

Estrategias de cálculo mental utilizadas por estudiantes del nivel secundaria de Baja California

Jeanette Cortés Flores, Eduardo Backhoff Escudero y Javier Organista Sandoval

Resumen: Se conoce que el cálculo mental o estimativo ayuda a los estudiantes a desarrollar el sentido del número y a mejorar la comprensión de las relaciones numéricas. Por lo anterior, este trabajo tuvo el propósito de conocer el nivel de solución de problemas estimativos que tienen los estudiantes de 2º año de secundaria, así como identificar las estrategias mentales que utilizan los mejores estimadores. Para ello, se administró una prueba, traducida y adaptada del modelo de Reys *et al.* (1982), a 248 estudiantes provenientes de ocho escuelas públicas y privadas de la ciudad de Ensenada, Baja California. Los resultados muestran que los estudiantes presentan pocas habilidades para resolver problemas mentales y que las estrategias estimativas mayormente utilizadas fueron el “redondeo” y el “dígito de la izquierda”. Se concluye que el modelo utilizado es apropiado para identificar a los buenos estimadores y conocer las estrategias mentales que utilizan los escolares para resolver problemas matemáticos.

Palabras clave: estimación, aritmética mental, estrategias de niños.

Abstract: It is well known that mental estimation helps students to develop number sense, and to improve numeric relations understanding. For this reason, the purpose of this research focused to describe Mexican secondary students' abilities to solve mental arithmetic problems, as well as to identify mental strategies used by the best calculators' eight-grade students. To accomplish this, we applied an adapted estimation test version (originally developed by Reys *et al.*, 1982) to 248 students from eight private and public schools of Ensenada, Baja California, Mexico. Results showed that Mexican students have few abilities to solve mental arithmetic problems, and that “rounding” and “front-end” were the most frequently mental strategies used. We concluded that, with this model, it is possible to identify good estimators, as well as mental strategies students use to solve arithmetic problems.

Key words: estimation, mental arithmetic, children's strategies.

Mancera (1991) afirma que el desarrollo de las nociones matemáticas es un proceso paulatino que construye el niño a partir de la experiencia que le brinda la interacción con los objetos de su entorno, permitiéndole crear mentalmente relaciones y comparaciones entre ellos, así como establecer semejanzas y diferencias de sus atributos para clasificar y proponer relaciones de orden y de cantidad que le posibilitan estructurar el concepto de número con base en la intuición de cantidad.

Por su parte, el consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 1989) ha definido la intuición de cantidad como el sentido del número. Sowder (1992) se refiere al sentido del número como una red conceptual bien organizada que da habilidad para relacionar operaciones y para resolver problemas numéricos por caminos flexibles y creativos. Ya que la estructura del sistema numérico y el sentido del número están asociados, la habilidad en el cálculo estimativo lleva al sentido del número y viceversa.

Hazekamp (1986) y Reys, Reys y Hope (1993) entienden al cálculo estimativo como la habilidad para llevar a cabo un cálculo numérico del cual se obtiene una respuesta aproximada, utilizando únicamente procedimientos mentales; es decir, sin el uso de lápiz y papel o cualquier otro dispositivo de cálculo o registro. Esta habilidad es central para desarrollar el sentido del número en los estudiantes. De hecho, los procedimientos propiamente mentales que el alumno lleva a cabo en este tipo de cálculos son diferentes a los que se aplican cuando se recurre a los algoritmos de lápiz y papel, tradicionalmente enseñados en el aula.

Por lo anterior, el cálculo mental estimativo ha sido reconocido como un tema importante en el campo de la educación matemática, así que varios países han recomendado su inclusión en el currículum escolar, entre otros: Estados Unidos, a través del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (1989); Japón, por medio del Ministerio Japonés de Supervisores de Matemáticas (Reys, Reys, Nohda, Ishida, Yoshikawa y Shimizu, 1991); España, a través del Ministerio de Educación y Ciencia (Parra, 1994); Argentina, por recomendación del Consejo General y Provincial de Educación (Parra, 1994), y Taiwán (Reys y Yang, 1998).

En relación con México, la Secretaría de Educación Pública (SEP) recomienda que, en sus programas de matemáticas de educación básica secundaria (1993), se utilice el cálculo estimativo, como apoyo para el estudio de dos temas del programa: números enteros y números decimales. Sin embargo, no resalta la importancia de una práctica sistemática y continua de este tipo de cálculo durante todo el ciclo escolar. Lo anterior hace parecer que el cálculo estimativo está conectado solamente con esos dos temas y, en consecuencia, se descuida su práctica ge-

neralizada. Por lo anterior, muy pocos libros de texto gratuito incluyen ejercicios sobre este tema y, cuando lo hacen, presentan poco material didáctico, pocos ejercicios, necesarios para apoyar la práctica del cálculo estimativo.

En este sentido, Flores, Reys y Reys (1990), después de realizar una investigación en el Centro de Investigación en Matemáticas (Cimat), llegaron a la conclusión de que la estimación de resultados de operaciones aritméticas y los problemas que las incluyen no se enseñan de manera explícita en las escuelas mexicanas, por lo que recomiendan que se dedique menos tiempo a los métodos tradicionales con lápiz y papel y se ponga más atención a los cálculos mentales, en especial al cálculo estimativo. Asimismo, otros investigadores (Hope, 1986; Reys, Reys y Hope, 1993) opinan que, a pesar de las recomendaciones para incluir la enseñanza del cálculo estimativo en los programas de estudio, los maestros por lo general no lo enseñan.

La investigación realizada en el Cimat se apoyó en la Universidad de Missouri, que proporcionó una prueba para calificar el desempeño de los alumnos en cálculo estimativo. Dicho instrumento fue desarrollado por Reys, Bestgen, Rybolt y Wyatt (1982) para estudiantes de 7^o, 8^o y 9^o grados del sistema educativo de Estados Unidos –que en México equivalen al 1^o, 2^o y 3^o de secundaria–, respectivamente. Este examen se ha utilizado en diversas investigaciones en distintas partes del mundo: Estados Unidos (Weber, 1996), Japón (Reys, Reys, Nohda, Ishida, Yoshikawa y Shimizu, 1991), Canadá (Reys, Reys y Hope, 1993), Australia (McIntosh, Reys y Reys, 1992) y México (Flores *et al.*, 1990).

Como resultados de estas investigaciones, Reys (1986) y Flores, Reys y Reys (1990) encontraron que las personas utilizan distintas estrategias de cálculo mental para resolver problemas aritméticos. También coinciden en señalar que una misma estrategia no es adecuada para todos los problemas, y que una característica importante del buen estimador es saber elegir y utilizar las estrategias adecuadas en cada problema. Las estrategias que estos autores consideran de mayor importancia son las siguientes: *a)* dígito de la izquierda, *b)* agrupación, *c)* redondeo, *d)* números compatibles y *e)* números especiales. En el cuadro 1 se describen estas estrategias y se muestran los procedimientos que los estudiantes utilizaron para resolver los problemas.

Por la importancia que se le ha dado en algunos países a la enseñanza y práctica del cálculo estimativo, y por la poca atención que se le brinda a este tema en las actividades curriculares nacionales, en 2001, en el Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo (IIIE) de la Universidad Autónoma de Baja California, se realizó una tesis de maestría con el propósito de identificar las estrategias de cálculo

Cuadro 1 Descripción y ejemplo de las principales estrategias de cálculo estimativo

Estrategia	Descripción	Problema	Procedimiento	Resultado exacto
Dígito de la izquierda	Se aplica principalmente a la suma. Considera el dígito más significativo del extremo izquierdo. Las cifras restantes se agrupan, considerando que la suma sea múltiplo de 10 o de 100.	$\begin{array}{r} 230 \\ + 180 \\ \hline \end{array}$	$2 + 1 = 3 \rightarrow 300$ $30 + 80 \rightarrow 100$ R: $300 + 100 =$ 400	410
Agrupación	Se usa cuando un grupo de números está cerca de un valor común, el cual se multiplica por el número de sumandos.	$\begin{array}{r} 9\ 328 \\ + 9\ 467 \\ \hline 8\ 839 \end{array}$	Común: 9 000 Sumandos: 3 R: $9\ 000 \times 3 =$ 27 000	27 634
Redondeo de números	Se buscan números fáciles de manejar. Al final, se ajusta el resultado. Especialmente, es útil en la multiplicación.	$(47)(66) =$	R: $(50)(70) =$ 3 500	3 102
Números compatibles	Se cambian o redondean los números para hacerlos compatibles entre ellos. Se deben considerar parejas de números que den resultados exactos ya que mentalmente son muy fáciles de operar. Es útil en la división.	$3\ 370 \div 7 =$	R: $3\ 500 \div 7 =$ 500 o R: $3\ 200 \div 8 =$ 400	481.4
Números especiales	Combina varios puntos de las estrategias anteriores. Consiste en observar si los números del problema son parecidos o cercanos a números más fáciles de operar y sustituirlos por ellos.	$23/45$ de 720	R: $1/2$ de 720 = 360	368

Nota: La sigla R significa resultado estimado.

estimativo que utilizan los estudiantes de 2º de secundaria considerados como buenos estimadores (Cortés, 2001). Asimismo, se pretendió sentar las bases para motivar investigaciones posteriores en las que se desarrollen materiales didácticos adecuados que apoyen la enseñanza sistemática del cálculo estimativo en los programas de matemáticas nacionales. La investigación partió del supuesto de que el cálculo estimativo no se enseña en las escuelas mexicanas de manera sistemática, por lo que es bajo el desempeño general de los alumnos en este aspecto.

Con base en los resultados de esta tesis, el presente trabajo tiene un doble propósito. Por un lado, dar a conocer el nivel de cálculo estimativo de los estudiantes bajacalifornianos de 2º año de secundaria y, por el otro, mostrar el tipo de estrategias mentales que utilizan los escolares considerados como buenos estimadores.

MÉTODO

Esta investigación utilizó la metodología propuesta por Reys, Bestgen, Rybolt y Wyatt (1982), la cual consiste en dos etapas. En la primera, se administra una prueba de cálculo estimativo a fin de seleccionar a los alumnos considerados como los mejores estimadores. En la segunda, se aplica una entrevista a los estudiantes con mejor rendimiento en la prueba estimativa, a fin de identificar las estrategias que utilizan para resolver problemas de esta naturaleza.

SUJETOS

Este trabajo se realizó con estudiantes provenientes de ocho secundarias -de Ensenada, Baja California- que presentaban las siguientes características: modalidad administrativa (de gobierno, particular), tipo de escuela (general, técnica y telesecundaria) y turno (matutino, vespertino). El cuadro 2 presenta el número y tipo de escuelas que participaron en esta investigación.

De cada escuela, se seleccionó un grupo de estudiantes de 2º grado de secundaria, para conformar una muestra total de 248 escolares. En aquellas escuelas que disponían de más de un grupo de este nivel escolar, la selección del grupo se hizo según la disponibilidad que ofreció la dirección escolar. El rango de edades de los estudiantes fluctuó entre los 12 y 16 años, siendo la edad típica de los escolares los 13 años (68.5%). La poblaciones femenina y masculina estaban representadas, respectivamente, por 54.8 y 45.2% de participantes.

Cuadro 2 Características de las escuelas participantes

Características		N	%
Tipo	General	4	50
	Técnica	2	25
	Telesecundaria	2	25
Modalidad	Pública	7	87.5
	Particular	1	12.5
Turno	Matutino	4	50
	Vespertino	4	50
Total		8	100

INSTRUMENTOS

Como ya se señaló, se utilizaron dos tipos de instrumentos para evaluar las estrategias de cálculo estimativo: el examen de cálculo estimativo y la entrevista.

Examen de cálculo estimativo

Se utilizó el examen desarrollado por Reys *et al.* (1982), el cual se tradujo al castellano de su versión original en inglés. Este examen consistió en 39 problemas aritméticos de respuesta abierta: 25 numéricos, que sólo requerían realizar los cálculos aritméticos señalados; los 14 problemas restantes fueron del tipo contextual, donde los alumnos tenían que interpretar el texto, elegir las operaciones más convenientes y efectuar los cálculos. Para el caso específico de los ejercicios contextuales, los enunciados se adaptaron al lenguaje y contexto local, con el propósito de facilitar a los alumnos su lectura e interpretación.

Los reactivos incluyeron operaciones de suma, resta, multiplicación y división, en las que intervenían números naturales, enteros, decimales, fracciones y porcentajes. Como este examen está diseñado para determinar las estrategias de cálculo estimativo que utilizan los alumnos que lo contestan, no es importante el número de reactivos de una cierta operación, sino la posibilidad de utilizar alguna de las

estrategias identificadas por Reys *et al.* (1982). En el examen de cálculo estimativo, se garantiza que pueden ser empleadas las diferentes estrategias dependiendo del reactivo.

Como no se esperaban cálculos exactos, se establecieron intervalos de respuestas aceptables para cada uno de los problemas. El cuadro 3 muestra los reactivos de tipo numérico que se utilizaron en este examen, donde se especifica el problema utilizado, el intervalo de respuesta aceptable y su respuesta exacta.

Para el caso de los ejercicios contextuales, el cuadro 4 muestra los enunciados utilizados, el intervalo de respuesta aceptable y la respuesta exacta.

Entrevistas

Las entrevistas consistieron en presentar a los alumnos seleccionados diez problemas de cálculo mental, cuatro de ellos numéricos y seis contextualizados; cinco de los reactivos se tomaron del examen estimativo y el resto fueron problemas nuevos. Los estudiantes resolvieron cada uno de los problemas, explicando en voz alta los pasos que siguieron para llegar al resultado. Las respuestas se registraron en cintas de video y las estrategias utilizadas por los alumnos se clasificaron de acuerdo con el estudio de Reys (1986). Los diez reactivos de la entrevista pueden observarse en el cuadro 7 de la sección de resultados.

PROCEDIMIENTO

Durante la primera etapa del estudio, se administró el examen estimativo a la totalidad de alumnos seleccionados (248). Antes de iniciar el examen, se les explicó que tenían un tiempo de 20 a 25 segundos para resolver cada problema y cinco segundos para anotar su respuesta. Se hizo énfasis en que no utilizaran lápiz ni papel para hacer los cálculos, no apuntaran los ejercicios y no usaran calculadora. Asimismo, se les informó que dicho examen no iba a afectar su calificación escolar. Con un proyector de acetatos, se presentaron uno a uno los 39 problemas, mostrando dos ejemplos antes de iniciar el examen. También se les informó que las respuestas correctas podrían variar dentro de un intervalo cercano a la respuesta exacta. Apegados a la metodología descrita por Reys *et al.* (1982), se seleccionó a 5% de los alumnos con mayor número de aciertos para aplicarles las entrevistas, quienes en este caso resultaron ser 12.

Cuadro 3 Problemas numéricos del examen estimativo (Reys *et al.*, 1982)

Núm. de reactivo*	Problemas	Intervalo	Respuesta exacta
1 (<i>n</i> , +, +, <i>e</i>)	$89 + 382 + 706$	(1 160-1 190)	1 177
2 (<i>n</i> , -, <i>e</i>)	$7\ 465 - 572$	(6 800-7 000)	6 893
3 (<i>n</i> , -, <i>e</i>)	$37\ 689 - 18\ 812$	(17 000-20 000)	18 877
4 (<i>n</i> , ×, <i>e</i>)	28×47	(1 200-1 500)	1 316
5 (<i>n</i> , ×, <i>e</i>)	$6\ 809 \times 91$	(540 000-630 000)	619 619
6 (<i>n</i> , ×, ×, <i>e</i>)	$31 \times 68 \times 298$	(540 000-630 000)	628 184
7 (<i>n</i> , ÷, <i>e</i>)	$713 \div 8$	(70-100)	89.125
8 (<i>n</i> , ÷, <i>e</i>)	$474\ 257 \div 8\ 127$	(50-60)	58.35...
9 (<i>n</i> , ÷, <i>e</i>)	$22 \div 72$	(0.2-0.4)	0.305...
10 (<i>n</i> , ×, ÷, <i>e</i>)	$(347 \times 6) \div 43$	(45-60)	48.41...
11 (<i>n</i> , +, +, <i>d</i>)	$0.7 + 0.002 + 0.81$	(1-2)	1.512
12 (<i>n</i> , ×, <i>d</i> , <i>e</i>)	486×0.24	(100-150)	116.64
13 (<i>n</i> , ÷, <i>d</i> , <i>e</i>)	$289 \div 71.8$	(4-5)	4.02...
14 (<i>n</i> , -, <i>d</i> , <i>e</i>)	$308 - 2.85$	(305-306)	305.15
15 (<i>n</i> , -, <i>d</i>)	$835.67 - 0.526$	(835-836)	835.144
16 (<i>n</i> , ×, <i>f</i> , <i>d</i>)	$1\frac{1}{2} \times 1.67$	(2-3)	2.505
17 (<i>n</i> , ×, ×, <i>f</i> , <i>d</i> , <i>e</i>)	$1\frac{7}{8} \times 1.19 \times 4$	(6-10)	8.925
18 (<i>n</i> , ×, <i>d</i>)	6.31×0.8	(4.8-6)	5.048
19 (<i>n</i> , ×, <i>d</i>)	98.6×0.041	(3.5-4.1)	4.0426
20 (<i>n</i> , ×, ×, <i>d</i>)	$5.1 \times 4.8 \times 6.3$	(120-160)	154.224
21 (<i>n</i> , ÷, <i>d</i> , <i>e</i>)	$648 \div 1.06$	(600-648)	611.32...
22 (<i>n</i> , ÷, <i>d</i>)	$7\ 029.6 \div 0.95$	(7 000-8 000)	7 399.57...
23 (<i>n</i> , +, <i>f</i>)	$\frac{12}{13} + \frac{7}{8}$	(1.5-2)	$\frac{187}{104}$ o 1.79...
24 (<i>n</i> , ×, <i>f</i> , <i>e</i>)	$(\frac{21}{23}) \times 149$	(130-149)	$136\frac{1}{23}$ o 136.04...
25 (<i>n</i> , -, <i>f</i>)	$(\frac{27}{5}) - (\frac{27}{8})$	(-0.5, -1)	$-\frac{19}{40}$ o -0.475

* **Nomenclatura:** *n* = ejercicios numéricos; *c* = ejercicios contextuales; *d* = números decimales; *e* = números enteros; *f* = fracciones; +, -, ×, ÷ (operadores básicos)

Cuadro 4 Problemas contextualizados del examen estimativo (adaptados de Reys *et al.*, 1982)

Núm. de reactivo*	Problemas	Intervalo	Respuesta exacta
26 (c, x, d, e)	Con una lata de pintura se cubren 7.47 m ² de superficie. ¿Como cuántos m ² se cubren con 4 latas?	(28-32)	29.88
27 (c, x, d, e)	¿Como cuánto gastará Esmeralda en 3.5 m de tela si el m cuesta \$23.00?	(69-100)	80.5
28 (c, x, e)	En una maquiladora pagan \$238.00 diarios en el turno nocturno. ¿Como cuánto ganará un empleado por semana aproximadamente?	(1 400-1 750)	1 666
29 (c, -, e)	Para un concierto de rock había 12 367 boletos, pero por lluvia sólo se vendieron 3 788. ¿Como cuántos boletos se quedaron sin vender?	(8 000-9 000)	8 579
30 (c, x, e)	Los alumnos necesitan dinero para el grupo que amenizará su fiesta de graduación, cada alumno debe cooperar con \$92.00 y son 46 alumnos. ¿Como cuánto les cobra el grupo?	(3 600-4 600)	4 232
31 (c, +, +, e)	Juanito puso un banco de 99 cm sobre otro de 39 cm y encima una silla de 37 cm, para alcanzar unos dulces de la alacena. ¿Como cuánta altura ganó con su peligroso arreglo?	(160-200)	175
32 (c, +, +, +, +, e)	Ésta es una cuenta del mercado que aún no ha sido sumada, ¿como cuánto es el total? 488 + 487 + 506 + 497 + 512 =	(2 400-2 600)	2 490
33 (c, x, e)	¿Como cuánta área tiene este rectángulo? (28 × 47)	(1 200-1 500)	1 316

Cuadro 4 Conclusión

Núm. de reactivo*	Problemas	Intervalo	Respuesta exacta
34 (c, -, e)	Una casa del fraccionamiento Villas del Real cuesta \$117 450.00. Si los papás de Claudia compraron una y dieron de enganche \$44 900.00, ¿como cuánto les falta por pagar?	(70 000-80 000)	72 550
35 (c, x, d, e)	En el recreo se vendieron 24 tortas de \$5.40 cada una. ¿Como cuánto se ganó?	(120-150)	129.6
36 (c, ÷, e)	Un grupo de 48 alumnos cooperó para la compra de un microscopio. Si todos aportaron la misma cantidad y se juntaron \$1 322.00 ¿cómo cuánto dio cada uno?	(20-30)	27.54..
37 (c, ÷, e)	Para la construcción de un salón de usos múltiples se pide la cooperación de los 12 grupos de una escuela. La cantidad a recaudar es de \$26 400. ¿Cuánto tiene que dar cada grupo?	(2 000-2 400)	2 200
38 (c, ÷, d)	La sociedad de padres de familia de una escuela donó 15.75 m ² de tela para hacer cortinas. Si para cada ventana se necesitan 0.95 m ² , ¿como cuántas cortinas saldrán?	(15-18)	16.57..
39 (c, x, e)	¿Cuántos días has vivido aproximadamente?	(4 383-5 844)	Variable

* **Nomenclatura:** *n* = ejercicios numéricos; *c* = ejercicios contextuales; *d* = números decimales; *e* = números enteros; *f* = fracciones; +, -, x, ÷ (operadores básicos).

En la segunda etapa, se entrevistó por separado a los 12 estudiantes, utilizando el método propuesto por Martínez (1998). Para ello, se les pidió individualmente que contestaran en voz alta los diez problemas y explicaran las operaciones mentales que llevaron a cabo. Dichas entrevistas fueron grabadas en cintas de video y posteriormente transcritas en su totalidad para su análisis. Para finalizar, se identificaron y clasificaron las estrategias utilizadas por los escolares para resolver cada uno de los problemas.

RESULTADOS

En términos generales, la prueba resultó difícil para los estudiantes. Lo anterior puede observarse en el cuadro 5, donde se muestran para cada uno de los reactivos los porcentajes de respuestas correctas e incorrectas, así como de abstenciones. El nivel de dificultad de cada uno de los reactivos –es decir, el porcentaje de estudiantes que los contestó correctamente– fluctuó entre 1.6% para el más difícil y 65.7% para el más fácil. La dificultad media de la prueba fue 23.8 por ciento.

Por otro lado, la media poblacional de aciertos fue de 9.3, con una desviación estándar de 5.4 y un rango que fluctuó entre 0 y 25 respuestas correctas. El cuadro 6 presenta la frecuencia de aciertos de los estudiantes examinados. Se podrá notar que: 1) ningún alumno pudo resolver más de 25 problemas, es decir, nadie logró obtener una calificación igual o por arriba de las dos terceras partes del examen (66.66%); 2) sólo 3 estudiantes lograron obtener al menos 24 aciertos, que corresponde a una calificación de 6, en una escala del 1 al 10; 3) 199 alumnos obtuvieron una calificación igual o menor a 13 respuestas correctas, es decir, 80.24% de los estudiantes no pudo resolver más de una tercera parte del examen.

De conformidad con las especificaciones señaladas por Reys *et al.* (1982), en la segunda etapa del estudio seleccionamos al 5% de escolares que obtuvieron el mayor número de aciertos. Esta población quedó conformada por 12 alumnos, de los cuales diez fueron hombres y dos mujeres; uno de 12 años de edad, ocho de 13 años y tres de 14. Estos alumnos tenían un promedio de calificaciones en la asignatura de matemáticas de 2º de secundaria de 9.5 y provenían de seis de las ocho escuelas.

En esta etapa, se les pidió a los 12 estudiantes que resolvieran 10 problemas en voz alta. Los estudiantes respondieron acertadamente 8.3 reactivos, en promedio. La información recabada en las entrevistas se muestra en el cuadro 7, donde se describen los problemas y se muestra una síntesis de los resultados que

Cuadro 5 Porcentajes y frecuencias de aciertos, errores y abstenciones en las respuestas del examen estimativo

Número de reactivo*	Respuestas correctas		Respuestas incorrectas		Abstenciones	
	N	%	N	%	N	%
1 (n, +, +, e)	111	44.8	121	48.8	16	6.4
2 (n, -, e)	66	26.6	165	66.6	17	6.8
3 (n, -, e)	77	31.0	152	61.4	19	7.6
4 (n, ×, e)	18	7.3	138	55.7	92	37.0
5 (n, ×, e)	11	4.4	180	72.6	57	23.0
6 (n, ×, ×, e)	6	2.4	118	47.6	124	50.0
7 (n, ÷, e)	118	47.6	81	32.6	49	19.8
8 (n, ÷, e)	9	3.6	125	50.4	114	46.0
9 (n, ÷, e)	35	14.1	173	69.8	40	16.1
10 (n, ×, ÷, e)	8	3.2	128	51.6	112	45.2
11 (n, +, +, d)	28	11.3	188	75.8	32	12.9
12 (n, ×, d, e)	10	4.1	150	60.5	88	35.4
13 (n, ÷, d, e)	40	16.1	123	49.6	85	34.3
14 (n, -, d, e)	94	37.9	117	47.2	37	14.9
15 (n, -, d)	94	37.9	102	41.2	52	20.9
16 (n, ×, f, d)	59	23.8	85	34.3	104	41.9
17 (n, ×, ×, f, d, e)	16	6.5	105	42.4	127	51.1
18 (n, ×, d)	37	14.9	181	73.0	30	12.1
19 (n, ×, d)	8	3.2	147	59.3	93	37.5
20 (n, ×, ×, d)	39	15.7	128	51.6	81	32.7
21 (n, ÷, d, e)	44	17.7	145	58.5	59	23.8
22 (n, ÷, d)	4	1.6	140	56.5	104	41.9
23 (n, +, f)	15	6.1	147	59.3	86	34.6
24 (n, ×, f, e)	34	13.7	70	28.3	144	58.0

Cuadro 5 Conclusión

Número de reactivo*	Respuestas correctas		Respuestas incorrectas		Abstenciones	
	N	%	N	%	N	%
25 (<i>n</i> , -, <i>f</i>)	11	4.4	133	53.7	104	41.9
26 (<i>c</i> ×, <i>d</i> , <i>e</i>)	160	64.5	73	29.5	15	6.0
27 (<i>c</i> ×, <i>d</i> , <i>e</i>)	148	59.7	79	31.9	21	8.4
28 (<i>c</i> ×, <i>e</i>)	163	65.7	65	26.2	20	8.1
29 (<i>c</i> -, <i>e</i>)	145	58.5	71	28.6	32	12.9
30 (<i>c</i> ×, <i>e</i>)	54	21.8	161	64.9	33	13.3
31 (<i>c</i> +, +, <i>e</i>)	129	52.0	88	35.5	31	12.5
32 (<i>c</i> +, +, +, +, <i>e</i>)	92	37.1	139	56.1	17	6.8
33 (<i>c</i> ×, <i>e</i>)	21	8.5	167	67.4	60	24.1
34 (<i>c</i> -, <i>e</i>)	89	35.9	125	50.4	34	13.7
35 (<i>c</i> ×, <i>d</i> , <i>e</i>)	77	31.1	150	60.5	21	8.4
36 (<i>c</i> ÷, <i>e</i>)	41	16.5	141	56.9	66	26.6
37 (<i>c</i> ÷, <i>e</i>)	49	19.8	151	60.9	48	19.3
38 (<i>c</i> ÷, <i>d</i>)	87	35.1	88	35.5	73	29.4
39 (<i>c</i> ×, <i>e</i>)	54	21.8	139	56.1	55	22.1
Totales	2 301	23.8	4 979	51.5	2 392	24.7

* **Nomenclatura:** *n*: ejercicio numérico; *c*: ejercicio contextual; +: ejercicio de suma; -: ejercicio de resta; ×: ejercicio de multiplicación; ÷: ejercicio de división; *d*: números decimales; *e*: números enteros; *f*: fracciones.

se obtuvieron en cada uno de ellos. Aquí se observa que las estrategias más utilizadas en los ejercicios de suma fueron: dígito de la izquierda, redondeo y agrupación. Se incluyó un ejercicio para el cual se esperaba que utilizaran la estrategia de números especiales, pero sólo tres alumnos pudieron contestarlo. En los ejercicios de resta, destacaron también las estrategias de dígito de la izquierda y redondeo, mientras que en los ejercicios de multiplicación las estrategias más utilizadas fueron redondeo y números especiales. En el caso de los ejercicios de división, los porcentajes de aciertos fueron bajos en general, aunque quienes los

Cuadro 6 Frecuencia de aciertos en el examen estimativo

Aciertos	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
25	2	0.8	0.8
24	1	0.4	1.2
23	2	0.8	2.0
22	3	1.2	3.2
21	3	1.2	4.4
20	4	1.6	6.0
19	8	3.2	9.3
18	2	0.8	10.1
17	1	0.4	10.5
16	6	2.4	12.9
15	9	3.6	16.5
14	8	3.2	19.8
13	11	4.4	24.2
12	19	7.7	31.9
11	10	4.0	35.9
10	11	4.4	40.3
9	21	8.5	48.8
8	19	7.7	56.5
7	24	9.7	66.1
6	20	8.1	74.2
5	11	4.4	78.6
4	17	6.9	85.5
3	16	6.5	91.9
2	14	5.6	97.6
1	2	0.8	98.4
0	4	1.6	100
Total	248	100	100

Cuadro 7 Reactivos de la entrevista y síntesis de las respuestas de los estudiantes

Problemas	Síntesis de resultados
$\begin{array}{r} 87\ 419 \\ 92\ 765 \\ + 90\ 045 \\ \hline 81\ 974 \\ \hline 98\ 102 \end{array}$	Contestado correctamente por todos los alumnos entrevistados. Las estrategias de cálculo estimativo utilizadas fueron: dígito de la izquierda, redondeo y agrupación.
$8\ 127 \div 474\ 257 =$	Contestado correctamente por los 12 alumnos. Las estrategias más utilizadas fueron: dígito de la izquierda y redondeo.
$\frac{12}{13} + \frac{7}{8} =$	Contestado por nueve alumnos. La mayoría de los problemas se presentaron en los ejercicios con fracciones. La estrategia más utilizada fue la de números especiales.
$486 \times 0.24 =$	Contestado correctamente por ocho alumnos. La estrategia de cálculo mental más utilizada fue la de números especiales.
<p>Calcula el área de un rectángulo de: 28×47 centímetros</p>	Contestado por el total de los alumnos. Las estrategias que más utilizaron fueron: dígito de la izquierda y el redondeo.
<p>Si 30% de los aficionados de la serie mexicana de béisbol compran un refresco, ¿como cuántos refrescos se vendieron, si la asistencia fue de 54 215 personas?</p>	Contestado correctamente por 11 alumnos. Las estrategias que más utilizaron fueron: redondeo, números especiales y números compatibles. Algunos jóvenes centraron su atención en el %, otros en el número, y un tercer grupo observó el número y el % al mismo tiempo, lo cual dio como resultado una gran variedad de formas de abordar el problema.
<p>Las concesiones de la serie mexicana de béisbol tuvieron ingresos por \$21 319 908.00. Si dicha cantidad se divide en partes iguales entre los 26 equipos, ¿como cuánto recibe cada equipo?</p>	El problema fue contestado correctamente por diez alumnos. Los errores más comunes se debieron a la falta de un ajuste final. Las estrategias de cálculo mental fueron adecuadas: dígito de la izquierda, redondeo y números compatibles.
<p>Ésta es una cuenta del mercado que aún no ha sido sumada. ¿Como cuánto es el total? $79 + 44 + 130 + 34...$</p>	El problema fue contestado correctamente por todos los alumnos. Las estrategias que más se utilizaron fueron: dígito de la izquierda, redondeo y agrupación.

Cuadro 7 Reactivos de la entrevista y síntesis de las respuestas de los estudiantes (conclusión)

Problemas	Síntesis de resultados
Estima el 15% de descuento para una chamarra que cuesta \$28 000.00	Contestado correctamente por 11 alumnos. Las estrategias más utilizadas fueron: redondeo, números compatibles y números especiales.
<p data-bbox="130 403 576 440">¿Cuál respuesta es razonable?</p> $\frac{4}{9} + \frac{5}{10} = 1\frac{5}{90}$ $\frac{6}{8} + \frac{4}{7} = \frac{8}{15}$ $\frac{8}{15} + \frac{11}{20} = 1\frac{1}{12}$	Sólo tres alumnos pudieron responder correctamente. Se observó que el manejo de los números fraccionarios causa mayores problemas en los estudiantes. La estrategia que más se utilizó fue la de números especiales.

respondieron correctamente utilizaron de manera adecuada la estrategia de números compatibles.

En síntesis, las estrategias más utilizadas por los estudiantes para resolver este tipo de problema, en orden descendente, fueron: el redondeo de números, números especiales y dígito de la izquierda. El cuadro 8 muestra un análisis de frecuencias donde se observa con claridad lo anteriormente dicho.

DISCUSIÓN

Utilizando el modelo de Reys *et al.* (1982), con su examen de cálculo mental traducido al castellano y adaptado para la población bajacaliforniana, estudiamos las habilidades de una muestra de escolares de 2º grado de secundaria del municipio de Ensenada, para resolver problemas de cálculo estimativo. Como resultado, pudimos conocer las competencias de estos estudiantes para resolver dichos problemas, así como identificar las estrategias mentales que utilizan los mejores estimadores para resolver diversos problemas aritméticos sin la ayuda del lápiz y papel ni ningún otro dispositivo.

Los resultados muestran que estos escolares no tienen un buen dominio del cálculo mental, ya que en promedio sólo respondieron correctamente a 23.8%

Cuadro 8 Frecuencia de estrategias utilizadas por los alumnos entrevistados

Alumno	Estrategias*					
	A	B	C	D	E	F
1	3	1	1	3	4	0
2	1	2	3	2	5	0
3	2	2	2	5	2	1
4	1	1	7	4	5	0
5	4	1	4	1	4	0
6	1	3	3	0	1	0
7	2	0	7	3	5	0
8	8	1	4	2	3	0
9	3	0	7	3	4	1
10	4	1	5	1	4	2
11	4	0	7	2	3	1
12	4	0	6	1	2	1
Totales	37	12	56	27	42	6

* **Nota:** A = Dígito de la izquierda; B = Agrupación; C = Redondeo; D = Números compatibles; E = Números especiales; F = Algoritmo de lápiz y papel.

de los problemas y que apenas 1% (tres estudiantes) alcanzó una calificación de seis en una escala del uno al diez. Esto confirma la aseveración de Flores, Reys y Reys (1990) y de Hope (1986), y Reys, Reys y Hope (1993) de que la estimación de resultados de operaciones aritméticas mentales no se enseña en forma explícita ni adecuada en las escuelas.

Por otro lado, se pudo detectar el tipo de problemas que los alumnos pudieron responder correctamente y aquellos en los que tuvieron dificultades. Así, los estudiantes entrevistados contestaron correctamente los ejercicios de sumas con números enteros y utilizaron correctamente las estrategias de cálculo estimativo; lo mismo sucedió con los problemas de multiplicación de enteros. Sin embargo, los alumnos erraron con mayor frecuencia en aquellos ejercicios que implicaban operaciones con números fraccionarios y decimales. Estos resultados concuerdan con

los registrados por Reys y Yang (1998) en una investigación similar realizada con escolares de Taiwán.

Asimismo, pudimos identificar las dificultades específicas que los alumnos enfrentan con ciertas estrategias mentales. Así, fue frecuente observar que los estudiantes manejan de manera correcta la estrategia de los dígitos de la izquierda. Sin embargo, no fue el caso de las estrategias de números compatibles y números especiales, posiblemente porque éstas requieren del conocimiento de otras estrategias y de un entrenamiento explícito en las escuelas. Asimismo, observamos que sólo algunos alumnos utilizaron ocasionalmente la estrategia de agrupamiento de números, quizás por ser fácilmente reemplazable por otras estrategias, como las del dígito de la izquierda y redondeo.

Estos resultados coinciden con lo que otros autores han encontrado en diferentes países, en el sentido de que el cálculo estimativo no se enseña ni se practica sistemáticamente en las escuelas secundarias, aunque se contemple en los programas de estudios respectivos. Lo anterior es evidente por los bajos resultados que obtuvieron los estudiantes, y por los comentarios que ellos hicieron durante el examen y la entrevista, que reflejaron que no estaban acostumbrados al manejo de este tipo de problemas. Por consiguiente, es comprensible que los alumnos desarrollen un bajo sentido del número, que no encuentren relaciones entre las estructuras numéricas y que no visualicen caminos para resolver problemas mentalmente. Sin embargo, es cierto que también encontramos buenos estimadores que, por lo general, tienen promedios altos en los cursos de matemáticas. Es interesante notar que ellos comentan que el cálculo estimativo lo practican en la vida cotidiana, principalmente en actividades extra escolares; por ejemplo, cuando van a la tienda a comprar alguna mercancía y cuando cuentan el dinero que deben regresar a sus padres.

Finalmente, hay que recordar que estas conclusiones son producto de un estudio limitado, con sólo 248 alumnos, en una ciudad del estado de Baja California. Por lo tanto, los resultados aquí expuestos deben interpretarse con precaución aunque, al parecer, proveen evidencia sustancial de que los estudiantes mexicanos no dominan el cálculo mental; razón por la que se le deberá poner mayor atención en las prácticas escolares.

Por último, es importante retomar lo señalado por Flores, Reys y Reys (1990), en el sentido de que se deben elaborar mejores procedimientos de medición para evaluar de manera válida el desempeño de los estudiantes en cuanto a sus habilidades de estimación. Con esta idea, una tarea pendiente es analizar con detenimiento las características psicométricas del examen de cálculo estimativo propuesto por Reys, Bestgen, Rybolt y Wyatt (1982), utilizado en esta investiga-

ción. En un principio, deberemos estudiar los niveles de dificultad y discriminación de sus reactivos, así como la confiabilidad de la prueba, para posteriormente estudiar la validez de sus resultados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cortés, F. J. (2001), *Análisis de las estrategias de cálculo estimativo que utilizan estudiantes de 2º de secundaria en Baja California*, Tesis de Maestría en Ciencias Educativas, Ensenada, México, UABC.
- Flores, A., R. Reys y B. Reys (1990), "Desempeño y estrategias en la estimación en operaciones aritméticas de alumnos de quinto de primaria y segundo de secundaria en México", *Educación Matemática*, vol. 2, núm. 1, pp. 33-44.
- Hazekamp, D. (1986), "Components of Mental Multiplying", en H. Shoen y M. Zweng (eds.), *Estimation and Mental Computation, 1986 Yearbook*, Iowa, NCTM, pp. 116-124.
- Hope, J. (1986), "Mental Calculation: Anachronism or Basic Skill?", en H. Shoen y M. Zweng (eds.), *Estimation and Mental Computation, 1986 Yearbook*, Iowa, NCTM, pp. 45-54.
- Mancera, E. (1991), "La matemática de la educación básica: el enfoque de la modernización educativa", *Educación Matemática*, vol. 3, núm. 3, pp. 10-30.
- McIntosh, A., B. Reys y R. Reys (1992), "A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense", *For the Learning of Mathematics*, vol. 12, pp. 2-8.
- Martínez, M. (1998), *La investigación cualitativa etnográfica en educación. Manual teórico práctico*, 3a. ed., México, Trillas.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989), en Crosswhite, J., J. Dossey y S. Frye (eds.), "NCTM Standars for School Mathematics: Visions for Implementation", *Mathematics Teacher*, vol. 82, núm. 8, pp. 664-671.
- Parra, C. (1994), "Cálculo mental en la escuela primaria", en C. Parra e I. Saiz (eds.), *Didáctica de las matemáticas: aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós Educador, pp. 219-272.
- Reys, B. (1986), "Teaching Computational Estimation: Concepts and Strategies", en H. Shoen y M. Zweng (eds.), *Estimation and Mental Computation, 1986 Yearbook*, Iowa, NCTM, pp. 31-44.
- Reys, R., B. Bestgen, J. Rybolt y J. Wyatt (1982), "Processes Used by Good Computational Estimators", *Journal for Research in Mathematics Education*, núm. 13, pp. 183-201.

- Reys, B., R. Reys y J. Hope (1993), "Mental Computation: A Snapshot of Second, Fifth and Seventh Grade Student Performance", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 96, núm. 6, pp. 308-314.
- Reys, R., B. Reys, N. Nohda, J. Ishida, S. Yoshikawa y K. Shimizu (1991), "Computational Estimation Performance and Strategies Used by Fifth and Eight Grade Japanese Students", *Journal for Research in Mathematics Education*, núm. 13, pp. 183-201.
- Reys, R. y D. Yang (1998), "Relationship Between Computational Performance and Number Sense Among Sixth and Eight Grade Students in Taiwan", *Journal for Research in Mathematics Education*, núm. 29, pp. 225-237.
- Secretaría de Educación Pública (1993), *Plan y programas de Estudio de educación básica secundaria*, México, Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.
- Sowder, J. (1992), "Estimation and Number Sense", en J. Sowder (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Nueva York, Simon and Schuster.
- Weber, W. (1996), "Filling in the Gaps: An Experimental Study on Mental Computation Achievement and Strategies", ponencia presentada en The 1996 American Educational Research Association Annual Meeting, Nueva York.

DATOS DE LOS AUTORES

Jeanette Cortés Flores

Secretaría de Educación y Bienestar Social,
Ensenada, Baja California, México
arturo@ccmc.unam.mx

Eduardo Backhoff Escudero

Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo, Universidad Autónoma de Baja California,
Ensenada, Baja California, México
backhoff@uabc.mx

Javier Organista Sandoval

Instituto de Investigación y Desarrollo Educativo, Universidad Autónoma de Baja California,
Ensenada, Baja California, México
javor@uabc.mx