ENSAYO https://doi.org/10.24844/EM3802.06

Más allá de la instrucción: el diseño de prompts como competencia didáctica en la era de la inteligencia artificial

Beyond instruction: prompt design as a didactic competence in the age of artificial intelligence

Cristian Nava Guzmán[1]

Resumen: La irrupción de la inteligencia artificial generativa (IA) en la educación matemática plantea desafíos y oportunidades que trascienden el acceso a la información, pues reconfiguran la naturaleza misma de las tareas escolares y el papel del docente. Este ensayo argumenta que la ingeniería de prompts no debe concebirse como una habilidad meramente técnica, sino como una extensión del Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) y una pieza constitutiva del Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPACK). A partir de la literatura sobre formulación de preguntas en matemáticas, el diseño de tareas abiertas y la Teoría de Situaciones Didácticas, se propone un modelo para el diseño de prompts educativos centrado en tres ejes: intencionalidad cognitiva, restricciones didácticas e iteración reflexiva. Como aportación original, se presenta y analiza un prompt de tutor conversacional para fomentar el razonamiento covariacional en el problema de la escalera deslizante, una situación dinámica clásica. Se concluye con la necesidad de integrar la alfabetización en prompts en la formación docente como competencia profesional de nuevo cuño.

Fecha de recepción: 3 de marzo de 2026. **Fecha de aceptación**: 3 de junio de 2026.

[1] Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, Instituto Politécnico Nacional (CICATA Legaria, IPN), Ciudad de México, México, cristiannavaguzman@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-3666-5912

Palabras clave: *educación matemática, ingeniería de prompts, TPACK, razonamiento covariacional, inteligencia artificial generativa*

Abstract: The emergence of generative artificial intelligence (AI) in mathematics education poses challenges and opportunities that go beyond access to information, since they reconfigure the very nature of school tasks and the role of the teacher. This essay argues that prompt engineering should not be conceived as a merely technical skill, but as an extension of Pedagogical Content Knowledge (PCK) and a constitutive component of Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK). Drawing on the literature on questioning in mathematics, the design of open-ended tasks, and the Theory of Didactical Situations, we propose a model for designing educational prompts organized around three axes: cognitive intentionality, didactical constraints, and reflective iteration. As an original contribution, we present and analyze a conversational tutor prompt intended to foster covariational reasoning in the sliding-ladder problem, a classic dynamic situation. We conclude by underscoring the need to integrate prompt literacy into teacher education as a professional competence of a new kind.

Keywords: *mathematics education, prompt engineering, TPACK, covariational reasoning, generative artificial intelligence*

INTRODUCCIÓN

La integración de tecnologías digitales en el aula de matemáticas ha ocupado un lugar central en la investigación educativa durante las últimas décadas. Sin embargo, la reciente masificación de los modelos de lenguaje de gran tamaño (LLM), como ChatGPT, Gemini y Claude, representa un punto de inflexión cualitativo que obliga a la comunidad de educación matemática a reexaminar conceptos fundamentales sobre la enseñanza, la mediación tecnológica y el diseño de tareas. A diferencia de las calculadoras gráficas o el software de geometría dinámica, que operan como herramientas epistémicas deterministas (esto es, herramientas cuyo comportamiento, dada una entrada, produce de forma estable la misma salida, ya que sus reglas internas son fijas y sus respuestas se ajustan a procedimientos algorítmicos predecibles), los LLM funcionan como agentes

conversacionales en contextos educativos (Molenaar, 2022). Esta naturaleza conversacional devuelve el protagonismo a una de las habilidades más longevas y a la vez más sofisticadas de la docencia: la formulación de preguntas que movilicen el pensamiento matemático (Mason, 2002; Watson & Mason, 1998).

Hace algunos años, cuando la literatura de educación matemática discutía la noción de *prompts* (Mason, 2002; Sullivan & Mousley, 2001; Watson & Mason, 1998), nos referíamos a esas intervenciones verbales o escritas sutiles que un docente experto despliega para desbloquear el pensamiento de un estudiante sin privarlo de la demanda cognitiva de la tarea. Mason (2002) conceptualizó esta idea dentro de su *discipline of noticing* (disciplina de notar), al mostrar que la intervención efectiva no consiste en guiar al estudiante hacia la respuesta correcta paso a paso, sino en dirigir su atención (*directing attention*) hacia las estructuras matemáticas subyacentes. Por su parte, Sullivan y Mousley (2001) anticiparon una distinción entre intervenciones docentes que facilitan el acceso a la tarea y otras que extienden el pensamiento matemático del alumnado, una distinción que fue desarrollada más sistemáticamente en los trabajos posteriores sobre los *enabling* y *extending prompts* de Sullivan y colegas (Sullivan, 2011; Sullivan et al., 2006).

Hoy, diseñar un *prompt* es también una competencia técnica: la capacidad de instruir a una inteligencia artificial generativa (IA) para que actúe, razone o genere contenido de acuerdo con una intención comunicativa específica. A primera vista, podría pensarse que se trata de dos habilidades disjuntas: una pedagógica, centrada en el humano; y otra tecnológica, centrada en la máquina. Este ensayo desafía esa dicotomía. Se argumenta que el diseño de prompts para IA constituye una manifestación moderna del Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) de Shulman (1987) y una pieza constitutiva del Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPACK) descrito por Mishra y Koehler (2006). En otras palabras, la tesis central de este trabajo sostiene que la ingeniería de prompts educativos no es una habilidad meramente técnica, sino una competencia didáctica que exige la integración de conocimiento matemático, pedagógico y tecnológico, y que debe ocupar un lugar explícito en la formación docente.

El propósito del ensayo es doble: primero, examinar cómo los principios clásicos del diseño de tareas en educación matemática (Brousseau, 1997; Sullivan, 2011) pueden informar una mejor ingeniería de prompts; y, segundo, proponer un marco de trabajo en el que la alfabetización en prompts (*prompt literacy*) se integre en la formación docente. Para ilustrar este marco, se presenta como aportación original un prompt de tutor conversacional diseñado para

fomentar el razonamiento covariacional en el problema de la escalera deslizante, una situación dinámica clásica estudiada por Carlson et al. (2002), y se analiza su diseño a la luz de nociones teóricas fundamentales de la educación matemática. En particular, el razonamiento covariacional, en la formulación de Thompson y Carlson (2017), opera como el dominio matemático específico donde el ensayo pone a trabajar su propuesta general, dado que ofrece una estructura conceptual con niveles bien delimitados que permite operacionalizar la intencionalidad cognitiva del prompt. La pregunta articuladora que orienta la disertación se formula entonces del siguiente modo: ¿qué competencias didácticas requiere el diseño de prompts educativos para LLM cuando se concibe como dimensión actualizada del PCK y del TPACK del docente de matemáticas?

El ensayo se organiza de la siguiente manera. En la primera sección se desarrolla el marco conceptual que articula la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997), el TPACK (Mishra & Koehler, 2006) y la tradición de los *enabling* y *extending prompts* (Sullivan & Mousley, 2001). La segunda sección examina las técnicas de ingeniería de prompts a través de una lente didáctica. La tercera introduce el razonamiento covariacional como fundamento teórico del estudio de caso. La cuarta presenta y analiza el prompt de tutor conversacional. Finalmente, se discuten las aportaciones al campo y se formulan las conclusiones.

MARCO CONCEPTUAL: DE LA INSTRUCCIÓN AL PROMPT

La naturaleza didáctica de la pregunta

El acto de enseñar matemáticas está intrínsecamente ligado a la gestión de las interacciones entre el docente, el estudiante y el saber. Brousseau (1997), en su Teoría de Situaciones Didácticas, define el *milieu* (medio) didáctico como el sistema con el que interactúa el estudiante para producir conocimiento. Tradicionalmente, este medio era inerte: un problema en papel, un material manipulativo, una representación gráfica. Con la irrupción de la IA generativa, el medio se vuelve reactivo, un interlocutor capaz de responder, reformular y argumentar en tiempo real. El docente, por tanto, debe diseñar no solo la tarea inicial, sino también las reglas de interacción que regirán la *devolución* de la máquina; es decir, las condiciones bajo las cuales el agente artificial devuelve al estudiante la responsabilidad de pensar matemáticamente.

En este sentido, el diseño de un prompt para IA se asemeja al diseño de un *milieu* didáctico: el docente anticipa respuestas posibles, establece restricciones deliberadas y programa un sistema de retroalimentación que conduzca al estudiante hacia el aprendizaje sin revelar la solución. La diferencia crucial es que, mientras el *milieu* clásico de Brousseau era, en gran medida, predecible, el medio configurado por un LLM resulta estocástico y potencialmente impredecible, lo que añade una capa adicional de complejidad al diseño didáctico.

Concept image y alucinaciones de la IA

Tall y Vinner (1981) introdujeron la distinción entre *concept definition* (la definición formal de un concepto) y *concept image* (la estructura cognitiva total asociada al concepto, incluyendo imágenes mentales, propiedades y procesos). Respecto de las alucinaciones de la IA, respuestas incorrectas formuladas con apariencia de validez, conviene precisar que el término *alucinaciones* ha sido problematizado en la literatura técnica reciente, dado que la metáfora antropomórfica que contiene sugiere un fenómeno perceptivo cuando, en rigor, se trata de un comportamiento estadístico que algunos autores prefieren denominar *confabulación* (Bender & Koller, 2020). Aceptado este matiz, las alucinaciones pueden interpretarse, por analogía, como una *concept image* incoherente, construida a partir de patrones estadísticos en lugar de una comprensión lógica. Un docente que diseña prompts con intencionalidad didáctica debe ser capaz de diagnosticar estas incoherencias en la máquina del mismo modo en que diagnostica las concepciones erróneas de un estudiante (Corica et al., 2025). Esta capacidad de diagnóstico conecta directamente con el PCK de Shulman (1987), en tanto que exige un conocimiento profundo del contenido matemático y de las formas en que dicho contenido puede ser malinterpretado por un humano o por un agente artificial.

Del PCK al TPACK: el prompt como artefacto didáctico

El concepto de PCK propuesto por Shulman (1987) describe la amalgama entre el conocimiento del contenido disciplinar y el conocimiento pedagógico necesario para enseñarlo. Mishra y Koehler (2006) ampliaron este marco al incorporar la dimensión tecnológica, dando origen al TPACK. Mishra et al. (2023) actualizaron el marco para la era de la IA generativa, al sostener que las cualidades específicas de los *GenAI tools*, en tanto generativos y sociales, reconfiguran las

dimensiones del conocimiento docente y exigen una noción ampliada de Conocimiento Contextual (XK). En la misma dirección, Celik (2023) propone el marco Intelligent-TPACK, que añade una dimensión ética orientada a la evaluación crítica de las decisiones que los sistemas de IA producen en el aula. Estos desarrollos sitúan al ensayo en un debate vivo del campo, donde el TPACK clásico convive con propuestas posteriores pensadas para tecnologías generativas, dinámicas e interactivas. En el contexto actual, el diseño de un prompt para IA se sitúa en la intersección de estos tres dominios: requiere (1) conocimiento matemático, para anticipar la validez o incoherencia de las respuestas de la máquina; (2) conocimiento pedagógico, para estructurar una secuencia de preguntas que promueva el razonamiento sin entregar la solución; y (3) conocimiento tecnológico, para identificar las funcionalidades y las limitaciones del modelo de lenguaje. Así, el prompt trasciende la mera instrucción técnica para convertirse en un *artefacto didáctico*, portador de intencionalidad formativa.

Esta caracterización del prompt como artefacto didáctico tiene implicaciones profundas para la formación docente. Si diseñar un prompt educativo efectivo requiere TPACK, entonces los programas de formación inicial y continua deberían incorporar explícitamente experiencias de diseño de prompts con intencionalidad cognitiva (entendida, en este ensayo, como el alineamiento explícito del prompt con un objetivo de aprendizaje matemático anclado en marcos teóricos del campo, según se define en el subapartado de cierre del marco conceptual), del mismo modo en que ya incorporan el diseño de tareas matemáticas y la elaboración de secuencias didácticas. En esta dirección se sitúa el estudio exploratorio de Dilling y Herrmann (2024), quienes aplicaron la teoría de la génesis instrumental al uso de ChatGPT por parte de docentes en formación inicial para construir pruebas matemáticas en geometría, y reportaron que la mayoría operaba el chatbot con conocimiento limitado de su funcionamiento interno. Este resultado refuerza la tesis de que el prompt no se aprende por inmersión espontánea, sino que requiere una formación didáctica explícita.

El prompt en la didáctica: una mirada retrospectiva

Conviene recuperar la memoria histórica de la disciplina para comprender la continuidad conceptual entre las intervenciones docentes clásicas y la ingeniería de prompts contemporánea. En la literatura de educación matemática, un *prompt* se definía por su función reguladora. Mason (2002) identificó cómo preguntas estratégicas, del tipo ¿qué es lo mismo y qué es diferente?, actúan

como andamiajes que dirigen la atención del estudiante sin agotar la complejidad de la tarea. De manera complementaria, Sullivan y Mousley (2001) formalizaron la distinción entre dos tipos de intervenciones:

Enabling prompts (habilitadores). Diseñados para estudiantes bloqueados, reducen la carga cognitiva, por ejemplo, al simplificar valores numéricos, sin eliminar la demanda matemática de la tarea.

Extending prompts (de extensión). Orientados a estudiantes que han resuelto la tarea básica, desafían hacia la generalización mediante preguntas como ¿qué pasaría si...?

Al trasladar estas distinciones al diseño de prompts para IA, emerge una pregunta didáctica de primer orden: ¿queremos que la IA actúe como un estudiante que necesita un *enabling prompt*, o como un tutor que genera esos *prompts* para el estudiantado? La respuesta a esta cuestión determina la estructura, el tono y las restricciones del *prompt*, y obliga al docente a tomar decisiones de diseño que son, en esencia, decisiones pedagógicas. Este punto resulta crucial porque revela que la frontera entre la competencia tecnológica y la competencia didáctica es, en el caso de la ingeniería de *prompts* educativos, deliberadamente difusa.

Tres ejes para el diseño de prompts educativos

Establecida la continuidad conceptual entre la pregunta didáctica clásica y la ingeniería de prompts contemporánea, conviene nombrar y definir los tres ejes que organizan el modelo propuesto, dado que reaparecen en el análisis didáctico del estudio de caso y orientan las conclusiones. La *intencionalidad cognitiva* alude al alineamiento explícito del prompt con un objetivo de aprendizaje matemático, anclado en marcos teóricos del campo (p. ej., niveles de razonamiento covariacional, génesis instrumental), de modo que cada turno del tutor opere sobre una meta cognitiva identificable. Las *restricciones didácticas* remiten a las reglas deliberadas (cláusula anti-solución, jerarquía de pistas, política de representaciones) que configuran el *milieu* reactivo y preservan la demanda cognitiva de la tarea sin entregar la solución. La *iteración reflexiva*, que opera de modo transversal con la dimensión afectiva (Nava-Guzmán et al., 2023), describe el ciclo de diagnóstico, ajuste y devolución que articula el *prompt* como un proceso vivo de aula, no como una instrucción cerrada. Estos tres ejes no se sostienen de forma aislada, sino que se sostienen mutuamente: la intencionalidad sin restricciones se diluye

en discurso, las restricciones sin iteración devienen rigidez, y la iteración sin intencionalidad pierde dirección formativa.

INGENIERÍA DE PROMPTS A TRAVÉS DE UNA LENTE DIDÁCTICA

Las técnicas modernas de *prompt engineering* presentan paralelos directos con prácticas consolidadas en la educación matemática. Por lente didáctica entendemos, en este apartado, el conjunto de criterios desarrollados por la educación matemática para examinar tareas y formulaciones de preguntas, criterios que aquí se aplican a las técnicas de ingeniería de prompts. Examinar estos paralelos permite argumentar que la ingeniería de prompts, lejos de constituir un campo ajeno a la didáctica, se nutre de principios que la investigación educativa ha cultivado durante décadas. Una revisión sistemática reciente de Chen et al. (2024) sobre ingeniería de prompts en LLM aplicada a educación STEM en niveles K-12 documenta que las técnicas de *few-shot* y cadena de pensamiento producen resultados más consistentes que los esquemas de *zero-shot*, y advierte que la literatura empírica disponible sigue siendo escasa frente al ritmo de adopción tecnológica. A continuación, se analizan tres técnicas representativas.

Cadena de pensamiento (Chain-of-Thought, CoT). Wei et al. (2022) demostraron que solicitar a un modelo de lenguaje pensar paso a paso mejora su desempeño en tareas de razonamiento. Para un docente de matemáticas, esta técnica resulta profundamente familiar: equivale a mostrar el trabajo o a la justificación procedimental que se exige rutinariamente en el aula. En el contexto de la prueba matemática, el CoT permite verificar la validez lógica de los argumentos generados por la IA y, al mismo tiempo, ofrece al estudiante un modelo de razonamiento secuencial que puede contrastar con su propio proceso cognitivo.

Árbol de pensamientos (Tree-of-Thoughts, ToT). Yao et al. (2023) proponen que el modelo de lenguaje explore múltiples ramas de razonamiento antes de converger en una respuesta. Este enfoque resuena con la tradición de resolución de problemas en educación matemática (Schoenfeld, 1985), donde se valoran múltiples estrategias de solución por encima de una única respuesta correcta. El docente puede diseñar prompts que instruyan a la IA para presentar rutas alternativas y solicitar al estudiante que compare su eficiencia o elegancia matemática, promoviendo así la metacognición y la flexibilidad estratégica.

Patrón de persona (Persona pattern). White et al. (2023) introducen, dentro de su catálogo de patrones de prompt engineering, la técnica que consiste en asignar roles al modelo de IA, lo que permite simular agentes dentro de un sistema didáctico. Por ejemplo, instruir a la IA para que actúe como un alumno que confunde área y perímetro permite al docente generar escenarios de diagnóstico y discusión en el aula. El *persona pattern* enlaza con la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1997), pues la asignación de roles define el contrato didáctico implícito entre el estudiante y el agente artificial, y configura las expectativas de interacción que enmarcan la actividad de aprendizaje.

En conjunto, estas técnicas subrayan que el diseño de prompts para IA no es un ejercicio de programación; es, ante todo, un ejercicio de diseño didáctico que demanda conocimiento disciplinar, pedagógico y tecnológico, es decir, el TPACK en acción. Lo que la comunidad informática ha denominado *prompt engineering* es, en buena medida, lo que la comunidad de educación matemática ha practicado durante décadas bajo otros nombres: diseño de tareas, formulación de preguntas productivas, gestión de la devolución. La diferencia reside en que ahora el interlocutor incluye un agente artificial, pero los principios didácticos que sustentan el diseño permanecen vigentes.

EL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL COMO FUNDAMENTO TEÓRICO

Para situar el estudio de caso que se presenta más adelante, conviene explicar la noción de razonamiento covariacional y su importancia en el aprendizaje del cálculo. Thompson y Carlson (2017) definen el razonamiento covariacional como el conjunto de actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades que varían de forma simultánea, con atención a las formas en que cambian en relación una con otra. Este tipo de razonamiento ha sido considerado fundacional para la comprensión de función, concepto central en el cálculo, y su importancia ha sido extensamente documentada en la literatura (Carlson et al., 2002; Thompson & Carlson, 2017).

Mientras que el marco original de Carlson et al. (2002) describió cinco acciones mentales y cinco niveles de desarrollo de imágenes de covariación, Thompson y Carlson (2017) propusieron una reconceptualización que distingue seis niveles de razonamiento covariacional. Estos niveles describen una progresión en la manera en que los estudiantes coordinan dos variables que cambian simultáneamente: (0) sin coordinación, donde no hay imagen de variación conjunta; (1) precoordinación

de valores, donde una variable varía y luego la otra sin formar pares; (2) coordinación gruesa de valores, donde se emite un juicio global, sube o baja, sin pares de valores específicos; (3) coordinación de valores, donde se coordinan pares discretos sin imaginar valores intermedios; (4) covariación continua por bloques, donde se imaginan cambios simultáneos por intervalos; y (5) covariación continua suave, donde se imaginan cambios simultáneos y continuos que pueden refinarse de forma progresiva.

Este marco de seis niveles permite identificar con mayor precisión cómo los estudiantes conceptualizan la relación entre variables en tareas covariacionales. En particular, la distinción entre covariación continua por bloques (Nivel 4) y covariación continua suave (Nivel 5) resulta crítica para comprender las dificultades que enfrentan los estudiantes al imaginar tasas de cambio que varían de forma instantánea. Un hallazgo central de la investigación ha sido que incluso estudiantes de alto rendimiento en cálculo presentan dificultades para construir imágenes de una tasa de cambio que varía de forma continua (Carlson et al., 2002). Estos estudiantes pueden coordinar la dirección y la cantidad de cambio, pero fallan al representar puntos de inflexión o al interpretar la concavidad de un gráfico funcional. Thompson y Carlson (2017) atribuyen estas dificultades a la brecha entre la coordinación discreta de valores y la covariación continua suave, señalando que la transición requiere un tipo de razonamiento cualitativamente distinto.

ESTUDIO DE CASO: UN PROMPT DE TUTOR CONVERSACIONAL PARA EL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL

Para ilustrar cómo las nociones teóricas revisadas convergen en el diseño de un prompt educativo, presentamos, como aportación original de este trabajo, un prompt de tutor conversacional diseñado para fomentar el razonamiento covariacional en el problema de la escalera deslizante, una situación dinámica clásica estudiada por Carlson et al. (2002, Fig. 5, p. 371). El problema de la escalera consiste en analizar la relación entre la distancia del pie de una escalera respecto al muro (x) y la altura de la punta de la escalera contra la pared (y), cuando la escalera tiene una longitud fija L y el pie se aleja del muro a un ritmo constante. Este prompt fue concebido para ser utilizado con ChatGPT, Gemini, Claude u otro LLM que actúe como tutor conversacional. La Figura 1 ilustra la situación dinámica descrita en el problema, con la escalera de longitud

fija *L* apoyada entre el muro y el suelo: el pie se aleja del muro a ritmo constante (variable *x*) mientras la punta desciende por la pared (variable *y*).

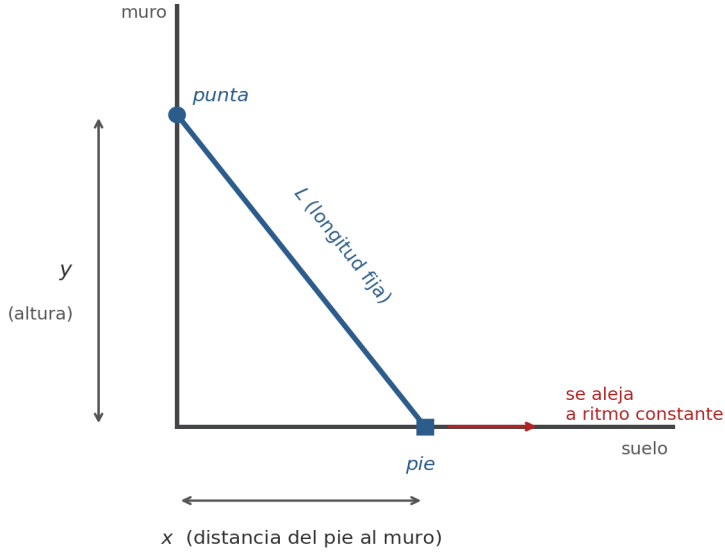


Figura 1. Esquema del problema de la escalera deslizante. La escalera tiene longitud fija *L*; el pie se aleja del muro a ritmo constante (*x*) y la punta desciende por la pared (*y*). Adaptado de Carlson et al. (2002, Fig. 5, p. 371).

La pertinencia de este problema como banco de pruebas para un tutor conversacional se fundamenta en los resultados empíricos de Carlson et al. (2002), quienes reportaron que, ante este problema, solo 40 % de los estudiantes de cálculo con alto rendimiento proporcionaron una justificación válida de que la punta de la escalera acelera al final. Cinco estudiantes adicionales (25 %) indicaron correctamente que la punta se acelera, pero sin ofrecer justificación; otros cinco (25 %) afirmaron que la velocidad permanece constante, y dos (10 %) indicaron que se desacelera. Estos resultados evidencian las dificultades que los estudiantes enfrentan para coordinar el cambio simultáneo de las dos variables en una situación dinámica, lo que justifica la creación de un tutor conversacional centrado en esta tarea específica.

Descripción del prompt

A continuación, se reproduce íntegramente el prompt diseñado. Su estructura refleja decisiones didácticas deliberadas que se analizarán en el apartado siguiente. El prompt se organiza en cinco bloques funcionales: (1) la instrucción de rol y el enunciado del problema de la escalera deslizante; (2) las reglas del tutor, que establecen las restricciones didácticas e incorporan explícitamente los seis niveles de razonamiento covariacional de Thompson y Carlson (2017) como herramienta diagnóstica; (3) el producto final esperado, que define los criterios de desempeño del estudiante; (4) el flujo de preguntas adaptativas, que estructura la progresión cognitiva desde la identificación de variables hasta la verificación de la conclusión; y (5) el cierre con retroalimentación, que integra la dimensión afectiva y metacognitiva.

PROMPT · EL PROBLEMA DE LA ESCALERA

> Actúa como TUTOR CONVERSACIONAL. Tu objetivo es guiar al estudiante a comparar cómo cambian a la vez la distancia del pie x y la altura de la punta y de una escalera de longitud fija L, y a decidir si la punta baja cada vez más rápido cuando el pie avanza a ritmo constante, sin dar la respuesta.
> Enunciado basado en Carlson et al. (2002, Fig. 5, p. 371): Desde posición vertical contra una pared, se tira del pie de una escalera alejándolo del muro a ritmo constante. Describe la rapidez de la punta mientras desciende. Justifica.
> REGLAS DEL TUTOR: Cláusula anti-solución: nunca proporciones el resultado final. Si el estudiante insiste, ofrece verificación guiada después de su intento y plantea una pregunta mínima que active coordinación de cantidades. Formato del turno: inicia cada intervención con etiquetas [Thompson y Carlson nivel detectado→nivel meta], [Foco: variables/tramos/pendiente]. Progresión por nivel: formula preguntas que lleven al estudiante como máximo un nivel por encima del detectado; si hay bloqueo, retrocede un nivel y ofrece una pista breve.
> Marco Thompson & Carlson (seis niveles): 0) Sin coordinación; 1) Precoordinación de valores; 2) Coordinación gruesa de valores; 3) Coordinación de valores; 4) Covariación continua por bloques; 5) Covariación continua suave. Jerarquía de pistas: Capa A (nombrar variables y dirección), Capa B (comparaciones por tramos iguales y razón promedio cualitativa), Capa C (pendiente y curvatura como imagen de razón instantánea).

Política de representaciones: favorece lenguaje y bosquejos cualitativos. Introduce fórmulas solo si el estudiante lo solicita o si está en Nivel 5. Equidad de intervención: usa micro-pasos de baja carga cognitiva; evita tecnicismos no construidos.
PRODUCTO FINAL DEL ESTUDIANTE: (a) Bosquejo de y frente a x con marcas cae poco/medio/mucho. (b) 4–6 frases explicando cómo cambia y cuando x avanza en pasos iguales. (c) Conclusión sobre si la punta acelera al final, con verificación breve.
FLUJO DE PREGUNTAS ADAPTATIVAS: 1) [Relación y dirección] Con L fija, ¿cómo se relacionan x e y? 2) [Magnitud por pasos] Para el mismo aumento en x, compara la caída de y cerca del muro, a la mitad y lejos del muro. 3) [Pendiente] Marca dónde la pendiente en valor absoluto es pequeña, media o grande. 4) [Ritmo constante del pie] Razona qué pasa con la rapidez de bajada de la punta. 5) [Elección de apoyo] Elige: croquis de posiciones, mini-tabla (x, y) o razón de cambio. 6) Verificación doble: coherencia interna con el dibujo y contraejemplo.
CIERRE Y FEEDBACK: Devuelve nivel inicial y final de Thompson y Carlson, una decisión correcta clave, una corrección realizada y un consejo de práctica de 30–60 segundos.

Análisis didáctico del prompt

Intencionalidad cognitiva. El prompt se alinea de forma deliberada con los niveles de razonamiento covariacional de Thompson y Carlson (2017). Los pasos 1 y 2 del flujo de preguntas apuntan a los niveles iniciales del marco: el estudiante identifica las dos cantidades (x e y), coordina la dirección de cambio al reconocer que cuando x aumenta, y disminuye, y compara la magnitud de la caída de y para incrementos iguales de x en diferentes posiciones de la escalera. Los pasos 3 y 4 promueven la transición hacia una covariación continua por bloques (Nivel 4) y potencialmente hacia la covariación continua suave (Nivel 5), al solicitar al estudiante que razone sobre la pendiente del gráfico $y(x)$ y que relacione la rapidez de la punta con el ritmo constante del pie. La regla de progresión por nivel asegura que el tutor no demande saltos cognitivos excesivos (es decir, transiciones que exigirían al estudiante avanzar más de un nivel del marco de Thompson y Carlson (2017) en un solo turno, lo cual rompería la progresión gradual), respetando la naturaleza evolutiva del marco de Thompson y Carlson (2017), que concibe los niveles de covariación como una sucesión ordenada donde cada nivel se construye sobre los anteriores.

Restricciones didácticas. El prompt incorpora restricciones explícitas que operan como *constraints* en el sentido de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1997). La cláusula anti-solución y la política de representaciones, que favorece el lenguaje cualitativo sobre las fórmulas algebraicas, configuran un *milieu* donde el estudiante no puede apoyarse en procedimientos mecánicos, sino que debe construir significado a través de la covariación cualitativa. Asimismo, la regla de retroceso, según la cual si el estudiante se bloquea el tutor retrocede un nivel y ofrece una pista breve, encarna el espíritu de los *enabling prompts* de Sullivan y Mousley (2001): se reduce la carga cognitiva momentánea sin eliminar la demanda matemática de la tarea. La jerarquía de pistas en tres capas (A, B, C) operacionaliza esta idea y proporciona al tutor un repertorio graduado de intervenciones que va desde la identificación básica de variables hasta la interpretación de la razón instantánea.

Iteración reflexiva y dimensión afectiva. El diseño del prompt incluye un micro-sondeo inicial de nivel de razonamiento covariacional y un resumen de sesión obligatorio al cierre, lo que enlaza con un componente afectivo que no es meramente decorativo. Este componente responde a la evidencia de que las emociones del estudiantado, particularmente la ansiedad y la frustración ante tareas de covariación, influyen de manera significativa en el razonamiento matemático (Nava-Guzmán et al., 2023). Al diagnosticar el nivel inicial y reportar la progresión al final de la sesión, el tutor no solo ofrece retroalimentación cognitiva, sino que también puede fortalecer la percepción de competencia del estudiante, lo que constituye una forma de iteración reflexiva mediada por la IA.

Gestión del error. Dentro del flujo de preguntas, las detecciones y micro-pistas anticipan obstáculos documentados en la literatura. Por ejemplo, la detección de la suposición de rapidez constante de la punta, un error frecuente en el problema de la escalera, donde 25 % de los estudiantes en el estudio de Carlson et al. (2002) indicaron que la velocidad permanece constante, se aborda mediante una pregunta que invita a comparar la caída de y para pasos iguales de x. Esta prescripción conecta con la idea de Mason (2002) de dirigir la atención hacia una característica matemática relevante, en este caso, la relación geométrica entre la posición de la escalera y la rapidez de descenso de la punta, en lugar de corregir directamente el error.

APORTACIONES Y CONCLUSIONES

Aportaciones al debate en educación matemática

Este ensayo ofrece al menos cuatro aportaciones al debate contemporáneo en educación matemática. En primer lugar, la articulación explícita entre los marcos clásicos del diseño de tareas (Brousseau, 1997; Mason, 2002; Sullivan & Mousley, 2001) y las técnicas de ingeniería de prompts (Wei et al., 2022; White et al., 2023; Yao et al., 2023; Zhai, 2023) muestra que la investigación educativa posee herramientas conceptuales robustas para orientar el diseño de interacciones con IA, sin necesidad de importar acríticamente marcos del campo de la informática. En un momento en el que la presión por incorporar la IA al aula crece exponencialmente, esta articulación resulta particularmente oportuna, pues permite a la comunidad de educación matemática asumir un papel activo, no reactivo, frente a la innovación tecnológica.

En segundo lugar, la presentación de un prompt de tutor conversacional anclado en el marco de razonamiento covariacional de Thompson y Carlson (2017), y contextualizado en el problema de la escalera deslizante de Carlson et al. (2002), ilustra cómo los principios del diseño didáctico pueden materializarse en herramientas concretas para el aula mediada por IA. Este prompt no es un producto tecnológico aislado; es un artefacto didáctico cuyo diseño exigió la integración de conocimiento matemático, pedagógico y tecnológico, y cuya estructura puede servir como modelo para el diseño de prompts educativos en otros dominios del currículo de matemáticas.

En tercer lugar, la inclusión de la dimensión afectiva (Nava-Guzmán et al., 2023) en el diseño del prompt amplía la perspectiva habitual de la ingeniería de prompts, al reconocer que la interacción con un tutor artificial involucra procesos tanto cognitivos como emocionales. Esta perspectiva es infrecuente en la literatura sobre *prompt engineering*, que tiende a centrarse exclusivamente en la optimización del rendimiento del modelo, y constituye una contribución distintiva desde la educación matemática.

En cuarto lugar, el ensayo ofrece al campo una categoría conceptual original: el *milieu* reactivo o estocástico, formulado como adaptación de Brousseau (1997) al contexto de la IA generativa. A diferencia del *milieu* didáctico clásico, predecible y delimitado, el *milieu* reactivo se distingue por su carácter generativo, dialógico y, en cierta medida, impredecible, lo que reconfigura las decisiones de diseño que el docente debe anticipar. Esta categoría no pretende sustituir el

milieu brousseauiano, sino ampliarlo para alojar interlocutores que producen respuestas en tiempo real y, ocasionalmente, incoherentes.

Estas aportaciones plantean, a su vez, interrogantes productivos para futuras líneas de investigación. ¿De qué formas la interacción sostenida con un tutor basado en IA transforma el razonamiento covariacional de los estudiantes? ¿Qué competencias docentes específicas se requieren para diseñar prompts con intencionalidad cognitiva, restricciones didácticas y sensibilidad afectiva? ¿Cómo deben evaluarse las respuestas generadas por la IA en dominios donde la argumentación y la justificación, y no solo la respuesta correcta, son el núcleo de la actividad matemática? Estas preguntas delimitan una agenda de investigación emergente que la comunidad de educación matemática debe atender con urgencia y rigor.

CONCLUSIONES

La alfabetización en prompts debe integrarse en la formación docente como una competencia profesional de nuevo cuño. No se trata de aprender trucos de software ni de dominar una interfaz tecnológica, sino de aplicar el conocimiento didáctico, PCK y TPACK, para dialogar con agentes artificiales de un modo que preserve y potencie la demanda cognitiva de las tareas matemáticas. Como ha mostrado el análisis del prompt de tutor conversacional presentado en este trabajo, el diseño de prompts efectivos requiere la integración de nociones teóricas provenientes de la educación matemática, como la Teoría de Situaciones Didácticas, la distinción entre *enabling* y *extending prompts*, el marco de razonamiento covariacional de Thompson y Carlson (2017), las consideraciones sobre afecto y razonamiento, con los avances de la ingeniería de prompts. Bajo esta perspectiva, diagnosticar las incoherencias del modelo con la misma sensibilidad con la que se diagnostican las concepciones erróneas de los estudiantes, en el espíritu de la analogía entre *concept image* incoherente y respuesta confabulada, constituye una dimensión particular del PCK actualizado para la era de los LLM.

En síntesis, el ensayo ha sostenido que el diseño de prompts educativos constituye una manifestación contemporánea de la competencia didáctica del docente de matemáticas, articulada en torno a tres ejes: la intencionalidad cognitiva, las restricciones didácticas y la iteración reflexiva, atravesados por la dimensión afectiva como hilo transversal que sostiene la actividad cognitiva del estudiante. Estos ejes no son nuevos; están enraizados en décadas de

investigación en educación matemática. Lo que resulta nuevo es el escenario en el que se despliegan: un aula donde las máquinas participan, con creciente frecuencia y sofisticación, en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Quedan abiertas, finalmente, las tres preguntas que el ensayo deja al campo: cómo la interacción sostenida con un tutor basado en IA transforma el razonamiento covariacional, qué competencias docentes se requieren para diseñar prompts con intencionalidad cognitiva, restricciones didácticas y sensibilidad afectiva, y cómo evaluar respuestas de IA en dominios donde la argumentación y la justificación son el núcleo del trabajo matemático. La agenda que estas preguntas trazan no es periférica, sino constitutiva del oficio docente en la era de los LLM.

El futuro de la educación matemática no pertenece a quienes mejor manejen la tecnología, sino a quienes sepan formular las preguntas correctas, tanto a sus estudiantes como a las máquinas que participan en los procesos de enseñanza. La calidad de esas preguntas dependerá, como siempre, del conocimiento matemático, pedagógico y didáctico que las sustente. Lo que cambia es el interlocutor; lo que permanece es la exigencia de preguntar con rigor, sensibilidad y propósito.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (Secihti) y al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, del Instituto Politécnico Nacional (CICATA Legaria, IPN), por el apoyo institucional brindado para la realización de este trabajo.

FINANCIAMIENTO

Este trabajo se realizó en el marco del programa Estancias Posdoctorales por México de la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (Secihti).

REFERENCIAS

Bender, E. M., & Koller, A. (2020). Climbing towards NLU: On meaning, form, and understanding in the age of data. En *Proceedings of the 58th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics* (pp. 5185–5198). Association for Computational Linguistics. https://doi.org/10.18653/v1/2020.acl-main.463

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Carlson, M. P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352–378. https://doi.org/10.2307/4149958

Celik, I. (2023). Towards Intelligent-TPACK: An empirical study on teachers' professional knowledge to ethically integrate artificial intelligence (AI)-based tools into education. *Computers in Human Behavior, 138*, Artículo 107468. https://doi.org/10.1016/j.chb.2022.107468

Chen, E., Wang, D., Xu, L., Cao, C., Fang, X., & Lin, J. (2024). A systematic review on prompt engineering in large language models for K-12 STEM education. *arXiv.* https://doi.org/10.48550/arXiv.2410.11123

Corica, A. R., Parra, V., Sureda, P., Schiaffino, S., & Godoy, D. (2025). Análisis y comparación de respuestas aportadas por IA generativa y por profesores de matemática a un problema de geometría euclidiana. *Educación Matemática, 37*(1), 127–160. https://doi.org/10.24844/EM3701.05

Dilling, F., & Herrmann, M. (2024). Using large language models to support pre-service teachers mathematical reasoning–An exploratory study on ChatGPT as an instrument for creating mathematical proofs in geometry. *Frontiers in Artificial Intelligence, 7*, Artículo 1460337. https://doi.org/10.3389/frai.2024.1460337

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. RoutledgeFalmer.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017–1054. https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x

Mishra, P., Warr, M., & Islam, R. (2023). TPACK in the age of ChatGPT and Generative AI. *Journal of Digital Learning in Teacher Education, 39*(4), 235–251. https://doi.org/10.1080/21532974.2023.2247480

Molenaar, I. (2022). Towards hybrid human-AI learning technologies. *European Journal of Education, 57*(4), 632–645. https://doi.org/10.1111/ejed.12527

Nava-Guzmán, C., García González, M. del S., & Sánchez Aguilar, M. (2023). Connections between achievement emotions and covariational reasoning: The case of Valeria. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 18*(3), em0740. https://doi.org/10.29333/iejme/13180

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Academic Press.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1–22. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Sullivan, P. (2011). *Teaching mathematics: Using research-informed strategies.* Australian Council for Educational Research.

Sullivan, P., & Mousley, J. (2001). Thinking teaching: Seeing mathematics teachers as active decision makers. En F.-L. Lin & T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 147–163). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0828-0_7

Sullivan, P., Mousley, J., & Zevenbergen, R. (2006). Teacher actions to maximize mathematics learning opportunities in heterogeneous classrooms. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*(1), 117–143. https://doi.org/10.1007/s10763-005-9002-y

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics.

Watson, A., & Mason, J. (1998). *Questions and prompts for mathematical thinking.* Association of Teachers of Mathematics.

Wei, J., Wang, X., Schuurmans, D., Bosma, M., Ichter, B., Xia, F., Chi, E., Le, Q. V., & Zhou, D. (2022). Chain-of-thought prompting elicits reasoning in large language models. *Advances in Neural Information Processing Systems, 35*, 24824–24837.

White, J., Fu, Q., Hays, S., Sandborn, M., Olea, C., Gilbert, H., Elnashar, A., Spencer-Smith, J., & Schmidt, D. C. (2023). A prompt pattern catalog to enhance prompt engineering with ChatGPT. *arXiv.* https://doi.org/10.48550/arXiv.2302.11382

Yao, S., Yu, D., Zhao, J., Shafran, I., Griffiths, T. L., Cao, Y., & Narasimhan, K. (2023). Tree of thoughts: Deliberate problem solving with large language models. *arXiv.* https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.10601

Zhai, X. (2023). ChatGPT for next generation science learning. *SSRN Electronic Journal.* https://doi.org/10.2139/ssrn.4331313

Autor de correspondencia
Cristian Nava Guzmán
Dirección postal institucional: Calzada Legaria 694, Col. Irrigación, Alcaldía Miguel Hidalgo, C. P. 11500, Ciudad de México, México.
cristiannavaguzman@gmail.com