructura*, NDGA).

Al finalizar el tercer momento se abrió un espacio para comentar de forma colectiva todas las propuestas. Resultó natural para los equipos preguntarse si las reglas y condiciones serían útiles con ambos juguetes; con ello notaron que la pelota tejida da mayor oportunidad a personas con menor destreza, pero su imposibilidad de rebotar no le permite utilizarse a modo de frontón. En contraste, los equipos también reconocieron que, aún con la misma pelota, formas distintas de lanzar inciden en distintas asignaciones justas de puntos, es decir, asociadas con la complejidad de atrapar en cada región del juguete. Ante la

variabilidad de juguetes y formas de jugar, el método –compuesto por el diseño experimental, la sistematización y el análisis estadístico– fue reconocido como una herramienta poderosa para valorar la justicia de cualquier asignación (Comparación, *Emergencia de la estructura matemática*).

Las y los docentes conversaron sobre diversas propuestas de juego y estrategias de análisis de información. Por ejemplo, el equipo D sugirió enumerar en su aula todas las formas posibles de atrapar la pelota con cauda para asignar puntos, atendiendo un contenido curricular sobre combinatoria. Esto surgió porque, en ocasiones, lograron atraparla de dos partes de manera simultánea, o bien, de la costura entre dos regiones (ME). La media aritmética de los puntos asignados a cada región resultó útil para concluir esta tarea (CT).

Además, se valoró el dar tiempo suficiente para que las ideas se elaboren, a partir de sus vivencias con la realidad, y sean externadas en una conversación más amplia. Aquí, el profesorado identificó el principio de *Exploración* y la forma en que aporta para que diferentes maneras de hacer cobren vida, incluso aquellas semielaboradas o incipientes, que siempre pueden decir algo y abrir otras preguntas.

El grupo docente reflexionó también, sobre la importancia de moverse hacia el lugar del alumnado, que puede implicarse en retos de formas distintas a las que comúnmente se eligen al momento de enseñar. El siguiente testimonio lo cuenta:

> P6: "...la dinámica fue diferente a como esquematizamos mentalmente un taller de actualización, de tal suerte que fuimos inmersos en el papel de estudiante, pero con las conexiones de profesor, de guía [...] Debo decir que pudimos experimentar cómo a través del juego, la motivación, los espacios al aire libre y el equipo diverso en cuanto a áreas de conocimiento, podemos reorientar nuestra práctica docente".

Al interactuar con sus pares y con la situación, se habilitaron conexiones de las matemáticas con las asignaturas que imparten, lo que les motivó a sugerir adaptaciones y asumir su rol en el diseño y la orquestación en clase. Por ejemplo:

- Explorar la mezcla de colores en una clase de arte considerando las combinaciones que resultan al atrapar simultáneamente el juguete de dos regiones, para estudiar el círculo cromático.
- Proponer patrones geométricos para la confección de la cauda que incidan en la variación de las áreas y, en consecuencia, en las probabilidades para

atraparla en una región. Esto generaría interacciones entre la matemática y el arte.
- Aprovechar que se tienen dos objetos con pesos diferentes en las pelotas para posibilitar la comparación y el estudio de algunos tópicos de física, como la caída libre y la fuerza.
- El codiseño multiseriado es una invitación a generar lazos entre distintos actores que desean incidir en la transformación de la dinámica de las aulas, a través de un diseño colectivo próximo al estudiantado, su contexto y sus necesidades de formación. Tal como una docente lo expresa:

> P7: "Reglas justas nos conducen a asumirnos como diseñadores de experiencias de aprendizaje, nos ofrece la posibilidad de cambiar esa visión del profesor que enseña desde su escritorio una planeación hecha de manera general [... para] migrar hacia la figura de un diseñador que puede crear materiales significativos para el conocimiento, con base no sólo en su propia visión, sino también con la de sus pares; revelándose su situación de investigador y sistematizando todo lo observado durante su amplia experiencia con los estudiantes y en favor de ellos y su aprendizaje. [... Como] facilitadores, tendremos la oportunidad de observar tanto en el proceso, como en la plenaria, el reflejo de factores como la edad, la cultura de los estudiantes, los valores de la comunidad, entre otros, que nos actualizarán la visión en cuanto al contexto y reorientarán nuestra práctica educativa a fin de que la diseñemos más cercana a los estudiantes."

El grupo discutió reiteradamente para entender la justicia en el contexto del juego. Los equipos manifestaron su deseo porque el juego permitiera participar a todas las personas, diera oportunidad –equitativamente– de experimentar la sensación de logro y ofreciera criterios claros para dirimir controversias. Ante esto, el profesorado reconoce que las matemáticas ayudan para comparar distintas jugadas, tomar decisiones para asignar puntos y, gracias a su poder predictivo, argumentar que las reglas mantendrán las condiciones de justicia en posteriores jugadas. Para dejar claras estas características deseadas en el juego, se utilizan tablas, diagramas y otras representaciones.

En síntesis, el sentido de justicia se traduce en que el juego ofrezca las mismas oportunidades para quienes participan, que la asignación de puntos sea proporcional a la dificultad y el esfuerzo y que, además, sea claro qué esperar ante las jugadas venideras. Con ello, el grupo observa que la actividad

armoniza con contenido curricular de matemáticas en educación secundaria, promoviendo significado en el aprendizaje y colaboración entre docentes de distintas disciplinas para implementarla con estudiantes.

Hasta aquí concluye la fase de análisis retrospectivo que, además de profundizar en la comprensión del funcionamiento en términos de la base conceptual, detona conexiones con otros objetivos curriculares más allá de las matemáticas.

En la fase de análisis prospectivo hemos descrito la forma en que se anticipó la activación de los principios de diseño didáctico. En el análisis retrospectivo hemos dado cuenta del funcionamiento de los principios didácticos y la manera en que provocaron la actividad matemática comprometida en un grupo diverso. Además, en la discusión con el grupo docente se recuperaron reflexiones que dan cuenta de cómo se asumen en el diseño colectivo y el valor que encuentran en experimentar la situación de aprendizaje en un grupo diverso, así como de imaginar escenarios y formas de orquestar la actividad en el aula.

4. DISCUSIÓN

El ejemplo presentado ilustra el potencial del engranaje de principios para guiar el diseño con intención de provocar actividad matemática comprometida. La experiencia sugiere que el principio de *Exploración* habilita para iterar, profundizar y valorar los intentos como activos de un proceso de aprendizaje impulsado por la *Necesidad intelectual*. Esta condición es propicia para comprometerse en el reto y posibilitar la circulación de ideas matemáticas, como las identificadas en "Reglas justas" a la luz de las estructuras del compromiso.

En armonía con los planteamientos teóricos, en "Reglas justas" hay un espacio para crear un juego que convoca la imaginación de quienes participan y, en paralelo, requiere planear una ruta experimental activando las matemáticas que nos permitan garantizar la justicia. Para ello, surge una gran variedad de estrategias para recuperar información, analizarla y justificar las decisiones. La sensibilidad de quien implementa para dar espacio a que estas ideas se presenten y se desarrollen, aun cuando no estén terminadas, legitima las formas de hacer que son funcionales para quienes participan y, a través de la conversación, permite refinarlas, extenderlas y formalizarlas hacia los intereses de aprendizaje matemático.

En "Reglas justas", la Representación y la Simbolización aparecen una vez que han cobrado sentido, lo que permite incluir a personas dentro de un amplio rango de conocimientos y disposiciones en matemáticas, como observan Sriraman y Lesh (2007). Esto da cuenta de que la búsqueda del balance entre los principios de *Exploración* y *Emergencia de la estructura matemática* habilita la profundización, manteniendo la apertura para la diversidad de ideas.

5. CONCLUSIONES

Ante nuestra pregunta, ¿qué condiciones para el diseño didáctico colectivo –en grupos de perfiles diversos–, promueven la actividad matemática comprometida para convocar la diversidad de ideas y formas de hacer?, proponemos procesos de diseño que produzcan artefactos didácticos flexibles y adaptables para las singularidades en cada aula. Al darles vida, es necesario generar condiciones propicias para el intercambio desde el principio de *Exploración*, ofreciendo una vivencia interesante para cada persona involucrada.

A través de la implementación de 29 diseños de secuencias en educación básica y 16 en media superior, la Red ha asumido el riesgo de que una experiencia directa, que resulte demasiado próxima, deje de lado intereses de aprendizaje disciplinar. En "Reglas justas" esto puede ocurrir al jugar sin preocuparse por la justicia y, de manera implícita, dejar de lado las matemáticas que permiten llegar a ella. De igual forma, reconocemos que el mero conocimiento, desapegado del contexto, puede levantar barreras artificiales; por ejemplo, si en "Reglas justas" se proporcionan tablas de distribución de puntos para analizarlas sin jugar.

Docentes que participaron en los laboratorios que la Red ha implementado dejaron evidencia de que la vivencia les dispuso a asumir un rol activo en un diseño y revisar su práctica para acercarse a su alumnado, como ejemplifica el testimonio de una docente que hemos incluido en el análisis retrospectivo. Adicionalmente, se observó que en esta experiencia el profesorado encontró riqueza en experimentar, analizar y mejorar un diseño dentro de un grupo multidisciplinario, donde la variedad de puntos de vista e intereses de aprendizaje permite imaginar escenarios en el aula acordes a los requerimientos curriculares actuales en México.

Para responder a la pregunta que planteamos también es necesario hablar de las prácticas que la investigación en diseño supone. Las pedagogías feministas (hooks, 2022a; 2022b; Pérez-Bustos, 2015) nos ofrecen la posibilidad de

promover el respeto por la diferencia y por lo compartido, recordando que el ejercicio de conocer es progresivo, situado y parcial. Evitamos, a través de nuestras prácticas, que la investigación con docentes sea un proceso donde unas personas asumen que saben todas las respuestas –o que pueden conseguirlas– y se las conceden a otras, porque las primeras decidieron que las segundas necesitan aprenderlas (Haraway, 2020). Proponemos, en cambio, participar en ejercicios conscientes que nos habiliten mutuamente como personas cuidadosas.

Asumir este riesgo, con mentalidad flexible, es la elección tomada para reimaginar nuestras prácticas de investigación de diseño. Para mantenernos en el problema elegimos entablar conversaciones inesperadas, proponer y responder en conjunto preguntas interesantes e imprevistas, asumir el cuidado de nuevos vínculos a partir del encuentro. A esto Haraway (2020) lo ha llamado respons-habilidad (con h), que invoca la habilitación mutua de aquellas partes que se han encontrado –docentes, estudiantes, talleristas y personas investigadoras–, que aprenden y modelan de manera consciente la forma en que se afectan entre sí.

AGRADECIMIENTOS

A la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación de México (antes CONAHCyT) por el financiamiento en el Programa Nacional de Investigación e Incidencia (PRONAII) de Enseñanza de las Matemáticas M0037-2020-00 /000000000310931 y el proyecto de Continuidad de PRONAII de Enseñanza de las Matemáticas M0037-2020-00 No. 000000000310931 2022-2023.

REFERENCIAS

Ahmed, S. (2014). *La política cultural de las emociones.* Universidad Nacional Autónoma de México.

Alvarado, A., Olvera, C., Mata, A. y Escobedo, A. (2017). Secuencia de desarrollo de modelos para la enseñanza y el aprendizaje multinivel e interdisciplinario. En A. Alvarado, G. Carmona y Mata, A. (Eds.) *Acta Tomo I Tópicos Selectos de Educación en CITeM. Una visión integradora.* (pp. 13–31). ECORFAN.

Campbell, T. G., & Lawson, M. A. (2024). A new conceptual and analytic framework for collective engagement in mathematics. *International Journal of Educational Research, 128,* 102478. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2024.102478

Campbell, T., Lawson, M., Rich, E., Yeo, S., & Robertson, W. B. (2024). Identifying the types of collective engagement structures that manifest in middle-grade mathematics classrooms. *Mathematical Thinking and Learning*, 1–24. https://doi.org/10.1080/10986065.2024.2447591

Chamberlin, S. A. (2019). The construct of affect in mathematical modeling. En S. A. Chamberlin, B. Sriraman (eds.). A*ffect in Mathematical Modeling*, (pp. 15–28). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04432-9_2

Comisión Nacional para la Mejora Continua de la Educación (2020). *Repensar la evaluación para la mejora educativa. Resultados de México en PISA 2018.*

Díaz Barriga, F. (2003). Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 5*(2), 1–13.

Dienes, Z. P. (1967). *Building up mathematics (4th edition).* Hutchinson Educational Ltd.

Dienes, Z. P. (2000). The theory of the six stages of learning with integers. *Mathematics in School, 29,* 27–33.

Dienes, Z. P. (2001). Six stages with rational numbers. *Mathematics in School, 30*(1), 1-12.

Goldin, G. A. (2021). A conative perspective on aha! moments. Creativity of an aha! En B. Czarnocha y W. Baker (Eds.), *Moment and Mathematics Education,* 260–270. https://doi.org/10.1163/9789004446434_010

Haraway, D. J. (2020). *Seguir con el problema: Generar parentesco en el Chthuluceno.* Consonni.

Harel, G. (2013). Intellectual need. En *Vital Directions for Mathematics Education Research* (pp. 119-151). Springer.

Harel, G. (2018). The learning and teaching of linear algebra through the lenses of intellectual need and epistemological justification and their constituents. En *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra,* 3–27. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_1

hooks, b. (2022a). *Enseñar pensamiento crítico.* Ciclogénesis 17, Rayo Verde.

hooks, b. (2022b) *Respondona: Pensamiento feminista, pensamiento negro*. Ediciones Paidós.

Irigoyen, M. E., González, M. T. y Alvarado, A. (2026; en prensa). Identidad Matemática de Docentes a través de su compromiso en un Contexto de Probabilidad. *Journal of Research in Mathematics Education.*

Kloosterman, P. (2019). Engaging students in mathematical modeling: themes and issues. En S. Chamberlain y B. Sriraman (Eds.), *Affect in Mathematical Modeling*, (pp. 99–110). https://doi.org/10.1007/978-3-030-04432-9_7

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. R. (2012). Principles for developing thought–revealing activities for students and teachers. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 591-646). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R., Kelly, A., & Yoon, C. (2018). Multitiered design experiments in mathematics, science, and technology education. En A. Kelly, R. Lesh y J. Baek (Eds.), *Handbook of Design Research Methods in Education* (pp. 131-148). Taylor & Francis.

López, N., Álzate, L., Echeverri, M. & Domínguez, A. (2021). Práctica pedagógica y motivación desde el aprendizaje situado. Tesis Psicológica, *16*(1), 178-201. https://doi.org/10.37511/tesis.v16n1a9

Murphy, S. & Ingram, N. (2023). A scoping review of research into mathematics classroom practices and affect. *Teaching and Teacher Education, 132*, 104235. https://doi.org/10.1016/j.tate.2023.104235

Ng, C. (2021). Self-schematic students in mathematics and their contrasting coping responses to mathematical challenges: a cluster analytic investigation. *Educational Studies in Mathematics, 107*(2), 315–338. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10031-6

Nicolopoulou, A. & Cole, M. (1996). Generation and transmission of shared knowledge in the culture of collaborative learning: the fifth dimension, its play-world, and its institutional contexts. En E. Forman, M. Norris y S. Addison (Eds.), *Contexts for learning: Sociocultural dynamics in children's development*, (pp. 283-313). Oxford University.

Pérez-Bustos, T. (2015). *Feminización y pedagogías feministas*. Editorial Pontificia de la Universidad Javeriana.

Pierri, A. (2022). Digital interactive storytelling in mathematics: An engagement structure enriched by the Guru stimuli. En J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi y F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the twelfth congress of the European society for research in mathematics education* (CERME12). CERME. https://hal.science/hal-03745850v1

Sánchez Sáinz, M. (2021). *Pedagogías Queer: ¿nos arriesgamos a hacer otra educación?* Catarata.

Sidik, G., Zahrah, R., Hariyani, M. & Fadhilaturrahmi, F. (2023). Development of mathematics teaching materials using didactical design research: a study on enhancing pedagogical content knowledge in quadratic inequalities. *Journal of Education for Sustainable Innovation, 1*(1), 39–48. https://doi.org/10.56916/jesi.v1i1.489

Sriraman, B., & Lesh, R. (2007) A Conversation with Zoltan P. Dienes. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(1), 59–75. https://doi.org/10.1080/10986060709336606

Stroup, W. M., Ares, N., Hurford, A. C., & Lesh, R. (2020). Diversity-by-design: the what, why, and how of generativity in next-generation classroom networks. En R. Lesh, E. Hamilton y J. Kaput (Eds.), *Foundations for the future in mathematics education* (pp. 367-393). Routledge https://doi.org/10.4324/9781003064527-22

Warner, L. B., & Schorr, R. Y. (2019). Engagement structures and the development of mathematical ideas. En S. A. Chamberlin, B. Sriraman (Eds.), A*ffect in Mathematical Modeling*, (pp. 67–85). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04432-9_2

Autor de correspondencia:
Luis Miguel García Velázquez
Dirección: Cubículo 52, Edificio de Docencia y Gobierno,
Escuela Nacional de Estudios Superiores, Unidad Morelia, UNAM
Antigua Carretera a Pátzcuaro No. 8701
Col. Ex Hacienda de San José de la Huerta
C.P. 58190 Morelia, Michoacán, México
luism_garcia@enesmorelia.unam.mx