Educación Matemática vol. 33 • núm. 1 • abril de 2021

Versión electrónica ISSN: 2448-8089

Educación Matemática

México • vol. 33 • núm. 1• abril de 2021

Producción

Formas e Imágenes, S.A. de C.V. Diseño y corrección, formaseimagenes@gmail.com

La revista publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática. EDUCACIÓN MATEMÁTICA aparece tres veces al año y es indexada en el Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (IRMICYT), del CONACYT, SCOPUS (Elsevier, Bibliographic Databases), ZdM (Zentralbatt für Didaktik der Mathematik), MathDi (MathEducDatabase), Latindex, Redalyc (Red de revistas científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal), Scientific Electronic Library Online (SciElo) y Clase (Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades). Las colaboraciones son recibidas en la plataforma www.autores-educacion-matematica.com Mantenemos el contacto: revedumat@yahoo.com.mx

Educación Matemática

Sociedad Mexicana
de Investigación
y Divulgación
de la Educación
Matemática, A.C.

Educación Matemática *vol. 33 • núm. 1 • abril de 2021*

© Educación Matemática, abril de 2021, vol. 33, núm. 1, es una publicación cuatrimestral editada por la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C., con domicilio en Guty Cárdenas 121-B, Col. Guadalupe Inn, 01020, Álvaro Obregón, Ciudad de México, correo electrónico revedumat@yahoo.com.mx.

Editora responsable: Avenilde Romo Vázquez. Reserva de derechos al Uso Exclusivo del Título: 04-2015-10163264600-203, ISSN (web) 2448-8089, ambos otorgados por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor.

Diagramación y corrección de estilo: Formas e Imágenes, S.A. de C.V., Av. Universidad 1953, edif. 2, loc. E, Copilco el Bajo, Coyoacán, 04330, Ciudad de México, formaseimagenes@gmail.com

Fecha de la última actualización 29 de marzo de 2021.

https://www.revista-educacion-matematica.org.mx

Contenido

 DOI: 10.24844/EM3301.00

Editorial

El primer número de este año 2021 ofrece una perspectiva plural de los resultados de investigación en Educación Matemática en estos tiempos, marcados por una fuerte crisis sanitaria, que nos ha obligado a emprender una nueva forma de enseñar. En México, la educación matemática en la modalidad virtual se ha producido y mantenido –por más de un año– gracias a innumerables esfuerzos de diferentes actores sociales: estudiantes, padres de familia, profesores y ciudadanos, quienes han convertido mercados, molinos, tortillerías, pequeños comercios, casas habitación, calles, montañas y parajes rurales en aulas. Los niños y los jóvenes, en el mejor de los casos, han hecho de sus computadoras y celulares una herramienta de comunicación de saberes, de técnicas y de lenguajes escolares. Los padres de familia han rememorado sus trayectorias estudiantiles, releído libros, consultado a amigos y vecinos para realizar tareas, ejercicios y problemas. Y a pesar, de la tremenda desigualdad social, muchos profesores de escuelas rurales han generado materiales que distribuyen a sus estudiantes en sus propias casas, para que puedan seguir construyendo saberes escolares –y quizá presentes con posibilidades de futuros múltiples–. La radio y la televisión han generado programas en los que se presentan y demuestran teoremas, se proponen y resuelven problemas. No se trata de propuestas didácticas innovadoras, sino de una atención a la urgencia de la población, que requiere de la educación, como una balsa a la cual asir la esperanza en el mar de la incertidumbre. Ante este escenario, los educadores matemáticos seguimos diseñando propuestas teóricas y didácticas, analizando los conocimientos de los profesores, produciendo resultados en diferentes niveles educativos y ofreciendo rutas para continuar la investigación, como lo refleja este interesante número. Su publicación ha sido posible gracias a la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, SOMIDEM A. C., creada en el año 2013 por un grupo de educadores matemáticos adscritos a diferentes instituciones de educación superior y de centros de investigación, ubicados en distintas regiones de México. Es decir, surge en la pluralidad, que la caracteriza desde entonces.

La SOMIDEM ha sufrido diferentes embates, efecto de la crisis sanitaria, pero se ha mantenido y se propone, más allá de sobrevivir, crecer y surcar nuevos horizontes. Es su propósito continuar con la edición de la *Revista Educación Matemática* (REM) y consolidarse como un órgano de mayor influencia a nivel nacional. Para ello, el Consejo Directivo 2020-2023 invita a los educadores matemáticos mexicanos a ser parte de esta sociedad y conjuntar recursos intelectuales y materiales para ampliar el espacio de comunicación académica entre docentes, investigadores y estudiantes de la Educación Matemática; a promover la creación de proyectos de colaboración científica, de discusión y de difusión de los resultados de sus investigaciones e incidir en la innovación de la enseñanza de las matemáticas.

Para cerrar, queremos dedicar unas palabras a la memoria de José Carrillo Yáñez, asiduo autor –coautor de uno de los artículos de este número–, lector y colaborador de la REM. Su herencia académica y humana es vasta. Extrañaremos su talento, su gentileza y su gran generosidad.

Avenilde Romo-Vázquez
Editora en jefe

María García
Presidenta de la SOMIDEM

 DOI: 10.24844/EM3301.01

Incidencia de los paradigmas didácticos sobre la investigación didáctica y la práctica docente

Influence of the didactic paradigms over research in didactics and teaching

Josep Gascón,[1] Pedro Nicolás[2]

Resumen: La tesis que tomamos aquí como punto de partida, puede formularse brevemente como sigue: el modelo epistemológico de las matemáticas vigente en una institución didáctica condiciona fuertemente las prácticas docentes que es posible desarrollar en la misma. Uno de los objetivos de este trabajo consiste en clarificar y generalizar esta tesis, mostrando que, más allá del modelo epistemológico subyacente, son los *paradigmas didácticos* los que permiten explicar las prácticas docentes que la institución lleva a cabo. Paralelamente, al ampliar la noción de *teoría didáctica* mediante la de *praxeología de investigación didáctica*, se pone de manifiesto la incidencia del paradigma didáctico que una comunidad científica asume sobre el tipo de problemas de investigación que privilegia y, en última instancia, la importancia del contraste entre paradigmas para profundizar el diálogo entre teorías didácticas.

Palabras clave: *Paradigma didáctico, praxeología de investigación didáctica, prácticas docentes, fines de la investigación didáctica, fines de la educación matemática.*

Fecha de recepción: 29 de mayo de 2020. **Fecha de aceptación**: 14 de enero de 2021.

[1] Campus de la Universidad Autónoma de Barcelona, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias y Biociencias, josepgasconperez@gmail.com, orcid.org/0000-0001-5570-1144.

[2] Campus Universitario de Espinardo, Universidad de Murcia, Facultad de Educación, pedronz@um.es,, Facultad de Educación 30100 Espinardo (Murcia), orcid.org/0000-0002-6757-9155

Abstract: Our starting point is the thesis, perhaps already widely accepted, according to which the epistemological model of mathematics prevailing in a didactic institution strongly affects the teaching in that institution. One of the aims of this work is to enlighten and to generalize this thesis. We will suggest that, rather than just the epistemological model, a complete explanation of teaching practices taking place in a certain institution should also take into account what we call *didactic paradigms*. At the same time, if we enlarge the notion of *theory in didactics* by means of the idea of *praxeology of research in didactics*, it becomes clear that a didactic paradigm is something that can also live or be assumed by such a praxeology of research in didactics, and that affects the kind of research problems considered therein. Therefore, for two theories in didactics to stablish a connection, it is required to make explicit the didactic paradigm assumed by each one.

Keywords: *Didactic paradigm, praxeology of research in didactics, teaching practices, ends of research in didactics, ends of mathematics education.*

1. INTRODUCCIÓN: HACIA UNA TERCERA ETAPA DEL DIÁLOGO ENTRE TEORÍAS DIDÁCTICAS

En 2017, iniciamos un diálogo entre diferentes teorías o enfoques en didáctica de las matemáticas centrado en el presunto carácter normativo de la ciencia didáctica (Gascón y Nicolás, 2017). Más concretamente, esta primera etapa del diálogo[3] giró en torno a la siguiente cuestión:

> ¿Hasta qué punto, en qué forma y en qué condiciones, la didáctica puede (o incluso debe) proponer juicios valorativos y normativos que proporcionen criterios sobre cómo organizar y gestionar los procesos de estudio?

Nuestra respuesta, formulada desde el punto de vista de la TAD, fue inequívoca: la ciencia didáctica no está legitimada para enunciar resultados de investigación,

[3] Los participantes en esta etapa del diálogo fueron: Guy Brousseau (TSD), Michèle Artigue (contraste entre diversas teorías), Ed Dubinsky (APOS), María Trigueros (APOS), Juan D. Godino (EOS), Koeno Gravemeijer (Educación Matemática Realista), Ricardo Cantoral (TSME) y Josep Gascón y Pedro Nicolás (TAD).

ni juicios de valor, ni prescripciones normativas de ningún tipo (Gascón y Nicolás, 2016/2019a). Esta primera etapa del diálogo dio origen a fuertes debates y acabó provocando la emergencia de nuevas cuestiones y la consiguiente ampliación de la discusión inicial al mostrar la necesidad de sacar a la luz los postulados o asunciones básicas de las diferentes teorías y su relación con los fines que proponen para la investigación didáctica:

> ¿Cuáles son los fines de la investigación de cada teoría didáctica? En otras palabras, ¿cuáles son los problemas de investigación que privilegia y los fenómenos didácticos que se propone explicar? En relación con esto, ¿cuáles son los resultados que cada teoría considera admisibles?

En torno a estas cuestiones se ha desarrollado una segunda etapa del diálogo plasmada en múltiples trabajos publicados en *For the Learning of Mathematics*.[4] Esta etapa culminó en un curso avanzado presencial organizado por el *Centre de Recerca Matemàtica* (Barcelona) con ocasión del *Intensive Research Program* desarrollado entre los días 3 y 14 de junio de 2019.

Entre las cuestiones que han quedado abiertas y que podrían ser tratadas en una tercera etapa del diálogo, llamamos la atención sobre las siguientes:

> ¿Qué postulados fundamentan la investigación didáctica que lleva a cabo una comunidad científica y las prácticas docentes que promueve para alcanzar los fines educativos que, de manera más o menos implícita, propugna dicha comunidad? Y, en última instancia, ¿cómo se relaciona la investigación didáctica que desarrolla una comunidad científica con la práctica docente que promueve?

Veremos, en coherencia con los postulados de la TAD, que para responder a estas cuestiones se requiere, por una parte, integrar la noción de teoría didáctica en la de praxeología de investigación (sección 2) y, sobre todo, profundizar y desarrollar la noción de paradigma didáctico cuyas primeras formulaciones datan de finales del siglo pasado (secciones 3 y ss.). Mostraremos, en definitiva, que los paradigmas que asume de facto una comunidad de investigadores en didáctica inciden simultáneamente sobre su praxis científica y sobre la práctica

[4] Hasta el momento se han publicado los siguientes artículos: S. Lerman (2018); J. Proulx (2018); Maria G. Bartolini Bussi (2018); B. Davis (2018) A. Oktaç, M., Trigueros y A. Romo (2019); J. D. Godino, C. Batanero y V. Font (2019); S. Staats y L. A. Laster (2019); J. Gascón y P. Nicolás (2019b).

docente que promueve (sección 8), constituyendo así la piedra de toque para explicar las relaciones entre ambas y para avanzar en el diálogo entre teorías (sección 9).

2. UN MODELO GENERAL DE LA ACTIVIDAD CIENTÍFICA: LAS PRAXEOLOGÍAS DE INVESTIGACIÓN

Empezaremos enunciando un postulado antropológico que constituye el núcleo de la teoría de la actividad humana que propone la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) en la que nos situamos: *toda actividad humana, así como los productos de esta, pueden describirse en términos de praxeologías*.

En Chevallard (1999), se describe con todo detalle la estructura y la dinámica de las praxeologías en el caso particular de la actividad matemático-didáctica. Aquí solo diremos que la génesis, personal o institucional, de una praxeología reside en el "bloque de la praxis" $[T/\tau]$ formado por un tipo de tareas T y una técnica τ_T asociada y que su desarrollo requiere de un "bloque tecnológico-teórico" $[\theta/\Theta]$, también llamado *logos*, que está constituido por dos niveles sucesivos, la *te*cnología θ y la teoría Θ, de descripción y justificación de la praxis. Utilizamos "tec-no-logia"[5] en un sentido próximo al etimológico, esto es, como discurso razonado (*logos*) sobre la técnica (*tékhnē*). La noción de "teoría" se interpreta, en primera instancia, como tecnología de la tecnología, esto es, como un discurso razonado de segundo nivel. Es importante subrayar que las cuatro nociones (tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías) no describen ninguna propiedad intrínseca de los objetos matemáticos, únicamente hacen referencia a las diferentes funciones que estos pueden desempeñar en una actividad. Estas funciones pueden depender de la institución[6] en la cual se lleva a cabo la actividad (relatividad institucional) e incluso, en una misma institución, un objeto

[5] Encontramos un antecedente de este uso en Alexandre Koyré que denominó "tecnología" a la *teoría de la práctica* y se preguntó por qué la ciencia griega no desarrolló tal tecnología cuya idea, sin embargo, había formulado (Koyré, 1961).

[6] En los trabajos desarrollados en el ámbito de la TAD, la noción de *institución* ha sido tratada hasta el momento como una noción primitiva. Por su parte, Jesús Mosterín propone la siguiente formulación: *Una institución es un conjunto de convenciones o reglas constitutivas que definen y determinan posiciones y relaciones en un entramado social determinado de un modo convencional. Las convenciones o reglas de una institución determinan también derechos y deberes, permisos y prohibiciones, premios y castigos.* (Mosterín, 2008, p. 92). Consideramos que esta forma de interpretar las instituciones es compatible con el uso habitual del término en la TAD y que puede servir de punto de partida para precisar dicha noción

matemático puede desempeñar diferentes funciones, dependiendo de la actividad en la que intervenga. La unión, institucional o personal, de un bloque de praxis y un bloque de logos se llama una praxeología y se denota $[T/\tau/\theta/\Theta]$.

En cuanto a la dinámica praxeológica, hay que decir, en primer lugar, que los dos bloques, la praxis y el logos, evolucionan conjuntamente. El bloque del logos condiciona la praxis puesto que acaba determinando las técnicas que están justificadas y su ámbito de validez, así como el tipo de tareas que se pueden abordar con las técnicas disponibles y los resultados que son admisibles. Además, entre las funciones que desempeña el discurso tecnológico figura la construcción de nuevas técnicas y la articulación entre ellas. Recíprocamente, el desarrollo de la praxis va construyendo un corpus de resultados que, a largo plazo, puede integrarse en el bloque del logos enriqueciéndolo mediante nuevas nociones y nuevos discursos tecnológico-teóricos que surgen para describir, justificar e interpretar las sucesivas variaciones de las técnicas.

Cuando este postulado, válido para toda actividad humana, se aplica al caso particular de la actividad científica, se obtiene un modelo general de dicha actividad mediante la noción de praxeología de investigación $\mathrm{PI} = [\mathrm{T_I}/\tau_\mathrm{I}/\theta_\mathrm{I}/\Theta_\mathrm{I}]$. Esta noción pone de manifiesto que, cuando se habla de teorías científicas para referirse a diferentes enfoques de investigación, se comete una sinécdoque porque se está designando el todo, la praxeología de investigación (PI), por una de sus partes, el componente teórico Θ_I de la misma. Esta ampliación de la noción de 'teoría científica', el paso de la parte, Θ_I al todo, $\mathrm{PI} = [\mathrm{T_I}/\tau_\mathrm{I}/\theta_\mathrm{I}/\Theta_\mathrm{I}]$, es coherente con la evolución actual de la filosofía de la ciencia:

> Hasta los años 70 ha imperado una *filosofía del conocimiento científico*. En las últimas décadas, en cambio, se ha comenzado a desarrollar una *filosofía de la actividad científica* que, aun siendo complementaria de la epistemología, comienza a interesarse por la práctica de los científicos, no sólo por las teorías científicas. (Echevarría, 1998, p. 7).

La noción de PI constituye, en consecuencia, una ampliación y reconceptualización de la noción de teoría científica que pretende modelizar la actividad científica globalmente considerada y, como tal, constituye una alternativa a los conceptos de paradigma o matriz disciplinar en Kuhn, programa de investigación

(mediante la explicitación de las correspondientes convenciones o reglas constitutivas) en el momento que surjan problemas didácticos que lo requieran.

en Lakatos, tradición de investigación en Laudan (Diez y Ulises Moulines, 2016) y marco epistémico (Piaget y García, 1981).

En diversos trabajos se ha mostrado que la noción de PI y, en particular, la noción de PI didáctica (PID), es un instrumento útil para describir la estructura y el funcionamiento de la actividad científica, para unificar el lenguaje y para enmarcar el diálogo entre diferentes enfoques de investigación didáctica (Artigue, Bosch y Gascón, 2011a, 2011b; Bosch, Gascón y Trigueros, 2017).[7]

Una PID y, en general toda $\mathrm{PI} = [T_{\mathrm{I}}/\tau_{\mathrm{I}}/\theta_{\mathrm{I}}/\Theta_{\mathrm{I}}]$, está constituida por la unión de una praxis científica $[\mathrm{T}_{\mathrm{I}}/\tau_{\mathrm{I}}]$ y un logos científico $[\theta_{\mathrm{I}}/\Theta_{\mathrm{I}}]$. El bloque del logos científico contiene un conjunto de postulados que fijan el tipo de entidades y procesos que forman parte de los componentes de las PID, las relaciones entre ellos y los criterios para describir y justificar la praxis científica. El bloque de la praxis contiene los tipos de problemas científicos que se estudian y las técnicas o metodologías de investigación que se utilizan para estudiarlos. En cuanto a la dinámica de una PID, como en todas las praxeologías, los dos bloques evolucionan conjuntamente. El bloque del logos condiciona la praxis puesto que acabará determinando qué *fenómenos* didácticos (Artigue, Bosch y Gascón, 2011a) se estudiarán, qué se considerará un problema didáctico y el tipo de resultados de investigación que se aceptarán. En particular, el logos proporciona una heurística positiva (Lakatos, 1981), esto es, un conjunto de orientaciones sobre las líneas de investigación que deben seguirse prioritariamente Recíprocamente, el desarrollo de la praxis de una PID va construyendo un corpus de resultados que, a largo plazo, enriquece la propia metodología de investigación con nuevos métodos de análisis y va añadiendo al bloque tecnológico-teórico nuevas entidades, nuevas relaciones entre ellas y nuevos tipos de fenómenos que hacen evolucionar las asunciones básicas de la PID.

Un ejemplo del enriquecimiento de la metodología de investigación didáctica originado por el desarrollo de la praxis científica lo encontramos, en el caso

[7] Con objetivos similares, Luis Radford ha propuesto un espacio conceptual y un metalenguaje para describir las diferentes teorías en Educación Matemática y caracterizar los diferentes tipos de conexiones entre ellas. Así, asocia a cada teoría un trío de componentes (P, M, Q), donde P es un sistema de *principios básicos*, M una *metodología* que incluye técnicas de selección e interpretación de "datos" y Q un conjunto de problemas o *cuestiones de investigación paradigmáticas* (Radford, 2008). Más allá de las posibles relaciones estructurales que, sin duda, pueden establecerse entre P, M y Q por un lado y los componentes de una PID por otro, sería interesante analizar los instrumentos que proporciona cada una de estas ampliaciones de la noción clásica de "teoría científica" para dar cuenta de la *práctica* de las comunidades de investigación didáctica.

de la TAD, en la emergencia de la noción de modelo epistemológico de referencia (MER). Como consecuencia del desarrollo de dicha noción han surgido nuevas entidades y nuevos tipos de fenómenos que han enriquecido el logos de la TAD, considerada como PID.[8] En efecto, cuando la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1985) puso en evidencia la relatividad institucional del saber matemático, la didáctica tuvo que integrarlo como parte de su objeto de estudio y asumir explícitamente la responsabilidad de analizar los modelos epistemológicos del saber matemático que están vigentes en las instituciones que intervienen en los procesos de transposición. Para llevar a cabo dicho análisis es preciso construir modelos epistemológicos específicos o locales, compatibles con un modelo epistemológico general o global, de los diferentes ámbitos de la actividad matemática, a fin de tomarlos como sistemas de referencia útiles para analizar los modelos dominantes o vigentes en las diferentes instituciones:

> Toute recherche en didactique qui se propose d'étudier les phénomènes relatifs à un domaine des mathématiques (par exemple l'algèbre élémentaire), et dans une institution didactique donnée, ne devrait pas assumer tel quel le modèle implicite prévalant dans l'institution, mais devrait le prendre en compte en tant qu'objet d'étude, c'est-à-dire comme faisant partie des faits didactiques qui constituent la base "empirique" de la recherche. Pour cela, le chercheur a besoin d'un "point de vue" particulier, c'est-à-dire d'un modèle alternatif du domaine d'activité mathématique enseigné qui lui serve de *cadre de référence* pour interpréter le modèle dominant dans l'institution qu'il étudie. Or, tout modèle local utilisé pour étudier un domaine particulier des mathématiques enseignées va prendre sa place dans un modèle global de l'activité mathématique qui restera, selon les cas, plus ou moins explicité par le chercheur. (Gascón, 1994–95, p. 44)

A los citados "modelos alternativos", que presentan un carácter relativo y provisional, y cuya construcción es responsabilidad de la didáctica, se les asignó desde el principio una función fenomenotécnica:

[8] Si bien es cierto que, como afirma uno de los revisores de este trabajo, "les praxéologies de recherche que nourrit la TAD, héritières de cette histoire, sont bien plus diverses dans leurs problématiques et leurs méthodologies", en este trabajo identificamos la TAD con una PID relativamente bien definida cuyo *logos* y cuya *praxis científica* hemos intentado caracterizar en (Gascón y Nicolás, 2016/2019a y 2019b).

> [...] en la interpretación –e incluso en la mera formulación– de los fenómenos didácticos, [...] *es imprescindible la utilización de un modelo específico de la forma como se generan y se desarrollan los conocimientos matemáticos involucrados en dichos fenómenos*. (Gascón 1993, p. 302)

Toda PID asume en el logos y utiliza en la praxis, de manera más o menos explícita, un modelo epistemológico de los conocimientos en juego. De hecho, en (Gascón, 2003) hemos caracterizado las PID que se sitúan en el *Programa Epistemológico de Investigación Didáctica* como aquellas que explicitan los MER que inevitablemente utilizan para formular los problemas didácticos que abordan.

> This is precisely the originality of the *Epistemological Program* in the didactics of mathematics. It opens a new way of access to the study of the didactic phenomena through the *explicit modelization of the taught mathematical knowledge* (Gascón, 2003, p. 50).

Es precisamente esta toma de conciencia de los MER que emplea una comunidad didáctica lo que permite: (a) utilizarlos como hipótesis provisionales en lugar de considerarlos como postulados inamovibles; y (b) disponer de un sistema de referencia para contrastarlo con el modelo epistemológico vigente (MEV)[9] en cada una de las instituciones que forman parte de su objeto de estudio. Así, los MER se constituyen como instrumentos de emancipación epistemológica de la comunidad didáctica (Gascón, 2014).

Junto a la asunción de un modelo epistemológico concreto de los conocimientos en juego, el logos de una PID tiende a privilegiar ciertos fines educativos que se formulan con las nociones y los términos que proporciona dicho modelo, al tiempo que propone unos medios didácticos, entendidos como prácticas docentes o estrategias didácticas, supuestamente útiles para alcanzar dichos fines. En consecuencia, en su praxis científica, la comunidad de investigadores que trabaja en el ámbito de una PID suele formular problemas de investigación utilizando los términos que proporciona el modelo epistemológico subyacente y haciendo referencia a los citados fines y medios. Es en este punto en el que surge la noción de paradigma didáctico que analizaremos con detalle en las próximas secciones.

[9] En trabajos anteriores hemos denominado *modelo epistemológico dominante* (MED) al que aquí denominamos *modelo epistemológico vigente* (MEV) en una institución docente.

3. ORIGEN Y DESARROLLO DE LA NOCIÓN DE PARADIGMA DIDÁCTICO

Las primeras formulaciones de la noción de paradigma didáctico datan de (Gascón, 1992, 1994). Posteriormente, la noción de paradigma didáctico se fundamentó epistemológicamente mediante una reconstrucción racional, en el sentido de (Lakatos, 1971), de la evolución histórica del problema epistemológico (de las matemáticas) y la caracterización de tres tipos de modelos epistemológicos: euclideanistas, cuasiempiristas y constructivistas que constituyen esquematizaciones de las respuestas históricas a las sucesivas formulaciones de dicho problema. Cada uno de estos tipos de modelos epistemológicos sustenta un tipo de "modelos docentes" o "paradigmas (didácticos) ideales". En particular, el paradigma teoricista se sustenta en una epistemología euclideanista; el paradigma modernista en una epistemología cuasi empirista, y el paradigma de la modelización matemática en cierta versión de la epistemología constructivista (Gascón, 2001).

Los paradigmas didácticos y los modelos epistemológicos citados son construcciones teóricas, formas ideales, que nunca han existido en estado puro en alguna institución. Unos y otros tienen una función metodológica, heurística, se utilizan para ser contrastados con la realidad empírica. Sus rasgos definitorios pueden estar o no presentes en una institución docente (en un periodo histórico concreto) pero los paradigmas y los modelos epistemológicos vigentes efectivamente en la contingencia institucional, presentan siempre un carácter mixto formado por rasgos de las diferentes formas ideales, son mestizos.

La tesis de (Gascón, 2001), que tomamos aquí como punto de partida, puede formularse brevemente como sigue: *el modelo epistemológico de las matemáticas dominante* (*o vigente*) *en una institución didáctica condiciona fuertemente las prácticas docentes que es posible desarrollar en la misma*. Uno de los objetivos de este trabajo consiste en clarificar y generalizar la tesis anterior mostrando que, más allá del modelo epistemológico subyacente, son los paradigmas didácticos globalmente considerados los que permiten explicar las prácticas docentes –las acciones didácticas– que la institución lleva a cabo o que una PID propugna, así como el tipo de problemas didácticos que la institución considera relevantes o que una PID privilegia como problemas de investigación didáctica.

4. PARADIGMA DIDÁCTICO VIGENTE EN UNA INSTITUCIÓN Y PARADIGMAS DIDÁCTICOS DE REFERENCIA CONSTRUIDOS POR UNA PRAXEOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA

La nueva versión que proponemos de la noción de paradigma didáctico fue presentada en Gascón y Nicolás (2018), y depende esencialmente: (a) de los fines educativos que propugna; y (b) del modelo epistemológico en el que se sustenta.

(a) En cuanto a los fines educativos,[10] hemos de distinguir entre los fines que, de manera más o menos explícita, persigue una institución docente, que podríamos denominar fines educativos vigentes (F_V) en dicha institución, y los fines que una PID (como, por ejemplo, la TAD) utiliza como fines educativos de referencia (F_R). Unos y otros se sitúan en la "esfera de los valores" (Weber, 1917/2010), caen fuera de la "esfera del conocimiento" y, en consecuencia, no pueden ser establecidos racionalmente.

Los F_V en una institución escolar quedan plasmados parcialmente en los documentos curriculares y pueden rastrearse en múltiples expresiones sociales y culturales formando parte de lo que Isaiah Berlín denominaba "ideas generales" de una sociedad, esto es, creencias, actitudes, hábitos y disposiciones individuales y sociales que en el lenguaje común (y a causa del legado marxista) solemos llamar ideología (Berlín, 2017). La ideología pedagógica de la sociedad se establece en coherencia con su estructura social y ambas evolucionan a lo largo de la historia de las sociedades en función de las normas que las rigen en cada periodo histórico (Durkheim, 1924/1991). Por su parte, los F_R que una PID utiliza, pueden ser asumidos por esta, tomándolos como postulados relativamente incuestionables, o utilizados como una hipótesis provisional, un sistema de referencia, para analizar la realidad empírica.

(b) En lo que se refiere a los modelos epistemológicos en los que se sustentan los paradigmas didácticos, hemos de distinguir entre el modelo epistemológico vigente (MEV) en una institución docente, en un periodo histórico determinado, y los modelos teóricos que construye una PID para analizar y evaluar, entre otras cosas, los citados MEV, y que denominamos modelos epistemológicos de referencia (MER). En coherencia con los postulados de la TAD,

[10] Hay que distinguir, asimismo, entre los *fines últimos* y los *fines intermedios*. Estos son *medios* para alcanzar los fines últimos y, en este sentido, "los fines intermedios son justificables en función de los fines últimos" (Mosterín, 2008, p. 35).

los modelos epistemológicos de las matemáticas (ya sean modelos generales o modelos específicos de los diferentes dominios de estas) pueden describirse en términos praxeológicos. Los MER que construye la TAD pueden representarse mediante relaciones relativamente bien definidas (por ejemplo, relaciones de inclusión o relaciones de modelización) entre praxeologías matemáticas cuyos componentes están claramente explicitados. Mientras que, por su parte, el MEV en una institución suele contener relaciones relativamente imprecisas entre praxeologías matemáticas que presentan incompletitudes e incoherencias que aparecen cuando se analizan desde el punto de vista que proporciona un MER.

En torno a los fines educativos que están vigentes (F_V) y son compartidos en una institución y al modelo epistemológico vigente (MEV) en esta, se constituye un proyecto educativo que lleva asociado una forma específica de analizar, describir y evaluar la educación matemática escolar, esto es, lo que denominamos el paradigma didáctico vigente (PDV) en dicha institución y que incluye, además, los medios (M_V) supuestamente útiles para alcanzar esos fines. Apelando de nuevo al postulado de la TAD según el cual toda actividad humana puede describirse en términos de praxeologías, diremos que los medios que un paradigma propone son procesos didácticos (o procesos de estudio) de cierto tipo que se pueden describir en términos de praxeologías que denominamos praxeologías didácticas (Chevallard, 1999).

En general, los paradigmas didácticos –tanto si son construcciones culturales de una institución educativa como si están creados por una PID para utilizarlos como paradigmas de referencia– no surgen de la nada. Se constituyen como reacción a un estado de cosas (real o hipotético) previamente establecido, esto es, como respuesta a un paradigma vigente o simplemente posible. En consecuencia, para caracterizar un paradigma didáctico necesitamos, también, explicitar los hechos didácticos a los que pretende responder. Con más precisión: un paradigma didáctico permite interpretar como fenómenos didácticos ciertas "regularidades" observables en los procesos didácticos que tienen lugar en la institución docente en la que está vigente (real o hipotéticamente) otro paradigma. Podríamos resumir lo anterior diciendo que un paradigma didáctico es uno de los instrumentos que utiliza el didacta para sacar a la luz y hacer visibles ciertos hechos didácticos (ignorando otros) y para proporcionar una interpretación de estos, como fenómenos didácticos. Esta interpretación se basa habitualmente en que el nuevo paradigma permite relacionar entre sí hechos que eran considerados independientes según las lentes del paradigma vigente.

En definitiva, para caracterizar el PDV en una institución en cierto periodo histórico, hemos de explicitar: el MEV en dicha institución; los F_V que dicho paradigma propugna; los M_V que se consideran necesarios en la institución para alcanzar dichos fines y que se materializan en determinadas praxeologías didácticas; y los fenómenos (φ_V) que el paradigma saca a la luz y a los que responde. En síntesis, caracterizaremos el PDV en una institución mediante cuatro componentes interrelacionados:

$$PDV = [MEV, F_V, M_V, \varphi_V]$$

Análogamente, caracterizaremos los paradigmas didácticos que construye una PID (como, por ejemplo, la TAD) y que denominaremos paradigmas didácticos *de referencia* (PDR), mediante cuatro componentes:

$$PDR = [MER, F_R, M_R, \varphi_R]$$

El MER constituye una forma concreta de redefinir o reinterpretar cierto dominio de las matemáticas (o, en su caso, las matemáticas globalmente consideradas); F_R se refiere a los fines educativos que dicho paradigma propugna; M_R designa los medios que se consideran necesarios para alcanzar los fines perseguidos; y φ_R los fenómenos didácticos que el MER permite sacar a la luz y a los que el paradigma en cuestión pretende responder.

En consecuencia, los PDR construidos por una PID pueden considerarse *instrumentos de emancipación* de la didáctica respecto de múltiples sujeciones institucionales: respecto a las formas como las instituciones docentes describen y estructuran el conocimiento matemático (emancipación epistemológica); respecto de los fines de la educación matemática compartidos en dichas instituciones; respecto de los medios que se suponen útiles para alcanzar dichos fines; y, también, respecto de la selección de los hechos didácticos que son visibles institucionalmente y de la forma de interpretarlos. En definitiva, los PDR son instrumentos de emancipación de la didáctica respecto del PDV en las instituciones que forman parte de su objeto de estudio, ampliando así el papel emancipatorio que desempeñan los MER (Gascón, 2014).

De hecho, los PDR explicitan y precisan el contenido de la hipótesis que formula el MER en el que se sustentan. En efecto, recordemos que un MER es una hipótesis científica –no una mera reformulación o descripción alternativa de cierto dominio de las matemáticas– y, como tal, es provisional y debe ser contrastado empíricamente. Un MER en torno a cierto dominio de la matemática escolar comporta habitualmente la hipótesis de que la nueva razón de ser que este asignará a dicho dominio permitirá superar las "limitaciones" de las organizaciones didácticas escolares vigentes en torno al mismo y, simultáneamente, que el MER cumplirá su función fenomenotécnica sacando a la luz ciertos fenómenos que eran invisibles desde la mirada que proporcionaba el MEV en dicha institución.

En resumen, un PDR = [MER, F_R, M_R, φ_R] construido como respuesta al paradigma vigente, PDV = [MEV, F_V, M_V, φ_V], amplía y precisa la hipótesis científica que propone el MER, puesto que, además de explicitar una forma concreta de reformular el MEV (mediante el MER), marca una posible dirección de cambio de la práctica docente (la indicada por los fines educativos F_R) y unos medios M_R presuntamente útiles para alcanzar dichos fines.

En definitiva, las nociones de PDR y PDV generalizan respectivamente y completan las antiguas nociones de MER y de MEV. Se pone así de manifiesto que ha sido necesario explicitar el papel de los fines educativos asociados al modelo epistemológico en cuestión y subrayar la importancia de los fenómenos didácticos que este permite sacar a la luz, para construir la noción de paradigma didáctico.[11]

[11] Corine Castela denomina *paradigma de investigación* al compuesto formado por una praxeología de investigación, PI, y una organización social correlacionada, una comunidad de investigadores, que funciona como una institución que da existencia a la PI y que permite que esta sea reconocida en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas (Castela, 2015). Como es evidente, esta noción (que la propia autora considera que puede ser "provisional") tiene poco que ver con nuestra noción de *paradigma didáctico*. Para empezar, nuestra interpretación de las praxeologías (y, en particular, de las PI) presupone la existencia de una institución en la que estas viven y cuyos sujetos son actores que, en mayor o menor medida y con mayor o menor éxito, abordan ciertos tipos de tareas con algunas de las técnicas que están disponibles en la institución. Son estos sujetos-actores los que, colectivamente, construyen discursos (o los toman de la institución) que pretenden describir, interpretar, desarrollar y justificar su praxis. En consecuencia, no consideramos que sea necesario completar una PID añadiéndole una comunidad de investigadores porque no hay praxis ni logos sin actores y toda actividad humana es una actividad institucionalizada. Además, en lo que sigue, mostraremos que los paradigmas didácticos asumidos de facto por una comunidad de investigadores inciden simultáneamente sobre su praxis científica (haciendo evolucionar el logos de dicha PID y modulando así el PID que dicha comunidad comparte) y sobre la práctica docente que dicha comunidad promueve.

5. PARADIGMAS DIDÁCTICOS SITUADOS EN LOS DIFERENTES NIVELES DE CODETERMINACIÓN

Hasta aquí, al referirnos a los componentes de un paradigma didáctico, hemos hablado de "fines educativos" en un sentido genérico, de "fines de la educación matemática" e, incluso, de "modelos epistemológicos de cierto dominio matemático". Para precisar el nivel de generalidad en el que nos situamos, hemos generalizado la noción de paradigma didáctico para modelizar y ordenar conceptualmente la realidad empírica educativa no sólo en el nivel disciplinar (matemático) sino también en el pedagógico (independiente de las disciplinas escolares) y en los niveles subdisciplinares. En consecuencia, junto a algunos paradigmas disciplinares (relativos a las matemáticas globalmente consideradas), caracterizaremos algunos pedagógicos y aludiremos a ciertos paradigmas subdisciplinares, esto es, paradigmas didácticos que se sitúan en el nivel de los diferentes ámbitos de la actividad matemática escolar.

En todos los niveles, los PDR permiten modelizar, y en consecuencia estudiar, los proyectos educativos históricamente existentes o posibles. Sirven como herramientas heurísticas para analizar y evaluar la forma como se conceptualiza, en una institución determinada, la educación escolar en cada uno de dichos niveles. De hecho, una forma de describir y analizar el PDV en una institución consiste en compararlo con ciertos PDR que revelarán, por analogía o por contraste, algunos rasgos del PDV en cuestión.

Distinguir entre paradigmas situados en los diferentes niveles de codeterminación didáctica (Chevallard, 2002) nos permite diferenciar claramente entre modelos epistemológicos, fines educativos, medios y, también, entre fenómenos didácticos que se sitúan ya sea en el nivel pedagógico, disciplinar (matemático), o en los diferentes niveles subdisciplinares. Es muy importante subrayar que los fenómenos didácticos emergentes en los niveles subdisciplinares como, por ejemplo: el aislamiento de la proporcionalidad (García, Gascón, Ruiz Higueras y Bosch, 2006); la identificación del álgebra elemental con la aritmética generalizada (Bolea, 2002); la desarticulación entre el álgebra elemental y la modelización funcional (Ruiz-Munzón, 2010); la reducción de la razón de ser de los sistemas de numeración a la mera designación de los números (Sierra, 2006); la ausencia escolar de una razón de ser del cálculo diferencial elemental que sea coherente con el papel que desempeña en la actividad científica (Lucas, 2015); o la desarticulación entre los números y la medida de magnitudes (Licera, 2017), no pueden ser explicados utilizando únicamente un modelo epistemológico general de las matemáticas ni, mucho menos, si sólo se dispone de un modelo genérico de los conocimientos en juego. Los trabajos citados muestran que se requiere, en cada caso, utilizar un modelo epistemológico específico del ámbito matemático que está en juego.

En lo que sigue, describiremos concisamente algunos PDR disciplinares (matemáticos) construidos en (Gascón, 2001) y, a continuación, mostraremos su relación con dos PDR pedagógicos construidos recientemente por la TAD para contrastarlos con los PDV (u otros posibles) en las instituciones escolares.

6. Paradigmas didácticos disciplinares de referencia

Mostraremos con tres ejemplos en lo que sigue, que los fines educativos que un paradigma didáctico propugna están condicionados por el modelo epistemológico en el que se sustenta dicho paradigma. Estos fines influyen, a su vez, sobre el tipo de prácticas docentes (los medios) que es coherente llevar a cabo en dicho paradigma y delimitan los hechos didácticos visibles en los correspondientes procesos de estudio, así como su interpretación como fenómenos. En consecuencia, los componentes de un paradigma didáctico, especialmente si nos referimos a un PDR construido por una PID, presentan cierta unidad funcional, por lo que deben analizarse conjuntamente, como un sistema complejo. Por lo tanto, la construcción de PDR y el estudio de los PDV (o posibles) constituyen actividades esenciales en la metodología de la TAD.[12]

Para avanzar en esa dirección, los primeros PDR fueron construidos en (Gascón 2001), encontrándose antecedentes en (Gascón, 1992, 1994). En estos trabajos, para precisar y ejemplificar la relación entre algunos modelos epistemológicos (generales) de las matemáticas y los fines de la educación matemática asociados solidariamente con cada uno de ellos, se definían diferentes PDR disciplinares. Cada PDR se caracterizaba, en primer lugar, mediante el modelo epistemológico subyacente y, complementariamente, aludiendo a los

[12] Forma parte de dicha metodología la cuestión de *evaluar la coherencia interna* de un paradigma didáctico, esto es: ¿los medios que propone son útiles para alcanzar los fines que propugna?, ¿el modelo epistemológico que sustenta el paradigma permite sacar a la luz los fenómenos a los que este pretende responder?, ¿cómo se utilizan las nociones que proporciona el modelo epistemológico para formular los fines?, etc. También forma parte de la metodología de la TAD la *evaluación de la coherencia externa*, esto es, la coherencia entre un paradigma disciplinar y el paradigma pedagógico del que depende o entre un paradigma disciplinar y los paradigmas subdisciplinares que dependen de él.

fines educativos que perseguía y a los medios didácticos que proponía para alcanzar dichos fines. En todos los casos, los paradigmas definidos en dichos trabajos (teoricismo, tecnicismo, modernismo, modelizacionismo, etc.) eran propuestos como tipos ideales que, como tales, no han existido nunca en estado puro en alguna institución. Cada uno de ellos caracterizaba una forma hipotética de describir, analizar y evaluar la educación matemática globalmente considerada.

Cada uno de estos PDR respondía al estado de cosas originado por la vigencia (histórica o hipotética) de otro paradigma, cuyas "limitaciones" el nuevo paradigma pretendía "superar" en la dirección marcada por los "nuevos" fines que el PDR en cuestión propugnaba. En consecuencia, los PDR disciplinares construidos en (Gascón, 2001) ya estaban estructurados, al menos implícitamente, mediante los cuatro componentes descritos: PDR = [MER, F_R, M_R, φ_R] que conviene explicitar en cada caso en aras de clarificar las cosas.

En esta sección describiremos muy brevemente, a título de ejemplo, tres de estos PDR disciplinares que fueron definidos basándonos en la teoría de los momentos didácticos (Chevallard, 1999, pp. 250-255). Los dos primeros ejemplos (teoricismo y modernismo) constituyen PDR unidimensionales porque cada uno de ellos enfatiza una única dimensión de la actividad matemática (en el sentido de la citada teoría de los momentos). El tercero, el modelizacionismo, constituye una completación relativa tanto del teoricismo como del modernismo. Mostraremos, además, que el paradigma teoricista y el de la modelización matemática, pueden considerarse como el reflejo, a nivel disciplinar, de sendos PDR que se sitúan en el nivel pedagógico y que han sido construidos recientemente (Chevallard, 2013a, 2013b).

6.1. El paradigma teoricista: enseñar matemáticas es "mostrar" teorías cristalizadas

El teoricismo es un PDR a nivel disciplinar matemático cuyo modelo epistemológico subyacente es el euclideanismo (Lakatos, 1978) que desempeña, por tanto, el papel de MER de este paradigma disciplinar. Este modelo epistemológico general de las matemáticas identifica el conocimiento matemático con las teorías cristalizadas, centrando la actividad matemática en la que se lleva a cabo en el momento de la constitución del entorno tecnológico-teórico. En este paradigma los argumentos deductivos desempeñan un papel esencial, lo que comporta la necesidad de llevar a cabo un análisis lógico de las nociones que se utilizan y el compromiso de expresarlas en el lenguaje de la lógica de primer orden.

Por razones de economía didáctica el euclideanismo traslada el momento tecnológico-teórico para hacerlo coincidir con el momento del primer encuentro (Chevallard, 1999) que se sitúa en la primera etapa del estudio, relegando la resolución de problemas a simples aplicaciones del bloque tecnológico-teórico. En la medida en que se impone esta postura epistemológica, los restantes momentos del proceso didáctico quedan relegados a un segundo plano y aparecen muy condicionados por el momento dominante. Así, por ejemplo, los momentos de la evaluación, tan importantes en todo proceso de estudio, quedan restringidos a evaluar los fines que propugna el paradigma teoricista sustentado en el euclideanismo.

En coherencia con dicho modelo epistemológico, el teoricismo considera que el proceso didáctico empieza, y prácticamente acaba, cuando el profesor "enseña" (en el sentido de "muestra") las teorías cristalizadas a los alumnos. En este paradigma los fines de la educación matemática (F_R) se centran en "enseñar" a los estudiantes teorías matemáticas perfectamente acabadas y cristalizadas. Los medios (M_R) que se proponen para alcanzar estos fines se reducen a una presentación "autoritaria" de ciertas teorías matemáticas incuestionables y a poner en marcha actividades, consideradas como subsidiarias, para aplicar, ejemplificar y consolidar los conceptos y teoremas que estructuran dichas teorías y, también, para motivarlas, introducirlas o justificarlas, siempre con la finalidad de que el alumno adquiera un cuerpo de conocimientos predeterminado de antemano. Se produce así una cierta trivialización de la actividad matemática que proviene del dogma euclidiano según el cual todos los conocimientos que el alumno necesitará emplear en su práctica matemática están contenidos en la teoría matemática. Se supone que en esta (tal como la describe el estilo euclideanista) están contenidos esencialmente todos los conocimientos que se necesitan. Se considera que para llevar a cabo cualquier actividad matemática basta elegir cuál es el teorema adecuado o la definición pertinente en cada caso, puesto que una vez que se ha dado con ellos, el resto de la actividad es prácticamente trivial (Gascón, 2001). Es obvio que el euclideanismo como modelo epistemológico de las matemáticas y los fines de la educación matemática que propugna el paradigma teoricista se condicionan mutuamente.

Para describir los fenómenos a los que responde el paradigma teoricista (φ_R) debemos aludir a una situación que se produjo en el seno de la comunidad matemática, algo lejana en el tiempo, pero que todavía resuena en algunas instituciones universitarias. Nos referimos a la existencia de contradicciones y paradojas alarmantes que aparecieron a finales del siglo XIX y principios del siglo XX que hicieron tambalear los fundamentos de las matemáticas y provocaron la necesidad de buscar bases sólidas para fundamentarlas lógicamente (Lakatos, 1981).

En la medida en que el paradigma teoricista predomina en una institución, se originan fenómenos didácticos entre los que hay que destacar aquellos que están relacionados con la citada trivialización de la actividad matemática y con la estrategia didáctica asociada que se materializa en la presentación autoritaria de las obras mediante un estilo deductivista: "Aún no se ha constatado suficientemente que la educación matemática y científica actual es un semillero de autoritarismo, siendo el peor enemigo del pensamiento crítico e independiente" (Lakatos, 1978, p. 166).

Esta estrategia tiende a silenciar todo tipo de preguntas de los estudiantes, con la consiguiente reducción de su papel al de simples ejecutantes con poca autonomía y, en los casos límite, al de meros espectadores. Es por esta razón que Lakatos asociaba el autoritarismo de la educación matemática con el euclideanismo e indicaba que, de acuerdo con el ideal euclídeo, el estudiante se ve obligado a asistir a una especie de ceremonia sin hacer preguntas sobre el trasfondo problemático que está tras los argumentos.

6.2. El paradigma modernista: aprender matemáticas mediante una exploración libre

Desde el punto de vista que proporciona la TAD, podemos afirmar que las formas extremas del paradigma teoricista presentan limitaciones evidentes en la gestión del proceso de estudio de las matemáticas. En particular el postulado teoricista según el cual todo lo necesario para "hacer matemáticas" está contenido en la teoría, provoca una situación insostenible en las instituciones en las que todavía predomina dicho paradigma. En efecto, los alumnos tropiezan, en la práctica, con enormes dificultades cuando intentan construir de manera autónoma técnicas matemáticas eficaces sustentándose únicamente en sus conocimientos teóricos.

El paradigma modernista (Gascón, 2001) constituye una reacción ante estos hechos y ante las consecuencias del paradigma tecnicista.[13] La respuesta del modernismo a los citados fenómenos (φ_R) se materializa tomando la exploración libre y creativa de cuestiones abiertas como los principales fines de la educación matemática (F_R). Se enfatiza así el momento exploratorio (Chevallard, 1999), esto es, la exploración de ciertos tipos de tareas y la consiguiente indagación en la búsqueda de "materiales" que permitan elaborar una técnica útil para abordar dichas tareas. El modernismo se centra en el momento exploratorio, situando en segundo plano los restantes momentos del proceso didáctico que aparecen condicionados y restringidos por el momento dominante. Al igual que el teoricismo, el modernismo es un paradigma muy reduccionista, unidimensional, porque enfatiza una única dimensión de la actividad matemática.

El modernismo es un PDR cuyo modelo epistemológico subyacente (MER) es un modelo epistemológico cuasiempirista de las matemáticas –en el sentido de (Lakatos, 1978)–. Según este modelo epistemológico, el núcleo de la actividad matemática tiene lugar en el periodo de desarrollo de las teorías matemáticas, cuando todavía son informales, esto es, antes de ser formalizadas. Se trata de los problemas que provienen de la exploración de las regiones fronterizas de los conceptos, del cuestionamiento de la extensión de estos y de la diferenciación de conceptos anteriormente amalgamados.

La incidencia de este modelo epistemológico en las prácticas escolares tiende a identificar la actividad matemática con la exploración de problemas para los que no se dispone de una técnica de resolución, esto es, con las tareas que se realizan cuando todavía no se sabe gran cosa de la solución: tantear técnicas diversas; aplicar algún resultado conocido; buscar problemas semejantes; formular conjeturas; buscar contraejemplos; o intentar resolver un problema un poco diferente, entre otras (en la línea de las heurísticas de Pólya). En coherencia con lo anterior, el paradigma modernista relaciona los fines de la educación matemática con un cierto tipo de actividad matemática "no rutinaria" y, en última instancia, los identifica con la resolución de problemas "abiertos".

Dado que el modernismo tiende a equiparar el aprendizaje de las matemáticas con el descubrimiento inductivo y autónomo, traslada hacia el aprendizaje

[13] En este trabajo no analizaremos el *paradigma tecnicista* que constituye una primera reacción al teoricismo. Ante el vacío técnico que provoca el teoricismo, aparece el grito defensivo de "volver a lo básico" encarnado en el tecnicismo que enfatiza los aspectos más rudimentarios del trabajo de la técnica, centrándose esencialmente en las *técnicas algorítmicas*.

el centro de gravedad del proceso didáctico, mientras que el teoricismo lo situaba en la enseñanza. Los medios (M_R) que el paradigma modernista propone para alcanzar dichos fines están en la línea del "aprender haciendo" y, en general, de los que proponen algunos de los trabajos que se sitúan en los enfoques por proyectos o por indagación y que se integran dentro del denominado *inquiry-based mathematics education* (IBME) (Artigue y Blomhøj, 2013) y que comparten, en gran medida, los enfoques por competencias (Gascón, 2011). Esto no significa que identifiquemos el IBM y el enfoque por competencias con el paradigma modernista (que es un paradigma ideal). De hecho, la rápida evolución de dichos enfoques muestra algunos rasgos del paradigma de la modelización matemática que describiremos a continuación, lo cual no hace más que confirmar nuestra tesis de que los paradigmas vigentes en las instituciones escolares son siempre "mestizos".

El modernismo constituye una reacción insuficiente y todavía unidimensional al teoricismo y al tecnicismo, añadiendo nuevas limitaciones en el tipo de actividad matemática que es posible llevar a cabo en las instituciones en las que dicho paradigma es dominante. En particular, una de las restricciones que provoca el modernismo al desarrollo de la actividad matemática consiste en el aislamiento y la descontextualización de los problemas que aborda.

6.3. El paradigma de la modelización matemática como completación relativa de los paradigmas unidimensionales

En la medida que están vigentes en las instituciones escolares, los denominados paradigmas unidimensionales –entre los que se encuentran, además del modernismo, el teoricismo y el tecnicismo– se dificulta enormemente la vida escolar de la modelización matemática como mostraremos a continuación. Estas dificultades se manifiestan en múltiples características de la actividad matemática escolar globalmente considerada. A este respecto, podemos citar: el carácter puntual de las praxeologías matemáticas escolares; la rigidez e incompletitud relativa[14] de las mismas; la tendencia a la algoritmización de las tareas

[14] En (Fonseca, 2004, pp. 181-184) se describen siete indicadores del *grado de completitud de una praxeología* que sintetizamos a continuación. Diremos que una praxeología local es relativamente completa en la medida que: (1) integra los diferentes tipos de tareas (en lugar de considerarlos aisladamente) y contiene tareas relativas al cuestionamiento tecnológico (esto es, tareas relativas al funcionamiento y la justificación de las técnicas); (2) contiene diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas; (3) trata

matemáticas; la escasa incidencia del cuestionamiento tecnológico de las técnicas y, en general, del bloque tecnológico-teórico, sobre la práctica matemática; la desarticulación entre las diferentes áreas y sectores de la matemática escolar; el autismo temático (Chevallard, 2002) que comporta el olvido de las posibles razones de ser de una obra, y la autosuficiencia de la matemática escolar que aparece encerrada en sí misma y cuya relación con el resto de disciplinas se reduce a un mero aplicacionismo (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004; García, *et al.*, 2006; Barquero, Bosch y Gascón, 2011; Sierra, Bosch y Gascón, 2013; Lucas, 2015). Se conforma así un macrofenómeno didáctico disciplinar que se manifiesta en las enormes restricciones institucionales que dificultan la vida normal y el desarrollo de la modelización matemática (MM) en las instituciones escolares.

Como reacción ante las limitaciones (reales o hipotéticas) originadas por la vigencia de los paradigmas unidimensionales y para soslayar este macrofenómeno (φ_R) surge el paradigma didáctico de la modelización matemática (PMM). Se trata de un PDR disciplinar que interpreta "aprender matemáticas" como un proceso de construcción de conocimientos (relativos a un sistema matemático o extramatemático) que se lleva a cabo mediante la construcción de un modelo matemático de dicho sistema. Se trata de un paradigma que conecta funcionalmente el momento exploratorio con el tecnológico-teórico, por lo que completa relativamente el teoricismo y el modernismo (Gascón, 2001, pp.148-151).

Para tomar en consideración el momento del trabajo de la técnica (Chevallard, 1999) y completar así el tecnicismo, el PMM debe integrar los talleres de prácticas matemáticas que son dispositivos didácticos cuya principal función consiste en permitir que viva y se desarrolle con normalidad en las instituciones escolares el citado trabajo de la técnica. Los medios (M_R) o estrategias didácticas que plantea el PMM para vehicular la propuesta curricular que prescribe, se sustentan en los recorridos de estudio e investigación (REI) que son dispositivos didácticos especialmente adecuados para superar las restricciones que inciden sobre la vida institucional de la MM (Barquero, Bosch y Gascón, 2011). Dada la gran flexibilidad de los REI, estos permiten integrar en su seno los talleres de prácticas matemáticas y convertir así la actividad de MM en un trabajo sistemático, paciente, profundizado y a largo plazo (Bosch y Gascón, 1994).

---

como independientes, en la praxis, los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas y el propio funcionamiento de las técnicas; (4) existen tipos de tareas y técnicas "inversas" de las tareas y técnicas habituales; (5) contiene tipos de tareas conducentes a interpretar el funcionamiento y el resultado de aplicar las técnicas; (6) los elementos tecnológicos inciden de manera significativa sobre la práctica matemática; y (7) existen tareas matemáticas "abiertas" y, particular, tareas de modelización matemática.

Los REI recuperan explícitamente una posible razón de ser de las obras, integrando su trasfondo problemático en el corazón del proceso de estudio y potenciando las diferentes dialécticas o gestos del estudio (Chevallard, 2002) que permiten describir la dinámica de los REI y, consiguientemente, de la actividad de MM que permite llevar a cabo. En cuanto a la estructura de la actividad de MM se esquematiza en cuatro estadios, sin entrar en detalles ni querer prejuzgar una sucesión temporal lineal entre ellos: (1) delimitación (construcción) del sistema a modelizar; (2) elección de las variables relevantes y elaboración del modelo matemático; (3) trabajo técnico dentro del modelo e interpretación de este trabajo y de sus resultados dentro del sistema; (4) el modelo se independiza mediante la formulación de nuevos problemas que pueden requerir llevar a cabo nuevos procesos de modelización (Gascón, 1992, 1994; Bolea, 2002).

Para interpretar adecuadamente el PMM hay que tener en cuenta la forma como se conceptualiza la actividad de MM en la TAD (Bolea, 2002; García *et al.*, 2006). Partiendo de una concepción institucional de la actividad matemática, la TAD postula que la MM puede describirse en términos del juego entre sistemas y modelos con estructura praxeológica. En concreto, la TAD propone tres caracteres diferenciales de la MM: (a) Incluye la modelización intramatemática como un tipo particular muy importante de MM. Aparece así claramente el carácter recursivo de la actividad de MM y, también, su carácter reflexivo, puesto que en la modelización intramatemática el sistema puede hacer el papel de modelo de su modelo. (b) Postula que toda MM presupone la modelización de una praxeología en su totalidad y no sólo de algunos componentes aislados de la misma. (c) Interpreta la MM como un instrumento de articulación y completación progresiva de la matemática y, en particular, de la matemática escolar. De hecho, la TAD describe los procesos de MM como procesos de reconstrucción de praxeologías matemáticas de complejidad creciente: puntuales, locales, regionales y globales (Chevallard, 2002) que, necesariamente, tienen que estar generados por cuestiones problemáticas que se plantea una comunidad de estudio. Esta forma de conceptualizar la MM es la que justifica identificar toda actividad matemática con una actividad de modelización. En consecuencia, se toma la actividad de MM así redefinida como el modelo epistemológico general de la actividad matemática, como el MER subyacente al PMM. En coherencia con esta forma de interpretar la MM, los fines educativos (F_R) que propugna el PMM se concretan en que la comunidad de estudio llegue a dominar la actividad de MM de todo tipo de sistemas para trabajar con ellos y responder así a cuestiones problemáticas que surgieron en dichos sistemas.

7. DE LOS PARADIGMAS DISCIPLINARES A LOS PARADIGMAS PEDAGÓGICOS DE REFERENCIA

Para analizar la evolución del paradigma pedagógico vigente en las instituciones escolares, la TAD ha construido dos paradigmas pedagógicos de referencia: el paradigma de la visita de las obras (PVO), que pretende modelizar algunos rasgos de la organización escolar clásica, todavía muy visibles en los sistemas escolares actuales; y el paradigma del cuestionamiento del mundo (PCM), que constituye la propuesta de la TAD como meta u horizonte del cambio educativo hacia el que, supuestamente, evolucionan los sistemas educativos actuales (Chevallard, 2013a y 2013b). Ambos pueden considerarse como casos límites de un tipo de PDR posibles, a nivel pedagógico. Y como en todos los paradigmas didácticos situados en este nivel, el modelo epistemológico subyacente es un modelo epistemológico general, habitualmente implícito, de los conocimientos en juego.

7.1. Del teoricismo disciplinar al paradigma pedagógico de la visita de las obras

El PVO es un PDR que se sitúa en el nivel pedagógico. Se caracteriza, en primer lugar, por proponer para ser estudiadas obras que no muestran la situación problemática que les dio origen, por lo que aparecen como acabadas y cerradas, impidiendo así todo cuestionamiento de estas. En este paradigma se presentan las obras a estudiar como si fuesen monumentos que tienen valor por sí mismos. En consecuencia, los fines educativos del PVO se reducen esencialmente a que los estudiantes visiten y conozcan ciertas obras dadas de antemano, aunque desconozcan sus posibles razones de ser, esto es, aunque no se planteen las cuestiones a las que dichas obras responden.

En definitiva, el PVO puede considerarse como una posible generalización, a nivel pedagógico, del paradigma teoricista que hemos definido a nivel disciplinar en el caso de las matemáticas. En efecto, al igual que el paradigma teoricista, los medios que propone el PVO para alcanzar los fines que propugna se materializan en una presentación autoritaria de las obras que tiende a silenciar todo tipo de preguntas de los estudiantes sobre las mismas. En definitiva, tiende a reducir el papel de los estudiantes al de simples ejecutantes con poca autonomía y, en los casos límite, al de meros espectadores.

Como en el caso del teoricismo, el PVO tiende a comprimir el proceso didáctico en el momento del primer encuentro con las obras que se visitan y que se identifica con el momento tecnológico-teórico. Por consiguiente, al igual que en el teoricismo, el resto de los momentos están muy condicionados y hasta subordinados al momento dominante. En este paradigma, las obras se "enseñan" (en el sentido de que se "muestran") al estudiante mediante una presentación discursiva, mediante un relato. Por consiguiente, en las instituciones en las que el PVO está vigente (o, al menos, es predominante) se producen fenómenos relacionados con la trivialización de la actividad del alumno, que es considerada como subsidiaria, con la falta de autonomía de este y con la citada presentación autoritaria de las obras.

7.2. De la modelización matemática al cuestionamiento del mundo

Como respuesta al PVO, en muchos trabajos de la TAD se propone como meta el PCM que puede considerarse como una posible generalización, a nivel pedagógico, del PMM definido a nivel disciplinar (en el caso de las matemáticas). En efecto, el PCM se concibe como reacción al estado de cosas, real o hipotético, creado por el PVO en la medida que este sigue estando vigente en las instituciones docentes actuales y continúa originando el fenómeno del monumentalismo que impide una verdadera actividad de estudio e investigación (Chevallard, 2013b). Esta reacción o respuesta del PCM ante el monumentalismo, es análoga a la reacción del PMM ante el estado de cosas originado por los paradigmas clásicos unidimensionales (teoricismo, tecnicismo y modernismo) que, como hemos dicho, dificultan la vida escolar de la actividad de MM.

El PCM propone que la actividad de indagación sea el motor de los procesos de aprendizaje, tal y como se lleva a cabo en las comunidades científicas, lo que no excluye el estudio de obras predeterminadas. Esta indagación se genera siempre en torno a una cuestión problemática y, dado que muy raramente esta puede resolverse directamente con los elementos pertenecientes al sistema en el cual se ha generado, se requiere la creación de diferentes tipos de modelos: conceptuales, analógicos, gráficos, físicos o matemáticos, del sistema en cuestión (o de una parte de este) con el objetivo de reformular y simplificar la cuestión problemática inicial y avanzar hacia una posible respuesta. En consecuencia, el PCM plantea unos fines educativos que marcan una dirección de cambio para superar las consecuencias del monumentalismo: crear un nuevo *ethos* cognitivo, caracterizado por la actitud problematizante y abierto al estudio de nuevos problemas (Chevallard, 2013a) y, paralelamente, instaurar las condiciones para que pueda darse el aprendizaje mediante indagación.

Al igual que el PMM (a nivel disciplinar), los medios que propone el PCM (a nivel pedagógico) para alcanzar dichos fines se materializan en praxeologías didácticas capaces de dar cabida a una modalidad de indagación que se expresa en forma de dialéctica entre cuestiones y respuestas. En ambos casos, cada cual en su nivel, las obras que se proponen para ser estudiadas se presentan típicamente en forma de cuestiones abiertas con gran poder generador de cuestiones derivadas, y los medios que se proponen para construir la respuesta se materializan en los recorridos de estudio e investigación (REI).

8. PARADIGMAS DIDÁCTICOS ASUMIDOS, DE FACTO, POR LA TAD

Si analizamos la praxis científica de la TAD, observamos que, hasta el momento, la TAD ha propugnado la emergencia del PCM a nivel pedagógico (Chevallard, 2013a, 2013b). En el nivel disciplinar matemático hemos asumido, de facto, el PMM y, en los niveles subdisciplinares, paradigmas compatibles con el PMM que han sido construidos para responder a fenómenos didácticos específicos siempre relacionados con la MM. Lo anterior significa, en primer lugar, que la TAD ha asumido como propios (al menos implícitamente) los fines que dichos paradigmas propugnan y como modelo de la actividad matemática, el modelo epistemológico que sustenta dichos paradigmas, formulando los fines educativos mediante las nociones que estos proporcionan.

Así, por ejemplo, en (Barquero, Bosch y Gascón, 2011), en coherencia con (García *et al*., 2006), se sitúa la actividad de MM en el corazón de la actividad matemática, afirmándose que la forma como la TAD reconceptualiza la MM no constituye únicamente un aspecto de las matemáticas, sino que puede considerarse un modelo general de la actividad matemática. Se sitúan así los fines de la educación matemática en que las comunidades de estudio lleven a cabo una genuina actividad de investigación científica que les permita responder a las cuestiones problemáticas que surgen en todo tipo de sistemas (matemáticos o extramatemáticos) mediante la construcción de modelos matemáticos de estos y el trabajo sistemático, a largo plazo, profundizado con dichos modelos. De hecho, la introducción de los REI en la metodología didáctica que propugna la TAD está motivada, en primer lugar, por tratarse de un dispositivo didáctico que, en conformidad con el PCM, es capaz de transportar a la escuela una actividad de indagación cercana a la que se lleva a cabo en las comunidades científicas. Y, en segundo lugar, la introducción de los REI está justificada, como hemos dicho, por su capacidad de imponer condiciones muy favorables para potenciar el papel de la MM.

Pero, en sentido estricto, la asunción de un paradigma concreto por parte de una PID contradice claramente nuestra tesis según la cual la ciencia didáctica no está legitimada para hacer juicios de valor de ningún tipo (Gascón y Nicolás, 2016/2019a, 2017, 2018, 2019b). En particular, esta tesis niega la legitimidad de la ciencia didáctica y, por tanto, de los didactas como científicos, para valorar unos fines educativos por encima de otros y, en definitiva, para "preferir" o considerar que un paradigma didáctico es "mejor" o "más valioso" que otro. Como científicos, sólo estamos legitimados para construir PDR y utilizarlos como instrumentos metodológicos (como hipótesis científicas) para estudiar los paradigmas didácticos vigentes a lo largo de la historia o, en general, los paradigmas posibles. Por tanto, en coherencia con dicha tesis, la TAD no tiene legitimidad científica para considerar que, a nivel pedagógico, el PCM es "mejor" o "más valioso" que el PVO. Tampoco tiene legitimidad para preferir el PMM por encima de otros paradigmas disciplinares como el teoricismo, el tecnicismo o el modernismo. Para lo que sí está legitimada la TAD, es para construir y utilizar un PDR como una hipótesis científica, tal como precisaremos a continuación.

Construir un PDR = [MER, F_R, M_R, φ_R] supone, en primer lugar, postular la coherencia interna del mismo. Esto significa postular que, en cierta institución docente: (a) los medios M_R que propone, serán útiles para alcanzar los fines F_R que propugna; (b) el modelo epistemológico MER que sustenta el paradigma, permitirá sacar a la luz los fenómenos φ_R a los que este paradigma pretende responder; y (c) los fines F_R se podrán formular con las nociones y los términos que proporciona el MER subyacente. Sin olvidar que, como toda hipótesis científica, la coherencia interna del PDR deberá ser contrastada empíricamente.

Siguiendo esta lógica, interpretaremos los PDR que se han construido y utilizado en las investigaciones llevadas a cabo por la comunidad científica de la TAD como hipótesis científicas. De esta manera los resultados de la investigación didáctica se pueden interpretar en términos de medios-fines. De hecho, siempre es posible interpretar de esta forma los resultados de las citadas investigaciones. Así, por ejemplo, en un trabajo sobre la transposición didáctica de las organizaciones matemáticas, se afirma:

> Dado que las técnicas de modelización están entre las técnicas matemáticas menos visibles, menos "algoritmizables", menos "atomizables" y, en definitiva, *más difícilmente evaluables*, las restricciones originadas por la *necesidad de evaluar* la eficacia de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, dificulta de manera muy decisiva el proceso de algebrización porque tiende a restringir la utilización sistemática del instrumento algebraico como instrumento de modelización matemática (Bolea, Bosch y Gascón, 2001, p. 294)

Esta afirmación puede interpretarse, sin forzar demasiado las cosas, como formando parte de la problemática ecológica (Gascón y Nicolás, 2016/2019a). En efecto, poniendo entre paréntesis el "valor" que, de manera más o menos explícita, el texto asigna al uso del instrumento algebraico como instrumento de modelización matemática, lo que se está enfatizando es un tipo particular de restricciones transpositivas (derivadas de la necesidad didáctica de evaluar los procesos de estudio) que inciden sobre el desarrollo escolar de dicho instrumento.

Obviamente, no es casual que se indague cuáles son los medios que permitirían alcanzar fines propugnados por el PMM o por un paradigma subdisciplinar coherente con él. Este hecho pone de manifiesto que la elección de los problemas de investigación que hacen las comunidades científicas depende de postulados asumidos por la comunidad de manera más o menos explícita y que, como tales, no pueden ser establecidos racionalmente.

9. RELACIONES ENTRE LA INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA Y LA PRÁCTICA DOCENTE

Cada PID interpreta la ciencia didáctica basándose en un conjunto de principios o asunciones básicas que se refieren: al tipo de objetos que pueblan el universo didáctico y a las relaciones entre ellos; al ámbito empírico que la didáctica debe tomar en consideración; a la unidad de análisis de los procesos didácticos; al tipo de problemas didácticos que privilegia; a la metodología de investigación que utiliza; etc. En coherencia con estos postulados, cada PID utiliza, en la práctica, un modelo epistemológico del conocimiento en juego y tiende a asumir, de facto, junto a dicho modelo, unos fines educativos que sean coherentes con el mismo, así como ciertos medios presuntamente útiles para alcanzar dichos fines. En consecuencia, la PID saca a la luz hechos didácticos que dicho modelo, junto a los fines y los medios asociados, permiten visualizar.

Así, y a pesar de que la ciencia didáctica como tal no está legitimada para preferir un paradigma didáctico por encima de otros, toda comunidad didáctica tiende a considerar como propio un paradigma didáctico concreto, esto es, principalmente, un modelo epistemológico de los conocimientos en juego y unos fines educativos coherentes con dicho modelo. Sucede entonces que dicha comunidad suele integrar, como postulados, en el logos de la PID que comparte, los citados componentes del paradigma y, en su praxis científica, privilegia el estudio de aquellos problemas didácticos que pretenden responder a cuestiones relacionadas con las posibles formas de alcanzar los fines educativos que el paradigma en cuestión propugna.

En lo que sigue pretendemos dar una primera respuesta a las cuestiones que han quedado abiertas y que, como hemos indicado en la introducción, podrían formar parte de una potencial tercera etapa del diálogo entre teorías didácticas (o PID). Para ello, mostraremos en qué forma, y mediante qué mecanismos, los paradigmas que asume, de facto, una comunidad de investigadores en didáctica incide simultáneamente sobre su praxis científica y sobre la práctica docente que promueve. Más concretamente, analizaremos brevemente en qué sentido los paradigmas didácticos que una PID asume (en los diferentes niveles de codeterminación) constituyen el lazo de unión entre los fines de la investigación didáctica que llevan a cabo los miembros de la comunidad que comparte dicha PID y los fines de la enseñanza que marcan dichos paradigmas.

En el caso de la TAD, en lo que se refiere a los fines de la investigación, esto es, a los problemas didácticos que privilegia, a los fenómenos didácticos que se propone explicar y a los resultados que considera admisibles, es obvia su dependencia de los paradigmas didácticos que asume y, en especial, del modelo epistemológico subyacente a dichos paradigmas. En efecto, muchos de los problemas didácticos que la TAD formula, aunque explícitamente no siempre se expresen en términos de medios-fines, aluden a los fines que el paradigma asumido propugna –que se expresan con los términos que proporciona el modelo epistemológico subyacente– y a los medios que este propone. En cuanto a los fenómenos didácticos, la TAD se propone explicar aquellos que el paradigma que asume, sustentado en cierto MER específico, permite hacer visibles en cada caso. Algunos ejemplos de problemas didácticos formulados en el ámbito de la TAD nos ayudarán a precisar las cosas:

> [...] sous quelles conditions *l'algèbre enseignée* ne sera plus enseignée comme une " arithmétique généralisée ", mais apparaîtra comme un instrument nécessaire pour

> l'étude de l'immense *champ de problèmes* que découvre la technique du patron *A/S* et qui, à travers certaines variations de cette technique, culmine dans la *modélisation algébrique* ? (Gascón, 1994-95, p. 60).
>
> ¿Qué papel pueden desempeñar los "*procesos de modelización*" [...] para incidir de manera controlada (control científico) sobre el fenómeno del aislamiento de la proporcionalidad respecto al resto de las relaciones funcionales en la Educación Secundaria y, más allá, sobre el *fenómeno de la desarticulación de la matemática escolar*? (García, 2005, p. 183)
>
> ¿Es didácticamente viable, en el actual Sistema de Enseñanza de las Matemáticas, iniciar a los alumnos de la primera etapa de la ESO en el uso del instrumento algebraico? ¿Qué organización matemática puede tomarse como sistema inicial a modelizar? [...] ¿Qué nuevos dispositivos didácticos se requerirán para llevarlo a cabo? (Ruiz-Munzón, 2010, p. 59).
>
> ¿Qué tipo de *dispositivos didácticos* posibilitarían una integración generalizada de la modelización matemática en los sistemas de enseñanza universitarios de las matemáticas para las ciencias experimentales? ¿Qué *condiciones* se requieren y qué tipos de *restricciones* institucionales limitan o impiden su desarrollo? (Barquero, Bosch y Gascón, 2011, p. 341).
>
> ¿Qué condiciones se requieren y, en particular, qué restricciones dificultan o impiden el desarrollo normal de la *modelización funcional* en el paso de Secundaria a la Universidad? ¿Qué papel podría jugar el cálculo diferencial elemental en el establecimiento de las citadas condiciones? [...] (Lucas, 2015, p. 108).

En todos estos casos, y en muchos otros, se formulan problemas didácticos aludiendo a los fines de la educación matemática propugnados por el PMM –o por un paradigma subdisciplinar de este– y a los medios que dicho paradigma propone. Y, aunque de manera latente en algunos casos, el estudio de cada uno de estos problemas está orientado a sacar a la luz y dar cuenta de determinados fenómenos didácticos.

A nivel pedagógico, los fines educativos que la TAD propugna son muy visibles, en coherencia con el paradigma del cuestionamiento del mundo:

> En el nuevo paradigma, el ciudadano debe convertirse en herbartiano, procognitivo y exotérico. ¿Cómo podemos promover esta nueva ciudadanía? Más allá de estar poseídos por la pasión epistemológica que se necesita para ir del camino de la pura ignorancia hacia el del conocimiento adecuado, una condición crucial es, sin duda, el tiempo asignado al estudio y a la indagación en la vida de un adulto. (Chevallard, 2013a, p. 175).

Sin embargo, en muchas investigaciones didácticas, independientemente de la teoría didáctica o PID en el que se sustenten, los fines de la educación matemática que se propugnan tienden a ser relativamente transparentes e incuestionables y que raramente se enuncian como tales fines.

Una muestra muy llamativa de este fenómeno de ocultación de los fines educativos a nivel disciplinar (matemático) se manifiesta en que muchos problemas de investigación en didáctica están centrados en cuestionar los medios, quedando los fines completamente implícitos. Así, es fácil encontrar problemas didácticos formulados en los siguientes términos: "¿Es M un buen medio de enseñanza?" "¿Con el medio M se mejora la enseñanza?". En estas formulaciones, los fines educativos que, presuntamente, se alcanzarían con los citados medios, no sólo quedan implícitos, sino que pueden acabar siendo absolutamente transparentes. Si aceptamos que los fines educativos son postulados, entonces enunciaremos los problemas didácticos en términos de medios-fines, esto es: "¿Es M un medio de enseñanza eficaz para alcanzar el fin F?"

Digamos para concluir que, para profundizar en el diálogo entre diferentes PID, será preciso contrastar los fines educativos y los modelos epistemológicos subyacentes de los paradigmas asumidos por cada una de ellas. En última instancia, será imprescindible contrastar la compatibilidad entre los paradigmas didácticos asumidos, en la práctica, por las diferentes PID. Pero, antes de enfocar el diálogo en estos términos, será preciso discutir si las nociones de praxeología de investigación didáctica (PID) y de paradigma didáctico asumido por una PID son pertinentes o deben sustituirse por otras.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación se ha financiado por los proyectos I+D+i: RTI2018-101153-A-C22 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y RTI2018-101153-B-C21 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

REFERENCIAS

Artigue, M. y Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 45*, 797–810.

Artigue, M., Bosch, M. y Gascón, J. (2011a). La TAD face au problème de l'interaction entre cadre théoriques en didactique des mathématiques. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier, (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 33–55). CRM Documents, vol. 10. Centre de Recerca Matemàtica.

Artigue, M., Bosch, M. y Gascón, J. (2011b). Research praxeologies and networking theories. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2381–2390). University of Rzeszów.

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Los Recorridos de Estudio e Investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las Ciencias Experimentales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 29* (3), 339–352.

Bartolini Bussi, M. G. (2018). Answer to Gascón y Nicolás. *For the learning of mathematics, 38*(3), 50–53.

Berlín, I. (2017). *El poder de las ideas*. Página Indómita.

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 21*(3), 247–304.

Bosch, M. y Gascón, J. (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *12*(3), 314–332.

Bosch, M., Fonseca, C. y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*(2-3), 205–250.

Bosch, M., Gascón, J. y Trigueros, M. (2017). Dialogue between theories interpreted as research praxeologies: the case of APOS and ATD. *Educational Studies in Mathematics*, *95*, 39–52. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9734-3.

Castela, C. (2015). Considering theoretical diversity and networking activities in mathematics education from a sociological point of view. In K. Krainer, N. Vondrová (Eds), *Proceedings of the 9th Congress of the European Society for Research in*

Mathematics Education pp.2562-2568 https://hal.archives-ouvertes.fr/CERME9-TWG17/hal-01289422v1

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique ; du savoir savant au savoir enseigné, Paris*, La Pensée Sauvage (2ª ed. 1991).

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19* (2), 221–266.

Chevallard Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie et régulation. En J. L. Dorier (Ed.), *Actes de la XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 41–56). La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2013a). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *REDIMAT–Jounal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 161–182. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

Chevallard, Y. (2013b). *La enseñanza de la matemática en la encrucijada: por un nuevo pacto civilizacional*. Curso impartido en la Universidad Nacional de Córdoba.

Davis, B. (2018). What sort of science is didactics? *For the learning of mathematics, 38*(3), 44–49.

Diez, J. A. y Ulises Moulines, C. (2016). *Fundamentos de Filosofía de La Ciencia*. Ariel.

Durkheim, E. (1924/1991). *Educació i Sociologia*. Eumo Editorial.

Echevarría, J. (1998). *Filosofía de la Ciencia*. Ediciones Akal.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad*. (Tesis de doctorado). Universidad de Vigo.

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Jaén.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L. y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *38*(3), 226–246.

Gascón, J. (1992). Què s'entén per resolució de problemes de matemàtiques? *BIAIX*, *2*, 10–17.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques*, *13*(3), 295–332.

Gascón, J. (1994). El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. *Educación Matemática*, *6*(3), 37–51.

Gascón, J. (1994–1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l' "arithmétique généralisée". *Petit x*, *37*, 43–63.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(2), 129–159.

Gascón, J. (2003). From the Cognitive to the Epistemological Programme in the Didactics of Mathematics: Two Incommensurable Scientific Research Programmes? *For the Learning of Mathematics, 23*(2), 44–55.

Gascón, J. (2011). ¿Qué problema se plantea el enfoque por competencias? Un análisis desde la Teoría Antropológico de lo Didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 31*(1), 9–50.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, (Special Issue: XXV years), 99–123.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2016/2019a). Economía, ecología y normatividad en la teoría antropológica de lo didáctico. *Educação Matemática Pesquissa, 21*(4), 36–52.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2017). Can didactics say how to teach? The beginning of a dialogue between the anthropological theory of the didactic and other approaches. *For the Learning of Mathematics, 37*(3), 26–30.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2018). Paradigmas didácticos y reforma curricular: el caso de la teoría antropológica de lo didáctico. En H. Chaachoua y M. Bosch (Eds.), *Sixth International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic* (pp. 88–102). Autrans.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2019b). Research ends and teaching ends in the anthropological theory of the didactic. *For the learning of mathematics, 39*(2), 42–47.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The Onto-Semiotic Approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the learning of mathematics, 39*(1), 38–43.

Koyré, A. (1961/1994). *Pensar la ciencia.* Paidós.

Lakatos, I. (1971). *Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales.* Tecnos.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Alianza.

Lakatos, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Alianza.

Lerman, S. (2018). Towards subjective truths in mathematics education. *For the learning of mathematics, 38*(3), 54–56.

Licera, R.M. (2017). *Economía y ecología de los números reales en la Enseñanza Secundaria y la Formación del Profesorado* (Tesis de doctorado no publicada). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Lucas, C. (2015). *Una posible razón de ser del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional.* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Vigo.

Mosterín, J. (2008). *Lo mejor posible. Racionalidad y acción humana*. Alianza Editorial.
Oktaç, A., Trigueros, M. y Romo, A. (2019). APOS Theory: connecting research and teaching. *For the learning of mathematics, 39*(1), 33–37.
Piaget, J. y García, R. (1981). Psicogénesis e Historia de la Ciencia. Siglo XXI.
Proulx, J. (2018). Prescriptions and proscriptions on mathematics teaching: interesting cases of lost in translation. *For the learning of mathematics, 38*(3), 56–57.
Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *40*(2), 317-327.
Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional.* (Tesis de doctorado no publicada). Universitat Autònoma de Barcelona.
Sierra, T. A. (2006). Lo *matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas*. (Tesis de doctorado no publicada). Universidad Complutense de Madrid
Sierra, T. A., Bosch, M. y Gascón, J. (2013). El cuestionamiento tecnológico-teórico en la actividad matemática. El caso del algoritmo de la multiplicación. *Boletim de Educação Matemática*, *27*(47), 805–828. https://doi.org/10.1590/s0103-636x2013000400006
Staats, S. y Laster, L. A. (2019). About Time. *For the learning of mathematics, 39*(1), 44–47.
Weber, M. (1917/2010). *Por qué no se deben hacer juicios de valor en la sociología y en la economía.* Alianza.

Josep Gascón Pérez

Dirección: Campus de la Universidad Autónoma de Barcelona,
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias y Biociencias, Edificio C,
Carrer dels Til·lers, 08193 Bellaterra (Barcelona),
Teléfono: (0034)935814538

Artículos de investigación DOI: 10.24844/EM3301.02

Covariación logarítmico-exponencial en futuros profesores de matemáticas. Un estudio de caso

Logarithmic-exponential covariational in future mathematics teachers. A case study

Manuel Trejo Martínez,[1] Marcela Ferrari Escolá,[2]
Gustavo Martínez Sierra[3]

Resumen: El presente estudio contribuye al cuerpo de investigación acerca del desarrollo del razonamiento covariacional en futuros profesores de matemáticas. Reportamos las acciones mentales y niveles de razonamiento covariacional logarítmico-exponencial percibidos en dos estudiantes de sexto semestre de una licenciatura en matemáticas, durante un experimento de enseñanza desarrollado por un futuro profesor de matemáticas que está inmerso en un proyecto de investigación. Las tareas del experimento inician con una construcción geométrica de puntos de una curva utilizando GeoGebra para que los estudiantes exploren las variaciones y describan la curva que ajusta los puntos y logren determinar una expresión general para la construcción de cualquier punto al reconocer las dos progresiones: la aritmética y la geométrica. Sin embargo, evidencian la complejidad de desarrollar un razonamiento covariacional continuo a partir de una tarea que incentiva el razonamiento covariacional discreto.

Fecha de recepción: 24 de abril de 2019; **Fecha de aceptación:** 22 de julio de 2020.

[1] Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, mmartinez@uagro.mx, orcid.org/0000-0001-5646-4048

[2] Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, mferrari@uagro.mx, orcid.org/0000-0002-8759-4387

[3] Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, gmartinezsierra@gmail.com, orcid.org/0000-0002-2462-7401

Palabras clave: *Razonamiento covariacional, Experimento de enseñanza, Geometría dinámica, Construcción geométrica.*

Abstract: The present study contributes to the body of research about the development of covariational reasoning in future mathematics teachers. We report the mental actions and levels of logarithmic-exponential covariational reasoning perceived in sixth semester undergraduate students in mathematics during a teaching experiment developed by a future mathematics teacher who is immersed in a research project. The tasks of the teaching experiment begin with a geometric construction of points of a curve using GeoGebra for students to explore the variations and describe the curve that adjusts the points. The students determine a general expression for the construction of any point by recognizing the two progressions: arithmetic and geometric. However, they show the complexity of developing a continuous covariation reasoning from a task that encourages discrete covariation reasoning.

Keywords: *Covariational reasoning, teaching experiment, Dynamic Geometric, Geometric construction.*

1. INTRODUCCIÓN

El *razonamiento covariacional* es un constructo teórico ampliamente utilizado dentro de un creciente cuerpo de investigación centrado en explicar el desarrollo cognitivo relativo a la coordinación de cantidades que varían simultáneamente (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu, 2002; Saldanha y Thompson, 1998; Thompson y Carlson, 2017). El razonamiento covariacional son las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variables mientras se atiende la relación de las formas en que ambas cambian (Carlson *et al.*, 2002, p. 357). Razonar covariacionalmente implica realizar acciones mentales, en diferentes niveles de desarrollo, involucradas en la concepción acerca de la variación de dos cantidades que varían.

Se ha demostrado que el razonamiento covariacional es fundamental para que los alumnos comprendan numerosos conceptos matemáticos en nivel bachillerato y superior; como son las relaciones exponenciales (Castillo-Garsow, 2010; Confrey y Smith, 1995; Ellis, Ozgur, Kulow, Dogan, y Amidon, 2016; Ellis, Ozgur, Kulow, Williams, y Amidon, 2012; Ferrari-Escolá, Martínez-Sierra, y Méndez-Guevara, 2016), las funciones trigonométricas (Moore, 2010, 2012, 2014)*K. C. (2010*, la razón de cambio (Johnson, 2012, 2015a, 2015b), el concepto de función (Carlson *et al.*, 2002; Johnson, 2012, 2015a, 2015b), el teorema fundamental del cálculo (Thompson, 1994b), gráficos de funciones (Carlson *et al.*, 2002; Moore, Paoletti, y Musgrave, 2013) y ecuaciones diferenciales (Castillo-Garsow, 2010).

El razonamiento covariacional es considerado como una forma fundamental del razonamiento matemático de los estudiantes, que es utilizado cuando aprenden el concepto de función (Johnson, McClintock y Hornbein, 2017). Existen dos perspectivas de covariación: una estática y otra dinámica. De manera general, desde la perspectiva estática, las cantidades de una variable se asocian con las cantidades de otra variable; en tanto que, desde la perspectiva dinámica, los cambios en una variable están asociados con cambios en otra variable (Johnson, 2012).

Particularmente, Confrey y Smith (1994) proporcionan una perspectiva de covariación estática de una función cuando se toma como una yuxtaposición de dos progresiones, cada una generada independientemente a través de patrones de datos, evidencia que emerge de su estudio sobre la función exponencial. En tanto que Carlson *et al.* (2002) trabajan desde una perspectiva dinámica que parte de interpretar y representar modelos gráficos, entre otros, el llenado de recipientes. Referente a la función exponencial, Ferrari-Escolá, *et al.* (2016), resaltan dos formas de aproximarse a dicha función. La primera aproximación hace referencia al trabajo de Thompson (2008), Ellis *et al* (2012), y Castillo-Garsow (2010) sobre razón de cambio, donde se considera que la tasa proporcional en la cual una función cambia con respecto al valor de la función, en un determinado instante, es una característica que define a las exponenciales. Es decir, $\forall \mathrm{x} \in \mathfrak{R}, f(x)$ es una función exponencial si existe $\mathrm{h} \in \mathfrak{R}$, tal que $\frac{\mathrm{f(x+h)}}{\mathrm{f(x)}}$ es una constante que depende del tamaño de h.

La segunda forma de aproximación reconoce que la función exponencial puede ser vista como la yuxtaposición de dos progresiones, cada una de ellas construida de manera independiente (Figura 1) a través de análisis numéricos e identificación de patrones (Confrey y Smith, 1994). En un sentido formal, la construcción de una función exponencial es la construcción de un isomorfismo entre los mundos de contar (aditivo) y multiplicar (multiplicativo) a través de la covariación.

+1	+1	+1…				+0.5	+0.5	+0.5…				Mundo de contar (aditivo)
0	1	2	3	4	…	0	½	1	3/2	2	…	
1	2	4	8	16	…	$2^0=1$	$2^{1/2}=\sqrt{2}$	$2^1=2$	$2\sqrt{2}$	4	…	Mundo de multiplicar (multiplicativo)
*2	*2	*2 …				$*\sqrt{2}$	$*\sqrt{2}$	$*\sqrt{2}$				

Figura 1. Recreación de ejemplo tomado de Confrey y Smith (1995, p. 85)

A partir de la segunda aproximación podemos pensar en construir la función logaritmo y la función exponencial desde el mismo razonamiento covariacional, el cual surge al considerar ambas funciones como la yuxtaposición de dos progresiones una aritmética y otra geométrica, bajo la misma mirada de Napier y Briggs que, a principios del siglo XVII, buscaban una herramienta para facilitar cálculos; en tanto que Newton, Huygens y Agnesi, a finales del mismo siglo, se enfocan en describir fenómenos que involucran continuidad (Ferrari y Farfán, 2010).

El propósito de esta investigación es indagar el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial en futuros profesores de matemáticas desde una perspectiva estática de covariación hacia una perspectiva dinámica mediante la construcción geométrica de puntos con el software GeoGebra, el uso de tablas y hojas de cálculo, así como la graficación o ajuste de puntos que involucra un acercamiento a la continuidad de la función.

2. MARCO TEÓRICO

De acuerdo con Carlson *et al.* (2002), el razonamiento covariacional es entendido como las actividades cognitivas individuales involucradas para coordinar la variación simultánea de dos cantidades al reflexionar sobre la variación que existe entre ambas. Señalan que, si se quiere determinar la capacidad que tiene un individuo de razonar covariacionalmente, se deben analizar, en conjunto, los comportamientos y las acciones mentales (AM) exhibidos al responder tareas específicas de covariación. Para estos investigadores, un estudiante logra cierto nivel de razonamiento covariacional de acuerdo con la imagen global que apoya las diversas acciones mentales exhibidas durante las tareas de covariación. En su marco conceptual de razonamiento covariacional consideran cinco niveles de desarrollo. Señalan que la habilidad de razonar covariacionalmente alcanza un nivel de desarrollo cuando mantiene las acciones mentales asociadas a los niveles inferiores. La imagen que describe los niveles es caracterizada por Thompson (1994a), como aquello que se enfoca en la dinámica de las operaciones mentales. Es importante mencionar que el razonamiento covariacional es más sofisticado a medida que la imagen se va desarrollando.

En ese sentido Ferrari-Escolá *et al.* (2016) proponen una reformulación (Tabla 1) de los niveles de desarrollo del razonamiento covariacional descritos por Carlson *et al.* (2002), pues el objetivo de su investigación fue identificar el razonamiento covariacional logarítmico-exponencial de estudiantes de bachillerato desde un acercamiento discreto hacia un análisis continuo de la función logarítmica. Reformulación que utilizamos para nuestra investigación como marco conceptual.

Las acciones mentales y su entrelace en niveles de razonamiento covariacional emergen del estudio epistemológico reportado por Ferrari (2008), en donde se identificaron elementos esenciales que, consideramos, caracterizan la covariación logarítmica-exponencial. Percibimos allí que construir progresiones (una aritmética, otra geométrica), reconocer y vincular las operaciones aritméticas involucradas, así como la convención matemática ($\log_a 1 = 0$; $a > 0$, $a \neq 1$) surge para generar un sistema logarítmico facilitador de cálculos, en tanto que en la exponencial ($a^0 = 1$, $a > 0$) para extender la estructura algebraica más allá de los números naturales.

Tabla 1. Razonamiento covariacional logarítmico-exponencial

<table>
<tr><th></th><th>Nivel 1</th><th>Nivel 2</th><th>Nivel 3</th><th>Nivel 4</th><th>Nivel 5</th></tr>
<tr><td>AM1.Coordinación entre los números. Reconocer orden y secuencia en cada progresión.</td><td>Se percibe cuando se trabaja con los elementos de construcción de los puntos y se reconoce el orden de los elementos de las progresiones.</td><td rowspan="2">Implica reflexionar sobre AM1 e incorporar AM2 mientras se trabaja en cómo cambian las cantidades involucradas.</td><td rowspan="3">Articular AM1, AM2 y AM3, propician la internalización y coordinación de las operaciones involucradas, mientras se piensa en el conjunto de números y operaciones, sin aún coordinar las progresiones.</td><td rowspan="4">Incorporar AM4 refuerza el nivel anterior al reconocer nuevas acciones y propiedades sobre objetos a través de la construcción de nuevos puntos de la curva.</td><td rowspan="5">Coordinar las acciones mentales anteriores con AM5, promueve internalizar y coordinar acciones sobre progresiones y operaciones aritméticas que conducen a la covariación logarítmica-exponencial.</td></tr>
<tr><td colspan="2">AM2. Coordinación de la dirección de la cantidad del cambio en cada progresión numérica. Identificar si la progresión aumenta o disminuye al reconocer operaciones aritméticas entre números y, por lo tanto, el cambio aritmético (diferencia) y el cambio geométrico (cociente).</td></tr>
<tr><td colspan="3">AM3. Coordinación de las operaciones aritméticas que generan las progresiones. Esto implica la asociación de la multiplicación con la suma como la operación que permite la construcción de puntos de la curva.</td></tr>
<tr><td colspan="4">AM4. Coordinación de las operaciones que completan las progresiones numéricas al extender el conjunto de números naturales al racional, y el conjunto de números racionales al real, para obtener la reversibilidad de las operaciones.</td></tr>
<tr><td colspan="5">AM5. Coordinación de las progresiones. Implica relacionar una coordenada de un punto con la otra coordenada del mismo punto, es decir, abstraer la relación funcional de forma numérica, gráfica o analítica (fórmula o expresión algebraica).</td></tr>
</table>

Tomado de Ferrari-Escolá *et al.*, 2016.

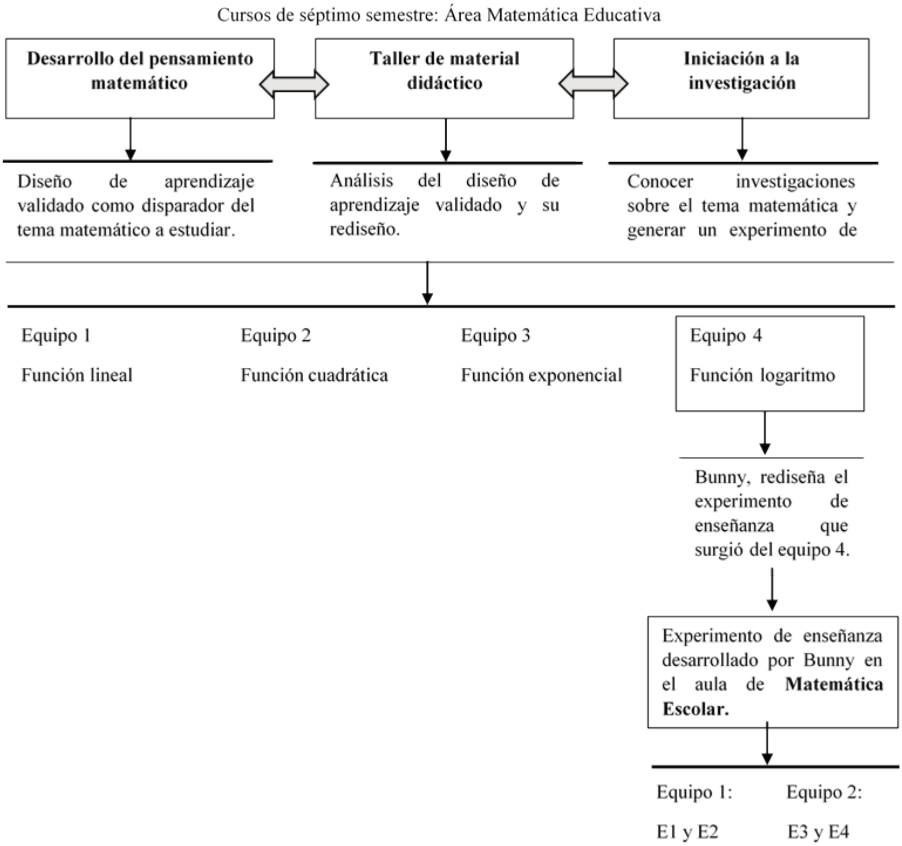
3.- METODOLOGÍA

Dada la complejidad de los contextos de enseñanza/aprendizaje y la necesidad de una metodología sensible a ellos, consideramos adecuada para nuestra investigación sobre desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial la metodología de investigación basada en diseño. Según Molina, Castro, Molina y Castro (2011) es una metodología cualitativa que "persigue comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad, y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico" (p.75). Para Molina *et al.* (2011) el objetivo de esta metodología es "analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación" (p. 76).

Como parte de nuestra investigación, trabajamos tres cursos con 16 estudiantes del séptimo semestre de la licenciatura en Matemáticas con especialidad en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), México. Los cursos fueron: (1) *Desarrollo del pensamiento matemático,* donde se profundizarían temas matemáticos iniciados con diseños de aprendizaje validados en otras investigaciones; (2) *Taller de material didáctico,* donde se analizaría y discutiría el diseño de aprendizaje que se había desarrollado en el curso 1, mismo que rediseñarían creando un nuevo diseño de aprendizaje, y, (3) *Iniciación a la investigación,* donde aprenderían a realizar un estado de arte y articular los elementos trabajados en los otros dos cursos para diseñar un experimento de enseñanza y ponerlo en escena.

Dentro de la metodología de investigación basada en diseño se enmarca el "experimento de enseñanza", considerado como una secuencia de episodios de enseñanza diseñados por un investigador. En este experimento participan uno o más estudiantes y un testigo (otro investigador o el profesor del curso), y se determina un método de recolección de datos. Los datos son utilizados para rediseñar episodios siguientes y realizar análisis retrospectivo del experimento de enseñanza desarrollado (Steffe y Thompson, 2000).

Los 16 estudiantes, futuros profesores de matemáticas, fueron organizados en cuatro equipos de cuatro integrantes designándoles un tema matemático para investigar. Se les invitó a trabajar sobre función lineal y función cuadrática (cuyos diseños de aprendizaje fueron tomados de Méndez, 2013); así como sobre función exponencial y función logarítmica (cuyos diseños de aprendizaje fueron tomados de Ferrari, 2008). Todos los equipos entregaron, al finalizar su séptimo semestre, un trabajo final reportando su análisis del experimento de enseñanza que desarrollaron con estudiantes de la facultad (Esquema 1), el cual no se reportan en el presente artículo.



Esquema 1. Organización de la investigación.

En este artículo nos centramos en el análisis de las producciones de los participantes del experimento de enseñanza sobre función logarítmica diseñado por Bunny (pseudónimo), integrante del Equipo 4, quien cursaba el octavo semestre. Bunny desarrolla su experimento de enseñanza en el curso Matemática Escolar con estudiantes de sexto semestre de la facultad. Bunny se encontraba desarrollando su trabajo de tesis de licenciatura enfocado a los logaritmos en coordenadas polares, había tomado 90% de los cursos de la licenciatura en matemáticas y del área de matemática educativa. Había participado en congresos nacionales e internacionales referentes al ámbito educativo donde colaboró en el desarrollo de distintos talleres o laboratorios, ponencias y carteles referentes a covariación logarítmica-exponencial. Su trayectoria académica nos motivó a invitarlo a esta investigación sobre formación inicial y covariación, de la cual se desprende el presente escrito.

El objetivo de la investigación es contribuir a la literatura que indaga acerca de cómo lograr el desarrollo del razonamiento covariacional a través de contestar la pregunta: ¿Qué niveles de razonamiento covariacional logarítmico-exponencial se perciben en futuros profesores de matemáticas de sexto semestre de licenciatura? En particular, en esta investigación, indagamos el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial en futuros profesores de matemáticas, provocado por un experimento de enseñanza basado en la construcción geométrica de puntos de *una curva logarítmica*, según la construcción geométrica de puntos que aporta Descartes en su obra de Geometría (1630) que Confrey y Dennis (1997) analizan en su artículo.

Así, la contribución de nuestra investigación es dar evidencia empírica de cómo el experimento de enseñanza fomenta el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial, según la reformulación de Ferrari-Escolá, Martínez-Sierra y Méndez-Guevara (2016).

3.1. Participantes y recolección de datos

En el experimento de enseñanza participaron cuatro jóvenes de entre 22 y 24 años, tres hombres y una mujer, inscritos en el curso Matemática Escolar de sexto semestre del área de Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas de la UAGro. Dentro de la trayectoria escolar de los participantes encontramos asignaturas de formación básica como: Álgebra lineal (I al III), Geometría, Geometría Analítica (I y II), Cálculo (I al IV), Análisis Numérico, entre otras. Su formación de especialidad en matemática educativa marca como asignaturas cursadas al momento de su participación: Tecnologías en la Matemática Educativa, Historia de las Matemáticas, Fundamentos de la Educación, Análisis del Sistema Educativo, Metodología de la Enseñanza, por mencionar algunas.

Los cuatro participantes fueron distribuidos en dos equipos (Equipo 1 y Equipo 2), de dos integrantes cada uno. Las tareas se desarrollaron como parte del curso en dos sesiones, cada una de 100 minutos.

En las dos sesiones se trabajó sobre logaritmos, iniciándose con la construcción geométrica de una curva logarítmica utilizando GeoGebra. Estas sesiones se desarrollaron en el laboratorio de modelación de la Facultad de Matemáticas en Acapulco. El equipo de investigación estuvo integrado por: Bunny, que desarrollaría las sesiones, testigos encargados de tomar notas de campo (autores de este artículo) y dos auxiliares que videograbaron las sesiones.

Para la toma de datos se contó con tres videocámaras, dos de ellas se ocuparon para grabar la actividad de los dos equipos participantes, la tercer videocámara estuvo a cargo de un testigo, con la resposabilidad de grabar la actividad general del salón de clases. De igual manera, se registraron las grabaciones de pantalla desde los equipos de cómputo utilizados para evidenciar el trabajo realizado en el software. También se recabaron, al término de cada sesión, los archivos ".ggb" generados en GeoGebra. Se rescataron los archivos de audio de cada sesión, así como las hojas de trabajo de los estudiantes y las notas de campo de los testigos.

Se presentan en este escrito, luego del análisis de los datos obtenidos, algunos elementos sobre las acciones mentales y los niveles de razonamiento covariacional logarítmico-exponencial percibidos en dos estudiantes del Equipo 1 (E1 y E2) mientras desarrollan las tareas en el experimento de enseñanza.

3.2. Tareas

El sustento del diseño de las tareas descansa en el estudio epistemológico reportado por Ferrari (2008) respecto a logaritmos donde se destaca la importancia, que en siglos pasados, se otorgaba a las construcciones geométricas dentro del estudio de las variaciones y el cambio. En el mismo sentido Dennis y Confrey (1997) rescatan de la obra de Descartes, la construcción geométrica de puntos en un plano propiciando la asociación de las coordenadas con su variación, es decir, favoreciendo argumentos covariacionales. En el diseño de las tareas involucramos la geometría dinámica en la construcción de una curva logarítmica con el uso de un círculo unitario; de ciertas rectas tangentes y secantes; así como también, la semejanza de triángulos. Elementos que fueron trabajados en el curso de Desarrollo del Pensamiento Matemático y que fueron reproducidos en el experimento de enseñanza con pequeños retoques personales del estudiante Bunny.

De esta manera, el diseño del experimento de enseñanza estuvo constituido por dos actividades que se encaminan hacia la construcción geométrica de puntos pertenecientes a la función logaritmo base 2, para lo cual se utilizó GeoGebra. La dinámica de clase implementada por Bunny fue la siguiente:

1. Iniciar la sesión con las instrucciones de trabajo para guiar a los estudiantes en la construcción geométrica de puntos de la curva (Figura 2):
   1.1. Construcción del punto P_1
   - Particionar el eje *y*: $y_0=0$; $y_1=0.5$; $y_2=1$: $y_3=1.5$; $y_4=2$
   - Insertar una circunferencia unitaria cuyo centro sea el origen del sistema de coordenadas cartesianas y la cual determina el punto $x_0 = (1,0)$.
   - Trazar una línea recta *(s)* que pase por el origen y un punto *A* (cualesquiera) de la circunferencia logrando un ángulo de inclinación de 45 grados (Figura 2-a).
   - Trazar una recta tangente a la circunferencia por el punto A y determinar x_1 (Figura 2-b).
   - Trazar una recta vertical por x_1 y una recta horizontal por y_1 y determinar el punto P_1 (Figura 2-c).

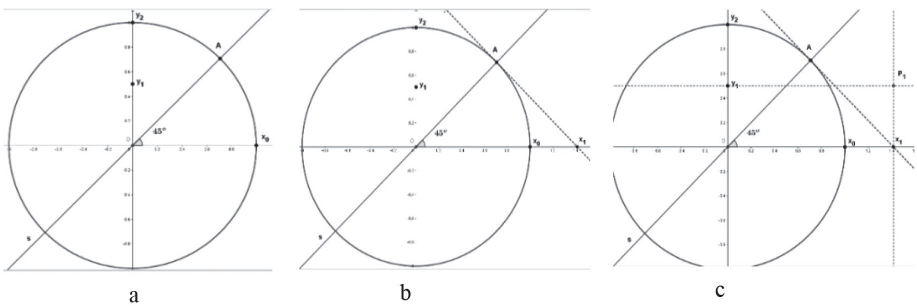


Figura 2. Construcción de los primeros puntos.

2. Dar tiempo a los participantes para construir más puntos de manera independiente; analizar variaciones en datos e intentar ajustar la curva; identificar las variables en juego y su comportamiento "variacional"; percibir la covariación

existente y ajustar una curva a dichos puntos; tareas que serían orientadas mediante preguntas preparadas para incentivar la discusión (Tabla 2);

Tabla 2. *Preguntas guía del diseño de aprendizaje*

Número de pregunta	Preguntas	Consideraciones
1.1	¿Qué forma creen que tiene la curva que pasa por todos los puntos construidos? Dibujarla y explicar sus ideas.	Se espera que los estudiantes realicen un primer esbozo de la curva, sin ser exactos, ya que sólo se consideran puntos en el primer cuadrante del plano. Esto los llevaría a percibir la forma de la curva e imaginarla continúa.
1.2	¿Cómo se comportan los puntos construidos de la curva?”	Se espera una descripción en base a la observación de puntos, como por ejemplo, son crecientes, decrecientes, están ubicados en cierto cuadrante, etc. que daría indicios de AM1 y AM2
1.3	¿Cuánto cambian las variables involucradas?”	Se espera que reconozcan, en primer lugar, las variables en juego, y luego trabajen con el comportamiento numérico, para poder determinar los patrones de crecimiento de las dos progresiones en juego. Evidenciarían mayor uso de AM1 y AM2, fortaleciendo tácitamente los niveles 1 y 2.
1.4	¿Consideran que el punto “B” pertenece a la curva? ¿Por qué?	Se espera que reconozcan un punto especial de la curva B= (1, 0), el cual les permitiría explorar o reconocer algunas características importantes de la función en juego y quizás estabilizar AM3.
1.5	¿Se pueden encontrar puntos de la curva a la izquierda del punto «B»? Expliquen por qué y de ser necesario den ejemplos	Se espera que esta pregunta ayude a romper esquemas que pudieran haber sido establecidos referente al tipo de función que se está trabajando, ya que con la ubicación de más puntos se hacen visibles la asíntota de la función logaritmo base 2. Exige también esta tarea la reversibilidad (AM4)
1.6	¿Cómo ajustar los puntos? Es decir, lograr una curva que pase por todos ellos ¿cuál será?”	Se espera que con el análisis cuantitativo desarrollado en la pregunta 3 y las características visuales encontradas en las preguntas 4 y 5, identifiquen la covariación de ambas progresiones en juego, y así identifiquen la covariación logarítmica-exponencial inmersa y enunciar la curva logaritmo en base 2, lo cual evidenciaría la AM5.

3. Finalizar cada sesión invitando a los estudiantes a presentar los avances de manera plenaria donde Bunny cuestionará algunos aspectos con el fin de profundizar y reforzar el trabajo realizado.

3.3. Análisis de datos

El análisis de los datos se realizó de manera retrospectiva lo cual nos permitió reflexionar sobre los datos obtenidos durante todo el experimento de enseñanza (Molina, *et al.* 2011). Consideramos que las herramientas teóricas y metodológicas de la investigación están estrechamente ligadas a la pregunta/problema de investigación. De hecho, nuestro proceder teórico, metodológico y analítico es análogo a muchas investigaciones en el campo de investigación acerca del razonamiento covariacional (e.g. Moore, 2013, 2014). La particularidad de nuestra investigación es la reformulación de (Ferrari-Escolá, Martínez-Sierra y Méndez-Guevara, 2016) para el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial.

Se inició el análisis de los datos mediante el proceso de familiarización, a través de mirar, en repetidas ocasiones, los vídeos recabados, incluso se realizó una mejora en el audio eliminando ruido de las grabaciones mediante las herramientas proporcionadas por el software Audacity ®. Seguido de ello se realizó la transcripción de las grabaciones de vídeo; se revisaron y digitalizaron las hojas de trabajo resultantes de las sesiones; se revisó la construcción hecha en GeoGebra y la grabación de la pantalla recabada, todos estos elementos nos ayududaron a entender, de mejor manera, cómo fueron elaborados cada uno de los elementos geométricos de la construcción en GeoGebra. Cabe mencionar que los estudiantes involucrados presentaban un nivel básico en el uso del software lo cual implicó mantener la configuración predeterminada en aspectos como: ejes, cuadrícula, vistas algebraica y gráfica, así como el uso de dos cifras decimales. Este último aspecto jugó un papel importante durante el análisis de las variaciones realizada por los estudiantes. Para analizar los datos nos apoyamos en el marco conceptual de covariación logarítmico-exponencial expuesto en Ferrari-Escolá, *et al.* (2016), así como no perder de vista el objetivo propuesto, por lo que utilizamos el análisis continuo (Molina, *et al.* 2011) al final de cada sesión, que nos permitió tomar decisiones y reorientar el trabajo de ser necesario. Con las transcripciones completas los autores identifican, por separado, momentos donde se vislumbran en los estudiantes aspectos covariacionales o elementos relacionados al crecimiento, o variación de las variables en juego, para luego triangular y validar los episodios seleccionados como evidencia de las acciones mentales y los niveles de razonamiento covariacional percibidos en la primera sesión del experimento de enseñanza.

4. RESULTADOS

El experimento de enseñanza inicia con la explicación de Bunny para la construcción de dos puntos (P_1 y P_2) de la curva a analizar. Esta actividad tuvo una duración aproximada de 23 minutos, debido a que fue necesario instruir a los estudiantes en las herramientas de GeoGebra que se utilizarían. Después de la construcción de los primeros dos puntos, se les solicita construir más puntos y analizarlos hasta lograr reconocer la curva; con tantos puntos como consideraran necesarios.

El Equipo 1, inicia construyendo los puntos P_1= (1.42, 0.5) y P_2= (2.01, 1) con cierta imprecisión, debido a que no han ajustado la inclinación de la recta inicial a 45° como se les solicita en la actividad (Figura 2-a), y eso les perturba para analizar numéricamente el crecimiento de los puntos.

Luego de las explicaciones de Bunny y la construcción de los dos primeros puntos, E1 y E2 acuerdan construir dos puntos más (P_3 y P_4), utilizando aproximadamente 5 minutos en esa tarea (Figura 3).

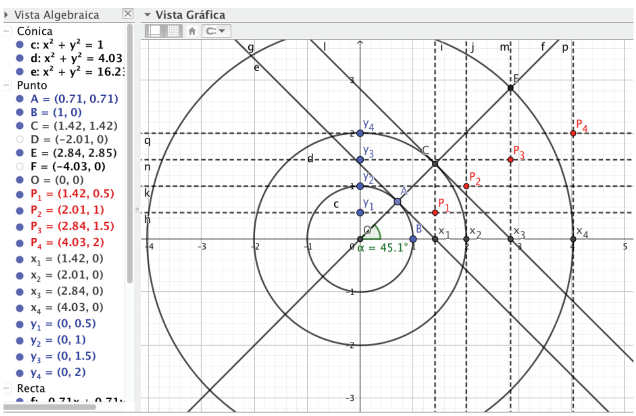
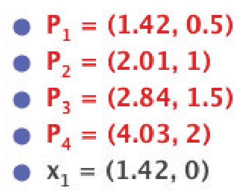


Figura 3. Construcción de los puntos.

4.1. Episodio 1: Los puntos se van “anchando” de manera creciente

Con los cuatro puntos construidos los estudiantes inician la búsqueda de patrones de crecimiento (Extracto 1) y como primera herramienta toman diferencias entre ordenadas consecutivas (Extracto 1, Línea 029). Reconocen que deben encontrar la variación de las coordenadas de los puntos construidos. E2 menciona: “¿cuánto van variando?, o ¿no crees que van variando?” (Extracto 1, Línea 026) refiriéndose a las abscisas luego de que E1 señala que los valores de “y” tienen un aumento constante de 0.5 en 0.5 (Extracto 1, Línea 023). Se observa que los estudiantes logran identificar las dos variables en juego, pero solo explicitan la manera de variar las ordenadas “y”, cuya construcción se deriva de la partición solicitada. El reto mayor es determinar cómo varían los valores de “x” que emergen de la construcción geométrica propuesta, ya que buscan una regularidad en la diferencia de dos valores consecutivos.

Extracto 1. Diferencia entre valores de x

Línea		Participación	Figura
022	E2:	x_1, la distancia que hay de…	 
023	E1:	1.42… bueno nada más con estos puntos; estos son los que hice… los de las “y” nada más van aumentando punto 5.	
024	E2:	¿Y los de “x”?… ¿ Calculadora?	
025	E1:	¿Para qué?	
026	E2:	Para ver cuánto van variando, ¿o no crees que van variando?	
027	E1:	Sí van variando aquí son 51 o 52, acá no? [refiriéndose a la distancia entre las abscisas de P_1 y P_2] Este de acá son 83 [indicando a la distancia entre las abscisas de P_3 y P_4].	
028	E2:	0.59 [usa la calculadora para la distancia entre las abscisas de P_1 y P_2].	
029	E1:	El otro es 4.03 − 2.84 son…	
030	E2:	59, 83 y 1.19 [anotando en su hoja de trabajo].	

Hasta ese momento los estudiantes han percibido que las variables van en aumento y que para "y" son de 0.5 en 0.5, mientras que siguen buscando determinar la variación de "x" mediante diferencias. El trabajo no los conduce hacia algo concreto, sin embargo, mediante la observación de los puntos construidos, conjeturan que se trata de un "parábola", debido a que consideran que el gráfico "debería ser simétrico". Incluso a la hora de graficar la curva en la hoja de trabajo, su trazo inicia en el origen y generan una curva que va creciendo con la concavidad hacia arriba (Figura 4).

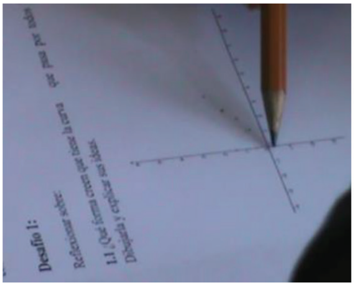
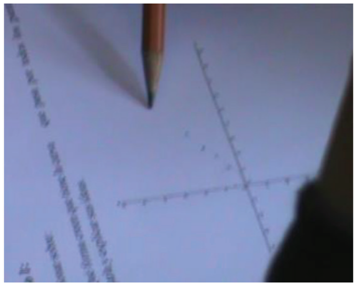



Figura 4. Puntos se van a ir "anchando".

Observamos entonces que los estudiantes identifican qué varía, pero, no logran aún determinar cuánto varía, al menos no para los valores de "x", sólo visualizan que ambas variables crecen. Discuten sobre si se trata de un crecimiento cuadrático (E1) o exponencial-logarítmico (E2), sin llegar a una conclusión conjunta para definir cómo varía el crecimiento de los puntos.

En este episodio evidenciamos cómo se perciben indicios de AM1 y AM2 en las discusiones y trabajo de los estudiantes, debido a que logran identificar las dos variables en juego y que ambas crecen. Los comportamientos exhibidos por estos estudiantes al responder la tarea fueron indicios de los niveles de coordinación y de dirección (Nivel 1 y Nivel 2). Buscan también, de manera cuantitativa, la variación de una de ellas (la variable "x") sin lograr aún el patrón de crecimiento, mientras que para la segunda variable ("y") observan que es creciente de manera directa por la partición indicada en la tarea, por tanto, conocen cuánto varía. Esto induce a los estudiantes a percibir que los puntos construidos se van "anchando" de manera creciente, como lo comenta E2 a su compañero, lo que implícitamente involucra el hecho de que la razón de cambio va siendo cada vez más pequeña.

4.2. Episodio 2: Para valores naturales podemos sumar 1 y duplicar

Los estudiantes llegan a un momento de confusión, su análisis numérico mediante diferencias no les ha permitido identificar la variación de los valores de “x”; en tanto que la parte gráfica los lleva a conjeturar que podría tratarse de una parábola. Bunny interviene para apoyarlos y les hace la observación de que el ángulo de inclinación de la recta S (Figura 2-a) no mide 45º y les solicita ajustar el ángulo. Con ello los puntos construidos se tornan más cómodos, incluso aparecen números naturales como se puede observar en la Figura 5 donde los puntos de la izquierda son los que construyeron primero y los puntos de la derecha son los que obtuvieron después del ajuste del ángulo.

$P_1 = (1.42, 0.5)$	$P_1 = (1.41, 0.5)$
$P_2 = (2.01, 1)$	$P_2 = (2, 1)$
$P_3 = (2.84, 1.5)$	$P_3 = (2.83, 1.5)$
$P_4 = (4.03, 2)$	$P_4 = (4, 2)$

Figura 5. Los nuevos puntos.

Con los nuevos puntos (extracto 2), reconocen que van apareciendo, primero, un número decimal y después uno entero; aparece un decimal y luego un entero, y así siguiendo en ambas variables. Construyen entonces otro punto (solo la abscisa) utilizando una circunferencia para probar su conjetura de número decimal, entero, decimal, entero y predicen que para el valor 3 de “y” el valor de la coordenada “x” va a ser 8, así determinan el punto P_5= (8,3). Los estudiantes reconocen que las ordenadas enteras 1, 2 y 3 están relacionadas con los valores enteros de las abscisas 2, 4 y 8 respectivamente. Es decir, observan el cambio en “x” y el cambio en “y”. Más aún, pudieron determinar que los valores en “x” aumentan al doble (extracto 2, línea 105) y los valores en “y” de uno en uno, fortaleciendo así las AM1 y AM2 parcialmente, ya que no logran aún el patrón general de crecimiento de cada variable en conjunto, esto los mantiene dentro de los primeros dos niveles de razonamiento (coordinación y dirección).

Extracto 2. Va aumentando el doble

Línea		Participación
097	E1:	Es que en los puntos 1, 2, 3 en el 1 llega el 2 para x, y= 2 va 4, en y=3 se va al 8 y los decimales en y... esta... tiene decimales en x en los puntos.
098	Bunny:	¿Encontraste que aquí es 2, 4, 8? [indicando las abscisas].
099	E1:	Sí.
100	Bunny:	El siguiente entonces ¿cuál sería?
101	E1:	El siguiente va a quedar con decimal, va a tener decimales pues.
102	Bunny:	¿Y el siguiente?
103	E1:	El siguiente sería... ¿Cuál es el siguiente Chavo? pienso que 16, pero sí 16.
104	Bunny:	16 ¿Por qué?
105	E1:	Porque va aumentando, el punto que tenemos es 2, luego el doble sería 4, luego el doble es 8, el doble de 8, 16.

En este momento, los estudiantes observan que ambas cantidades (valores de x y valores de y) crecen con cierto incremento; el doble en valores enteros de "x" y aumento de 1 en valores enteros de "y", lo cual podemos identificar como AM1 e inician un acercamiento más robusto de AM2, pese a que no logran incorporar en su discusión los puntos intermedios construidos que involucran números no enteros.

4.3. Episodio 3: Las progresiones

E1 y E2 han determinado que en las coordenadas de los puntos construidos se podían encontrar números decimales o enteros. Para las coordenadas de valor entero descubrieron que se puede ir duplicando los valores de las abscisas y sumar 1 en las ordenadas para obtener el punto siguiente con coordenadas enteras. Sin embargo, aún no han logrado percibir con mayor fineza el patrón de crecimiento de las variables, es decir, solo pueden determinar P_2, P_4 y P_6 dejando los huecos de P_1, P_3 y P_5 que precisamente son puntos cuyas coordenadas son decimales. Para salir de esa encrucijada necesitan el apoyo de Bunny quien los induce a observar que el valor de la abscisa del punto P1 se puede considerar como una aproximación a la raíz cuadrada de dos (extracto 3, línea 165). Con ello reescriben los puntos que han construido (extracto 3, línea 171).

Extracto 3. Reemplazando por raíz de dos

Línea		Participación
165	Bunny:	Ajá, las "y" siempre crecen 0.5 en 0.5. Bueno, lo que yo haría primero es poner los puntos que tengo allí, que voy a analizar, que quiero cuantificar, ponerlos aquí más claro ¿no? [refiriéndose a escribirlos en papel]. Digo, también en la pantalla es más complicado poner los "x", claro. ¿Cuáles son solamente los P? Y quizás ahí encontrar algo, si no funciona la resta, no sale nada uniforme en la resta, ¿qué otra puedo encontrar en la variación? ... ... 1.41... ese 1.41 ¿No les evoca nada? ¿No se acuerdan qué número es?
166	E2:	Esto es raíz cuadrada de 2 [indicando el 1.41 del punto P_1 en la lista de puntos que han escrito], esto es raíz cuadrada de 4 [indicando la abscisa del punto P_2].
167	E1:	Entonces, es como ésta, pero no...
168	E2:	Así lo dejamos [refiriéndose a la pregunta 4 sobre B=(1,0)].
169	E1:	Sí, ya.
170	E2:	Pero lo podemos tomar como un punto x sub cero.
171	E1:	Si reemplazamos esto por lo que dijimos hace rato, éste es la raíz de 2, ésta raíz de 4, ésta raíz de 8, raíz de 16, raíz de 32, raíz de 64 y el punto que está aquí es la raíz de 1, es el que tenemos, pues a ver cómo concebimos eso que habíamos dicho.

Al realizar la reescritura de las coordenadas de los puntos (Figura 6), logran una perspectiva más amplia sobre la forma de variar los valores de "x". Con ello pueden ver que para obtener el siguiente punto debían duplicar el valor anterior y sacar la raíz cuadrada (para x) así como aumentar 0.5 para los valores de "y". Sin embargo, dudan sobre qué colocar cuando y = 0 y a su abscisa la asocian con "raíz de 1", que corresponde al punto "B" de la construcción geométrica, punto sobre el que se les pregunta si pertenece o no a la curva (tarea 1.4).

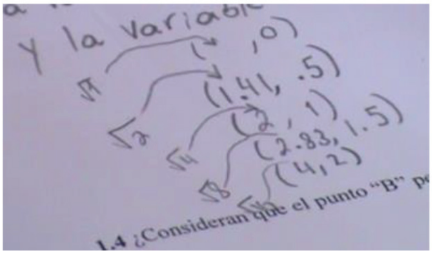


Figura 6. Reescribiendo los valores de x.

Los estudiantes logran coordinar las operaciones de duplicar y extraer raíz cuadrada en las abscisas y sumar 0.5 en las ordenadas, que les permite generar las progresiones para "x" y "y". Consideramos que comienzan a incursionar en los elementos de AM3, podemos decir que sus comportamientos expresados sugieren una habilidad de razonamiento covariacional (Nivel 3) de coordinación de operaciones aritméticas que generan las progresiones. Mantienen esta estrategia de duplicar en las abscisas hasta incorporar la aplicación de la raíz cuadrada para lograr atrapar todas las abscisas construidas geométricamente. Se percibe, en la discusión de los estudiantes, que pierden de vista la base 2 de la progresión geométrica analizada, al no reescribir la raíz cuadrada como exponente.

Finalmente, el análisis anterior los lleva a expresar las variaciones encontradas mediante dos expresiones algebraicas, que articulan mediante la notación de un par ordenado (Figura 7). Consideramos que la covariación estuvo latente durante todo su trabajo (línea 097 del extracto 2) y logran determinar una sola expresión para denotar la forma en que varían los puntos, pero de manera discreta, es decir, dejando las progresiones en términos de "n", tomándolo como el representante de los números enteros que permiten determinar puntos de la curva estudiada.

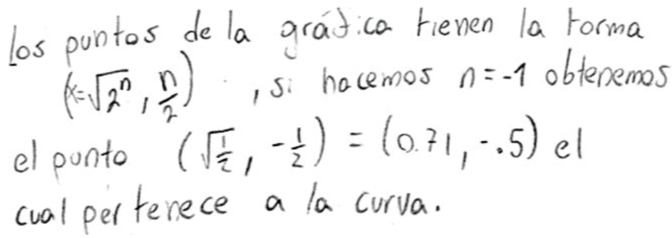


Figura 7. Progresión geométrica y aritmética.

Comienzan a percibir que también existen puntos a la izquierda de P_1 (Figura 7) elemento de reversibilidad en su razonamiento (AM4, nivel 4 es decir, coordinación de las operaciones que completan las progresiones numéricas, extender de números naturales a enteros, racional y finalmente reales) de forma discreta, ya que extienden su "n" natural hacia los enteros, dando un ejemplo $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}\right)$. Si bien, en los esbozos a lápiz de la forma de la curva estudiada es continua y así la consideran en sus discusiones, no logran comprobar su conjetura del crecimiento de los puntos al no establecer la expresión algebraica en términos de $y = f(x)$ requerido por GeoGebra para graficar la curva. Sin embargo, $\left(\sqrt{2^n}; \frac{n}{2}\right)$ da indicio de que han logrado explicitar el crecimiento de la curva de manera discreta, es decir, emerge en su trabajo una forma de expresar la covariación logarítmica-exponencial aunque ellos aún no se atreven a asegurarlo.

La primera sesión finaliza invitando a los estudiantes a compartir sus conclusiones. En primer lugar, participa el Equipo 2 (no reportado en este artículo) el cual se dedica la mayor parte del tiempo a construir geométricamente nueve puntos de la curva. En su exploración, al igual que el Equipo 1, percibe dos progresiones geométricas distintas, una de números naturales y otra de números decimales que construyen multiplicando por 2 (abscisas); cada una de las cuales relacionan con una progresión aritmética que construyen sumando 1 (ordenadas). Comentan que para determinar los puntos de números enteros se puede utilizar el par (2^n, n) pero que aún no lograban encontrar la fórmula para la progresión que involucra decimales.

El Equipo 1, al coincidir con la exploración que exponen sus compañeros se limitan a presentar su tabla numérica (Figura 5) y su conclusión (Figura 6), respecto a que los puntos pueden ser construidos con un único par $\left(\sqrt{2^n}; \frac{n}{2}\right)$. Comentan que reconocer la raíz cuadrada de 2 les permitió unificar sus exploraciones; ideas que sorprenden al Equipo 2 y les aporta nuevos elementos a utilizar.

La instrucción para la segunda sesión, fue revisar y analizar lo que se había trabajado en la primera sesión para ver si lograban percibir otros aspectos. Los estudiantes en su inquietud por descubrir la curva trabajada realizan una búsqueda de información sobre funciones exponenciales y logarítmicas, eso lo demuestran ya que al iniciar esta sesión tanto E1 y E2 afirman que la función estudiada es $f(x) = log_2 x$. A partir de ahí enfocan el trabajo de la segunda sesión a comprobar su afirmación utilizando las expresiones logradas en la primera sesión. Al final explican a sus compañeros que generaron un sistema de dos ecuaciones igualando las variables a su conjetura sobre la forma de determinar cualquier punto, es decir, escriben en el pintarrón:

$$x = \sqrt{2^n}$$
$$y = \frac{n}{2};$$

Despejando *n* y utilizando función inversa logran la fórmula que necesitaban para que GeoGebra uniera los puntos con una gráfica. Se observa que no reflexionan sobre el pasaje de "números enteros" a "números reales" al generar este sistema de ecuaciones, sino que con naturalidad aceptan la continuidad de la función.

5. DISCUSIÓN

En este artículo presentamos los resultados de un experimento de enseñanza que tuvo por objetivo propiciar el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial en futuros profesores de matemáticas. El experimento de enseñanza se basó en la construcción geométrica de puntos de la función logarítmica que se desea estudiar con los participantes, retomando argumentos primigenios del Cálculo (siglo XVII), que fueran rescatados de los trabajos de Ferrari (2008) y Confrey y Dennys (1997).

Encontramos que la construcción geométrica de puntos, utilizando GeoGebra, propicia un acercamiento a reconocer la covariación logarítmica-exponencial discreta trabajándose tácitamente con la continuidad de la curva al solicitar "el ajuste" de los mismos, tareas que hay que seguir afinando e investigando. En este sentido, coincidimos con Thompson y Carlson (2017) sobre que propiciar el razonamiento covariacional es crucial en el desarrollo matemático de estudiantes, en particular, al construir expresiones algebraicas, fórmulas, tablas numéricas o gráficos que les permitan describir variaciones simultáneas generando nuevos significados.

Al inicio del experimento los participantes construyeron puntos de la curva e intentaron identificar el tipo de variación que observan en las variables. Percibimos allí indicios de AM1 y de AM2 (los primeros dos niveles de coordinación y dirección), pero retenido por el entremezcle de coordenadas con pares de números enteros y aquellas coordenadas con pares de números reales. Lo primero que perciben es multiplicar por 2 y sumar 1, "saltando" así los puntos cuyas coordenadas involucran decimales. Demoran en descubrir que el patrón general de crecimiento de las abscisas es $\sqrt{2}$ y, el de las ordenadas es 0.5. Problema que reporta Gruver (2017) sobre la dificultad percibida en su investigación sobre diferenciar las relaciones lineales de las exponenciales y el cómo crecen, misma que aborda desde una recta numérica con subdivisión exponencial de segmentos generada desde los datos proporcionados a los estudiantes. Sin embargo, su atención está hacia las propiedades aritméticas de los logaritmos, no tanto hacia el reconocimiento de la covariación presente.

Ellis *et al.* (2016, p. 176), por su parte, mencionan que sus hallazgos sugieren que razonar con cantidades covariando es un aspecto crítico para construir una comprensión particular del crecimiento exponencial. Idea que compartimos, desde nuestra perspectiva, pues se trata de abstraer la covariación logarítmica-exponencial desde un estudio de cantidades variando, una (ordenadas) desde la suma y otra (abscisas) desde la multiplicación. Coincidimos también con Kuper y Carlson (2017) quienes reportan que en su exploración reconocen que es crucial que los estudiantes determinen los factores de crecimiento parcial y general para reflexionar sobre la covariación logarítmica. Conclusiones que reforzamos con nuestros datos, iniciados desde una construcción geométrica.

5.1. Síntesis de resultados

En este apartado sintetizamos la producción de E1 y E2 durante la primera sesión del experimento de enseñanza, presentado en este artículo, mediante la Tabla 3 organizándola según las acciones mentales y los niveles de razonamiento covariacional logarítmico-exponencial que consideramos haber percibido en estos estudiantes según la adecuación teórica de Ferrari-Escolá, *et al.* (2016).

Tabla 3. Acciones Mentales de los estudiantes

<table>
<tr><th>Acciones Mentales</th><th>Nivel 1 y 2</th><th>Nivel 3</th><th>Nivel 4 y 5</th></tr>
<tr><td>AM1. Los estudiantes identifican que existe cambio constante en la diferencia de ordenadas consecutivas y aplican la misma estrategia en las abscisas: “Aquí son 51 o 52, acá no? Éste de acá son 83” (Extracto 1) sin éxito de encontrar una constante de crecimiento.
Los estudiantes cambian la estrategia de “diferenciar” números consecutivos a “multiplicar”. Es decir, desde P_2 (2,1) y P_4 (4,2) predicen P_6 (8,3) y P_8 (16,4): “Porque va aumentando, el punto que tenemos es 2, luego el doble sería 4, luego el doble es 8, el doble de 8, 16” (extracto 2).</td><td rowspan="2">Estos niveles se entremezclan, ya que la primera tarea de esbozar la “forma” de la curva desde los puntos construidos, genera discusión entre crecimiento “cuadrático” o “logarítmico”. Distinguir entre ambos recae en reconocer las progresiones presentes (geométrica en las abscisas y aritmética en las ordenadas)</td><td rowspan="3">Los estudiantes se despegan de la única estrategia que utilizan al analizar la forma de crecimiento de las ordenadas de los puntos construidos (diferencia) agregando la de multiplicar. Logran entonces la dupla de factores de crecimiento: 0.5 para ordenadas y en las abscisas, unificando el cómo y cuánto crece la curva, es decir, cuál es el siguiente punto.</td><td rowspan="4">Los estudiantes logran una fórmula única para generar nuevos puntos. Si bien no logran una expresión general que “ajuste” los puntos en esta primera sesión, evidencian avances hacia estos niveles de razonamiento</td></tr>
<tr><td>AM2. Desde el inicio reconocen que ambas variables crecen con diferentes formas de hacerlo, sin aún lograr determinar un único factor de cada progresión que provoque su crecimiento, lo logran parcialmente en el conjunto de los números naturales.</td></tr>
<tr><td colspan="2">AM3. Logran la dupla de factores de crecimiento: 0.5 para ordenadas y $\sqrt{2}$ en las abscisas, unificando el cómo y cuánto crece la curva. “Si reemplazamos esto por lo que dijimos hace rato, éste es la raíz de 2, esta raíz de 4, esta raíz de 8, raíz de 16, raíz de 32, raíz de 64 y el punto que está aquí es la raíz de 1 es el que tenemos pues a ver cómo concebimos eso que habíamos dicho” (extracto 3).</td></tr>
<tr><td colspan="2">AM4. Se abre la discusión desde las coordenadas con números naturales hacia coordenadas con números reales de manera discreta, evidenciando tímidamente reversibilidad en su razonamiento, al menos presentan un ejemplo: $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}\right)$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">AM5. Generan una expresión general para describir la curva de manera discreta, es decir, dan una “fórmula” general para construir cualquier punto $\left(\sqrt{2^n}; \frac{n}{2}\right)$ que evidencia que perciben la covariación logarítmica-exponencial sin lograr, en la primera sesión, una expresión $y = f(x)$</td><td></td></tr>
</table>

Observamos entonces que, durante gran parte del experimento de enseñanza E1 y E2 se enfocan en determinar cómo obtener el siguiente punto de la curva mediante un análisis cuantitativo, apoyándose en GeoGebra para comprobar su conjetura, no para construirlos. Con este estudio logran coordinar las operaciones aritméticas (al menos para los números naturales) de multiplicar por 2 y sumar 1, que les permite generar las progresiones para "x" y "y". Sin embargo, van dejando huecos, aquellos que implicaban números reales, asomándose así a AM3 de manera sesgada sin poder aún relacionarlas con el comportamiento logarítmico. Ello fortalece lo que Ferrari-Escolá, *et al.* (2016) se refieren al mencionar que si bien, concebir la simultaneidad de dos variaciones diferentes cuyos cambios se afectan entre sí conduce al razonamiento covariacional, la complejidad cognitiva radica en percibir la coexistencia y la codependencia de las progresiones.

5.2. Sobre la continuidad tácita

Respecto al tipo de variación, Castillo-Garsow (2010, 2012) distingue dos concepciones de variación continua que denomina "chunky" y "smooth", elementos que son considerados también por Thompson y Carlson (2017) como los niveles más avanzados del razonamiento covariacional (Covariación continua a trozos - Covariación continua suave). Consideran entonces, que la variación continua a trozos implica pensar que los valores varían discretamente, es decir, que existen huecos entre dos puntos consecutivos aunque el fenómeno estudiado sea constante y donde el estudiante tiene una imagen tácita de un continuo entre valores sucesivos. En tanto que, consideran que la covariación continua suave implica concebir los cambios (aumentos o disminuciones) en el valor de una cantidad o variable tal como ocurre, simultáneamente, con los cambios en el valor de la otra variable, y se abstrae que ambas variables varían de manera continua y suave. Ellis *et al*, (2016), coincide con esta idea, ya que consideran que el razonamiento covariacional temprano en estudiantes que logran describir numéricamente el crecimiento de un cactus, precede a su capacidad de desarrollar reglas de correspondencia de la forma $y = f(x)$.

En nuestro diseño, provocamos en los participantes la concepción de variación simultánea discreta durante las tareas, debido a que nuestro experimento de enseñanza inicia desde la construcción geométrica de puntos invitándolos a reflexionar sobre covariación continua al solicitar ajustar los puntos, ya que la tarea general es describir la curva que "une" los puntos. Observamos que E2 menciona que los puntos se van "ensanchando" refiriéndose a las abscisas, implicando la desaceleración del crecimiento de la curva, es decir, evoca a la función logarítmica que es discutida por su compañero que insiste en que se trata de una parábola. Idea que se diluye al insistir con hacer diferencias entre cantidades consecutivas, estrategia apropiada para funciones polinomiales pero desafortunada para funciones trascendentes.

Un software como GeoGebra, exige una expresión análitica para trazar una función determinada, desafío que propone como cierre de la discusión las tareas diseñadas en el experimento de enseñanza. Su pantalla "vista gráfica", permite visualizar la forma de crecimiento de los puntos que geométricamente se construyen; así como, la pantalla "vista algebraica" explicita las coordenadas de cada punto determinado. Un razonamiento covariacional cuantitativo de los estudiantes se percibe al construir una columna de pares ordenados de la cual organizan sus ideas sobre los patrones de crecimiento de cada ordenada (multiplicación para las abscisas y sumar para las ordenadas). Coincidimos con Ellis *et al*, (2016) respecto a que los estudiantes abstraen el crecimiento implicado covariacionalmente considerando un nuevo valor como producto de un valor anterior y un factor de crecimiento, forma de pensar que corresponde intrínsecamente a una covariación continua a trozos. Si bien logran, luego de investigar en internet, la fórmula: $f(x) = log_2 x$ y explicar su hallazgo desde una manipulación algebraica de un sistema de ecuaciones (segunda sesión del experimento de enseñanza); no podemos asegurar que hayan evolucionado a un razonamiento covariacional continuo suave. Visualmente observan cómo la curva pasa por todos los puntos que han construido, es decir, logran ajustar los puntos pero no se cuestionan sobre cómo establecer la continuidad de la función cuando pasan de utilizar "n" representante de los enteros que también involucra a algunos números irracionales a "*x*" y "*y*" como números reales. Es decir, de un dominio discreto a $\mathfrak{R}^+$ y de un codominio de números racionales a uno de números reales.

Para Thompson y Carlson (2017), la instrucción matemática escolar generalmente enfatiza la perspectiva de correspondencia a expensas del razonamiento covariacional, lo que puede fomentar una imagen de función restringida, ya que no se anima a los estudiantes a pensar en el cambio entre variables. Incluso, para nosotros, es necesario desarrollar en los estudiantes la habilidad de reconocer funciones desde un razonamiento covariacional cuantitativo que involucra el reconocimiento de patrones de crecimiento que abonen a la determinación de una expresión algebraica y construir nuevos significados de la continuidad de funciones.

6. CONCLUSIONES Y FUTURAS INVESTIGACIONES

En el experimento de enseñanza desarrollado, en los dos futuros profesores estudiados, se evidencia fragilidad en sus estrategias matemáticas ya que, en la primera sesión, si bien logran una expresión general $\left(\sqrt{2^n}; \frac{n}{2}\right)$ para la construcción de puntos no perciben que la base es 2. Tampoco identifican la raíz cuadrada como un exponente de 2. Vinculan ambas progresiones mediante un número natural "n", provocado por la construcción geométrica, que extienden hacia los enteros. Visualizan la continuidad de la curva en la pantalla de GeoGebra, la esbozan en su hoja de trabajo con lápiz pero no logran, en los primeros 100 minutos de trabajo, generar una expresión analítica que demanda aceptar un dominio de números reales positivos que tácitamente están considerando.

Dado el carácter cognitivo de nuestra investigación consideramos que el hecho que nuestra evidencia empírica surja de la cognición de dos de los participantes no representa una debilidad. De hecho, este tipo de exploraciones con unos pocos participantes es común en el campo de investigación acerca del razonamiento covariacional (e.g. Moore, 2014; Paoletti y Moore, 2017). En este sentido, nuestros resultados invitan a continuar afinando el diseño de aprendizaje desde construcciones geométricas, ya perdidas en el ámbito escolar así como en las investigaciones, mismas que hemos evidenciado provocan exploraciones generadoras de razonamiento covariacional en estudiantes, dándoles la posibilidad de probar sus conjeturas numéricas al predecir nuevos puntos de la curva estudiada.

Consideramos importante seguir explorando el pasaje de lo discreto a lo continuo desde construcciones geométricas, argumento que sustenta las primeras ideas de Cálculo en siglos pasados a manos de personalidades como Descartes, Newton, Huyens, Agnesis o Euler. Un ambiente de geometría dinámica nos permite replantearnos el significado de funciones particulares como las funciones trascendentes y su continuidad en el razonamiento de los estudiantes al contar con herramientas como "vista algebraica-gráfica-hoja de cálculo-cálculo simbólico" cuya articulación podría fortalecer el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico exponencial de futuros profesores.

REFERENCIAS

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352–378.

Castillo-Garsow, C. (2010). Teaching the Verhulst model: a teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth. (Tesis de doctorado no publicada). Arizona State University.

Confrey, J., y Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 135–164.

Confrey, J., y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 66–86.

Dennis, E. y Confrey, J. (1997). Drawing Logarithmic Curves with Geometer's Sketchpad: A Method Inspired by Historical Sources. En J. King y D. Schattschneider (Eds.), *Geometry Turned On: Dynamic Software in Learning, Teaching and Research*. Mathematical Association of America.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., y Amidon, J. (2016). An Exponential Growth Learning Trajectory: Students' Emerging Understanding of Exponential Growth Through Covariation. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(3), 151–181. http://doi.org/10.1080/10986065.2016.1183090

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Williams, C., y Amidon, J. (2012). Quantifying exponential growth: The case of the jactus. En R. Mayes y L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context* (pp. 93–112). University of Wyoming.

Ferrari, M. (2008). Un estudio socioepistemológico de la función logarítmica. De facilitar cálculo a una primitiva. (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y Estudios Avanzados-IPN.

Ferrari, M. y Farfán, R. M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), 59-68.

Ferrari-Escolá, M, Martínez-Sierra, G. y Méndez-Guevara, M. (2016). "Multiply by Adding": Development of the Logarithmic-Exponential Covariational Reasoning in High School Students. *Journal of Mathematical Behavior, 42*, 92–108.

Gruver, J. (2017). A trajectory for developing conceptual understanding of logarithmic relationships. *Journal of Mathematical Behavior, 50*, 1–22.

Johnson, H. L. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. *Journal of Mathematical Behavior, 31*(3), pp. 313–330. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.01.001

Johnson, H. L. (2015a). Secondary Students' Quantification of Ratio and Rate: A Framework for Reasoning about Change in Covarying Quantities. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*(1), 37–41. http://doi.org/10.1080/10986065.2015.981946

Johnson, H. L. (2015b). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(1), 89-110. http://doi.org/10.1007/s10649-014-9590-y

Johnson, H. L., McClintock, E. y Hornbein, P. (2017). Ferris wheels and filling bottles: a case of a student's transfer of covariational reasoning across tasks with different backgrounds and features. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 49*(6), 851-864. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0866-4

Kuper, E. G. y Carlson, M. (2018). Sparky the Saguaro: A Teaching Experiment Examining a Student's Development of the Concept of Logarithms. En A. Weinberg, C. Rasmussen, J. Rabin, M. Wawro, y S. Brown (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 441-449, San Diego, California.

Méndez, M. (2013). Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modelación para la matemática escolar. (Tesis de doctorado no publicada). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias 29*(1), 75–88.

Moore, K. C. (2010). The role of quantitative reasoning in precalculus students learning central concepts of trigonometry. (Tesis de doctorado no publicada). Arizona State University.

Moore, K. C. (2012). Coherence, quantitative reasoning, and the trigonometry of students. En R. Mayes, y L. L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning and mathematical modeling: a driver for STEM integrated education and teaching in context* (pp. 75–92). University of Wyoming Press.

Moore, K. C. (2013). Making sense by measuring arcs: a teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(2), 225–245. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9450-6.

Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 102–138.

Moore, K. LaForest, K. y Kim, H. (2016). Putting the unit in pre-service secondary teachers' unit circle. *Educational Studies in Mathematics 92*(2), 221-241. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9671-6

Moore, K. C., Paoletti, T., y Musgrave, S. (2013). Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 461–473. http://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.05.002

Paoletti, T., y Moore, K. C. (2017). The parametric nature of two students' covariational reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *48*(1), 137–151. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.003

Saldanha, L., y Thompson, P. W. (1998). Re-thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In S. B. Berensah y W. N. Coulombe (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education – North America*. North Carolina State University.

Steffe, L. P., y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267- 307). Erlbaum.

Thompson, P. W. (1994a). Students, functions, and the undergraduate curriculum. En E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, y J. J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* 1 (pp. 21–44). American Mathematical Society.

Thompson, P. W. (1994b). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2–3), 229–274. http://doi.org/10.1007/BF01273664

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: some spadework at the foundations of mathematics education. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, y A. Sépulveda (Eds.), *Plenary paper delivered at the 32nd annual meeting of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 31–49).

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. En L. L. Hatfield, S. Chamberlain, y S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education* (Vol. 1, pp. 33–57). University of Wyoming.

Thompson, P. W., y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). National Council of Teachers of Mathematics.

Manuel Trejo Martínez

Docimicilio: Colonia La Frontera Aguacatillo, C.P. 39911,
Acapulco de Juárez, Guerrero, México

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN DOI: 10.24844/EM3301.03

Conocimiento del profesor de secundaria de la práctica matemática en clases de geometría

Knowledge of practices in mathematics of a secondary teacher in geometry classes

Diana Zakaryan,[1] Leticia Sosa[2]

Resumen: Los estudios sobre el significado de la especialización en el conocimiento del profesor de matemáticas están tomando un papel cada vez más importante en el campo de la investigación en educación matemática. Este artículo tiene por objetivo destacar tal especialización del conocimiento del profesor de matemáticas, desde el modelo Mathematics Teachers' Specialized Knowledge (MTSK) y desde las prácticas inherentes a la propia matemática, aportando a la comprensión y caracterización del conocimiento de la práctica matemática a partir de los datos empíricos. A través de observación de aula y entrevista a una profesora de matemáticas de enseñanza secundaria, hemos identificado el conocimiento del profesor del papel de los símbolos y de las convenciones matemáticas; del papel de las demostraciones y de sus principales métodos, del significado y del rol de la condición necesaria y suficiente, y destacamos el conocimiento de estrategias heurísticas de resolución de problemas y del papel de la generalización. Concluimos poniendo de relieve la

Fecha de recepción: 23 de mayo de 2020; **Fecha de aceptación:** 18 de octubre de 2020.

[1] Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, diana.zakaryan@pucv.cl, orcid.org/0000-0002-3400-8399

[2] Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas, México, lsosa@uaz.edu.mx, orcid.org/0000-0002-4905-6684

importancia de estos conocimientos del profesor para favorecer el desarrollo de las capacidades de hacer matemáticas de los alumnos.

Palabras clave: *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas, práctica matemática, geometría, profesor de matemáticas, enseñanza secundaria.*

Abstract: Studies about the implication of specialization in a mathematics teacher's knowledge are taking important role in the field of mathematics education research. From this perspective, the goal of this research is to study the knowledge of the practices in mathematics of the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge model (MTSK), contributing to understanding and characterization of the nature of this teacher knowledge. Through empirical data from classroom observation and an interview with a high-school mathematics teacher we have been identified the teacher's knowledge of the role of symbols and mathematical conventions; knowledge about the importance of proofs and their principal methods, of the meaning and the role of necessary and sufficient conditions; equally, knowledge of heuristic strategies of problem solving and the role of generalization. We conclude by highlighting the importance of this teacher's knowledge to favor the development of students' abilities to do mathematics.

Keywords: *Mathematics teachers' specialized knowledge, practices in mathematics, geometry, mathematics teacher, high-school level.*

INTRODUCCIÓN

El conocimiento profesional de los profesores de matemáticas incluye el "contenido que abordan durante la lección, pero es evidente que los profesores tienen que tener conocimientos adicionales para poder enseñar las matemáticas de manera apropiada a los alumnos" (Bromme, 1994, p. 73). Los estudios sobre el conocimiento del profesor están tomando un papel cada vez más central en la investigación en educación matemática y, la búsqueda de lo que significa la especialización en el conocimiento del profesor de matemáticas, se ha ido convirtiendo en una empresa cada vez más importante en el campo de la investigación (Scheiner, Montes, Godino, Carrillo, y Pino-Fan, 2017). Estudios recientes han abordado este tema al describir e identificar facetas o tipos de conocimiento del profesor que han sido considerados cruciales para la enseñanza de las matemáticas, y han tratado de obtener evidencias empíricas para su respaldo (e.g. Ball, Thames, y Phelps, 2008; Carrillo, Climent, Contreras, y Muñoz-Catalán, 2013; Rowland, Huckstep, y Thwaites, 2005).

Por otra parte, es reconocido que la actitud de los profesores hacia el conocimiento matemático es necesariamente diferente de la de los matemáticos investigadores (Davis y Renert, 2013). Según Ball (2000), las investigaciones matemáticas están orientadas hacia el empaquetamiento de sus descubrimientos en formulaciones estrictas (teorías, teoremas, fórmulas, etc.), mientras la labor del profesor se orienta hacia el desempaquetamiento de los mismos. Todo esto exige conocimientos matemáticos específicos del profesor. Pero, ¿cuál es la naturaleza de estos conocimientos?

En la literatura especializada acerca del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, se da importancia al conocimiento de la comprensión de la naturaleza de la disciplina, el conocimiento *sobre* las matemáticas (Ball, 2003), que se refiere a una gran cantidad de conocimientos sobre las matemáticas, por ejemplo, los principales desacuerdos dentro de la disciplina (tanto en el pasado como en el presente), cómo se justifican y validan las afirmaciones, qué implica hacer y participar en el discurso del área (Ball y McDiarmid, 1990). Este es el conocimiento sintáctico (Schwab, 1978) de las matemáticas que considera el significado de los debates filosóficos dentro de la disciplina y el conocimiento de las formas en que se introduce, valida y acepta el nuevo conocimiento dentro de una comunidad académica (e.g., Grossman, Wilson, y Shulman, 2005). Con base en estas ideas, en el modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), se define el conocimiento de la práctica matemática (KPM) como el conocimiento de cualquier actividad matemática llevada a cabo sistemáticamente que representa un pilar de la creación matemática y que conforma una base lógica de la cual se pueden extraer reglas (Carrillo *et al.*, 2018).

A pesar de la importancia de ese conocimiento, son escasos los estudios que han profundizado en la naturaleza del KPM (e.g. Delgado y Zakaryan, 2018) y, por otra parte, las investigaciones desarrolladas con el MTSK con profesores de distintos niveles educativos reportan escasas evidencias de aspectos del KPM en sus clases de matemática (e.g. Zakaryan y Sosa, 2019).

Concordamos con Godino (2009) en que es útil contar con modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que los docentes ponen en juego en la enseñanza de las matemáticas, contribuyendo así a los aspectos analíticos y teóricos de la investigación en Educación

Matemática. En este sentido, el objetivo de este estudio es describir el conocimiento de la práctica matemática que se manifiesta en el aula a partir de evidencias empíricas, contribuyendo a la comprensión y caracterización de la naturaleza de este conocimiento del profesor.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Conocimiento Especializado del profesor de Matemáticas

Una de las contribuciones más significativas de los estudios sobre el conocimiento de los profesores de matemáticas ha sido la propuesta del modelo MKT (Ball *et al*, 2008). El modelo especifica el conocimiento de los docentes, representa un importante punto de partida para presentar a la comunidad e implicar especialización en el conocimiento de los docentes, específicamente en uno de los tres subdominios del conocimiento matemático, el conocimiento especializado del contenido (SCK). Sin embargo, hay propuestas, como la de Carrillo *et al.* (2018), en la cual se supone que la especialización del conocimiento de los profesores de matemáticas es específica tanto para el conocimiento matemático como para el conocimiento didáctico del contenido de las matemáticas. Entendemos el conocimiento especializado en términos de Scheiner *et al.* (2017), donde la especialización en el conocimiento del profesor de matemáticas significa estilo de conocimiento en lugar de un tipo de conocimiento, es decir, el conocimiento es visto como un todo orgánico y holístico que emerge en una estructura dinámica situada y adaptada al contexto en el cual el profesor realiza su práctica docente.

El modelo Mathematics Teachers' Specialized Knowledge - MTSK (Carrillo *et al.*, 2013) adopta una postura crítica ante la tendencia de comparar el conocimiento del profesor de matemáticas con el conocimiento exigido a otros profesionales, como matemáticos o profesores de asignaturas distintas de las matemáticas (Scheiner *et al.*, 2017) y considera el carácter especializado del conocimiento del profesor de matemáticas que abarca seis subdominios del conocimiento (figura 1). Tres de ellos conforman el Conocimiento Didáctico del Contenido: el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. Otros tres se consideran en el Conocimiento Matemático: el conocimiento de los temas, el conocimiento de la estructura de las matemáticas y el conocimiento de la práctica matemática. El MTSK incluye también el dominio de las creencias/concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje. Su ubicación en el centro del modelo expresa la estrecha relación con los subdominios anteriores.

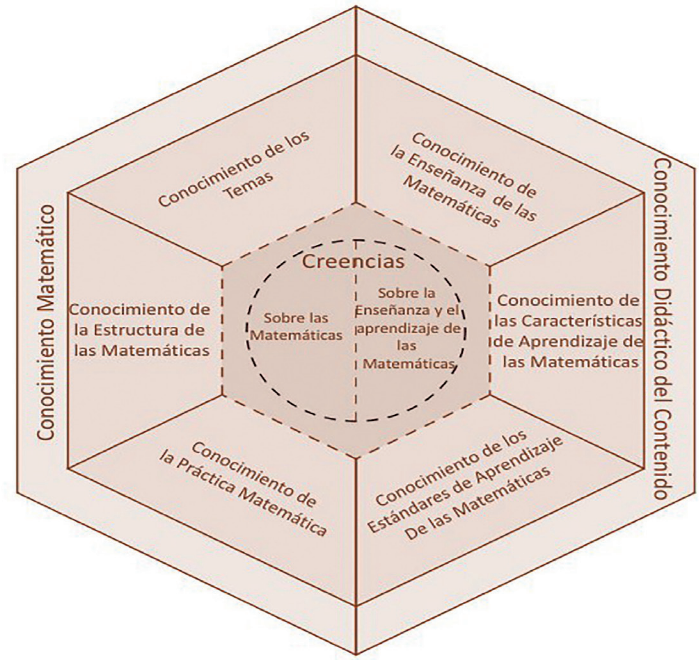


Figura 1. Subdominios del Modelo MTSK (Sosa, Flores-Medrano y Carrillo, 2016, p. 154).

Dado el interés de este estudio en uno de los subdominios del Conocimiento Matemático, describimos brevemente los tres subdominios que lo componen. De acuerdo con Carrillo *et al.* (2018), el Conocimiento de los Temas (KoT) se refiere a qué y de qué manera conoce el profesor de matemáticas los tópicos que enseña, es decir, al conocimiento del profesor de los procedimientos involucrados en un tópico, de los registros de representación, de la fenomenología (incluye usos y aplicaciones) asociada al tópico abordado, de las definiciones (incluye imágenes y ejemplos de objetos matemáticos) y de las propiedades y sus principios, y en sí, al conocimiento profundo del contenido matemático y sus significados. El Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM) está constituido por el conocimiento del profesor en cuanto a las conexiones interconceptuales entre tópicos matemáticos, distinguiendo cuatro tipos de conexiones: de complejización (se relaciona con el contenido matemático posterior, la matemática elemental desde un punto de vista avanzado), de simplificación (la matemática avanzada se contextualiza retrospectivamente en el contenido matemático más elemental sobre el que se basa), auxiliares (participación necesaria de un elemento matemático en procesos más amplios) y transversales (cuando diferentes elementos del contenido matemático tienen características en común). Finalmente, el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) incluye el conocimiento acerca de cómo se crea, se hace y se produce matemáticas (en este último subdominio se profundizará en la siguiente sección).

Como se puede apreciar, el Conocimiento Matemático contiene conocimientos que guardan relación directa con la organización interna de la matemática: temas (que incluye los entes matemáticos), conexiones entre entes matemáticos y formas de hacer o construir matemáticas. En este sentido, dentro del KPM se destaca la importancia de que el profesor no sólo conozca los resultados matemáticos establecidos sino las formas de proceder y pensar en matemáticas para llegar a ellos (e.g. Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2020). El KPM aporta la idiosincrasia de la matemática como rama del saber, como actividad humana.

Conocimiento de la práctica matemática

Los autores del modelo MTSK adoptan una definición operativa de conocimiento, entendida como un conjunto de recursos disponibles para que el profesor los use con el fin de resolver problemas, alcanzar metas y desarrollar tareas; este conocimiento no es necesariamente correcto (Schoenfeld, 2010). Esta última consideración permite al investigador profundizar en la comprensión del conocimiento y del desempeño de los docentes. Además, el término "práctica" juega un papel importante en la investigación en el área de educación matemática. La práctica generalmente se refiere a las acciones o actividades que ocurren en el proceso de enseñanza-aprendizaje (e.g., Carrillo *et al.*, 2018), particularmente, en el ámbito de la capacitación docente y el desarrollo profesional podemos encontrar la *mejor práctica* (Lampert, 2010), *práctica central* (Grossman, Hammerness y McDonald, 2009), *prácticas de alto aprovechamiento* (Ball, Sleep, Boerst y Bass, 2009), en cuanto a aprender a enseñar.

En este artículo, *práctica matemática* significa el funcionamiento de las matemáticas en lugar del proceso de enseñanza:

> [...] como cualquier actividad matemática llevada a cabo sistemáticamente, que representa un pilar de la creación matemática y que se ajusta a una base lógica de la cual se pueden extraer reglas. Entre muchas otras cosas, el conocimiento del profesor de matemáticas sobre esta práctica incluye saber cómo demostrar, justificar, definir, hacer deducciones e inducciones, dar ejemplos y comprender el papel de los contraejemplos. También incluye una comprensión de la lógica que sustenta cada una de estas prácticas; en resumen, se refiere a lo que se puede llamar un conocimiento sintáctico (Schwab, 1978) de las matemáticas. (Carrillo *et al*., 2018, pp. 9-10)

Según estos autores, es necesario que el profesor de matemáticas tenga este conocimiento; así, tal conocimiento proporciona estructuras de pensamiento lógico que ayuda a comprender el funcionamiento de diversos aspectos de la matemática. A su vez, esto ayuda a robustecer el propio conocimiento del profesor y le permite negociar el razonamiento matemático que los estudiantes ponen en juego para aceptar, refutar o refinarlo.

Algunos ejemplos del conocimiento de la práctica matemática son el conocimiento acerca de cómo validar el conocimiento en matemáticas; que la prueba es una herramienta de demostración reconocida en matemáticas (e.g., Balacheff, 2000) la que puede tener diferentes significados en diferentes contextos institucionales y en las diversas formas argumentativas que se ponen en juego en las clases de matemáticas (e.g., Godino y Recio, 2001); el conocimiento del papel y la importancia de la prueba en matemáticas (e.g., Oehrtman y Lawson, 2008); de los roles de los ejemplos y contraejemplos en el proceso de validación (e.g., Götte, Renzulli y Scaglia, 2010; Lakatos, 1976); y la funcionalidad de las convenciones matemáticas y de sus posibles explicaciones en la generación y validación del conocimiento matemático (e.g., Martínez, 2005; Poincaré, 1984). Asimismo, el conocimiento del profesor de las heurísticas y las estrategias de resolución de problemas (e.g., Polya, 1945; Schoenfeld, 1992) o determinar las características de las definiciones de conceptos matemáticos, las estructuras subyacentes de las definiciones y el proceso de creación de una definición (e.g., Van Dormolen y Zaslavsky, 2003; Zaslavsky y Shir, 2005; Zazkis y Leikin, 2008). Por último, saber el papel de la abstracción y la generalización en la creación y el reconocimiento de patrones y modelos, también es parte del subdominio KPM.

De acuerdo con Davis y Renert (2013), consideramos que el conocimiento que necesitan los profesores no es simplemente un conjunto de conceptos básicos claramente definidos y bien conectados, sino una mezcla sofisticada de diversas realizaciones de conceptos matemáticos y conciencia de los complejos procesos a través de los cuales se producen las matemáticas. En este sentido asumimos el conocimiento del profesor como complejo, integral y relacionado y, con fines analíticos tratamos de caracterizarlo, proporcionando evidencias de cómo vive el conocimiento de la práctica matemática de un profesor de matemáticas de nivel secundaria en el aula.

MÉTODO

A partir de un estudio de caso (Stake, 1995) desde el enfoque interpretativo, indagamos acerca del conocimiento de una profesora de matemáticas (en adelante Eva) del décimo grado (alumnos entre 14-15 años) de una escuela secundaria pública. La selección del caso se ha regido por las características académicas de Eva. Eva ha sido la egresada con el mejor promedio de su promoción de la carrera de Pedagogía en Matemática y posee un Magíster en Didáctica de la Matemática. En el momento del estudio, Eva contaba con tres años de experiencia en aula y formaba parte de un grupo de Lesson Study (Isoda y Olfos, 2009) en su escuela, en el que los profesores se reúnen periódicamente para reflexionar sobre los contenidos matemáticos, situaciones matemáticamente críticas y sus prácticas docentes con el fin de mejorarlas en la acción. Este hecho hace alusión al carácter dinámico, evolutivo y complejo del conocimiento de Eva, visto como una disposición participativa para aprender (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016).

RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

Los datos recolectados para este estudio provienen de las grabaciones de las clases de Eva, a través de la técnica *observación no participante* (Cohen y Manion, 2007). Elegimos un tema de geometría dado que esperamos que proporcione situaciones más ricas a las de otros dominios de la matemática escolar en términos de la práctica matemática (por ejemplo, demostración). Las diez sesiones (90 minutos cada una) dedicadas al contenido de semejanza de triángulos (e.g. elementos básicos asociados con el concepto de triángulo, aplicación del teorema de Thales para determinar medidas desconocidas, criterios de similitud y su aplicación) fueron audio y videograbadas y posteriormente transcritas y divididas, según el objetivo matemático de la profesora, en episodios - unidades de análisis que corresponden a las comunicaciones orales y escritas de la profesora y de sus alumnos. Los datos obtenidos se han tratado a partir de *análisis de contenido* (Bardin, 1997), por dos investigadores quienes codificaron las unidades de análisis de acuerdo con las nociones de práctica matemática encontradas en la revisión de la literatura (por ejemplo, validación o papel de los símbolos).

Con el fin de ampliar el enfoque basado en la práctica (e.g., Charalambous y Pitta-Pantazi, 2016), enriqueciendo las oportunidades para acceder al conocimiento del profesor, los datos se complementaron con una entrevista semiestructurada con Eva. Del mismo modo, varias investigaciones sobre el KPM de los profesores de matemáticas llaman la atención sobre su escasa aparición en el aula y sugieren abordarlo buscando evidencia de ello en otros escenarios y/o mediante otros instrumentos de recopilación de datos (e.g., Montes, 2014). Dicha diversidad permite no solo el refinamiento de los primeros pasos de análisis, sino también facilita la triangulación de diferentes fuentes de datos (Stake, 1995), logrando una consistencia interna y externa. La entrevista de 70 minutos de duración se basó en una guía de preguntas relacionadas con los descriptores de KPM que se han encontrado en el análisis de los videos para confirmar y complementarlo. El análisis de la transcripción de la entrevista (a través del análisis de contenido), de este modo, se centró en la búsqueda de evidencias de su manifestación.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se presentan los descriptores del KPM emergentes de los datos empíricos, procedentes de las observaciones y la entrevista. La presentación de los resultados obedece a la organización de las evidencias de acuerdo a la aparición de los descriptores, más que al orden de sesiones de clases, por ello, cuando las evidencias observadas en distintas sesiones se referían al mismo descriptor, estas se agruparon para fortalecer y enriquecer la discusión.

En la primera sesión, donde el objetivo es recordar los conceptos elementales de geometría asociados a triángulos, Eva solicita a los alumnos trabajar en una guía, identificando elementos y características de los triángulos. En el siguiente extracto (una parte del episodio), Eva muestra a los alumnos cómo se puede escribir simbólicamente que dos triángulos son congruentes:

Eva: Congruencia también tiene un símbolo que se ocupa, y eso no lo habíamos mencionado, lo vamos a agregar. Ese es un signo igual ¿cierto? [escribe =] Para la congruencia se utiliza eso, pero se utiliza con este simbolito arriba [escribe ≅]. Con esa curvita. Es un símbolo que se utiliza para decir que dos triángulos, dos figuras, son congruentes. Siempre tratamos de utilizar símbolos matemáticos para ahorrarnos las palabras.

Tal como se puede observar, Eva manifiesta el conocimiento del uso de los símbolos "=" y "≅" para igual y congruente respectivamente [1284-1286], y menciona que son para "ahorrarnos las palabras" [1288]. El hecho de que Eva conozca los símbolos "=" y "≅" indica su conocimiento incluido en el KoT (se trata de parte de unas notaciones asociadas a la congruencia entre figuras), mientras que, al destacar el papel de los símbolos para expresar la información abreviada y precisa, da cuenta de conocimiento que se incluye en KPM.

En la entrevista, a la pregunta: ¿Cuál es el papel de los símbolos en matemáticas?, responde de la siguiente manera, confirmando su idea anteriormente expuesta:

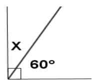
Eva: Bueno, los símbolos matemáticos se usan para reducir el lenguaje y para que puedan relacionar también conceptos matemáticos, diferenciarlos de lenguaje natural, en este caso... Identificar los conceptos matemáticos, para no confundirlos y diferenciarlos. Por ejemplo, en el caso de semejanza, usar el símbolo de los triángulos, no es para otro elemento, usar el símbolo de semejanza no significa otra cosa ...
Para reducir el lenguaje, identificar conceptos, entender el lenguaje matemático.

Eva indica que los símbolos matemáticos se usan para reducir el lenguaje y, teniendo en cuenta el episodio anterior, se aprecia su conocimiento de las funciones principales de los símbolos en matemáticas, mencionadas por Davis y Hersh (1989), a saber, designar con precisión y claridad, y abreviar, señalando que sin el proceso de abreviación el discurso matemático difícilmente sería posible. Por otra parte, se observa su conocimiento en cuanto a que el lenguaje matemático está formado por símbolos y se les asigna un significado preciso y peculiar (e.g. Alcalá, 2002), así como el conocimiento de que los símbolos permiten la interpretación y comprensión de las ideas matemáticas de forma tal que cada símbolo sea claro y sin ambigüedades (Davis y Hersh, 1989). De este modo, podemos identificar el siguiente descriptor del conocimiento de Eva:

KPM1: *Conocimiento del papel de los símbolos para reducir y expresar abreviadamente la información, identificar conceptos y entender el lenguaje matemático.*

En el siguiente extracto de la primera sesión, Eva cuestiona a los alumnos respecto a cómo pueden saber si el ángulo presentado en la figura es un ángulo recto:

194 Eva: ¿Por qué es un ángulo recto? ¿Por qué podríamos saberlo en esa figura?



195 Por el cuadradito dice Al. Por el símbolo que ahí aparece, usted puede asumir que
196 eso es un ángulo recto. Si ese símbolo no está, usted no lo podría asumir. Porque
197 podría ser que valiera 91°, y la imagen visual es casi la misma.

Con la pregunta que plantea y la respuesta que da, se evidencia su conocimiento de que uno puede asumir ciertas características de objetos matemáticos si están explícitamente enunciadas a través de símbolos matemáticos convencionales. En este caso, muestra conocimiento de que "el cuadradito" asegura que, en el dibujo, el ángulo sea recto y que no se puede fiar solamente de la imagen visual, dando cuenta de su conocimiento de papel de los símbolos en contextos de validación. Asimismo, en la segunda sesión, mientras identifican los ángulos formados entre dos rectas paralelas y la tercera que las intersecta, Eva manifiesta el conocimiento de la misma índole, anteriormente mencionada, cuando llama la atención de los alumnos de que solo pueden asumir que dos rectas son paralelas cuando en las condiciones se dice explícitamente o se da el símbolo // "dos slash".

Eva: Si tuviéramos dos rectas que en la figura no se juntan. Es más, si estas líneas a la vista parecieran paralelas, si yo no lo indico, no lo puede asumir, aunque lo parezcan. Si yo le doy esa información, porque ese es el símbolo de paralelas, dos slashs. Si yo digo que esas dos son paralelas, son paralelas. Si no lo digo, no lo puede asumir.

Análogamente, se observa el conocimiento de Eva del papel de los símbolos para asegurar que un enunciado es verdadero en el fragmento de la entrevista que sigue:

> Eva: Justamente se busca que ellos validen su conocimiento. Como no tienen instrumentos de medición, una representación que no tenga ese símbolo no representa un ángulo recto necesariamente. Igual que les digo con las rectas paralelas. Ustedes pueden observar que estas líneas son paralelas, pero no podemos comprobar, por tanto, si no me lo dice el enunciado, yo no puedo asumir que son paralelas.

En este fragmento, corrobora el conocimiento evidenciado en la clase, pues menciona que, si ciertas características no están explícitamente enunciadas a partir de símbolos matemáticos convencionales, no se podría asumirlas ("una representación que no tenga ese símbolo no representa un ángulo recto necesariamente"). Es decir, en matemática una constatación sobre un dibujo no es suficiente para probar que un enunciado es verdadero (e.g. Götte, Renzulli, y Scaglia, 2010).

Por otra parte, a la pregunta acerca del "papel de la convención matemática", da la siguiente respuesta:

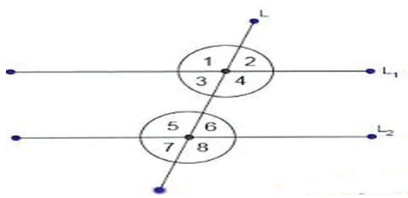
> Eva: A pesar de que la convención a veces es un poco molesta, uno no sabe bien cómo fundamentarla, son como cimientos para algunos conocimientos. Para los alumnos no es tan fácil, porque uno les lleva por el camino de que todo es demostrable, que son capaces de encontrar razonamiento para decir que algo es cierto. Mientras la convención viene como para decir: "Tú, esto acéptalo". Y uno puede decir que los matemáticos tuvieron que decidir así, porque convenía, de ahí viene la palabra.

En este fragmento de la entrevista, Eva muestra su conocimiento del papel de las convenciones en matemáticas, que concuerda con Poincaré (1984) cuando sostiene que estas son principios científicos que no son ni evidencias, ni generalizaciones experimentales, ni hipótesis planteadas a manera de conjetura con la intención de ser verificados. La elección entre todas las convenciones posibles es regida por la experimentación, pero es libre, y solo atiende la necesidad de evitar cualquier contradicción. Se aprecia su conocimiento de que una convención matemática es una conveniencia para las matemáticas, que, en este caso, ha tomado forma de una definición (e.g. Martínez, 2005), cuando menciona que "son fundamentales para construir un conocimiento posterior", dando lugar al siguiente descriptor:

KPM2: *Conocimiento del papel de las convenciones en matemáticas y particularmente, el papel de símbolos convencionales en contextos de validación.*

En la segunda sesión, donde el objetivo es identificar los ángulos formados entre dos rectas paralelas y la tercera que las intersecta, Eva explica:

377 Eva: ...Sólo se cumple cuando hay rectas paralelas, y cuando no coinciden. Ahí dice,
378 no coincidentes. Si no hay rectas paralelas, usted no puede decir que esa relación
379 se cumple.



Por ejemplo, si tuviéramos dos rectas, que en la figura no se juntan, ¿cierto? De
380 hecho, a simple vista, uno nota que se podrían cruzar. Si yo dibujo eso así [dibuja
381 rectas no paralelas], ¿la relación de arriba se cumple? ¿Sí o no? ¿Cuándo se cumple
382 esta relación?
383 Al: Cuando son paralelas.
384 Eva: Cuando las líneas son paralelas.

En este extracto, Eva muestra el conocimiento de que para poder afirmar algún supuesto en matemáticas o deducir otras propiedades de un objeto matemático, deben cumplirse las condiciones necesarias y/o suficientes, en este caso, apelando a la condición necesaria ("solo se cumple cuando hay rectas paralelas") para que se dieran las equivalencias entre los ángulos formados. Este es el conocimiento del significado de la proposición "si A entonces B" (e.g. Solow, 1993), donde A es la hipótesis de que las rectas son paralelas y B es la conclusión de que los ángulos formados son equivalentes.

En la entrevista, se le preguntó a Eva: ¿Qué significa condición necesaria y condición suficiente?:

> Eva: Una condición necesaria es algo que debe pasar sí o sí para que un teorema se cumpla. Y una condición suficiente es algo que basta que se cumpla para que uno pueda decir que el teorema se cumple. Por ejemplo, un problema puede tener distintas características, pero tal vez no son todas necesarias para afirmar que algo sucede ahí. Entonces, ¿qué se cumple ahí?, basta que se cumpla este, pero una condición necesaria es algo que tiene que pasar sí o sí.

Asimismo, se puede apreciar su conocimiento del significado de la condición suficiente ("basta que cumpla") y que "A implica B, no necesariamente significa que B implica A".

Por otra parte, en la séptima sesión, donde el objetivo es aplicar el teorema de Thales para determinar medidas de segmentos y ángulos, Eva hace una observación, llamando la atención de los alumnos e insistiendo en que se dieran cuenta de cómo funciona una condición suficiente y necesaria.

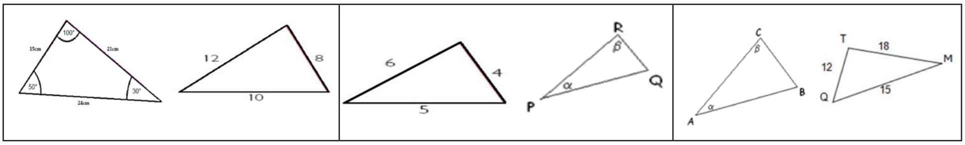
2122 Eva: Si hay rectas paralelas, los ángulos correspondientes son de igual medida.
2123 ¿Y funciona al revés? ¿Qué significa que esa expresión funcione al revés? Si
2125 tenemos paralelas, hay ángulos de igual medida. Si hay rectas paralelas, los ángulos
2126 correspondientes son iguales ¿cierto? Pero ahora, si por ejemplo, yo hiciera esa
2129 recta, no sé si esa recta es paralela, pero lo que sí sé que esos ángulos son iguales,
2130 ¿podré concluir que esa recta es paralela? [Sí]. A eso nos referimos.
2133 Puedo ocuparlo partiendo de las paralelas o puedo ocuparlo partiendo de los ángulos
2134 ¿Sí? Entonces aquí vamos a poner "viceversa".

En este caso, se observa el conocimiento de Eva del rol de la condición suficiente y necesaria en un teorema: se parte de una condición (suficiente) para concluir con una sentencia y cuando se da esa sentencia ocurre la misma condición (necesaria). En otras palabras, se aprecia su conocimiento de que la proposición "A es equivalente a B" o que "A si y solo si B" significa demostrar que A implica

B y B implica A (e.g. Solow, 1993). De este modo, se identifica el siguiente descriptor del conocimiento de Eva:

KPM3: *Conocimiento del significado y rol de las condiciones necesaria y suficiente en un teorema*.

En la tercera sesión, Eva ha tenido por objetivo que los alumnos clasifiquen triángulos dados (algunos vienen dados por medidas de sus lados, otros de sus ángulos, otros de ambas medidas o sin ninguna de las dos), según las características comunes que identifiquen.



Los alumnos llegan a la conclusión de que todos los triángulos dados son escalenos, a pesar de que haya dos triángulos que no se indican las medidas de sus lados ni de sus ángulos. En el siguiente extracto, Eva trata de que los alumnos se den cuenta de ese hecho:

Eva: ¿Todos son escalenos? Hay un punto ahí. Si yo tengo el dato de cuánto miden los lados, probablemente podré saber si son o no escalenos, pero si no tienen la medida, ¿puedo afirmar que son escalenos? [No]. Podrían ser isósceles, y si no tenemos las medidas no lo podemos asegurar.

Por otra parte, en la entrevista, a la pregunta: ¿Cómo se valida en matemáticas y cuándo un razonamiento es aceptado como válido?, responde lo siguiente:

Eva: Con demostraciones, claramente. Demostrando, con la misma teoría matemática, puedo decir que algo es válido para el contexto que estoy trabajando... Entonces validarlo, es efectivamente recurrir a esa teoría matemática construida y hay cosas para avanzar, pero hay cosas construidas y verificando que tenga lógica, que tenga coherencia con lo que estamos planteando, que sea válido con lo que se define... Entonces, ese razonamiento se va validando a medida que voy encontrando elementos matemáticos que lo sustenten. Podría yo equivocarme, podría tener una hipótesis, pero necesito validarla con la teoría matemática.

En este extracto se puede observar el conocimiento de Eva de que una forma de validar en matemáticas es a través de prueba ("demostrando, con la teoría matemática misma, puedo decir que algo es válido"), es decir, la prueba es una herramienta para validar en matemáticas (e.g., Balacheff, 2000). Además, muestra conocimiento de que, en matemáticas, el razonamiento se acepta como válido en la medida en que esté respaldado por elementos matemáticos aceptados ("ese razonamiento se va validando a medida que voy encontrando elementos matemáticos que lo sustenten"). También, muestra el conocimiento de que, para debatir, en matemáticas, se apoya en propiedades y definiciones claramente establecidas y aceptadas (e.g, Götte *et al.*, 2010), dando lugar al siguiente descriptor:

KPM4: *Conocimiento de que la afirmación de algún supuesto, en matemáticas, debe sustentarse en propiedades enunciadas y aceptadas*.

En la séptima sesión, cuando los alumnos establecen algunas razones entre los segmentos formados, Eva muestra cómo se comprueba la proporcionalidad entre dos razones $\frac{4,5}{x}=\frac{4}{3}$, recuerda el método de producto cruzado 4,5x3=4x y justifica detalladamente el procedimiento de "pasar" el 3 y x al "otro lado" a partir de la multiplicación por inversos de ambas partes de la expresión. En el extracto que sigue, Eva destaca que no es necesario cada vez hacer estos procedimientos porque hay un teorema que los fundamenta.

2037 Eva: ¿Para qué? Para que se entienda que yo puedo pasar, directamente, de este puedo pasar a
2038 ese [se refiere de una expresión a otra]. No necesitan hacer eso entremedio, porque hay un
2039 teorema de proporciones que lo fundamenta ¿sí? Y ese teorema se fundamenta con lo que
2040 nosotros hicimos. Utilizar los inversos.

En este episodio, Eva evidencia el conocimiento de que una vez demostrado un teorema, se garantiza su generalización a otros casos con condiciones similares, resaltando de esa manera la aplicación de la generalización a casos similares [2038-2040].

En la entrevista corroboramos este conocimiento, preguntándole: ¿Para qué sirve generalizar en matemáticas y cuándo se puede generalizar?. Respondió:

Eva: Bueno, la generalización sirve para establecer un concepto, para definirlo, ¿verdad? Y poder validar un conocimiento en cierto contexto. Entonces llevar un caso particular a un caso general permite no tener que demostrar caso a caso y entender que esto lo que estoy demostrando tiene cierta lógica que se cumple para todos los elementos que cumplan ciertas condiciones. Entonces, generalizar permite ahorrar ese trabajo de exploración y decir que cada vez que me enfrento a esto va a pasar esto.

En este fragmento, se observa el conocimiento de Eva de que la generalización sirve para generar definiciones matemáticas ("para establecer un concepto, para definirlo") y permite pasar de un caso particular a otro más general ("llevar un caso particular a un caso general permite no tener que demostrar caso a caso…"). De este modo, se evidencia su conocimiento de que una vez demostrado un teorema sus conclusiones se generalizan para otros casos bajo las condiciones similares, como una regla general (e.g. Castro, Cañadas, y Molina, 2010), es decir, que los teoremas son generalizaciones para algún conjunto de objetos matemáticos que cumplen ciertas características. De este modo, se identifica el siguiente descriptor:

KPM5: *Conocimiento del papel de la generalización en matemáticas*.

La novena sesión se sigue con la aplicación del teorema de Thales. Eva propone a los alumnos resolver un problema y les deja unos minutos para el trabajo individual.

Eva: [Dicta] Problema: En un mapa la distancia entre dos ciudades es de 20cm. Se sabe que la distancia real entre ellas es de 200kms.1.¿Cuántas veces más grande es la distancia real, respecto a la del mapa? 2. ¿Cuál es la razón entre ambas distancias? 3: ¿Cuál será la distancia real entre otras dos ciudades que se encuentran a 13cm en el mismo mapa?

Posteriormente, escribe en la pizarra las respuestas que obtuvieron algunos alumnos para discutirlas. En el extracto siguiente, Eva, escribe una de las respuestas erróneas de los alumnos, en la cual dividen dos cantidades con diferentes unidades de medida (centímetros entre kilómetros). Su objetivo es que los alumnos se den cuenta de por qué la respuesta es incorrecta.

Eva: Entonces, habían respondido la primera pregunta... y su respuesta había sido 10, ¿cierto? ¿Es correcta esa respuesta? [Sí]. ¿Qué operación había hecho la compañera para obtener ese 10? [Dividir 200 en 20]. Pero, ¿efectivamente es 10 veces más grande la distancia? O sea, que si tengo 1 cm en el mapa, según eso, ¿cuánto debería medir en la realidad? [10]. ¿10 qué? Centímetros, es 10 veces más grande. Si algo mide 20cm, según eso, si el 20cm lo hacemos 10 veces más grande ¿cuánto conseguimos? ¿Conseguimos 200km? [No]. ¿Cuánto conseguimos? Si esto fuera cierto, 1cm va a equivaler a 10 en la realidad, ¿o no? Porque es 10 veces más grande. Y ¿cuánto es 20 por 10? [200]. ¿200 qué? En este caso, centímetros. ¿Obtengo kilómetros al hacer esto? [No]. Es un error de comparación, porque si usted se devuelve, no va a obtener jamás 200km.

En este extracto, se puede observar cómo, mediante una prueba, suponiendo que la respuesta fuese correcta [3046-3048], Eva, muestra a los alumnos el absurdo de tal respuesta [3048-3049] y la imposibilidad de obtener la condición dada (200km). Aunque no se trata de una demostración formal, se aprecia el razonamiento de un método de demostración (prueba por contradicción): para demostrar la invalidez de una proposición, se supone como punto de partida que la proposición es cierta; si la derivación final es una contradicción, se concluye que la proposición original es falsa y el argumento es inválido (e.g. Solow, 1993). De este modo, se observa el conocimiento de Eva del papel de la prueba en matemáticas (e.g. Oehrtman y Lawson, 2008).

Por otra parte, en la entrevista, Eva responde a la pregunta: ¿Qué métodos de demostración conoce?, de la siguiente manera:

> Eva: Por contradicción, directa, ya no me acuerdo los nombres. Está por la negación: negando la afirmación y comprobando que no puede ser. La directa... no, no recuerdo más.

Si bien, su respuesta es escueta y, como ella misma reconoce, no recuerda los nombres de métodos de demostración, muestra conocer el método directo, por contradicción y por contraposición ("negación"). De acuerdo con el extracto de la clase y de la entrevista, se identifica el siguiente descriptor:

KPM6: *Conocimiento del método de prueba por contradicción para validar/demostrar en matemáticas*.

En la novena sesión, donde el objetivo es resolver problemas aplicando el teorema de Thales, Eva plantea un problema [2575-2578] y da algunas indicaciones para proceder en su resolución:

Eva: Problema: Durante el día, se observa que un poste de luz proyecta una sombra de 6 metros sobre el suelo, y que la sombra de una persona parada cerca del poste es de 3 metros (las sombras proyectadas en la misma dirección). Si la persona mide 1,7 metros, ¿cuánto medirá el poste? Primer paso, va a intentar hacer un dibujo de la situación, eso es lo primero. Va a volver a leer el problema y va a imaginárselo y hacer un dibujo de eso. Supongamos que tenemos acá el poste, asumimos que está perpendicular al suelo. Y se dice que hay una persona que está cerca del poste. El piso está acá, la persona podría estar acá [hace el dibujo]. ¿Qué datos daba el problema? ¿Cómo podemos relacionarlos?

En este extracto, se observa su conocimiento de heurísticas para resolver problemas. Eva, sugiere que, en un primer paso, los alumnos traten de imaginar y dibujar la situación [2578-2580]; es decir, se manifiesta su conocimiento de estrategias de resolución, particularmente que el esquema o dibujo son soportes relevantes para entender el problema (e.g. Polya, 1945). Asimismo, plantea preguntas que ayudan a entender el problema y orientar la solución: ¿qué datos daba el problema?, ¿cómo podemos relacionarlos?

Cuando, en la entrevista, se le pregunta a Eva: ¿Qué hace cuando está frente a un problema desafiante?, responde:

Eva: Bueno, tomar camino de representaciones, tratar de dibujar algo. Podría tomar datos del problema y hacer cálculos. Podría directamente identificar elementos matemáticos que están dando vuelta ahí, representarlos de una manera algebraica. Podría tratar de abstraerme del contexto del problema y ver el contexto matemático y resolverlo y volverme al contexto del problema, para ver si tiene sentido o no. Puedo recurrir al ensayo y error, tantear y luego tratar de formalizar eso que estoy probando. Y si no entiendo todo el contexto, voy a tomar lo que comprendo y voy a tratar de hacer algo con eso. Podría ir de lo simple a lo complejo o de lo abstracto a lo concreto también, o al revés.

Como se puede observar en el fragmento de la entrevista, Eva, muestra su conocimiento de estratégicas heurísticas de resolución de problemas, que en términos de Polya (1945), constituirían las fases del proceso de resolución de problemas. Por ejemplo, se aprecia la fase entender el problema ("tomar camino de representaciones, tratar de dibujar, imaginarse lo que sucede en el problema…"), la fase hacer un plan ("extraer la información y ver a qué se relaciona, recurrir al ensayo y error, ir de lo simple a lo complejo o de lo abstracto a lo concreto"), la fase mirar hacia atrás ("volverme al contexto del problema para ver si tiene sentido o no"). De ahí, se identifica el siguiente descriptor:

KPM7: *Conocimiento de algunas estrategias heurísticas de resolución de problemas matemáticos.*

De este modo, los resultados de la investigación dan cuenta del conocimiento de Eva de distintas prácticas matemáticas. Así, el KPM1 y KPM2 surgen cuando la profesora destaca el papel de los símbolos y convenciones matemáticas y sugieren una comunicación en y/o sobre las matemáticas, la cual, de acuerdo con Davis y Hersh (1989), requiere de un lenguaje común (lenguaje matemático, en este caso) que permite la interpretación y comprensión de las ideas matemáticas que se comparten. Por tanto, para que la actividad matemática sea posible, es necesario conocer el significado de estos símbolos para saber cómo interpretarlos y usarlos adecuadamente. En este sentido, Zakaryan y Sosa (2019) concluyen que el uso del lenguaje matemático es una de las prácticas que es relevante desde la educación de la primera infancia, donde la parte importante es utilizar el lenguaje matemático de una manera, aunque no fuese completa, pero necesariamente correcta. Por otro lado, en los niveles más avanzados, se observa la necesidad de comprender el significado de los símbolos matemáticos, así como su uso correcto.

Por otra parte, los descriptores KPM3, KPM4 y KPM6 se refieren a distintas formas de validar el saber en matemáticas. Estos descriptores sugieren distinguir entre una condición necesaria y una condición suficiente y conocer sus significados, saber cuál es la verdad en matemáticas y saber que lo que constituye una "demostración" puede tener diferentes significados en los diferentes contextos institucionales y diversas formas argumentativas que se ponen en juego en las aulas de matemáticas (e.g., Godino y Recio, 2001). Por tanto, aunque es necesario justificar o dar demostraciones en la educación preescolar, primaria y secundaria, es importante enfatizar que, en la comunidad escolar, es difícil trabajar desde los cánones de aceptabilidad compartidos por la comunidad de matemáticos. Por lo tanto, es necesario "aliviar" las demandas si se espera tener algún éxito en la producción de justificaciones para las conjeturas enunciadas (Mariotti, 2006). En este caso, hemos visto que Eva ha encontrado algunas formas de "aliviar" estas demandas (por ejemplo, pruebas no formales) sin perder de vista su significado matemático.

Finalmente, los descriptores KPM5 y KPM7 caracterizan el quehacer matemático, revelando aspectos que se usan para trabajar genéricamente en matemáticas, a partir de las generalizaciones y usando diferentes estrategias heurísticas en la resolución de problemas. La comunidad de educación matemática reconoce la importancia del conocimiento del profesor y el uso de estrategias heurísticas (e.g., Polya, 1945; Schonfield, 1992). Por otro lado, varios autores (e.g., Mason, Graham y Johnston-Wilder, 2005) destacan la importancia del conocimiento del profesor sobre la generalización como una actividad empírica inductiva para difundir la conciencia de la actividad de generalizar y promoverla como la esencia de la matemática, para que ocurra el pensamiento matemático en los estudiantes.

Cabe señalar que, en este documento, solo se presentaron los descriptores del KPM que se evidenciaron en las clases de Eva y se corroboraron en la entrevista, ya que el interés del estudio está en caracterizar el KPM de Eva que se manifiesta en acción. Este hecho significa que se han obtenido, además, descriptores de KPM que solo se identificaron en la entrevista, por ejemplo, algunos en relación al conocimiento de Eva del papel de los ejemplos y contraejemplos en el proceso de validación matemática, al conocimiento de las características de una definición matemática y al conocimiento del papel de la abstracción en las matemáticas, que son otros aspectos del KPM.

CONCLUSIONES

Este estudio ha pretendido caracterizar cómo este tipo de conocimiento matemático se manifiesta en el aula y de este modo contribuir al campo de la investigación en educación matemática, aportando a su comprensión. La especialización, en el enfoque adoptado en el MTSK, atañe al modelo en su conjunto y la profundización en la caracterización del KPM aporta especificidad en relación con la matemática.

Los descriptores emergentes del estudio representan un aporte teórico, permitiendo acentuar conocimientos acerca de las características inherentes a la práctica matemática, necesarios para consolidar su propio conocimiento, para saber negociar los razonamientos matemáticos dados por sus alumnos. Asimismo, estos descriptores ponen de relieve la importancia del conocimiento del profesor para favorecer el desarrollo de las capacidades de *hacer matemáticas* de los alumnos (Abrantes, 2001), reconocidas a nivel internacional a partir de diferentes aspectos que dan cuenta de ello (e.g. promover el razonamiento matemático, la resolución de problemas, la importancia de justificar, conjeturar, probar, generalizar, etc.), dichos aspectos son requeridos de una u otra forma a los estudiantes de acuerdo a evaluaciones y estándares internacionales (e.g. OECD, 2014; NCTM, 2000).

El conocimiento del profesor acerca de la elección de los símbolos (convencionales o no convencionales) y su uso coherente en diferentes contextos, así como el conocimiento del papel del lenguaje matemático, le permite comunicar las ideas matemáticas de manera abreviada y con precisión respecto al significado estricto de los términos.

Destacamos la importancia del conocimiento del profesor de las distintas formas de validar en matemáticas: que el profesor conozca el papel que juegan las demostraciones, los métodos de demostración, distinguir una condición necesaria y una suficiente. Además, saber cómo funciona la demostración en distintos niveles educativos, cómo se valida en ellos el conocimiento matemático, qué negociaciones deben establecerse con los alumnos al respecto, qué criterios de demostración son aceptados en distintos niveles y cómo van evolucionando de un nivel a otro.

Por último, el conocimiento de diferentes heurísticas de resolución de problemas y del papel de la generalización permiten al profesor hacer más tangible y consciente las forma en que se desarrolla la solución del problema y extender un determinado método a otras situaciones (e.g. Polya, 1945).

Los datos obtenidos empíricamente permiten apreciar que una importante cantidad de descriptores del KPM de Eva no se ha manifestado en el aula, sino solo en la entrevista, confirmando la complejidad de evidenciar el KPM solo a partir de las observaciones de aula (e.g. Montes, 2014) y dando origen a varias preguntas acerca de la naturaleza de ese conocimiento y de cómo se refleja en la práctica docente. Por ejemplo, si bien a través de la entrevista la profesora mostró conocer otros aspectos característicos del KPM no apreciados en el aula, cabe preguntarse por qué no se dieron las situaciones en las cuales ese conocimiento pudiese ponerse en juego.

A pesar de que existe un reconocimiento del papel del profesor para fomentar la cultura de las matemáticas en el aula (e.g. Stylianides, 2007; Yackel y Cobb, 1996), de la comprensión del profesor de matemáticas para que ocurra un verdadero pensamiento matemático en el aula (Ma, 1999) y de la importancia de que un profesor de matemáticas conozca distintos tipos de razonamientos y sepa en qué contextos matemáticos unos son más adecuados que otros (e.g. Ball y McDiarmid, 1990; Ball y Bass, 2009; Rowland *et al*, 2009), poco se menciona sobre cómo formar a los profesores para que estos aspectos tengan vida en el aula. Es preciso que los estudios en educación matemática avancen en los planteamientos acerca de dónde y cuándo los profesores de matemáticas adquieren el conocimiento de la práctica matemática o cómo los propios profesores experimentan el *hacer matemáticas*.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación se ha realizado bajo el financiamiento del proyecto FONDECYT N 11140092 de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile; proyecto VRIEA-PUCV 039.439/2020. Las autoras del artículo son miembros de la "Red Iberoamericana MTSK", reconocida por la Asociación Universitaria Iberoamericana de Postgrado (AUIP).

REFERENCIAS

Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics, 47*, 125-143.

Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Graó.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una Empresa Docente. Universidad de los Andes.

Ball, D. L., y McDiarmid, G. W. (1990). The subject-matter preparation of teachers. In W. R. Houston and M. H. J. Sikula (Eds.), *Handbook of research on teacher education* (pp. 437-449). Macmillan.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, *51*(3), 241-247.

Ball, D. L. (2003). What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics? *Secretary's Summit on Mathematics*.

Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Ball, D., y Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. In *The 2009 Curtis Center Mathematics and Teaching Conference*. University of California.

Ball, D., Sleep, L., Boerst, T. A. y Bass, H. (2009). Combining the development of practice and the practice of Development in Teacher Education. *The Elementary School Journal, 109*(5), 458-474.

Bardin, L. (1997). *Content analysis*. Livraria Martins Fontes.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer y B. Winkelmann (Eds.), *Mathematics didactics as a scientific discipline: The state of the art* (pp. 73–88). Kluwer.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M., Escudero-Ávila, D., y Flores-Medrano, E. (2014). (Eds.), *Un Marco Teórico para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* [A Theoretical Framework for the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge]. Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., … y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model, *Research in Mathematics Education, 20*(3), 1-18. http://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Castro, E., Cañadas, M. C., y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *Uno*, *54*, 55-67.

Cohen, L. y Manion, L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. La Muralla.

Charalambous, C., y Pitta-Pantazi, D. (2016). Perspectives on priority mathematics education: Unpacking and understanding a complex relationship linking teacher knowledge, teaching, and learning. In L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 19-59). Routledge.

Davis, Ph., y Hersh, R. (1989). *Experiencia Matemática*. [The Mathematical Experience]. Editorial Labor.

Davis, B., y Renert, M. (2013). Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teacher' disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(2), 245-265.

Delgado-Rebolledo, R., y Zakaryan, D. (2018). Knowledge of the practice in mathematics in university teachers. En V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild, y N.M. Hogstad (Eds.), *Proceedings of the Second Conference of the International Network* *for Didactic Research in University Mathematics* (pp. 393–402). University of Agder and INDRUM.

Delgado-Rebolledo, R., y Zakaryan, D. (2020). Relationships between the Knowledge of Practices in Mathematics and the Pedagogical Content Knowledge of a Mathematics Lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(3), 567-587. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Godino, J. D., y Recio, A. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 19*(3), 405-414.

Götte, M., Renzulli, F., y Scaglia, S. (2010). El contraejemplo en la producción de conjeturas de propiedades geométricas. *Revista de Educación Matemática.* https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10256

Grossman, P., Wilson, S., y Shulman, L. (2005). Profesores de sustancia: el conocimiento de la materia para la enseñanza. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, *9*(2), 1-24.

Grossman, P., Hammerness, K., y McDonald, M. (2009). Redefining teaching, re-imagining teacher education. *Teachers and Teaching, Theory and Practice*, *15*(2), 273-289.

Isoda, M., y Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases*. Ediciones Universitarias de Valparaíso, Pontifica Universidad Católica de Valparaíso.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press.

Lampert, M. (2010). Learning teaching in, from, and for practice: What do we mean? *Journal of Teacher Education*, *61*(1-2), 21-34.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in china and the United States*. Erlbaum.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En A. Gutierréz y P. Bolero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 173-204). Sense Publishers.

Martínez, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(2), 195-218.

Mason, J., Graham, A., y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. The Open University y Paul Chapman Publishing.

Montes, M. (2014). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso.* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Huelva, España.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics* (Vol. 1). National Council of Teachers of Mathematics.

Oehrtman, M., y Lawson, A. E. (2008). Connecting science and mathematics: The nature of proof and disproof in science and mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *6*(2), 377-403.

Organization for Economic Co-operation and Development [OECD]. (2014). *PISA 2012 results in focus: what 15-year-olds know and what they can do with that they know*. Author.

Poincaré, H. (1984). *Filosofía de la ciencia*. Serie Nuestros Clásicos No. 32. Universidad Nacional Autónoma de México.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. University Press.

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 255-281.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., y Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching. Reflecting on practice with the knowledge quartet*. SAGE Publications Ltd.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289-321.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., y Pino-Fan, L. (2017). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics Education*. http://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on mathematics Teaching and Learning* (pp. 103-107). Macmillan.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think*. Routledge.

Schwab, J. (1978). Education and the structure of the disciplines. In I. Westbury y N. J. Wilkof (Eds.), *Science, curriculum, and liberal education* (pp. 229-272). University of Chicago Press.

Solow, D. (1993). *Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas*. Editorial Limusa.

Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación Matemática*, *28*(2), 151-174.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Sage.

Van Dormolen, J., y Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(1), 91-106. http://doi.org/10.1016/S0732-3123(03)00006-3

Yackel, E., y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.

Zakaryan, D., y Sosa, L. (2019). ¿Cómo los profesores hacen prácticas matemáticas en sus aulas? En R. Olfos, E. Ramos, y D. Zakaryan (Eds.), *Formación docente: Aportes a la práctica docente desde la Didáctica de la Matemática* (pp. 281-300). Graó.

Zaslavsky, O., y Shir, K. (2005). Students' Conceptions of a Mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(4), 317-346.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 131-148. http://doi.org/10.1007/s10649-008-9131-7

Diana Zakaryan

Dirección: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Blanco Viel 596, 2380000
Valparaíso, Chile

Teléfono: 56 9 32 2274009

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN DOI: 10.24844/EM3301.04

Una lección sobre el teorema de Thales, vista desde el conocimiento especializado del profesor

A lesson on Thales' theorem viewed from the specialized teacher's knowledge

Nuria Climent,[1] Gonzalo Espinoza-Vásquez,[2] José Carrillo,[3] Carolina Henríquez-Rivas,[4] Rodrigo Ponce[5]

Resumen: Este artículo, partiendo de la observación de una lección de un profesor chileno de Educación Secundaria en la que se introduce el teorema de Thales, aborda la interpretación de dicha lección desde el conocimiento del profesor, utilizando el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK). Se consideran aspectos del conocimiento especializado en relación, por un lado, con el teorema de Thales como objeto de aprendizaje y enseñanza, y, por otro, con la práctica matemática de demostrar. Teniendo como referente las propuestas del currículo chileno para la enseñanza de dicho contenido, extraemos una imagen de elementos relacionados del conocimiento del profesor que nos permiten explicar qué se enfatiza en la lección. Los

Fecha de recepción: 14 de abril de 2020; **Fecha de aceptación:** 10 de septiembre de 2020.

1 Didáctica de la Matemática, Universidad de Huelva (España), climent@uhu.es, orcid.org/0000-0002-0064-1452.

2 Instituto de matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile), gonzalo.espinoza.v@gmail.com, orcid.org/0000-0003-4500-4542.

3 Didáctica de la Matemática, Universidad de Huelva (España), carrillo@uhu.es, orcid.org/0000-0001-7906-416X.

4 Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Talca (Chile), cahenriquez@utalca.cl, orcid.org/0000-0002-4869-828X

5 Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca (Chile), rponce@utalca.cl, orcid.org/0000-0002-1337-8083

resultados muestran que la finalidad de aplicación que el profesor atribuye al aprendizaje del teorema, junto con su visión de este como una consecuencia de la semejanza y el énfasis en su tratamiento numérico, se muestran relacionados con el conocimiento de registros, las conexiones que establece con otros contenidos, el uso de recursos, el tipo de tareas que propone y el conocimiento de la práctica matemática que evidencia.

Palabras clave: *Teorema de Thales. Semejanza. Conocimiento del profesor. Práctica del profesor de matemáticas. Educación Secundaria.*

Abstrac: This paper presents the analysis of an observed lesson on Thales's Theorem in a Chilean secondary school, using the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. We consider various aspects of the teacher's specialised knowledge with respect to Thales's Theorem itself, as an element of teaching and learning, and to demonstrations, as a mathematical practice, in general. From this analysis, and guided by the Chilean syllabus requirement for this topic, we construct a snapshot of the interrelated elements of knowledge deployed by the teacher, which enables us to account for how he brings particular aspects into focus. The findings show that the utility which he attaches to the theorem, that of being able to apply it, alongside his view of it as a result of similarity and his emphasis on a numerical approach, is closely linked to his knowledge of registers, the interconnections he makes with other content items, his use of resources, the kind of tasks he sets up, and the knowledge of mathematical practices he makes evident.

Keywords: *Thales's Theorem. Similarity. Teacher knowledge. Mathematics teaching practices. Secondary education.*

INTRODUCCIÓN

Del teorema de Thales se destaca su relación con numerosos contenidos matemáticos: la proporcionalidad numérica y las fracciones, la homotecia, la semejanza, la trigonometría, las ecuaciones de la recta y el cálculo infinitesimal... Para algunos autores su comprensión supone un hito para pasar de la idea de fracción aritmética a la de número racional (Filloy y Lema, 1996). Muchos destacan su potencial para relacionar lo numérico y lo geométrico (Michonneau y Pfaff, 1990), al suponer el paso del *registro figural* al *registro algebraico* (igualdad entre razones de segmentos) y de este al *registro numérico* (cuando reemplazamos los segmentos por sus medidas de longitud) (Lemonidis, 1992). Su papel de nexo entre contenidos y sus aplicaciones puede justificar que, pese a ser objeto de debate en reformas curriculares a nivel internacional, su estudio se haya mantenido en el currículo de Secundaria de distintos países (Escudero, 2005; Duperret, 1995).

Sobre el teorema de Thales se ha estudiado principalmente su aprendizaje (e.g. Lemonidis, 1991, 1992), poniéndose de relieve que los alumnos lo comprenden a un nivel de manipulación numérica, sin percibir sus propiedades geométricas (Michonneau y Pfaff, 1990). El aprendizaje del teorema suele reducirse a la aplicación del cálculo algebraico que emana de igualdades basadas en proporcionalidades (Laguerre, 2005).

El teorema de Thales puede verse como una aplicación de la semejanza de figuras o un precursor de esta. Así, en las Bases Curriculares para la asignatura de Matemáticas en Chile (MINEDUC[6], 2016a) el estudio del teorema de Thales se ubica en primer año de educación media (14-15 años), precedido por el concepto de homotecia, cuyo abordaje se realiza mediante proporciones y vectorialmente. Al teorema de Thales le sigue el estudio de la semejanza de figuras planas con aplicaciones a la vida diaria u otras asignaturas. Sin embargo, en las anteriores Bases Curriculares (MINEDUC, 2009), la semejanza se planteaba como un tema previo al teorema de Thales, ambos en segundo año medio (15-16 años), sin incluir la homotecia como tema de estudio. El Programa de Estudio vigente de primero medio (MINEDUC, 2016b) especifica que los estudiantes deben ser capaces de reconocer razones proporcionales y la necesidad de paralelismo en las rectas que intersecan, explicar el teorema de Thales mediante la homotecia y resolver problemas de aplicación del teorema. Por otro lado, en el tratamiento de la semejanza no se menciona de forma explícita el teorema, pese a que se presentan situaciones con las configuraciones de este. Se espera que los estudiantes puedan relacionar la geometría con los números y el álgebra armoniosamente mediante diferentes actividades. En el eje de geometría en el que también se inserta, se introduce gradualmente el concepto de *demostración* desde el planteamiento de conjeturas y las comprobaciones de propiedades.

La riqueza epistemológica del teorema y las dificultades de su aprendizaje requieren de la reflexión del profesor. Así, en Gualdrón (2011) se constatan

[6] Ministerio de Educación chileno

carencias en la comprensión de la semejanza y del teorema de Thales de un profesor de Secundaria, en relación con conexiones con otros contenidos y en configuraciones de Thales no típicas.

El tratamiento del teorema de Thales supone, a su vez, una oportunidad de abordar la demostración en el aula de Secundaria. La multiplicidad de relaciones con otros contenidos posibilita distintas aproximaciones para ello. Además, el planteamiento de la demostración permite que los estudiantes puedan comprender los conceptos que moviliza y desenvolver capacidades para desarrollar demostraciones (Alfaro-Carvajal, Flores-Martínez y Valverde-Soto, 2019).

Este estudio pretende aportar en la comprensión de cómo conciben los profesores este contenido, considerado como objeto de enseñanza y aprendizaje. En concreto, su objetivo es describir el conocimiento que sustenta la práctica de aula de un profesor cuando enseña el teorema de Thales, identificando relaciones entre elementos de dicho conocimiento.

MARCO TEÓRICO

La práctica de aula ha sido analizada desde múltiples perspectivas con foco en el profesor (e.g. estudiando su capacidad de percibir y dar sentido a lo que ocurre, Mason, 2002, o fijándose en procesos de cambio, Liljedahl, 2010). Entre estas perspectivas se sitúa el interés por el conocimiento del profesor de matemáticas. Una muestra del creciente interés en el estudio del conocimiento del profesor es que, de los cuatro focos en los que Ponte y Chapman (2006) organizan su revisión de la investigación presentada en el PME sobre el profesor, dos de ellos se refieren a su conocimiento. Además, en la siguiente revisión de la producción del PME, el capítulo dedicado a la investigación sobre profesores (Lin y Rowland, 2016) se centra en su conocimiento y desarrollo profesional.

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas

El conocimiento del profesor puede ser entendido como un recurso que, junto con sus orientaciones y objetivos, permite explicar lo que hace y por qué (Schoenfeld, 2010).

La investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas se ha centrado en refinar la conceptualización de las componentes diferenciadas por

Shulman (1986) más específicas de la materia: *Subject Matter Knowledge* y *Pedagogical Content Kno*wedge.

Entre los modelos que pretenden explicar el conocimiento del profesor de matemáticas, encontramos el *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* (MTSK). Este modelo, además de diferenciar subdominios en el conocimiento del profesor relacionado directamente con la matemática como objeto de enseñanza y aprendizaje, aporta un sistema de categorías para cada subdominio (Carrillo *et al.*, 2018). La posibilidad de refinar el análisis de la actuación de un profesor en el aula a partir de estas categorías y la consideración de la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas como algo global, más que propio de un subdominio, y desde una perspectiva intrínseca al profesor de matemáticas (Scheiner *et al.*, 2019), nos lleva a mirar el conocimiento del profesor desde el MTSK.

En el MTSK se diferencian tres dominios: el conocimiento matemático, el conocimiento didáctico del contenido y, las concepciones sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje. Daremos aquí una breve descripción de los mismos (Carrillo *et al.*, 2018, y Zakaryan *et al.*, 2018). El conocimiento matemático considera tres subdominios: El *conocimiento de los temas* (KoT) contempla el conocimiento del contenido matemático que se está enseñando en relación con las definiciones, las propiedades y su fundamentación, los procedimientos, los registros de representación y las situaciones que dan sentido al contenido. El conocimiento del profesor en relación con conexiones entre contenidos matemáticos de distintos temas da sentido al subdominio *conocimiento de la estructura de la matemática* (KSM), diferenciándose entre conexiones de simplificación, de complejización, transversales (grandes ideas que relacionan contenidos diversos, como la idea de igualdad, que está presente en la expresiones numéricas y algebraicas y se relaciona con la congruencia de figuras geométricas y la semejanza) y auxiliares (contenidos de un tema que sirven como herramienta para resolver situaciones propias de otro tema, por ejemplo, las ecuaciones en el estudio de una función). Del tercer subdominio, *conocimiento de la práctica matemática* (KPM), nos ocuparemos después.

En el conocimiento didáctico del contenido se consideran también tres subdominios. El *conocimiento de la enseñanza de la matemática* (KMT) recoge el conocimiento del profesor de teorías sobre la enseñanza de contenidos matemáticos, de recursos, y de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. El *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* (KFLM) alude al conocimiento de teorías, fortalezas y dificultades, formas de interacción de los estudiantes con el contenido, y expectativas e intereses de los estudiantes hacia este, todo ello en relación con el aprendizaje de contenidos matemáticos. Finalmente, el *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS) se refiere al conocimiento sobre expectativas de aprendizaje, nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado, y secuenciación de temas.

Por último, respecto del tercer subdominio del MTSK, las concepciones del profesor en relación con la matemática pueden ser entendidas en términos de las visiones de la matemática platonista, instrumental, y de resolución de problemas (Ernest, 1991; Carrillo y Contreras, 1994). Asimismo, las concepciones sobre su enseñanza y aprendizaje recogen las ideas sobre cómo se enseña y aprende matemáticas, cuál es el sentido de la materia, el rol del alumno y del profesor y, su evaluación (Carrillo y Contreras, 1994).

Dado que la lección que analizamos en este artículo aborda la demostración del teorema de Thales, en lo que sigue desarrollaremos las bases teóricas para poder analizar el conocimiento del profesor sobre demostrar y sobre dicho teorema.

Conocimiento en relación con la práctica matemática de demostrar

El conocimiento de la práctica matemática (KPM) ha sido uno de los subdominios más complejos en su categorización, debido a las dificultades de catalogar las prácticas matemáticas. Los avances en esta tarea se han producido mediante investigaciones que coinciden en que *demostrar* es una de estas prácticas y que el conocimiento sobre la demostración debe ser considerado como parte del conocimiento especializado del profesor (Alfaro-Carvajal *et al.*, 2019; Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2019).

El término práctica matemática es utilizado en referencia a las actividades matemáticas realizadas para la creación y comunicación de conocimiento matemático. En este sentido, la demostración es considerada una práctica habitual y socialmente aceptada entre la comunidad matemática (Alfaro-Carvajal *et al.*, 2019), generadora de conocimiento y que le son atribuidos otros papeles o funciones, como las de probar y explicar.

La demostración tiene los roles de: *verificación* respecto a la verdad de una proposición, *explicación* del porqué es o no verdadera, *sistematización* como estructuración de resultados desde la axiomática, *descubrimiento* de nuevos conocimientos y *comunicación* de estos conocimientos (De Villiers, 1993). Flores-Medrano (2016) señala que la demostración tiene también un rol de convencimiento personal o a otros en su carácter comunicativo, como una mezcla entre la verificación y la explicación, lo que permite relacionarla con el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas cuando aparece en las aulas de matemáticas e integrar sus diferentes funciones en el conocimiento especializado del profesor (Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2019).

La enseñanza de la demostración moviliza otros conocimientos matemáticos, por lo que su inclusión en la clase de matemáticas requiere del profesor conocimiento de diferentes subdominios del MTSK. Al enseñar la demostración, el profesor también pone en juego sus conocimientos sobre representaciones, sobre la enseñanza, sobre los ejemplos, contraejemplos y sobre la conexión de conceptos matemáticos (Lesseig, 2016; Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez, 2019). Como señalan Sosa, Flores-Medrano y Carrillo (2016), esta elección del profesor sobre los ejemplos deja ver otros de sus conocimientos que se relacionan con la enseñanza de la matemática (KMT). Se ha observado que el KPM condiciona al KMT con respecto a la estrategia de enseñanza de una demostración y que, en las explicaciones del profesor, se evidencia su conocimiento sobre las dificultades que presentan sus estudiantes (KFLM) al comprender cierto tipo de demostraciones, sustentado por el KPM (Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2019).

Por tanto, resulta interesante estudiar el conocimiento sobre la demostración como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

El teorema de Thales como objeto de enseñanza y aprendizaje

En la literatura de investigación podemos encontrar distintos trabajos sobre el teorema de Thales y la semejanza en relación con su análisis epistemológico, con aproximaciones a su enseñanza y con su aprendizaje por parte de alumnos generalmente de secundaria. Destacaremos los elementos tomados de algunas de estas investigaciones que nos servirán para analizar el conocimiento especializado del profesor respecto del teorema de Thales.

Lemonidis (1992) cita aproximaciones a la enseñanza del teorema a lo largo de la historia: una clásica, siguiendo la tradición de la geometría euclídea, donde se presentan razones de segmentos colineales para pasar al teorema, y luego a la semejanza de triángulos y la homotecia; desde la geometría afín; y desde la geometría vectorial. Análogamente, se presentan perspectivas de la semejanza (Lemonidis, 1991): como relación intrafigural (se destaca la relación entre los elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, sin estar presente la idea de transformación), como transformación geométrica vista como herramienta o como objeto matemático. Por su parte, Brousseau (1995) presenta tres aproximaciones usuales al teorema de Thales, apoyándose en una encuesta. Las dos primeras aproximaciones se basan en la idea de que "rectas paralelas determinan sobre dos rectas secantes segmentos correspondientes proporcionales" (p. 12), mientras que la tercera se apoya en la homotecia. Brousseau (1995) es crítico con las aproximaciones que se reducen al trabajo con configuraciones prototípicas.

Como hemos mencionado, el teorema de Thales puede introducir el estudio de la semejanza de triángulos, considerándose como objeto generador de nuevos conceptos (semejanza de triángulos, criterios de semejanza, figuras homotéticas, etc.), o bien ser una consecuencia de la semejanza, donde su función principal es su aplicación en situaciones de ampliación y reducción y medidas indirectas (Escudero, 2005).

En relación con las representaciones figurales ligadas al teorema, Lemonidis (1992) diferencia representaciones homotéticas de tipo "pico" o triángulos anidados, y de tipo "mariposa". La configuración más conocida por los alumnos, concluye este estudio, es la de tipo "pico", restringiendo su comprensión de la igualdad de la razón en triángulos homotéticos. No conocen ni diferencian tipos de razones en representaciones homotéticas (de escala entre los dos triángulos homotéticos; entre los elementos de los dos triángulos; de proyección; o entre segmentos homólogos sobre los lados oblicuos) y automatizan la transformación del registro figural al algebraico. Este estudio y el de Duperret (1995) muestran la necesidad de trabajar en el teorema de Thales simultáneamente con registros figural, simbólico y numérico; enriquecer el registro figural, incluyendo configuraciones de triángulos no homotéticos; y comprender las distintas interpretaciones del teorema.

Respecto a la enseñanza, Escudero y Sánchez (2007) clasifican las tareas escolares relativas a la semejanza: de cálculo de un valor desconocido, de cálculo-comparación (determinar si se da una proporción entre cuatro números dados), de cálculo mixto (dados dos valores conocidos y dos desconocidos, calcular la razón entre los desconocidos para que todos constituyan una proporción), de construcción o de demostración.

En relación con el conocimiento del profesor, Zakaryan *et al.* (2018) muestran relaciones entre el conocimiento de una profesora de Secundaria sobre el aprendizaje de la semejanza de triángulos y su conocimiento sobre su enseñanza.

Gualdrón (2011), como se mencionó, muestra las posibles dificultades en la comprensión de estos contenidos por parte del profesor de Secundaria. Por su parte, Escudero y Sánchez (2007) describen el conocimiento de dos profesores de secundaria. Para uno de ellos el teorema de Thales precede a la semejanza, sirviendo para visualizar la proporcionalidad numérica (y relacionar lo numérico y lo geométrico), incluye aspectos de homotecia y de semejanza, y presenta variedad de configuraciones geométricas, conociendo las dificultades de los alumnos. Por contra, el otro profesor enfatiza un tratamiento algorítmico e introduce el teorema con una tarea de verificación numérica para que los alumnos confíen en el resultado. Usa configuraciones de rectas secantes cortadas por paralelas señalando solo el aspecto de proyección y sin considerar dificultades de aprendizaje.

Si bien, como hemos mencionado, existen estudios previos sobre el conocimiento de profesores sobre el teorema de Thales, en este trabajo esperamos aportar mayor detalle en la descripción de dicho conocimiento, valiéndonos de las categorías de los subdominios del MTSK, y a partir de este mostrar una visión integrada de dicho conocimiento, en la que se evidencien relaciones entre distintos elementos.

METODOLOGÍA

Puesto que intentamos comprender el conocimiento especializado que evidencia un profesor cuando aborda el teorema de Thales en el aula, esta investigación es de corte cualitativo y se realiza desde el paradigma interpretativo (Bassey, 1999). Se trata de un diseño de estudio de caso (Stake, 2007), donde el caso es un profesor de matemáticas de secundaria de un liceo público chileno, participante en un taller formativo.

La investigación se enmarca en el desarrollo de un proyecto sobre Formación Continua Docente en una universidad pública chilena, que contempla una etapa de trabajo colaborativo entre tres investigadores y los profesores de matemática que atienden diferentes niveles educativos en un liceo público, quienes participaron voluntariamente en el proyecto. Esta etapa se organizó en talleres cuyo objetivo era proporcionar herramientas de análisis colaborativo al profesor de matemáticas, relativas a su práctica en el aula, a través de la discusión sobre la ejemplificación en geometría. Se generó un espacio de reflexión y acompañamiento a la práctica docente, atendiendo el rediseño de actividades de instrucción y aprendizaje que los profesores usualmente aplican en sus cursos.

El taller se desarrolló en seis sesiones de julio a diciembre de 2018. Durante las cinco primeras sesiones, además de presentarse el taller y sus objetivos, se les pide seleccionar por grupos una actividad introductoria para algún tema de geometría que hayan planificado realizar en el nivel que atienden, presentarla a los otros grupos, y reformularla considerando alguno de los elementos teóricos que se les aportó para la reflexión en la segunda sesión del taller (entre ellos, Espacios de Trabajo Matemático, Kuzniak y Richard, 2014, y Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, Carrillo *et al.*, 2018, que fueron mostrados de manera general). El rol del taller, y de los investigadores en estas sesiones, era generar un espacio colaborativo de reflexiones en torno a las prácticas habituales de los profesores y a sus posibles mejoras considerando alguno de estos elementos teóricos. Entre las sesiones 4 y 5 del taller, un profesor de cada grupo implementó en el liceo la sesión reformulada. Esta sesión fue video grabada y se analizó en las dos últimas sesiones (conviene aclarar que hay un encuentro posterior, que es la entrevista al profesor).

La lección que presentamos corresponde a la implementada por un grupo, una vez reformulada, que abordó el teorema de Thales y su demostración en el primer año de educación media (14-15 años). Para este grupo, la actividad original consistía solamente en presentar la demostración del teorema de Thales a los estudiantes, mientras que la reformulación propuso incorporar softwares dinámicos y una mayor participación de los estudiantes al establecer las relaciones planteadas en el teorema. Por su parte, el profesor que implementó la sesión es contador auditor de profesión, habiendo realizado cursos de regularización en un centro de educación superior para dar clases en el Sistema Educacional Chileno. Esta situación no es habitual entre el profesorado de matemáticas chileno, pues, en general, los profesores de matemáticas han egresado de las carreras de pedagogía (en matemáticas) impartidas por las universidades nacionales. El profesor se mostró dispuesto a participar en esta investigación y comprometido con el taller. Asimismo, estuvo abierto a compartir sus prácticas habituales y a incluir nuevos elementos en su práctica de aula. Lo anterior motivó la selección de la sesión y del profesor para este reporte.

La principal fuente de datos fue la videograbación de la clase reformulada por el profesor. Esta clase fue observada de modo no participante y grabada por uno de los investigadores. La grabación fue transcrita y llevada a una planilla electrónica para su tratamiento donde cada intervención de los estudiantes o del profesor se enumeró correlativamente. La sesión fue dividida en episodios (descritos más adelante) que ayudan a describir el contenido de la misma. Los episodios están determinados por los objetivos propuestos explícitamente por el profesor o que se pueden inferir de su quehacer, con un principio y un fin identificables. Se realizó un análisis de contenido (Bardin, 1996), definiendo como unidades de análisis las intervenciones, orales o escritas, del profesor. En los resultados se exponen los extractos incluyendo el número que identifica la intervención dentro de la transcripción.

Los subdominios y categorías del modelo MTSK (Carrillo *et al.*, 2018) sirvieron de herramienta para el análisis y la identificación de conocimiento especializado en los datos recolectados. Para ello, usamos la distinción entre indicio y evidencia de conocimiento (Flores-Medrano, 2015) para referirnos a la sospecha de un conocimiento especializado del profesor –que debe ser confirmado por otros indicios o evidencias– o a la presencia de información que asegure que el profesor posee cierto conocimiento relativo a algún subdominio del MTSK, respectivamente. Tres investigadores expertos y dos familiarizados con el modelo analizaron de manera individual la transcripción de la sesión para luego contrastar y llegar a acuerdos respecto de la identificación del conocimiento especializado del profesor estudiado, buscando así la triangulación por investigadores como lo señala Flick (2007). En este reporte se incluyen los resultados de ese consenso.

DESCRIPCIÓN DE LA LECCIÓN

La sesión observada aborda el teorema de Thales y puede dividirse en 3 episodios. En el primero, el objetivo es comprobar empíricamente el teorema, antes de demostrarlo en el episodio 2 y, el 3 se dedica a la resolución de ejercicios de aplicación del teorema.

Durante la sesión se proyecta sobre el pizarrón lo que el profesor trae preparado. Los alumnos están sentados y es el profesor quien escribe en la pizarra. En general, las intervenciones parten del profesor, que explica y plantea cuestiones, y los alumnos resuelven individualmente, respondiendo desde sus puestos. Las correcciones se hacen en alto, con el profesor preguntando y escribiendo en la pizarra lo que los alumnos indican, haciéndose una única resolución de cada ejercicio.

Pasamos a describir brevemente los episodios, extendiéndonos en los dos primeros por ser los más ricos respecto a la intervención del profesor y evidencias de su conocimiento.

Episodio 1. Comienza la clase y se ve proyectada una imagen de GeoGebra (figura 1).

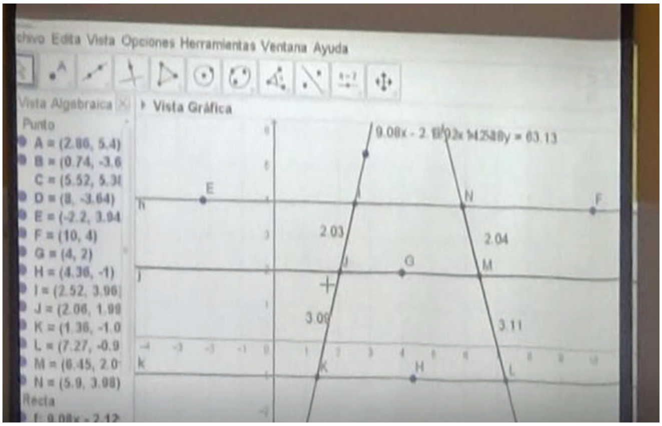


Figura 1. Vista de la proyección de GeoGebra al principio de la sesión.

El profesor enuncia el objetivo de la clase: “Comprender y resolver ejercicios del teorema de Thales”, anunciando que primero lo van a hacer de forma empírica y después con una demostración. Relaciona el teorema de Thales con la semejanza y, evocando lo que hacían en situaciones de semejanza de triángulos, les pide que comprueben que $\frac{\overline{IJ}}{\overline{JK}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{ML}}$ (señalando los segmentos sobre la proyección sin aludir a su expresión algebraica). Una vez ratificada la igualdad de los valores de la división de las medidas de los segmentos, cuestiona qué ocurrirá si se desplaza una de las paralelas (mueve la paralela intermedia obteniendo otra paralela, lo que lleva a distintos resultados en las razones anteriores, y que atribuye a un error de GeoGebra). Les pide que calculen $\frac{\overline{IJ}}{\overline{IK}} y \frac{\overline{NM}}{\overline{NL}}$, resaltando que esto se parece más a la semejanza de triángulos. Los estudiantes comprueban que da lo mismo. Concluye que, si tienen una situación como la anterior, donde las tres rectas antes señaladas son paralelas, se tiene que $\frac{a}{a+b}$ es igual $\frac{c}{c+d}$ (escribiendo esta expresión, donde ha nombrado como *a*, *b*, *c* y *d* a las medidas de los segmentos $\overline{IJ}$, $\overline{JK}$, $\overline{NM}$ y $\overline{ML}$, respectivamente). Reflexiona que antes no daba lo mismo porque GeoGebra da la medida con dos decimales y “si las diera con más decimales, obtendrían una igualdad perfecta”. Pregunta entonces qué ocurrirá si las tres rectas señaladas no son paralelas (trata de mover la recta intermedia, sin conseguir una no paralela; dibuja entonces sobre la proyección, eliminando la recta intermedia y cambiándola por una en otra dirección dibujada a mano alzada). Los estudiantes comprueban que no se cumple $\frac{\overline{IJ}}{\overline{JK}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{ML}}$, concluyendo que las tres rectas han de ser paralelas.

Episodio 2. Pasa entonces a la demostración, aunque dice que de forma empírica ha quedado prácticamente demostrado.

Parte de dos triángulos como los de la figura 2 (dibujados en la pizarra):

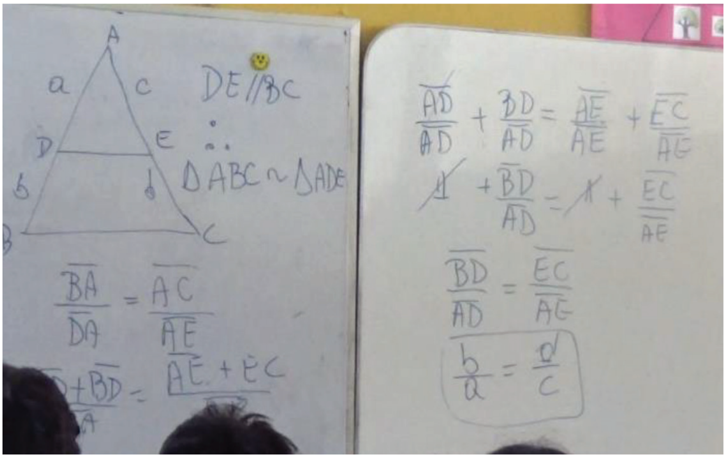


Figura 2. Configuración y demostración del teorema de Thales.

Comienza considerando que los triángulos ABC y ADE son semejantes, y establece relaciones proporcionales en los triángulos, es decir, BA/DA=AC/AE, luego $\frac{\overline{AD}+\overline{BD}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{AE}+\overline{EC}}{\overline{AE}}$, concluyendo que $\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{AE}}$ (para ello, evoca la suma de fracciones). Sustituyendo los segmentos anteriores por *a, b, c* y *d*, concluye que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Señala que lo que acaban de demostrar es un caso especial del teorema de Thales. El teorema se refiere a una situación como la de la figura 1, prosigue, y es fácil ver que prolongando las líneas que pasan por los puntos I y K, y N y L, respectivamente, se obtiene la figura 2. Enfatiza que $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$, con lo que considera formalizado el teorema, subrayando que han ido “de lo empírico a lo matemático”.

En el *Episodio 3* el profesor propone seis ejercicios de aplicación del teorema. Enfatiza las posibles dificultades de los alumnos en la resolución de las ecuaciones implicadas. El profesor propone cada problema, los alumnos lo resuelven individualmente y el profesor lo corrige en el pizarrón.

En el epígrafe siguiente presentaremos los resultados integrando evidencias e indicios de los episodios, siendo el hilo conductor los elementos de conocimiento del profesor y no los episodios en sí mismos.

RESULTADOS

Desde el enunciado del objetivo ("comprender y resolver ejercicios del teorema de Thales") se observa la finalidad que el profesor parece otorgar a la enseñanza del teorema en la sesión: aplicarlo en situaciones de cálculo de un dato desconocido. Se aprecia así un énfasis procedimental que observaremos en toda la sesión. Y se puede observar su conocimiento sobre lo que espera que sus estudiantes aprendan del tema, adaptando los objetivos que se incluyen en las Bases Curriculares. La incorporación de las habilidades *comprender* y *resolver* en el objetivo atiende a los indicadores de evaluación que propone el currículo chileno sobre el desarrollo del teorema de Thales y la resolución de problemas geométricos, respectivamente. La comprensión conceptual queda relegada al entendimiento de las hipótesis del teorema de Thales como condición necesaria para aplicarlo, sin embargo, los ejercicios propuestos abordan, principalmente, lo procedimental. El planteamiento de tal objetivo permite observar que el profesor conoce que el teorema de Thales es un tema que debe enseñarse en el nivel que atiende y expone su idea sobre qué se espera que aprendan los alumnos al respecto. Todo lo anterior muestra conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS –nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado).

El profesor relaciona el teorema con la semejanza de figuras planas, en concreto de triángulos semejantes (KoT, definiciones, propiedades y sus fundamentos): "La verdad, el teorema de Thales se desprende básicamente de la semejanza de triángulos o de figuras planas", episodio 1, l5).[7] El teorema es para él una consecuencia de la semejanza, y su función, más que generador de otros contenidos, es la de aplicación al cálculo de medidas desconocidas. Esta

[7] l5 sitúa la intervención del profesor en la transcripción de la sesión (en este caso, línea 5 de la transcripción). En otros casos donde la intervención es más larga, se indican las líneas de inicio y fin de la intervención.

fundamentación del teorema le sirve para su demostración (como aplicación de la semejanza de triángulos). Cabe señalar que esta secuencia difiere del currículo chileno actual, donde el teorema de Thales aparece asociado a las homotecias y a la proporcionalidad de segmentos, ubicándose la semejanza inmediatamente después del teorema de Thales, y muestra su conocimiento de una secuenciación de los temas (semejanza antes que el teorema de Thales) (KMLS – secuenciación con temas anteriores y posteriores). De este modo, el KMLS del profesor difiere de la propuesta del currículo oficial y parece relacionarse con su conocimiento matemático, en el que el teorema de Thales se explica desde la semejanza (KoT), sin que se observen manifestaciones de relaciones con la homotecia.

Además, la relación que establece entre semejanza y teorema de Thales en el aula es una relación procedimental (evocar la semejanza sirve para que los alumnos repitan el procedimiento de comparar razones):

> Profesor (P): ...quiero que hagamos un cálculo, ¿se acuerdan cómo lo hacían en semejanzas? [...] comparábamos dos razones, ¿cierto?; y aquí vamos a hacer lo mismo, pero cuando el trazo [...] de este segmento, partido por este segmento, y lo vamos a igualar. Ya chiquillos, calculadora, celular, vamos dividiendo esto por esto. **[episodio 1, l9-11]**

La intervención anterior se refiere al principio de la comprobación empírica del teorema, en el episodio 1, y les pide en primer lugar que dividan $\frac{\overline{IJ}}{\overline{JK}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{ML}}$ en la figura 1. La semejanza de triángulos es usada como analogía procedimental (sirve para evocar el cálculo de razones entre segmentos), más que para justificar la aplicabilidad del procedimiento o para fundamentarlo conceptualmente:

> P: ¿Se acuerdan del teorema de ángulo a ángulo? Decíamos que L1 era paralelo a L2 [escribe en la pizarra L1 // L2 y alude a la igualdad del ángulo A en ADE y ABC, y de los ángulos D y B –Figura 3]. Y decíamos, por ejemplo, si acá yo tenía 3, 4, 6 y x, ¿cómo hacíamos? [un alumno empieza a hacer referencias a los lados] con números, con números... [Los alumnos le van indicando y él escribe $\frac{3}{7} = \frac{6}{x}$]. ¿De dónde saqué el 7? Resulta que estoy comparando dos triángulos, en este triángulo estoy tomando este (señalando sobre el dibujo el segmento $\overline{AD}$) y su lado homólogo, ¿cuál era? Todo (señalando el segmento $\overline{AB}$). Entonces aquí vamos a hacer algo parecido [volviendo a la figura 1], vamos a comparar esto con esto. **[episodio 1, l11-29].**

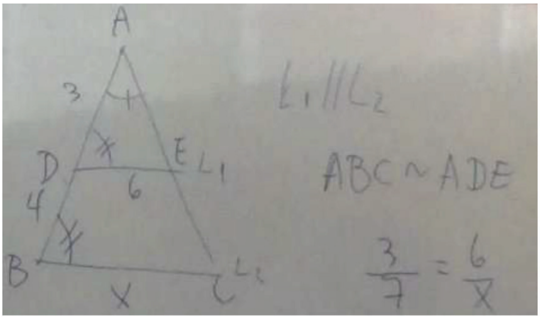


Figura 3. Representación complementaria en el episodio 1.

El profesor muestra, por otro lado, conocer una caracterización de la semejanza de figuras y de triángulos (algunos postulados como el teorema ángulo-ángulo, KoT —definiciones, propiedades y sus fundamentos en relación con la semejanza). Se refiere a la semejanza como una situación de comparación, mostrando indicios de haber descomprimido el concepto (en el sentido de Ball, 2003, lo que asociamos a los fundamentos del concepto -KoT) ("Resulta que estoy comparando dos triángulos, este triángulo es éste, y su lado homólogo ¿cuál era?"- episodio 1, I23). Observamos indicios de que el profesor está considerando la noción de proporcionalidad como idea transversal (conectando transversalmente la semejanza y la proporcionalidad numérica y vinculando el trabajo geométrico con el aritmético) y de que la fracción es considerada una herramienta en el trabajo en situaciones de proporcionalidad (estableciendo una conexión auxiliar entre fracción y semejanza), cuando hace explícito que una razón hace referencia a una situación de comparación, que se expresa mediante una fracción ("... acá vamos a hacer algo parecido, vamos a comparar esto con esto, haga la fracción" —episodio 1, I25). Ambos elementos corresponden a conocimiento de la estructura de la matemática (KSM).

En este primer episodio, el profesor va dando las indicaciones sobre las razones que deben calcular y comparar, y él mismo enuncia la condición de paralelismo que deben cumplir las tres rectas correspondientes. Se refuerza así que el fin del episodio es la comprobación numérica del teorema, más que los alumnos conjeturen sobre posibles propiedades, lo que parece coherente con el énfasis procedimental señalado.

La comparación de segmentos es vista como una comparación numérica llevándola a la representación como cociente entre sus medidas, donde prima el registro numérico (de hecho, la igualdad que escribe en la pizarra el profesor en relación con la figura 1 es directamente $\frac{2,03}{3,09}=\frac{2,04}{3,11}$, lo que les lleva a 0,655=0,655; en ningún momento escribe la expresión algebraica correspondiente a la razón entre segmentos). El profesor no repara en el cambio de registro. Además, hace uso exclusivamente de la vista gráfica de GeoGebra, en la que se presentan los registros figural y numérico, sin hacer referencia a la vista algebraica, lo que parece coherente con su omisión del registro algebraico.

El trabajo geométrico se traslada al ambiente numérico-aritmético, estableciendo con ello una conexión de tipo auxiliar entre la proporcionalidad de segmentos y la aritmética de los números racionales (KSM –conexión auxiliar):

> P: Ahora, esa fracción la puedo separar en dos fracciones ¿cierto? Recuerden que cuando yo sumo fracciones de igual denominador [...] Se conserva el denominador y se suman los numeradores [...] [Escribe: $\frac{\overline{AD}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AE}}+\frac{\overline{EC}}{\overline{AE}}$]. ¿Qué valor tiene esta fracción? [señalando $\frac{\overline{AD}}{\overline{AD}}$ y tachando ambos términos] **[episodio 2, l82-84]**.

Vuelve de este modo a evocar un conocimiento anterior enfatizando una analogía de procedimientos desde un punto de vista puramente instrumental.

En la mayor parte de la sesión, se usa GeoGebra para proyectar una figura que el profesor trae ya hecha, lo que muestra que sabe usar el recurso para representaciones geométricas. Sin embargo, en dos ocasiones, el profesor usa el recurso en su carácter dinámico: desplaza una de las rectas paralelas de la figura 1, obteniendo otra recta paralela, e intenta desplazar esta recta de modo que su dirección no sea la misma, sin conseguirlo. Parece que aprecia el potencial del dinamismo en la configuración del teorema de Thales y la agilidad en el procesamiento de información numérica que permite el recurso (todo ello *conocimiento del recurso*, KMT). Sin embargo, parece estar poco familiarizado con el recurso, en el sentido de haber reflexionado sobre la posibilidad de mover un objeto eliminando una de las condiciones geométricas con las que ha sido creado. Cabe también la duda de si ha reflexionado sobre las posibles limitaciones del recurso a la hora de probar una igualdad entre medidas, por la aproximación de decimales que usa ("No da lo mismo. Qué raro, pero eso tiene que ser un error, básicamente, del GeoGebra porque está sacado como un paralelo". [episodio 1, l41]).

El profesor usa un lenguaje matemáticamente preciso en general, haciendo uso de los términos ("lados homólogos", "razones"...) y notación propios del tema. En este sentido, muestra conocimiento del tema en relación con registros de representación (KoT – registros de representación). Destaca, además, la necesidad de precisión en la notación. Así, cuando evoca una situación de semejanza de triángulos enfatiza la necesidad de considerar los triángulos como tripletas de puntos ordenados: "Decíamos que el triángulo ABC era semejante al triángulo ADE (en relación con la figura 3), en ese orden, ¿cierto?" (episodio 1, I15).

Al mismo tiempo, tenemos indicios de su KPM sobre cómo proceder en matemáticas cuando se busca conjeturar una propiedad mediante el examen de algunos casos posibles (usa la configuración del teorema de Thales para establecer las proporciones, sin embargo, las medidas de los segmentos son arbitrarias). Evidencia también conocimiento sobre el rol de las hipótesis en la comprobación de una propiedad (el paralelismo de las rectas en este caso) y sobre cómo se demuestra en matemáticas (así muestra conocer el significado de una condición "si y solo si", y la diferencia entre teorema y corolario). Asimismo, evidencia conocer la diferencia entre una demostración y una comprobación (en su primera intervención en la sesión anuncia: "primero lo vamos a ver de forma empírica y después lo vamos a ver a través de una demostración" –episodio 1- y el segundo episodio se explica por esta diferencia) y atribuir importancia a las demostraciones en matemáticas. Sin embargo, en el aula no demuestra el teorema general de Thales sino el particular, considerando el segundo como un caso particular del primero y usándolo para justificar su demostración (KoT -definiciones, propiedades y sus fundamentos). El propio profesor llama la atención sobre este hecho, que decide no abordar para no dedicarle más tiempo:

> P: Aunque éste básicamente no es el teorema de Thales, es un caso especial, porque el teorema de Thales, básicamente, es éste [dibuja una representación del tipo de la figura 1]. **[episodio 2, I92].**

Además, hace explícito su conocimiento de cierta evolución en la práctica matemática, donde se pueden aceptar *demostraciones* hechas con computador para cierto tipo de problemas y su conocimiento de demostraciones basadas en el estudio de casos particulares (KPM):

> P: Ahora vamos a la demostración [...] a muchos no les gustan las demostraciones, pero a mí me encanta saber de dónde vienen las cosas, y el por qué, ¿ya? Porque de esta forma empírica queda prácticamente demostrado, [...] a nivel computacional ahora se pueden ocupar muchas cosas. **[episodio 2, I66].**

El extracto anterior también da cuenta, por una parte, del conocimiento del profesor acerca de la relación entre los estudiantes y las demostraciones matemáticas ("a muchos no les gustan las demostraciones", KFLM –intereses y expectativas). Este conocimiento pareciera influir en cómo ha organizado la clase, partiendo de un trabajo sobre el cálculo de razones para introducir la demostración. Por otro lado, se observa el rol de explicación que el profesor asigna a la demostración, usada para comunicar y convencer a los estudiantes que lo planteado por el teorema es cierto (KPM).

Por otra parte, hace explícito a los alumnos cuándo están usando uno u otro resultado matemático ("Esto es distinto a lo que decíamos, este segmento partido por este segmento no se parecía a la semejanza del triángulo [...] pero lo que vamos a hacer ahora, sí" –episodio 1), mostrando su conocimiento de cómo proceder en el trabajo matemático y la rigurosidad necesaria en la argumentación (KPM). En el fragmento citado, el profesor diferencia explícitamente las razones entre segmentos homólogos sobre los lados oblicuos ($\frac{\overline{IJ}}{\overline{JK}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{ML}}$, en relación con la figura 1) y las razones de escala entre los dos triángulos homotéticos ($\frac{\overline{IJ}}{\overline{IK}}$ y $\frac{\overline{NM}}{\overline{NL}}$, en relación con la figura 1), relacionando lo segundo con la semejanza (KoT). Asimismo, las distintas partes del teorema parecen servirle de organizador en su propuesta de comprobación empírica del teorema (episodio 1). Así, pide a los alumnos en el episodio 1 que comprueben tanto que se cumple la tesis en las condiciones dadas, como que dichas condiciones son imprescindibles para que esta se dé (las rectas correspondientes han de ser paralelas).

Parece que el profesor usa la comprobación y los casos concretos como facilitador del aprendizaje, mostrando de este modo indicios de KMT (estrategia y ejemplos) en relación a su KPM. Esto parece explicar el sentido para el profesor del primer episodio: los alumnos comprenderán mejor la propiedad tras una comprobación numérica del mismo. Además, en ocasiones propone que sean los propios alumnos los que elijan las medidas del ejemplo, mostrando así conocimiento de cómo aprenden los alumnos (KFLM, *interacción con el contenido*) (si los alumnos eligen los valores es más evidente para ellos que pueden ser cualesquiera). Además de ejemplos, el profesor propone a los alumnos contraejemplos (es el caso de la comprobación en el episodio 1 con rectas no paralelas –I51) mostrando su conocimiento de la necesidad de que en el conjunto de ejemplos se muestren también contraejemplos o no ejemplos (KMT –ejemplos).

En el episodio 3, el profesor enfatiza en todo momento que se use el teorema, frente a posibles procedimientos alternativos que no se comparan. La finalidad en la comprensión instrumental sigue evidenciándose en relación al objetivo de la clase y su KMLS. En los ejercicios presentados en este episodio se muestra su conocimiento de la aplicación del teorema de Thales a la medición de distancias desconocidas (KoT –fenomenología). Si consideramos el conjunto de las tareas propuestas a los alumnos (KMT) podemos diferenciar una tarea inicial de cálculo-comparación (la que sirve en el episodio 1 para introducir el teorema), una de cálculo mixto (el ejercicio 4 propuesto en el episodio 3, en el que se conocen dos términos de una proporción y se pide la justificación de la relación con los otros dos términos, requiriéndose identificar que $\frac{x+y}{y} = \frac{10+15}{15}$) y el resto de tareas de cálculo de valor desconocido (restantes ejercicios abordados en el episodio 3). El mayor peso de las tareas de cálculo de valor desconocido parece coherente con la finalidad que atribuye al teorema. La aproximación que se hace al teorema de Thales (KMT) corresponde a una relación intrafigural (se destacan las relaciones entre elementos de una figura y los de su semejante, sin hacer referencia a transformaciones), donde en los registros figurales se hace uso de representaciones de dos rectas secantes cortadas por paralelas (sin que se represente el punto de corte de las secantes) y de representaciones de triángulos homotéticos de tipo "pico", estableciéndose la relación entre ambas representaciones. En la interpretación de estas representaciones se trata el aspecto de homotecia, estando ausente el de proyección (KoT). El conocimiento de estas configuraciones del teorema es parte del KoT (representaciones) y permite utilizarlas para el diseño de los ejercicios que plantea (KMT, tareas) de acuerdo a lo que espera aprendan sus estudiantes (KMLS, nivel de desarrollo procedimental).

La figura 4 trata de representar gráficamente el conocimiento que asociamos al profesor en relación con la sesión analizada.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En la interpretación de la sesión sobre el teorema de Thales identificamos tres núcleos de conocimiento principales, en el sentido de Sherin 1996 (citado en Sherin, Sherin y Madanes, 2000), quien alude a *complejos de conocimiento del contenido*, como estructuras de conocimiento en los que se muestran fuertemente conectados elementos del conocimiento de contenido y didáctico del contenido (a los que añadimos concepciones) que se desarrollan con la experiencia del profesor. Estos vienen definidos respectivamente por: 1) la relación que el profesor establece entre el teorema de Thales y la semejanza (núcleo verde), 2) el énfasis en el registro numérico (núcleo rosa), y 3) sus expectativas de aprendizaje en relación con el teorema (núcleo azul) (ver figura 4).

En el primer núcleo (verde) observamos que, para el profesor, el teorema de Thales deriva de la semejanza, lo que a la vez se relaciona con el conocimiento de la demostración del teorema en las diferentes configuraciones (particular y general) y explica los tipos de razones que activa en la enseñanza del teorema (entre segmentos homólogos sobre los lados oblicuos y de escala entre triángulos homotéticos), la aproximación intrafigural (relaciones en una figura, sin considerar transformaciones de una figura en otra) y el uso de registros figurales de triángulos homotéticos tipo "pico" y de líneas cortadas por paralelas que evocan a la configuración del mismo tipo. Las restricciones en las representaciones figurales del teorema y en las razones que se consideran podrían contribuir a las dificultades en la comprensión del contenido por parte de los alumnos evidenciadas en Lemonidis (1992) y Brousseau (1995), y coinciden con las carencias detectadas por el profesor del estudio de Gualdrón (2011), quien, consciente de las dificultades de los estudiantes en la comprensión de las demostraciones, organiza su estrategia de enseñanza en torno a tareas que buscan establecer conjeturas para luego presentar una aproximación a la demostración del teorema.

Respecto de la demostración del teorema, este conocimiento se ve influenciado a su vez por su conocimiento sobre cómo se demuestra en matemáticas y por la conexión auxiliar que establece entre las fracciones y la demostración del teorema (de modo que puede evocar a las operaciones con fracciones para operar con razones en registro algebraico). El profesor atribuye el rol de verificación y explicación a la demostración (De Villiers, 1993), lo que influye sobre su conocimiento de la enseñanza del teorema y de la misma demostración (Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2019). Coincidimos con Lesseig (2016) y Delgado-Rebolledo y Zakaryan (2019) en que la enseñanza de la demostración moviliza conocimientos del profesor de diferentes subdominios del MTSK. En concreto, podemos observar cómo su conocimiento de la práctica matemática en relación con la demostración y los roles que le atribuye a esta en el aula, junto con su visión del teorema como una consecuencia de la semejanza, explican el conocimiento que evidencia sobre sus representaciones, su interpretación del teorema y las conexiones que establece entre este y las fracciones. En este sentido, destacamos el rol de la demostración como una práctica matemática que es parte del conocimiento especializado del profesor, ubicada en el subdominio menos explorado hasta ahora (KPM) del modelo MTSK. De este modo, esta investigación aporta evidencias de conocimientos que contribuyen a profundizar en el estudio del KPM y a la comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, relacionando los subdominios KoT, KSM, KMT y KMLS (núcleo verde en figura 4) en diferentes categorías. El conocimiento sobre la demostración constituye un punto de partida desde el cual es posible indagar sobre la integración de diferentes tipos de conocimientos que el profesor pone en juego durante la enseñanza, particularmente, del teorema de Thales.

Finalmente, la conexión entre el teorema y la semejanza que realiza el profesor no permite distinguirlos como temáticas diferentes o ligados por la homotecia como propone el currículo chileno (MINEDUC, 2016a), usando la razón de semejanza como analogía procedimental de acuerdo a la secuenciación que él propone para estos temas.

En el segundo núcleo (núcleo rosa en la figura 4) observamos que si bien las representaciones que usa en el profesor en la lección se ubican en los registros figural y numérico, se enfatiza el tratamiento numérico. Aunque el profesor usa también el registro algebraico durante la resolución de las distintas tareas, como paso intermedio entre el figural y el aritmético, este parece aproblemático para él. Lo que puede explicar el uso que hace del GeoGebra, centrado en la vista gráfica en la que se presenta el registro numérico y en las razones entre las medidas de las longitudes de los segmentos correspondientes. El profesor parece considerar la proporcionalidad como un contenido transversal que le permite enlazar el registro geométrico con el numérico y la fracción como una herramienta en situaciones de proporcionalidad, observándose su conocimiento sobre conexiones interconceptuales entre ecuaciones, operatoria con números racionales, semejanza y teorema de Thales, usando como idea transversal la proporcionalidad.

Por último, el tercer núcleo (en la figura 4) muestra que el profesor espera que los alumnos logren aplicar el teorema para resolver diferentes situaciones. Esto se observa a lo largo de toda la sesión, especialmente cuando traza el objetivo de la clase. Las tareas que propone son mayoritariamente de cálculo de valor desconocido, salvo la inicial de cálculo-comparación, cuyo objetivo es introducir el teorema, y una de cálculo mixto. En su gestión de dichas tareas también incide el conocimiento de una conexión auxiliar entre la resolución de ecuaciones de primer grado y la resolución de tareas de aplicación de Thales de cálculo de valor desconocido.

Así como cada núcleo descrito involucra conocimientos de diferentes subdominios y dejan ver el carácter especializado del conocimiento del profesor

(Scheiner *et al.*, 2019), otras particularidades del conocimiento del profesor que se evidencian en esta sesión también nos resultan llamativas. Por un lado, los aspectos que muestra conocer sobre cómo aprenden los alumnos y posibles dificultades no se refieren directamente al propio teorema (a diferencia del estudio de Zakaryan *et al.*, 2018), sino a contenidos relacionados con el tipo de tarea que propone (como dificultades en la resolución de ecuaciones).

Por otro lado, el profesor muestra un tratamiento algorítmico del contenido. La presentación del teorema a partir de una tarea de cálculo-comprobación numérica, el tratamiento intrafigural con configuraciones de rectas secantes cortadas por paralelas y la no evidencia de conocimiento sobre características del aprendizaje de este contenido específico concuerdan con los resultados de Escudero y Sánchez (2007) y evidencian la finalidad instrumental del aprendizaje del teorema y su visión de la relación entre semejanza y teorema de Thales (donde pesa mucho su KoT) que puede reforzar esa finalidad instrumental. A pesar del papel de la demostración esperado en esta lección, el KPM manifestado por el profesor no resulta tan determinante en relación con su acción en el aula, como la finalidad que parece atribuir al teorema. Así, el teorema no llega a demostrarse realmente y la lección se centra más en su aplicación que en su demostración.

Consideramos que, al intentar dar respuesta a nuestro objetivo, hemos podido aportar una interpretación plausible de la misma en términos del conocimiento del profesor, mostrando lo que evidencia conocer de manera relacionada. Aquí aportamos el detalle en la descripción de dicho conocimiento que nos posibilita MTSK. Nuestro estudio añade a otros trabajos previos sobre el conocimiento del profesor sobre el teorema de Thales, además del detalle mencionado, la identificación de relaciones entre distintos aspectos de dicho conocimiento, mostrándolo de forma organizada.

Esta interpretación desde su conocimiento contribuye a dar una explicación parcial de la sesión, que podrá tener otras explicaciones, como por ejemplo las interacciones en el aula. Hemos de tener presente, además, que puede tener otros conocimientos especializados sobre el tema que, o no se han activado en la sesión, o no hemos encontrado evidencias.

Pensamos que esta visión de la sesión desde el conocimiento del profesor contribuye a mejorar nuestro conocimiento sobre cómo los profesores conocen un contenido (en este caso el teorema de Thales), tan importante para el formador de profesores como el conocimiento sobre el aprendizaje matemático lo es para el profesor de matemáticas. En ese sentido, reivindicamos la necesidad de estudios sobre la comprensión de profesores de distintos contenidos matemáticos. Los resultados de estudios como este pueden ser útiles en procesos de formación de profesores. Asimismo, a partir de este podemos plantearnos posibles cuestionamientos con profesores sobre la enseñanza de este contenido. Las relaciones identificadas en el conocimiento del profesor de nuestro estudio, pueden servir a su vez para pensar en posibles aspectos clave sobre los que hay que incidir en la reflexión del profesor (por ejemplo, la relación entre el teorema de Thales y la semejanza o sus expectativas de aprendizaje en relación con el teorema). Por otra parte, el análisis del conocimiento de los profesores participantes puede ser el punto de partida de un proceso formativo que parta de sus posicionamientos, así como una herramienta.

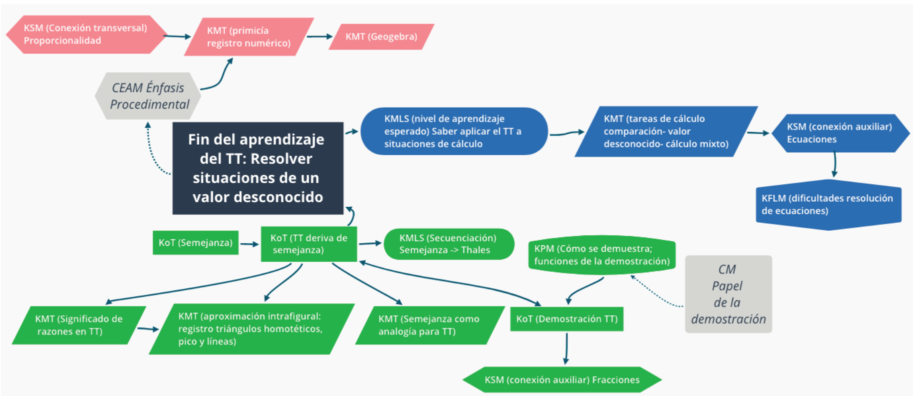


Figura 4. Representación del MTSK del profesor en relación con la sesión sobre el teorema de Thales (TT).

AGRADECIMIENTOS

Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades. Proyecto RTI2018-096547-B-I00.
C. Henríquez Rivas agradece el financiamiento al Convenio Marco FID -TAL 1856, de la Universidad de Talca.
Gonzalo Espinoza-Vásquez agradece a Beca Doctorado Nacional CONICYT, Folio 21150897.
Dedicamos este artículo, con admiración y agradecimiento, a la memoria de José Carrillo, fallecido poco antes de su publicación.

REFERENCIAS

Alfaro-Carvajal, C., Flores-Martínez, P., y Valverde-Soto, G. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia, 33*(2), 55-75. https://doi.org/10.15359/ru.33-2.5

Ball, D. L. (2003). What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics. *Secretary's Summit on Mathematics, US Department of Education*.

Bardín, L. (1996). *El análisis de contenido*. Akal Ediciones.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Open University Press

Brousseau, G. (1995). Promenade avec Thalès entre la maternelle et l'université. *Commission Inter-Irem Premier cycle, Autour de Thalès*, 87-124.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Carrillo, J. y Contreras, L. C. (1994). The relationship between the teacher's conceptions of mathematics and of mathematics teaching. A model using categories and descriptors for their analysis. In J.P. da Ponte, y J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* Education (Vol. II, pp. 152–159). PME.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon, 26*, 15-30.

Delgado-Rebolledo, R. y Espinoza-Vásquez, G. (2019). El conocimiento del profesor de matemáticas sobre la demostración y sus roles en la enseñanza de las matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 253-262). SEIEM.

Delgado-Rebolledo, R. y Zakaryan, D. (2019). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0

Duperret, J. C. (1995). Pour un Thales dinamyque. *Repères-IREM*, 20, 75-90.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. The Falmer Press.

Escudero, I. (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 23*(3), 379–392.

Escudero, I. y Sánchez, V. (2007). How do domains of knowledge integrate into mathematics teachers' practice? *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 312–327.

Filloy, E. y Lema, S. (1996). El teorema de Tales: significado y sentido en un sistema matemático de signos. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 55-75). Grupo Editorial Iberoamérica.

Flick, U. (2007). *Managing quality in qualitative research.* Sage.

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK).* (Tesis de doctorado publicada). Universidad de Huelva. http://hdl.handle.net/10272/11503.

Flores-Medrano, E. (2016). Conocimiento de la práctica matemática (KPM). En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 30-34). SGSE: Huelva. http://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/12509/Reflexionando_sobre_el_conocimiento.pdf?sequence=2

Gualdrón, E. (2011). *Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas.* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Valencia.

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espaces de travail mathématique: puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*(4-I), 5-15.

Laguerre, E. (2005). *Une ingenierie didactique pour l'apprentissage du theoreme de Thales au college.* (Tesis doctoral no publicada). Université Paris-Diderot - Paris VII. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00337891/document

Lemonidis, C. (1991). Analyse et réalisation d´une expérience d´enseignement de l´homothétie. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 11*(2/3), 295-324.

Lemonidis, C. (1992). Différentes présentations mathématiques et comportement des élèves face au théoréme de Thalès. *Cahiers de didactique des mathématiques*, 12, 107-125.

Lesseig, K. (2016). Investigating mathematical knowledge for teaching proof in professional development. *International Journal of Research in Education and Science, 2*(2), 253-270.

Liljedahl, P. (2010). Noticing rapid and profound mathematics teacher change. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*, 411–423.

Lin, F-L. y Rowland, T. (2016). Pre-Service and In-Service Mathematics Teachers' Knowledge and Professional Development. En A. Gutierrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 483-520). Sense Publishers.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing.* RoutledgeFalmer.

Michonneau, J. y Pfaff, N. (1990). La proportionnalite en geometrie: le theoreme de Thales. *Petit X, 23*, 41-59.

Ministerio de Educación de Chile, MINEDUC. (2009). *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos de la educación básica y media. Actualización 2009*. Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación de Chile, MINEDUC. (2016a). *Bases Curriculares 7º básico a 2º medio*. Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación de Chile, MINEDUC. (2016b). *Matemática: Programa de estudio primero medio*. Ministerio de Educación.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics Teachers Knowledge and Practices. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Sense.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J, y Pino-Fan, L. (2019). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*, 153-172. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. Routledge.

Sherin, M., Sherin, B. y Madanes, R. (2000). Exploring Diverse Accounts of Teacher Knowledge. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(3), 357-375.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14.

Sosa, L., Flores-Medrano, E., y Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación Matemática, 28*(2), 151-174.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Morata.

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, R., Olfos, E., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(2), 105-123.

NURIA CLIMENT

Dirección: Departamento de Didácticas Integradas. Universidad de Huelva.
Avda. Tres de Marzo, s/n. E21007, Huelva (España).

Teléfono: +34 (9)59 219261

DOI: 10.24844/EM3301.05

Desarrollo de razonamiento algebraico elemental a través de patrones y secuencias numéricas y geométricas

Development of elementary algebraic reasoning through numerical and geometric patterns and sequences

José Luis Bautista-Pérez,[1] Martha Hilda Bustamante-Rosario,[2] Tulio Amaya De Armas[3]

Resumen: En este artículo se reportan los resultados de un trabajo realizado con 38 estudiantes de una institución educativa pública colombiana, en los que se analizó el desarrollo de su razonamiento algebraico elemental, usando patrones y secuencias numéricas o geométricas. El trabajo se desarrolló en tres fases: diagnóstica, interventiva y de contraste, además, durante el desarrollo de cada prueba se hicieron entrevistas basadas en las tareas que resolvían los estudiantes. Los resultados muestran que las soluciones iniciales atendían una heurística: identificar una regla recursiva, que utilizaban para encontrar un término faltante, la que expresaban en lenguaje numérico, natural o icónico, utilizando objetos extensivos y procesos aritméticos. La implementación de la propuesta, permitió en los estudiantes, un aumento progresivo del poder heurístico en la resolución de problemas, dando variadas y ricas soluciones a las actividades que se les plantearon. Algunos lograron generalizar patrones utilizando lenguaje natural o simbólico–literal. Se puede concluir que la actividad matemática de la mayoría de los estudiantes se ubica entre los niveles cero al

Fecha de recepción: 17 de octubre de 2019; **Fecha de aceptación:** 30 de noviembre de 2020.

[1] Institución Educativa la Unión, Sincelejo, jl_bautista09@hotmail.com, orcid.org/0000-0003-2743-1540

[2] Institución Educativa Buenos Aires, Montería, Colombia, mahi_bustamante@hotmail.com, orcid.org/0000-0001-6284-1102

[3] Facultad de Educación de la Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile, tuama1@hotmail.com, https://orcid.org/0000-0003-0342-4338

dos de algebrización, destacándose, los niveles uno y el proto–algebraicos de nivel dos, solucionando problemas de valores faltantes, sin llegar a modificar las expresiones algebraicas producidas.

Palabras clave: *razonamiento algebraico, secuencias, generalización de patrones, niveles de algebrización.*

Abstract: This article reports the results of a work carried out with 38 students from a Colombian public educational institution, in which the development of their elementary algebraic reasoning was analyzed, using numerical or geometric patterns and sequences. The work was carried out in three phases: diagnostic, interventional and contrast, in addition, during the development of each test, interviews were carried out based on the tasks that the students solved. The results show that the initial solutions addressed a heuristic: identifying a recursive rule, which they used to find a missing term, the one they expressed in numerical, natural or iconic language, using extensive objects and arithmetic processes. The implementation of the proposal allowed the students a progressive increase in heuristic power in problem solving, giving varied and rich solutions to the activities that were presented to them, and some managed to generalize patterns using natural or symbolic-literal language. It can be concluded that the mathematical activity of most of the students is located between levels zero to two of algebrization, standing out, levels one and proto-algebraic of level two, solving problems of missing values, without modifying the expressions algebraic produced.

Keywords: *algebraic reasoning, sequences, generalization of patterns, levels of algebrization.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años la introducción del álgebra en educación básica ha sido objeto de estudio por parte de varios investigadores (Godino y Font, 2003; Butto, 2005; Cai, Ng y Moyer, 2011; Godino, Castro y Rivas, 2011; Vergel, 2014; Kieran *et al.*, 2016; Gaita y Wilhelmi, 2019). Quienes han mostrado un gran interés en desarrollar el razonamiento algebraico desde los primeros años de escolaridad, donde se promueva su estudio a través de situaciones de variación y cambio, que involucren la generalización de patrones, secuencias y leyes que vinculen la visualización, exploración y manipulación de números y figuras, con el pensamiento matemático de quien aprende (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Murray, 2010; Cantoral, 2013; Aké, Godino y Gonzato, 2013). Pues no cabe duda que el estudio de dichas situaciones es de gran importancia en la formación de los estudiantes, ya que constituye un eje fundamental para estructurar y desarrollar el razonamiento algebraico como una manera matemática de pensar, que facilite el acceso al cálculo (Ministerio de Educación Nacional, 2006; Dolores, 2013; Kieran *et al.*, 2016). Así mismo, este tipo de situaciones son fundamentales para el acceso al cálculo (Hitt, 2003) y para el desarrollo de habilidades y destrezas que según Farfán (2012), los estudiantes podrán utilizar en cualquier contexto de las matemáticas y de la vida diaria.

Sin embargo, un curso de álgebra no es usual que se ofrezca de manera explícita en los currículos escolares, hasta el tradicional curso ofrecido en la escuela secundaria (NCTM 2000, Radford, 2014), y es habitual que los estudiantes experimenten dificultades en la transición de la aritmética al álgebra porque tienen poca o ninguna experiencia previa con el tema, (Silver y Kenney 2001; Kaput, Carraher y Blanton, 2008). Unido a lo anterior, en el momento que se aborda dicho curso, se hace abruptamente, sin dar continuidad a los temas de aritmética, medida y geometría tratados en primaria (Godino *et al.*, 2014). Hay consenso entre varios autores (Butto, 2005; Cai y Knuth, 2011; Radford, 2014) que, la transición de la aritmética al álgebra no se debe realizar de manera abrupta, sino que sea un proceso progresivo y que se vaya adquiriendo grado tras grado, sin saltos ni rupturas.

Estos conflictos curriculares podrían resultar problemáticos, considerando que, si se dejan de lado elementos que ayudan en la enseñanza y aprendizaje del pensamiento variacional, los procesos de generalización propios del álgebra carecerán de significado y sentido para quien aprende en el trabajo que se realiza en grados superiores (Carraher y Schliemann, 2007), y porque un desarrollo temprano del pensamiento algebraico puede facilitar que los estudiantes tengan un acercamiento gradual al simbolismo algebraico (Cai y Knuth, 2011). Además, porque el álgebra es una pieza clave del éxito en el aprendizaje de las matemáticas, debido a su papel fundamental en todas las ramas de esta, ya que provee herramientas para representar y analizar relaciones cuantitativas, modelar situaciones y resolver problemas en cada dominio matemático (NCTM, 2000; Blanton M. *et al.*,2018).

En este trabajo se tuvo como objetivo analizar el desarrollo del razonamiento algebraico elemental, a través del uso de patrones y secuencias numéricas o geométricas en estudiantes de quinto grado de educación básica. Se enfatizó en categorizar las prácticas que realiza un estudiante de primaria para resolver tareas matemáticas que involucran patrones, y a partir de ello, ir haciendo un seguimiento a la evolución de sus progresos en la adquisición de razonamiento algebraico.

RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL

Según el NCTM (2000), el álgebra comprende las relaciones entre cantidades, el uso de símbolos, el modelado de fenómenos, y el estudio matemático de la variación y el cambio. Y para Kieran (2004) el razonamiento algebraico elemental se refiere a la forma en que una persona piensa al relacionar cantidades, identificar estructuras, estudiando el cambio y la variación, la generalización, la modelación, la predicción y la argumentación de los procesos realizados al resolver una tarea matemática en educación primaria. Similarmente, Godino y Font (2003) lo relacionan con el estudio de patrones y regularidades en diferentes contextos de las matemáticas y la manera cómo se llega a la generalización de las secuencias. Es decir, constituye el sistema de prácticas utilizadas en educación primaria en la resolución de tareas, en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos, tales como simbolización, relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización y modelación, etc. (Godino *et al.*, 2011). Esta manera analítica de pensar en los números desconocidos y tratarlos a la par con números conocidos, es una de las características que distingue la aritmética del álgebra (Radford, 2014). Para Radford, esta naturaleza analítica del álgebra, permite deducir fórmulas y encontrar soluciones al resolver ecuaciones. Así mismo, la generalización de un patrón consiste en la identificación de una característica común a todos los elementos de una secuencia, la cual se puede usar para encontrar una expresión que permita encontrar cualquier elemento de esta (Radford, 2006).

De esta manera, el razonamiento algebraico elemental refiere a prácticas matemáticas en las cuales se pueden establecer diferentes niveles de algebrización, que emergen en la solución de una tarea matemática en la escuela primaria (Godino *et al.*, 2014; Gaita y Wilhelmi, 2019), por lo que tener criterios para su análisis puede proporcionar información que permita promover un óptimo desarrollo del razonamiento algebraico en los estudiantes. Para analizar la actividad algebraica que desarrolla un estudiante al resolver una tarea matemática cotidiana en la escuela primaria, y hacer un seguimiento a su evolución, se han propuesto varios modelos: (a) por niveles de algebrización (Godino *et al*., 2011; 2014), (b) por nociones clave (Radford, 2014). El nivel se asigna, no a la tarea como tal, sino a la solución, que dé la actividad matemática comunicada, así que dependiendo de la solución que se dé a la tarea, esta puede ser clasificada en uno u otro nivel de algebrización (Godino *et al*., 2014).

MODELO POR NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN

Este modelo (Godino *et al*., 2011; 2014), está constituido por cuatro categorías:

(1) *Nivel cero o de ausencia de razonamiento algebraico*: se identifica una regla recursiva, la cual se expresa en lenguaje natural, numérico, icónico, verbal o gestual, y los procedimientos utilizados son aritméticos.

(2) *Nivel uno*: se reconoce explícitamente una regla recursiva y se generaliza usando lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Se puede usar lenguaje simbólico-literal, pero sin ejecutar las operaciones indicadas con dichos símbolos.

(3) *Nivel dos*: se determina un patrón por análisis de términos específicos de una secuencia, el lenguaje utilizado es natural, numérico, icónico o gestual, y, se formaliza expresando una regla general. Se establecen conexiones entre los elementos de las representaciones producidas y se dan o usan propiedades del patrón, sin hacer transformaciones tipo tratamiento en lenguaje simbólico-literal.

(4) *Nivel tres*: se determina una regla general y se expresa formalmente. La información se reporta, partiendo de un lenguaje simbólico literal formalizado mediante símbolos, variables o parámetros, que refieren objetos generales que representan el caso general. Puede utilizarse inductivamente un lenguaje natural, numérico, icónico o gestual en la descripción del método de construcción del patrón. Además, se manipula la escritura formal para obtener expresiones más simples, sin necesariamente analizar su relación con el método de construcción, centrándose el trabajo en la manipulación simbólico-literal. Se establecen relaciones entre las representaciones producidas, y de los elementos de estas con los del contexto sociocultural donde se les asignan significado y sentido (Castaño *et al*., 2008; Amaya, Pino-Fan y Medina, 2016).

MODELO POR NOCIONES CLAVE

Este modelo (Radford, 2014), establece tres condiciones para el análisis de la actividad algebraica que desarrolla un estudiante:

(1) *Indeterminación*: el problema a resolver involucra términos desconocidos (incógnitas, variables, parámetros, etc.). (2) *Denotación*: los términos indeterminados involucrados en el problema deben ser simbolizados y esta simbolización se puede lograr de varias maneras: usando lenguaje natural, números, letras, gestos, signos no convencionales, o una mezcla de estos. (3) *Analiticidad*: las cantidades indeterminadas se tratan como si se conocieran, por lo que, se opera con ellas de forma analítica. Y para encontrar un término desconocido no se adivina o se llega por tanteo, se deduce de forma analítica.

Además de los criterios descritos para el análisis de la actividad algebraica, son importantes los registros y las representaciones que se usen para comunicar la actividad matemática desarrollada, ya que, a través de ellos se hacen construcciones con las que las personas externalizan sus representaciones mentales, las cuales deben ser configuradas en un registro (Duval, 2017). El registro de partida que se escoja para proponer una situación, es fundamental para que el estudiante, en su solución logre transformar dicha representación. Una representación admite dos tipos de transformaciones: 1) tipo conversión cuando se cambia el registro, es decir, se decodifican los elementos de la representación y se recodifican en otro registro; o 2) tipo tratamiento, cuando se decodifican los elementos de una representación y se recodifican en el mismo registro. Un aspecto fundamental en el uso de las representaciones con fines de enseñanza es poder producirlas, hacer el mayor número de transformaciones posibles del objeto en estudio, y establecer conexiones entre ellas. Cuando dos representaciones coinciden en el orden de sus elementos, y su orden de aprehensión también es el mismo, se dice que son congruentes, si no, se dice que son incongruentes (Duval, 2017). El análisis de congruencias e incongruencias es el que permite el establecimiento de las conexiones entre las representaciones del objeto estudiado.

En este contexto, las situaciones de variación y cambio son el fundamento principal de los procesos de generalización, por lo que, con su estudio desde los niveles iniciales de escolaridad, se puede lograr que el estudiante vaya progresando en el uso del lenguaje y de símbolos, para apoyar el desarrollo de habilidades en el aprendizaje posterior del álgebra (Godino y Font, 2003; Dolores, 2013; Radford, 2014). Esto también incluye representar, o modelar situaciones concretas con expresiones, establecer ecuaciones y encontrar una incógnita como solución de un problema, de tal modo, que los símbolos algebraicos se vayan introduciendo gradualmente (Carraher y Schliemann, 2007). Esto según Butto (2005) y Butto y Rojano (2004), porque los niños son capaces de razonar sobre las variables contenidas en una situación, de operar con regularidades implícitas y, de entender que las relaciones funcionales que las involucran, permanecen invariables para todos los valores posibles que una entidad puede tomar. Es decir, implica producir representaciones, generalizar y formalizar patrones y regularidades en el estudio de un objeto matemático. Así mismo, con el progreso de este razonamiento, se avanza en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico y algunos elementos con rasgos funcionales.

A continuación, se muestran tres tipos de respuestas dadas por profesores en ejercicio, en el desarrollo de un taller con esta temática, al problema mostrado en la figura 1. Si la configuración de flechas sigue el mismo patrón que se indica:

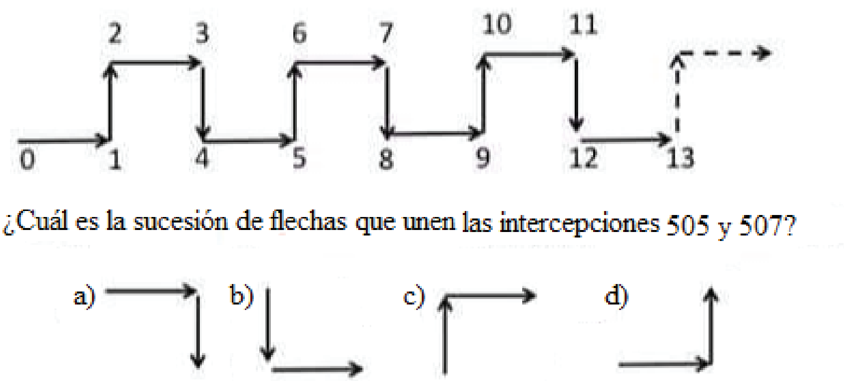


Figura 1. Situación donde se presentan secuencias, en un registro figural.

Solución tipo 1:

La ubicación del 0 se repite en las intersecciones 4, 8, 12..., la del 1 en 5, 9, 13, ..., la del 2 en 6, 10, 14, ... y la del 3 en la sucesión 7, 11, 15, ... y si dividimos 505 entre 4, da 126 y sobra 1, por lo que la posición del 505 es similar a la del 1, y como 507 dividido 4 da 126 y sobran 3, su posición es similar a la del 3, por lo que la respuesta es c).

Solución tipo 2:

Los términos pedidos terminan en cinco y siete respectivamente, y la secuencia va de uno en uno, así que cada diez términos se repite el último dígito, por lo tanto, la solución es c).

Solución tipo 3:

Las flechas agrupadas por sentido de dirección forman una secuencia de diferencia 4. Como 504 es múltiplo de 4, cae en la secuencia de flechas de abajo: 0, 4, 8, 12, ..., 504, se cumple que $\mathbf{a_n = 4\times n}$ y si $\mathbf{504 = 4\times n}$, entonces $\mathbf{n = 126}$, es decir, $\mathbf{504 = 4\times 126}$, lo cual significa que 504 está ubicado en el lugar donde la flecha vertical llega bajando, el 505 estaría ubicado a la derecha, al final de la flecha siguiente, el 506 estaría arriba, en la punta de la flecha vertical, y desplazándose a la derecha se llegaría al 507, así que la solución es c).

La solución tipo 1, parece ser netamente aritmética, pues, identifica una regla recursiva para cada secuencia, divide el término n-ésimo de la secuencia por la diferencia 4 y ubica los términos solicitados. Sin embargo, en ella subyacen conceptos algebraicos que se salen del foco de dicha solución. Tiene mucha similitud con $\mathbf{505}\ \boldsymbol{mod}\ \mathbf{4 == 1}$ y $\mathbf{507}\ \boldsymbol{mod}\ \mathbf{4 == 3}$, que es de las entrañas del álgebra.

La solución tipo 2, analiza una sola secuencia, determinando dos reglas recursivas: la diferencia que va de 1 en 1, y que el dígito final se repite cada 10 términos. Sin embargo, este razonamiento no siempre lleva a una solución correcta, ya que como cada secuencia está formada por 4 números sucesivos, en 4 posiciones diferentes, y la diferencia entre los números que ocupan la misma posición en dos secuencias sucesivas es 4, el último dígito no siempre se repite en la misma posición. En soluciones de este tipo, donde para comunicar la respuesta se usa solo lenguaje natural, cabe preguntar ¿es aritmética o es algebraica esta solución? La solución tipo 3, parece ajustarse mejor a una solución algebraica, pues identifica una regla recursiva, usa letras y verifica su resultado.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Se hizo una investigación cualitativa, desarrollada en tres fases: diagnóstica, interventiva y de contraste, cuya secuenciación y continuidad, permitió una mejor comprensión del fenómeno estudiado. En la primera fase se diagnosticó el problema, y a partir de los resultados se diseñó una propuesta de intervención, la cual se implementó, con el fin de generar cambios y transformaciones en la práctica educativa y social, con la participación activa de los estudiantes en la solución de tareas asociadas al razonamiento algebraico. En la fase interventiva, luego de la aplicación de cada actividad se evaluaban los niveles de algebrización en que lograran ubicarse los estudiantes, y se daban orientaciones buscando minimizar las dificultades encontradas, y afianzar fortalezas. La fase de contraste consistió en la aplicación del cuestionario final, y el procesamiento y análisis de la información. Se analizó el desarrollo progresivo del nivel de razonamiento algebraico elemental de los estudiantes, y, al comparar los resultados de sus respuestas, con los niveles de algebrización (Godino *et al*., 2014), ir haciendo un acompañamiento guiado, en su proceso evolutivo, hacia niveles más avanzados.

MUESTRA DE INFORMANTES

Estuvo constituida por 38 estudiantes de quinto grado de una institución educativa pública colombiana, con edades entre 10 y 12 años. Se hizo un muestreo intencional, teniendo como criterios de inclusión, que el estudiante quisiera participar voluntariamente, que presentara baja tasa de inasistencia y que mostrara interés por el aprendizaje de las matemáticas. En Colombia el Ministerio de Educación Nacional (2006), en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, sugiere que los estudiantes, al finalizar el quinto grado, deben dominar las operaciones básicas con números enteros, resolver problemas que las involucren, encontrar secuencias, patrones, regularidades, variaciones y cambios, y equivalencias entre expresiones numéricas.

INSTRUMENTOS Y TÉCNICAS PARA RECOGER LA INFORMACIÓN

Se utilizaron cuestionarios abiertos y entrevistas semiestructuradas basadas en las soluciones dadas por los estudiantes a las tareas (Goldin, 2000). En los cuestionarios se plantearon secuencias numéricas o geométricas, con elementos del contexto sociocultural, que involucran patrones de variación y cambio. Para que los cuestionarios fueran comparables, todos se diseñaron con la misma estructura, atendiendo los descriptores de los niveles de algebrización (Godino *et al*., 2014), buscando poder categorizar la actividad matemática individual de cada estudiante, y ubicarlo en el nivel correspondiente, de acuerdo a la solución por él comunicada, luego de verificar las condiciones o nociones clave propuestas por Radford (2014).

Las entrevistas fueron vídeo grabadas, y en ellas se hicieron preguntas de sondeo durante, o inmediatamente después de resolver cada tarea, con lo que se buscaba evidenciar los conocimientos, y razonamientos utilizados por los estudiantes, en sus soluciones (Koichu y Harel, 2007). Las entrevistas basadas en tareas son apropiadas para recoger información cualitativa en matemáticas, pues, permiten identificar las ideas y procedimientos matemáticos que utilizan los estudiantes al resolverlas (Rivera, Salgado y Dolores, 2019).

La información se recogió en el segundo semestre de 2018, en siete sesiones de trabajo de dos horas cada una. La primera sesión fue la aplicación de la prueba diagnóstica, donde se caracterizó el nivel de algebrización inicial de los estudiantes y se identificaron fortalezas y debilidades. En las cinco sesiones siguientes se hizo un proceso de afianzamiento, donde se iban aplicando pruebas para analizar el progreso parcial alcanzado durante el proceso y tomando decisiones para mejorarlo. En la séptima sesión, se aplicó la prueba final validatoria. Cada sesión de la fase interventiva se dividió en cuatro momentos: I) presentación de la actividad; II) trabajo individual en la solución de las situaciones planteadas y entrevista; III) discusión en grupos de dos o tres estudiantes para socializar las respuestas de cada uno y generar un espacio de discusión para intercambiar ideas, asistidos por los miembros del equipo investigador. Finalmente, IV) se hacía una discusión general con el grupo completo para la socialización de la actividad, donde los estudiantes exponían y defendían las estrategias utilizadas para dar sus respuestas y daban sus opiniones sobre las respuestas de sus compañeros. Al final del momento IV), se llevó a cabo un proceso de enseñanza explícita, donde los investigadores mostraban formas alternativas de solución, y a partir del análisis de términos cercanos, se reconocían reglas implícitas en las secuencias, se explicaban y establecían patrones. Se introdujo un poco de lenguaje técnico de las matemáticas, todo con el fin de facilitar a los estudiantes hallar términos alejados, hacer generalizaciones y usar lenguaje simbólico. En la tabla 1, se presenta una muestra del tipo de actividades desarrolladas en cada fase del trabajo.

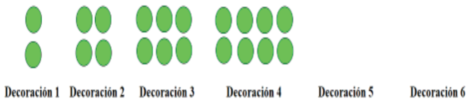
Tabla 1. Muestra del tipo de actividades desarrolladas.

<table>
<tr><th>Fase</th><th>Enunciado</th><th>Cuestiones por las que se indagó</th></tr>
<tr>
<td>Diagnostica</td>
<td>
1. Lucas fue al médico porque tiene gripe y le recetaron unas pastillas, que debe tomar cada 6 horas, y un jarabe del cual debe tomar una cucharada cada 8 horas, como se muestra en las siguientes secuencias:
• Secuencia # 1 (Pastillas)
<table>
<tr><td>0</td><td>6</td><td>12</td><td>18</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Primera pastilla</td><td>Segunda pastilla</td><td>Tercera pastilla</td><td>Cuarta pastilla</td><td>Quinta pastilla</td><td>Sexta pastilla</td></tr>
</table>
• Secuencia # 2 (Cucharadas de Jarabe)
<table>
<tr><td>0</td><td>8</td><td>16</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Primera cucharada</td><td>Segunda cucharada</td><td>Tercera cucharada</td><td>Cuarta cucharada</td><td>Quinta cucharada</td></tr>
</table>
2. Camila empaca galletas en cajas. Ella guarda 12 galletas en cada caja.
<table>
<tr><td>Número de cajas</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Número de galletas</td><td>12</td><td>24</td><td>36</td><td>?</td><td>?</td><td>?</td></tr>
</table>
</td>
<td>
Teniendo en cuenta la secuencia anterior responde a lo siguiente:
a. Encuentra el término faltante de la secuencia.
b. ¿Qué cambio se debió realizar al término ki de la secuencia para obtener el término k_j? (Hay que tener en cuenta que los términos k_i y k_j se usan aquí para expresar la pregunta en forma general, ya que, en cada secuencia se solicitaba el cambio en términos diferentes).
c. Explica cómo cambia cada término de la secuencia a medida que se pasa de un término a otro de esta.
d. Describe la regla que permite continuar la secuencia y hallar un término cualquiera de esta. Explica como lo haces.
e. Si n representa un término cualquiera de la secuencia, escribe una expresión que nos ayude a determinar un término n cualquiera de dicha secuencia. Explica como lo haces.
f. A partir de la expresión escrita anteriormente, calcula el término que ocupa la posición k. Explica como lo haces.
</td>
</tr>
</table>

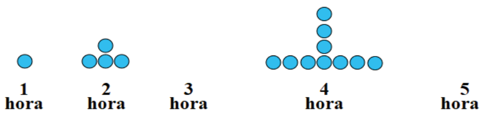
Intervención

1. Observa las siguientes tarjetas con números.

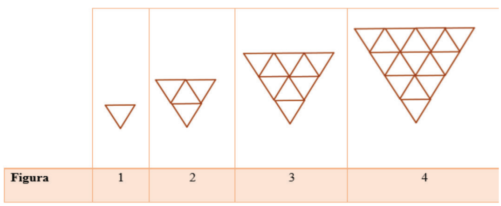
2. Lucía y su mamá están planeando decorar su habitación y para hacerlo quieren recortar pequeños círculos verdes. A continuación, se muestran los círculos que van a utilizar para cada una de las decoraciones.

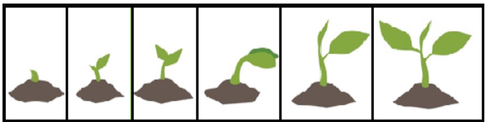


3. Un científico está estudiando una célula vegetal presente en una nueva especie de plantas encontradas a orillas del rio Amazonas. Él toma una muestra de estas células y observa como cada hora esta se va reproduciendo y va aumentando la población. En la imagen se muestra cómo la población de células crece a intervalos iguales de tiempo.



4. Teresa es una estudiante de quinto grado, para la clase de matemáticas su maestra le entregó a ella y a sus compañeros palillos de mondadientes y les pidió que formaran figuras, entonces ella decidió ordenarlos así:



<table>
<tr>
<td>Final o de contraste</td>
<td>1. Para la clase de ciencias naturales Federico sembró una planta. Su profesora le pidió que tomara fotos de la planta cada semana para ver su crecimiento (altura) en centímetros (cm) y organizara la información en una tabla.

<table>
<tr><td>Semana 1</td><td>Semana 2</td><td>Semana 3</td><td>Semana 4</td><td>Semana 5</td><td>Semana 6</td></tr>
<tr><td>3 cm</td><td>6 cm</td><td>11 cm</td><td>18 cm</td><td>27 cm</td><td>38 cm</td></tr>
</table>
2. Observa la siguiente secuencia.

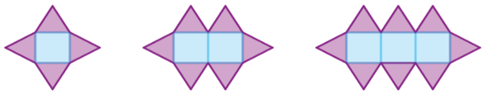



Figura 1 Figura 2 Figura 3</td>
<td></td>
</tr>
</table>

PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

La información, tanto oral como escrita, se procesó utilizando la técnica análisis de contenido, agrupándose las ideas básicas por criterios temáticos (Bernárdez, 1995), y comparando similitudes y diferencias para hacer el análisis. Toda la información se pasó a una matriz de valoración, donde se establecieron los descriptores que permitieron valorar los conocimientos y competencias alcanzados por los estudiantes. Para minimizar la posibilidad de hacer análisis errados, se hicieron entrevistas basadas en las soluciones dadas por los estudiantes a las tareas, pues según Howe (2005) y Radford (2014), las generalizaciones también pueden hacerse adivinando o por tanteo, basados solo en conceptos y razonamientos aritméticos. Luego de la revisión frente a los descriptores, los resultados se compararon con los niveles de algebrización, y a partir de esta comparación, se hizo la descripción, que luego se analizó frente a los referentes teóricos que fundamentan la investigación. Para dar algunos detalles del proceso, se muestran ejemplos de las soluciones de tres niños (Gio, Memo y Ana: nombres ficticios utilizados con el fin de proteger su identidad), desde donde se pueden apreciar algunas generalidades del grupo.

RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

En la fase diagnóstica, las soluciones dadas por los estudiantes se pueden clasificar en dos subgrupos: la mayoría (89.5%) recurrió al conteo o a la construcción término a término, de los elementos de la secuencia, hasta llegar al elemento solicitado. En particular, en las situaciones que involucran secuencias geométricas, iniciaron contando el número de figuras que se mostraban en la situación y luego dibujaban las siguientes figuras, hasta llegar a la de la posición que se les pedía; y en las que involucran secuencias numéricas, hacían el conteo paso a paso, hasta llegar al elemento solicitado. Después de algunos intentos fallidos en la consecución de soluciones adecuadas, tratando de encontrar un elemento en una posición distante, estos estudiantes, comenzaron a identificar el patrón de crecimiento, reconociendo una regla recursiva, que les permitió continuar la secuencia y expresarla en lenguaje natural, icónico o numérico. Las soluciones dadas por este subgrupo, se pueden ubicar en un nivel cero de algebrización. No obstante, otro pequeño subgrupo (10.5%), hizo generalizaciones aritméticas, estableciendo relaciones de variación entre los términos que conforman la secuencia. En concordancia con lo reportado por Butto (2005), las estrategias utilizadas fueron aditivas/multiplicativas o aritméticas/prealgebraicas, con procesos de generalización dados en lenguaje natural, por lo que las soluciones de este otro subgrupo pueden ubicarse en el nivel uno de algebrización. Pero como en Godino *et al.* (2003), ninguno de los dos subgrupos hacía emerger objetos algebraicos.

A continuación, se presenta un fragmento de la entrevista realizada a Gio, al resolver la situación que trata sobre el número de galletas repartidas por Camila.

Entrevistador: Hazme el favor de decirme ¿cómo cambia el número de galletas a medida que cambia el número de cajas?

Gio: El número de cajas va de uno en uno, y el de galletas de doce en doce.

Entrevistador: ¿Cómo hiciste para generar los términos de la secuencia que escribiste en la tabla?

Gio: En la secuencia se ve que los números de galletas van de doce en doce.

Entrevistador: ¿Qué expresión nos puede ayudar a determinar el número de galletas para cualquier número de cajas?

Gio: La expresión es que las galletas van de doce en doce.

Respecto a la solución de Gio, se puede apreciar que completa los términos de la secuencia, expresa numéricamente el siguiente, reconoce una regla recursiva y la escribe en lenguaje natural, es decir, se da cuenta que los términos de la secuencia van de doce en doce, y lo usa para completar la tabla, al hallar los términos siguientes, sin expresar una regla general. Asimismo, no logra establecer una relación explícita entre el número de cajas y el de galletas, pero deja implícita la generalización, al expresar "la expresión es que las galletas van de doce en doce", como puede apreciarse en su manuscrito, mostrado en la figura 2. De acuerdo a los descriptores por niveles, podemos decir que la actividad matemática desarrollada por Gio en la solución de esta tarea, puede ubicarse en un nivel cero de algebrización.

4. Camila empaca galletas en cajas. Ella guarda 12 galletas en cada caja.

Observa la tabla.

Número de cajas	1	2	3	4	5	6
Número de galletas	12	24	36	48	60	72

a. Completa la tabla

b. Explica cómo cambia el número de galletas a medida que cambia el número de cajas. El numero de galletas va de 12 en 12

c. Describe la regla que permite generar los términos de la secuencia presentada en la tabla.

que los números van de 12 en 12

5. Teniendo en cuenta la información del punto anterior.

Número de cajas	1	2	3	...	*n*
Número de galletas	12	24	36	...	?

Escribe qué expresión nos ayudaria a determinar el número de galletas para cualquier número de cajas. Sabiendo que *n* es el número de cajas.

la exprecion es ir de 12 en 12

Figura 2. Solución de Gio a una situación en la prueba diagnóstica.

En el proceso interventivo, en las entrevistas, los estudiantes argumentaban sobre los procesos realizados y, similar a lo reportado por Butto (2005), daban explicaciones adecuadas de cómo los realizaban, con ciertas limitaciones al justificar el porqué de sus acciones, para hacer generalizaciones y encontrar valores de las secuencias para posiciones alejadas. Las soluciones dadas en las primeras cuatro sesiones, tenían como marco referencial el aritmético, puesto que, utilizaban nociones de sus conocimientos aritméticos previos, para dar cuenta de sus progresos en el aprendizaje inicial del álgebra (Gascón, Bosch y Ruiz-Munzón, 2017). En estas sesiones, en las soluciones los procedimientos utilizados eran meramente aritméticos, donde primaba el conteo, algunos llegaron a determinar y utilizar un patrón y, a usar lenguaje simbólico literal, sin realizar las operaciones indicadas, que los llevaran a simplificar las expresiones producidas, llegando a hacer generalizaciones en lenguaje natural. Por lo que atendiendo los niveles de algebrización (Godino *et al*., 2014), las soluciones dadas por los estudiantes, en las primeras cuatro sesiones, se ubicaron entre los niveles, del cero al dos.

A continuación, se muestra un fragmento de la entrevista realizada a Memo, en la cuarta sesión, al resolver la situación donde se le pedía trabajar con la secuencia 5, 9, 13, 17, 21,..

Entrevistador: ¿Cómo encontraste los números que colocaste en la tarjeta 6 y en la tarjeta 7?

Memo: Para llegar al término 6 le sumé 4 más al 21 y para llegar al término 7, le sumé 4 más al 25.

Entrevistador: Encontraste una regla que te permitió continuar la secuencia y hallar, ¿Qué número debe colocarse en la tarjeta 12 y en la 33?

Memo: Sí profe.

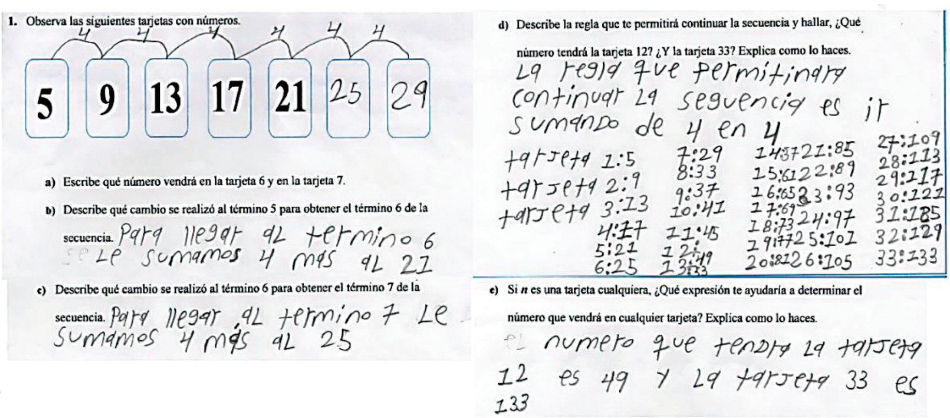
Entrevistador: Hazme el favor de describirla.

Memo: Es ir sumando de 4 en 4 hasta llegar a la tarjeta 12 y seguir sumando 4 hasta llegar a la tarjeta 33, como lo hice aquí –y muestra su manuscrito– entonces, el número que va en la tarjeta 12 es 29 y en la tarjeta 33 es 133.

Entrevistador: ¿Encontraste alguna expresión que te permita encontrar un número cualesquiera de la secuencia?

Memo: Sí profe, sumándole cuatro al anterior, se consigue el siguiente.

Memo, en su solución, encuentra una regla recursiva, que le permite encontrar los términos siguientes de la secuencia, y los expresa en un lenguaje numérico, pero para encontrar términos alejados, utiliza la misma regla recursiva, escribiendo todos los términos hasta llegar al solicitado. En su solución no emergen objetos algebraicos y de acuerdo a los niveles de algebrización esta actividad matemática de Memo se encuentra en un nivel cero, ya que encuentra un patrón, pero no lo usa para generalizar.


1. Observa las siguientes tarjetas con números.

4 4 4 4 4 4

5 9 13 17 21 25 29

a) Escribe qué número vendrá en la tarjeta 6 y en la tarjeta 7.

b) Describe qué cambio se realizó al término 5 para obtener el término 6 de la secuencia. Para llegar al termino 6 se le sumamos 4 más al 21

c) Describe qué cambio se realizó al término 6 para obtener el término 7 de la secuencia. Para llegar al termino 7 le sumamos 4 más al 25

d) Describe la regla que te permitirá continuar la secuencia y hallar, ¿Qué número tendrá la tarjeta 12? ¿Y la tarjeta 33? Explica como lo haces.

La regla que permitinara continuar la seguencia es ir sumando de 4 en 4

tarjeta 1:5
tarjeta 2:9
tarjeta 3:13
4:17
5:21
6:25
7:29
8:33
9:37
10:41
11:45
12:49
13:53
14:57
21:85
15:61
22:89
16:65
23:93
17:69
24:97
18:73
25:101
19:77
20:81
26:105
27:109
28:113
29:117
30:121
31:125
32:129
33:133

e) Si *n* es una tarjeta cualquiera, ¿Qué expresión te ayudaría a determinar el número que vendrá en cualquier tarjeta? Explica como lo haces.

El numero que tendra la tarjeta 12 es 49 y la tarjeta 33 es 133

Figura 3. Solución de Memo en una actividad de la cuarta sesión.

Fue a partir de la quinta sesión, en el desarrollo de actividades donde se pedía determinar los elementos desconocidos de una secuencia geométrica, cuando los estudiantes comenzaron a hacer generalizaciones, con reglas simples, en su gran mayoría ligadas al lenguaje natural o al numérico, y algunos al algebraico. A partir de entonces, empezaron a utilizar la letra como variable, y a hacer algunas transformaciones sobre las expresiones halladas, y como en Vergel (2014), utilizaron acciones de conteo, y operaciones básicas para comprobar y validar las soluciones dadas. Entonces, ante la necesidad de representar y manipular términos desconocidos, empezaron a emerger algunas expresiones algebraicas (Bolea, 2002), y a hacerles pequeñas transformaciones.

A continuación, se muestra un fragmento de la entrevista realizada a Gio, en la quinta sesión de trabajo, al resolver la situación donde se le pedía encontrar el número de círculos para hacer una decoración:

Entrevistador: ¿Cómo hiciste para hallar el número de círculos de cada decoración?

Gio: Partí de observar el comportamiento de los términos dados en la secuencia, como lo escribí aquí –y señala con el dedo su propio escrito– para hallar los círculos de la decoración 12 se multiplica (12×2=24) y para la decoración 35 se multiplica (35×2=70).

Entrevistador: ¿Por qué multiplicas por 2?

Gio: Lo multipliqué por 2 porque 2 es el patrón.

Entrevistador: ¿Cómo supiste que 2 es el patrón?

Gio: Porque cada figura tiene 2 círculos más que la anterior.

Entrevistador: ¿Pudiste determinar una expresión, para encontrar el número de círculos para cualquier número de la decoración?

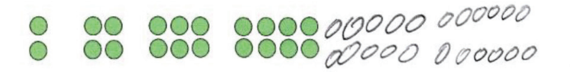
Gio: Sí, la expresión es multiplicar por 2 cada número de la decoración.

Entrevistador: Podrías explicarme cómo lo hiciste

Gio: Como ya le dije profe, multipliqué por 2 el 1, 2, 3, 4, 5, y así sucesivamente hasta el 12 y después hasta el 35.

En la solución dada por Gio, comienza reconociendo una regla recursiva: sumar dos círculos a la decoración anterior, que le permite generar la siguiente figura para cualquier posición de esta, y lo describe combinando lenguaje natural con números, gestos, signos de operación y de agrupación. Las respuestas de Gio muestran, que identifica el 2 como la diferencia entre dos términos consecutivos, en las representaciones producidas para la secuencia y lo utiliza para encontrar un elemento cualquiera de esta. Aunque los rasgos de la generalización realizada en esta fase, son similares a los de la fase diagnóstica, en esta solución, explicita la generalidad, cuando dice "*y así sucesivamente*", además, logra explicar cómo lo hizo, da razones del por qué lo hace, lo que muestra claros rasgos de razonamiento algebraico en su solución (Howe, 2005; Radford, 2006, 2014, Vergel, 2014). Asimismo, Gio hace una conversión al registro analítico-aritmético y luego de algunas transformaciones tipo tratamiento, en que parece encontrar el patrón de regularidad y crecimiento, el cual utiliza para dar sus respuestas. La variedad de transformaciones tipo conversión realizada por Gio en el desarrollo de esta actividad (ver figura 4), deja ver significativos avances en su pensamiento variacional (Cantoral, 2013; Dolores, 2013), pues, además de producir varias representaciones de la secuencia: figural, analítico-aritmética, y del lenguaje coloquial; logra relacionar algunos elementos de estas (Rico, 2009;

Amaya *et al.*, 2016; Duval, 2017), estableciendo una relación de correspondencia entre el número de círculos y la posición de la decoración.


Decoración 1 Decoración 2 Decoración 3 Decoración 4 Decoración 5 Decoración 6

e) ¿Cuántos círculos utilizó Lucía y su mamá para la decoración 6? Explica como lo haces. se utilizaran 12 circulos para la decoracion 6 porque va 2,4,6,8,10,12 y así Podemos hacerlo

f) Describe la regla que permitirá a Lucía y su mamá continuar la secuencia y Hallar. ¿Cuántos círculos necesitan para formar la decoración 12? ¿Y para la decoración 35? Explica como lo haces. Para hallar los circulos dela decoracion 12 semultiplica (12x2=24) y para la decoracion 35 se multiplica (35x2=70) y lo multiplique por 2 porque 2es el patron

2x1=2
2x2=4
2x3=6
2x4=8
2x5=10
2x6=12

g) Ahora, si ***n*** es un número cualquiera de decoración, ¿Qué expresión ayudaría a Lucía y su mamá a determinar la cantidad de círculos que necesitarían para cualquier número de la decoración? Explica como lo haces.

la exprecion es multiplicar por 2 el 1,2,3,4,5 y así sucecibamente

Figura 4. Manuscrito de Gio al comunicar su repuesta a una de las actividades del proceso interventivo.

En la solución dada por Gio a esta actividad, no emerge ningún objeto algebraico, mostrando una forma aritmética de pensar, en uno de sus primeros intentos por acceder al álgebra (Radford, 2014; Kieran *et al.*, 2016), donde el uso del conteo y la determinación de un patrón de regularidad, fueron la base para encontrar el número de círculos que se necesitarían para cada decoración. De acuerdo a los descriptores por niveles (Godino *et al.*, 2014), esta forma de resolución de Gio, permite ubicarlo en el nivel uno de algebrización, pues se adaptó a la tarea con bastante flexibilidad (Gaita y Wilhelmi, 2019), estableció relaciones entre los elementos de la secuencia, y encontró un patrón, que expresó en lenguaje natural, el cual le permitió hallar el número de círculos para las posiciones de la decoración que le fueron solicitadas.

En la solución dada a las actividades del cuestionario final, los estudiantes mostraron un poco más de pericia en los procesos de transición de la aritmética al álgebra: 31.5% encontraron un patrón y lo utilizaron para hallar una expresión algebraica en lenguaje simbólico literal. En particular, Gio en sus soluciones, utilizó técnicas similares a las empleadas en actividades anteriores, esto es, reconocer una regla recursiva y expresarla combinando lenguaje natural con símbolos numéricos, gestos, signos de agrupación y de operación, para determinar los términos de la secuencia. Seguidamente, a partir del análisis de unos pocos casos, encontraba una regla general (un objeto intensivo) que le permitió descubrir un término alejado de la secuencia, como se muestra en la figura 5. Aunque en su proceso de solución cometió algunos errores de escritura (Carrión, 2007), luego generalizó, usando lenguaje simbólico, utilizando la expresión $n \times n + 2$, la que seguidamente transformó en $n^2 + 2$, donde se aprecian características propias del nivel tres de algebrización (Godino *et al.* 2014; Gaita y Wilhelmi, 2019), evidenciándose en él un crecimiento progresivo durante todas las actividades.

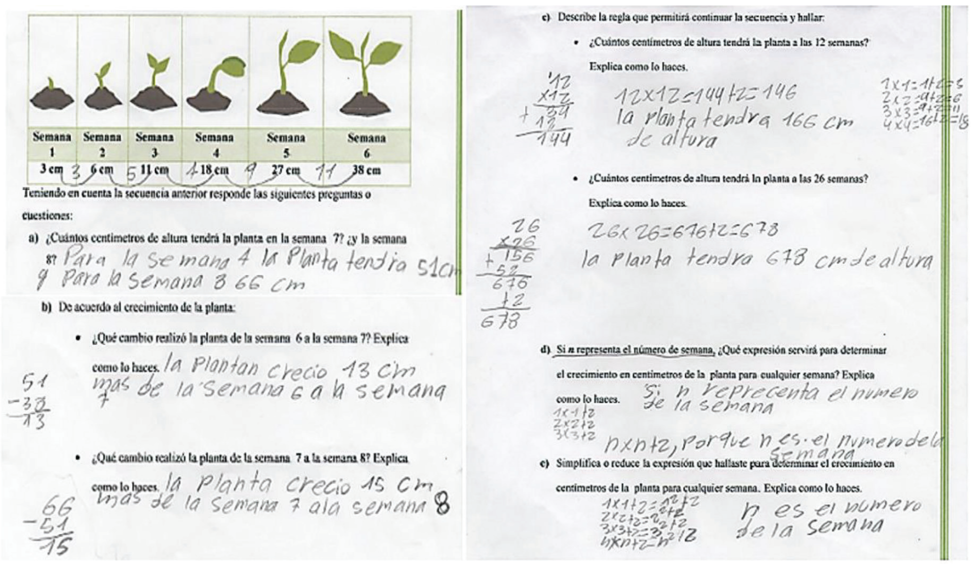


Figura 5. Solución de Gio a una actividad de la prueba final.

Asimismo, en su solución a las actividades del cuestionario final, Ana empieza reconociendo una regla recursiva, la cual expresa en lenguaje natural, combinado con números, utilizando conteo y operaciones aritméticas para determinar términos alejados en la secuencia. En particular, en su solución a la situación del crecimiento de la planta, construye una tabla donde establece la correspondencia entre el número de semanas y la altura en centímetros de esta, partiendo de casos particulares conocidos, hasta encontrar una regla general que expresa en un lenguaje simbólico-literal, que le permite hallar términos alejados, como se muestra en la figura 6. Seguidamente, se muestra parte de la entrevista realizada a Ana al resolver la situación del crecimiento de una planta.

Entrevistador: ¿Qué observas a medida que se va avanzando en la posición de las figuras?

Ana: Que la figura uno tiene 3 centímetros, la figura dos tiene 6 centímetros, y la figura tres tiene 11 centímetros y así...

Entrevistador: ¿Crees que puedes predecir la altura de la planta de la figura 10?

Ana: Sí.

Entrevistador: Entonces, ¿Cuántos centímetros debe tener la planta de la figura 10?

Ana: Tiene 102 centímetros profe.

Entrevistador: Ahora, dime la regla que utilizaste para hallar la cantidad de centímetros que tiene la planta a los 12 y 26 semanas respectivamente.

Ana: Multipliqué el patrón: la semana por la semana y sumé un dos.

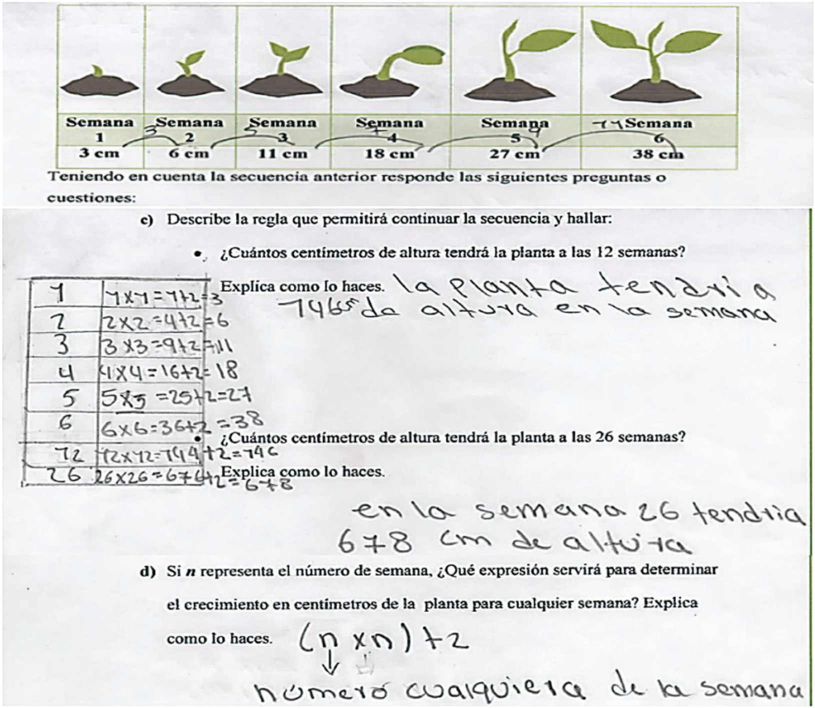
Entrevistador: ¿Podrías escribir una expresión para determinar la cantidad de centímetros que tendría la planta en una semana cualquiera?

Ana: Creo que sí −piensa un rato y escribe en la hoja− $n \times n + 2$

Entrevistador: ¿Por qué crees que sería así?

Ana: Porque n es el número de la semana.

Como puede apreciarse en la solución dada por Ana, inicia mostrando objetos extensivos, considerando casos particulares para cierto número de semanas, pero logra configurar objetos intensivos, haciendo generalizaciones, expresadas en lenguaje simbólico−literal, sin hacer ningún tipo de transformaciones en esta, por lo que su actividad podría ubicarse un nivel dos de algebrización (Aké *et al.*, 2013).



Semana 1	Semana 2	Semana 3	Semana 4	Semana 5	Semana 6
3 cm	6 cm	11 cm	18 cm	27 cm	38 cm

Teniendo en cuenta la secuencia anterior responde las siguientes preguntas o cuestiones:

c) Describe la regla que permitirá continuar la secuencia y hallar:

- ¿Cuántos centímetros de altura tendrá la planta a las 12 semanas? Explica como lo haces.

la planta tendría 146 de altura en la semana

1	1x1=1+2=3
2	2x2=4+2=6
3	3x3=9+2=11
4	4x4=16+2=18
5	5x5=25+2=27
6	6x6=36+2=38
12	12x12=144+2=146
26	26x26=676+2=678

- ¿Cuántos centímetros de altura tendrá la planta a las 26 semanas? Explica como lo haces.

en la semana 26 tendria 678 cm de altura

d) Si n representa el número de semana, ¿Qué expresión servirá para determinar el crecimiento en centímetros de la planta para cualquier semana? Explica como lo haces.

(n x n) + 2

número cualquiera de la semana

Figura 6. Solución dada por Ana a una de las actividades del cuestionario final.

En la solución a las actividades de la prueba final, Memo al igual que el resto de sus compañeros, utiliza estrategias muy similares a las usadas en las soluciones dadas en las fases previas, además, comete varios errores de escritura. En particular, en la situación donde se pedía analizar el crecimiento de una planta (figura 7), Memo intenta encontrar inicialmente una regla recursiva restando un término con el anterior, pero verifica que solo le funciona con el primer término y prueba otra opción que le resultó adecuada para conseguir el patrón, y lo utiliza para encontrar términos alejados en la secuencia. El patrón lo encuentra por inspección inductiva, usando casos particulares, con procedimientos aritméticos expresados en lenguaje natural, combinados con números enteros y signos de operación, sin utilizar lenguaje simbólico-literal. Este análisis, lo lleva a determinar la correspondencia entre el número de semanas, la altura, y el crecimiento por semanas de la planta, así, la actividad matemática desarrollada por Memo al resolver esta situación, podríamos ubicarla en el nivel uno de algebrización (Godino *et al.*, 2014).

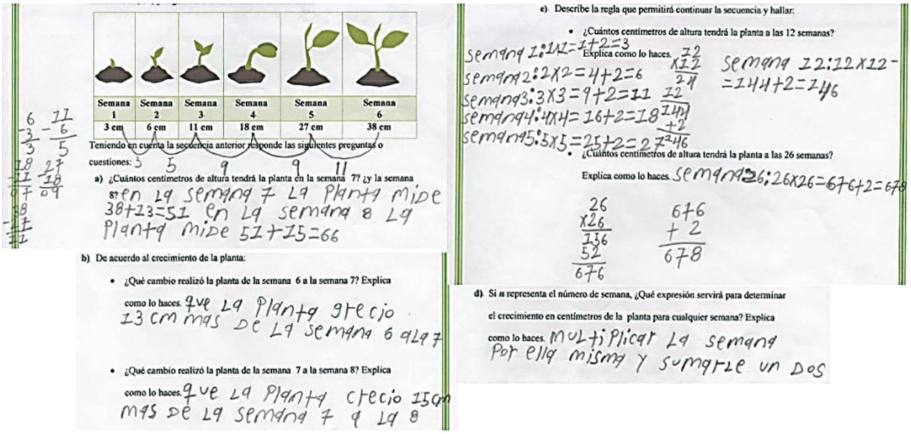


Figura 7. Manuscrito de Memo al responder una actividad del cuestionario final.

La forma en que los estudiantes que lo lograron, obtuvieron la regla que determina el patrón al resolver la prueba final, parece no ser un rasgo que por sí solo sea suficiente para caracterizar la generalización algebraica, pues para que lo sea, además de ver lo general en lo particular, se debe ser capaz de expresarlo algebraicamente (Howe, 2005; Radford, 2006; Kieran, 2004). Según Radford (2006), la generalización de los patrones como una ruta al álgebra se basa en la idea de una correspondencia natural entre el pensamiento algebraico y la forma de generalizarlo, así, pensar algebraicamente es más que pensar en lo general (Kieran, 2004), es pensar sobre lo general, de tal forma que el razonamiento algebraico sea un componente necesario para la generalización, es el uso del simbolismo algebraico para razonar y expresar algo de manera general (Radford, 2006). Por lo que esta forma de solución reportada por este grupo de estudiantes, puede ubicarse entre los niveles cero al dos de algebrización.

De acuerdo con los análisis realizados a las soluciones reportadas por este grupo de estudiantes, se puede decir que la mayoría de los estudiantes se encuentran entre los niveles cero y dos de algebrización. Sin embargo, la actividad matemática predomínate en los estudiantes fue de nivel uno, ya que lograron generalizar patrones en un lenguaje diferente al simbólico-literal, y (excepto Gio), los que utilizaron lenguaje simbólico no hicieron transformaciones tipo tratamiento en la representación algebraica producida.

REFLEXIONES FINALES

En el desarrollo del trabajo vemos que los registros de partida en que se presentan las situaciones, no producen reales diferencias en cómo emerge el razonamiento algebraico en quien aprende. Sin embargo, la posibilidad de establecer conexiones entre diferentes representaciones permite que el simbolismo algebraico emerja al representar los objetos y hacerles transformaciones, pudiéndose evidenciar razonamiento algebraico sin, necesariamente, usar lenguaje simbólico-literal. Por lo que, como dice Radford (2014), el uso de la letra no es condición necesaria ni suficiente para pensar algebraicamente. No obstante, se pueden diseñar y aplicar actividades globales que lleven al estudiante a generalizar patrones, y así, darles la oportunidad de evidenciar su pensamiento algebraico (Radford, 2006), en representaciones diferentes a la analítico-algebraica.

Además, las dificultades presentadas por estudiantes al resolver tareas que impliquen el paso de una forma de razonamiento aritmético a otro algebraico, parecen estimular a investigadores y profesores de matemática educativa, a estandarizar las características del razonamiento aritmético y del algebraico, para diferenciarlos, y así poder establecer si la solución a una tarea matemática, moviliza alguno de los dos modos de pensamiento. Pues la revisión bibliográfica muestra que ha sido ampliamente estudiada la conveniencia de superar la oposición aritmético-algebraico, y se ha generado la necesidad de estructurar los currículos de las instituciones como un continuo epistemológico, más que como el paso de actividades meramente aritméticas a otras donde el álgebra se presenta como un producto acabado (Radford, 2006, 2014; Kieran *et al.*, 2016; Gaita y Wilhelmi, 2019). En este sentido, interesa trabajar la forma de armonizar planes de estudio que faciliten una formación algebraica integral, donde la transición del pensamiento algebraico informal al formal sea lo más simple posible (Cai *et al.*, 2011).

Atendiendo lo anterior, coincidimos con Kieran *et al.* (2016) y Blanton *et al.* (2018) en que el inicio temprano del estudio del álgebra en el currículo de matemáticas, podría ser favorable para los estudiantes, ya que los ayudaría a hacer una transición suave a un estudio más formal del álgebra en grados posteriores. Es decir, no es preciso algebrizar ciertos contenidos matemáticos para enseñar álgebra (Gaita y Wilhelmi, 2019), ya que, con el uso de relaciones funcionales de variación y cambio presentadas en diferentes registros, desde los que se hagan transformaciones semióticas y conexiones entre todos los registros que sea posible, podría facilitarse un acceso moderado a la actividad algebraica. Esto podría llevarnos a sopesar las matemáticas como algo que adquirimos, con las matemáticas con las que convivimos (Castaño *et al.*, 2008; Cantoral, 2013; Dolores, 2013), facilitar su integración en todos los grados y temas (Kaput *et al.*, 2008), y proveer herramientas que permitan enfrentar los desafíos asociados con el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes desde los primeros grados de enseñanza básica (Cai *et al.*, 2011).

Consideramos que, un proceso de inclusión temprana del álgebra elemental en la educación primaria, sugiere el fortalecimiento de algunos aspectos: la forma de abordarla desde los primeros grados, considerar el tipo de tareas que faciliten su desarrollo, y el apoyo a profesores en esta área, en el diseño y aplicación de tareas globales, que ayuden a potenciar en los niños su razonamiento algebraico elemental desde los primeros grados.

CONCLUSIONES

A partir del análisis de la información se puede concluir que el estudio de patrones, a través de secuencias numéricas y geométricas, aportó elementos importantes para el desarrollo del razonamiento algebraico en los estudiantes; llevándolos a analizar los elementos de las secuencias y, al establecer una regla recursiva, encontrar términos faltantes o generalizar un patrón, y en algunos casos, usar la letra como variables mediante notaciones simbólico-literales. Y como se preveía teóricamente, una misma situación fue abordada según diferentes niveles de algebrización (Gaita y Wilhelmi, 2019), utilizando distintas alternativas de solución para llegar a resultados comparables. Así, cada actividad favoreció el uso de diversos lenguajes y en algunos casos, procesos argumentativos bien fundamentados.

Respecto a la pertinencia del marco teórico, observamos que los elementos teóricos fueron importantes, pues los niveles de algebrización (Godino *et al.*, 2014) se convirtieron en parte del proceso interventivo, y las nociones clave (Radford, 2014) ayudaron a clarificar los procesos realizados, ambos, posibilitaron categorizar la actividad matemática de los estudiantes, y dieron direccionamiento a la propuesta. La implementación de la propuesta, permitió un aumento progresivo del poder heurístico en la resolución de problemas en este grupo de estudiantes, quienes dieron variadas y ricas soluciones a las actividades que se les plantearon. Las interacciones discursivas obligaban a los estudiantes a construir argumentos bien fundamentados, pues, buscando defender una postura, o refutar algo con lo que hubiera un desacuerdo, terminaban produciendo y articulando diferentes tipos de representaciones: destacándose el uso de lenguaje icónico, natural, numérico o simbólico-literal. La actividad matemática de la mayoría de los estudiantes se puede ubicar entre los niveles cero a dos de algebrización, destacándose, los niveles uno y el proto-algebraicos de nivel dos, solucionando problemas de valores faltantes (Godino *et al*., 2014).

REFERENCIAS

Aké, L., Godino, J. y Gonzato, M. (2013). Contenidos y actividades algebraicas en Educación Primaria. *Revista Unión,* (33), 39-52.

Amaya, T. Pino-Fan, L. y Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación Matemática, 28*(3), 111-144.

Bernárdez, E. (1995). *El papel del léxico en la organización textual.* Universidad Complutense de Madrid.

Blanton, M., Gardiner, A., Stroud, R., Brizuela, B., Stephens, A, y Knuth, E. (2018). Implementing a Framework for Early Algebra. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds*. (pp. 27-49). Québec University.

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. (Tesis doctoral no pubicada), Universidad de Zaragoza.

Butto, C. (2005). *Introducción temprana al pensamiento algebraico: una experiencia en la escuela primaria.* (Tesis doctoral no pubicada), Cinvestav.

Butto, C. y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática, 16*(1), 113-148.

Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives.* Springer.

Cai, J., Ng, S. F. y Moyer, J. (2011). *Developing Students' Algebraic Thinking in Earlier Grades: Lessons from China and Singapore*. Springer-Verlag.

Carraher, D. y Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Vol. 2. Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM, pp. 669-705.

Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. Secretaría de Educación Pública.

Carrión, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* (11), 19-57.

Castaño, L., García, J., Luján, M., Medina, C., y Ruíz, J. (2008). *Las situaciones de variación y cambio como herramienta para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático desde los primeros grados de escolaridad*. Comunicación presentada en 9° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Valledupar, Colombia.

Dolores, C. (2013). *La variación y la derivada* (2da ed.). Ediciones Díaz de Santos.

Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano*. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales, (2da ed.). Universidad del Valle.

Farfán, R. (2012). *El desarrollo del pensamiento matemático y la actividad docente*. Gedisa.

Gaita, R. y Wilhelmi, M. (2019). Desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental mediante Tareas de Recuento con Patrones. *Bolema, 33*(63), 269-289.

Gascón, J., Bosch, M. y Ruiz-Munzón, N. (2017). El problema del álgebra elemental en la teoría antropológica de lo didáctico. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 25-47). SEIEM.

Godino, J. Aké, L., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219.

Godino, J., Castro, W., y Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *Revista Iberoamericana de educación matemática, 25*, 73–88.

Godino, J. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In: KELLY, A.; LESH, R. (Ed.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517-545). Routledge.

Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior.* Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Howe, R. (2005). *Comments on NAEP Algebra Problems.* Recuperado el 6 de septiembre de 2019 del sitio web: https://www.brookings.edu/wp-content/uploads/2012/04/Howe_Presentation.pdf

Kaput, J., Carraher, D. y Blanton, M. (2008). *Algebra in the early grades.* Routledge.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 18*(1), 139-151.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. y NG, S.F. (2016). *Early Algebra.* 1st ed. Hamburg: Springer.

Koichu, B. y Harel, G. (2007). Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics, 65*(3), 349-365.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Ministerio de Educación Nacional.*

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción al español, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Proyecto Sur.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26*, 257-277.

Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz, A. Méndez (Eds.). *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, Universidad Pedagógica Nacional, November 9 – 12, Vol. 1, pp. 2-21.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Rivera, M., Salgado, G. y Dolores, C. (2019). Explorando las Conceptualizaciones de la Pendiente en Estudiantes Universitarios. *Bolema, 33*(65), 1027-1046. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a03.

Silver, E., y Kenney, P. (2001). *Results from the Sixth Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress*. NCTM.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria (9-10 años)*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

JOSE LUIS BAUTISTA PEREZ

Dirección: Carrera 7 # 7B-23, Urbanización Centenario.
Corozal (Sucre) Colombia

 DOI: 10.24844/EM3301.06

Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria

Towards a characterization of early algebra from the analysis of the contemporary curricula of Early Childhood Education and Primary Education

Nataly Pincheira Hauck,[1] Ángel Alsina[2]

Resumen: En este artículo se analiza la incorporación del álgebra temprana en los currículos de Educación Infantil y Primaria de Estados Unidos, Australia, Singapur y Chile. A partir del método de análisis de contenido se ha realizado un estudio comparativo y se han establecido unas primeras categorías de conocimiento para caracterizar el álgebra temprana en ambas etapas educativas: 1) Educación Infantil: experimentación con elementos u objetos a partir del reconocimiento de atributos para establecer relaciones, seriaciones de patrones de repetición (identificación, construcción y representación) y descripción de cambios cualitativos y cuantitativos; 2) Educación Primaria: comprensión de distintos tipos de relaciones y de patrones, uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas, comprensión del cambio y uso de variables para determinar una constante o incógnita. Se concluye que es necesario que los programas de formación de maestros incluyan estos conocimientos para articularlos adecuadamente en las dos etapas educativas.

Fecha de recepción: 17 de octubre de 2019. **Fecha de aceptación**: 30 de noviembre de 2020.

[1] Universidad de Girona. Facultad de Educación y Psicología. Departamento de Didácticas Específicas. nataly.pincheira@udg.edu. Girona. España. orcid.org/0000-0002-5051-964X

[2] Universidad de Girona. Facultad de Educación y Psicología. Departamento de Didácticas Específicas. angel.alsina@udg.edu. Girona. España. orcid.org/0000-0001-8506-1838

Palabras claves: *álgebra temprana, currículo, pensamiento algebraico, Educación Infantil, Educación Primaria.*

Abstract: This article discusses the incorporation of early algebra in the curricula of Early Childhood and Primary Education in the United States, Australia, Singapore and Chile is analyzed. Based on the content analysis method, a comparative study has been made and the first categories of knowledge have been established to characterize early algebra: 1) Early Childhood Education: experimentation with elements or objects based on the recognition of attributes to establish relationships, seriations based on patterns of repetition (identification, construction and representation) and description of qualitative and quantitative changes; 2) Primary Education: understanding different types of relationships and patterns, using algebraic symbols and mathematical models to represent mathematical situations, understanding change and using variables to determine a constant or unknown. It is concluded that it is necessary for teacher training programs to include this knowledge to adequately articulate it in the two educational stages.

Keywords: *early algebra, curriculum, algebraic thinking, Early Childhood Education, Primary Education.*

1. INTRODUCCIÓN

Numerosas investigaciones dedicadas al estudio del álgebra sugieren la necesidad de ser incorporada en los currículos desde los primeros cursos escolares, dado que su inicio según las propuestas clásicas se considera desde la Educación Secundaria. Con el objeto de distinguir el álgebra propiamente dicha de las actividades generadoras de pensamiento algebraico en las primeras edades de escolarización, se ha acuñado el término *Early-Algebra*, a partir de ahora álgebra temprana, que intenta introducir modos del pensamiento algebraico desde las primeras edades de escolarización (Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 2000, 2008; Molina, 2009). Esta nueva corriente no considera el álgebra como una asignatura, sino como una manera de pensar y actuar en objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas para promover una enseñanza fundamentada en la comprensión de las matemáticas (Carpenter, Franke y Levi 2003; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; Kaput, 1995, 1998, 2000).

A pesar de la importancia que está adquiriendo el álgebra temprana, no existe todavía un consenso en la literatura acerca de su caracterización, ni tampoco de los conocimientos que se incluyen bajo el concepto "álgebra temprana". Sin embargo, son varios los currículos de Educación Infantil y Primaria que han empezado a introducir de forma explícita conocimientos para promover el pensamiento algebraico en las primeras edades. Desde esta perspectiva, nuestro propósito es realizar un estudio comparativo de estos currículos que evidencie qué elementos se consideran para el desarrollo del pensamiento algebraico en las primeras etapas escolares y, más específicamente, qué conocimientos se incluyen para promover el aprendizaje del álgebra temprana o bien cómo evoluciona el álgebra temprana a lo largo de estas etapas.

Desde este prisma, el análisis del currículo resulta relevante tanto para la etapa escolar, ya que determina la formación matemática de los escolares (Rico, Díez, Castro y Lupiáñez, 2011), como para el desarrollo profesional del profesor, puesto que el profesorado debe conocer y manejar las orientaciones curriculares para lograr un aprendizaje efectivo en sus estudiantes. En este sentido, en el marco del modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), Ball, Thames y Pelps (2008) destacan la importancia del conocimiento del currículo como un subdominio del conocimiento pedagógico del contenido. Este subdominio se refiere al "conocimiento de los objetivos, contenidos, fines, orientaciones curriculares, materiales y recursos disponibles para la enseñanza, que permiten al profesor guiar su práctica y seleccionar las tareas adecuadas para el aprendizaje de sus estudiantes" (Ball, *et al.*, 2008, p. 391).

Asumiendo, pues, que el profesor debe conocer el currículo de matemáticas para mejorar la enseñanza de los contenidos, nuestro estudio considera como punto de discusión la presencia y evolución del álgebra temprana en los currículos de Educación Infantil y Primaria, dado que durante los últimos años se ha generado una transformación curricular progresiva en este bloque de contenido. Este cambio conforma un desafío para la formación del profesorado, pues resulta indispensable contar con maestros capaces de asumir estos cambios y de empoderar el desarrollo del pensamiento algebraico desde las primeras edades. Desde esta perspectiva, la finalidad de este artículo consiste en analizar la incorporación del álgebra temprana en los currículos de Educación Infantil y Primaria y caracterizarla, con el propósito de poder establecer orientaciones específicas acerca de la enseñanza del álgebra temprana y, de esta forma, contribuir al desarrollo profesional del profesorado. En concreto, se realiza un estudio comparativo a nivel transversal de las orientaciones curriculares de Educación Infantil y Educación Primaria de Estados Unidos, Australia, Singapur y Chile. Para la selección de estos currículos se ha considerado en primer lugar Estados Unidos, pues es la fuente de referencia del currículo latinoamericano, junto con otros países donde el estudio del álgebra temprana se encuentra de forma explícita en el currículo escolar.

2. ÁLGEBRA TEMPRANA

El álgebra temprana forma parte de una propuesta de cambio curricular que emerge como resultado de diversos estudios que se han desarrollando durante las últimas décadas (Bastable y Schifter, 2007; Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 1998, 2000; Kaput, Carraher y Blanton, 2009). Esta nueva corriente plantea introducir el desarrollo del pensamiento algebraico principalmente desde la Educación Primaria, aunque algunos organismos y autores proponen su incorporación desde niveles inferiores (Davis, 1985; Vergnaud, 1988; Kaput y Blanton, 2001; Carpenter, Franke y Levi, 2003; NCTM, 2003). El motivo de esta propuesta surge ante la necesidad de eliminar la tardía incorporación del estudio del álgebra en la educación secundaria (Carpenter *et al.*, 2003; Kaput 1998).

Kaput (2000) denomina a este proceso como "la algebrización" del currículo, es decir, la integración del razonamiento o pensamiento algebraico a lo largo de toda la escolaridad. Cabe destacar que el introducir el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros cursos de escolarización no significa impartir un curso específico de álgebra, sino más bien "capacitar a los estudiantes mediante el fomento de un mayor grado de generalidad en su pensamiento y una mayor capacidad de comunicar dicha generalidad" (Lins y Kaput, 2004, p. 58). El obtener buenos resultados dependerá de cómo se piense el currículo escolar, pues no existirán cambios si se aprecia como un listado de contenidos, mientras que existirán cambios profundos si se considera como un conjunto de experiencias para los estudiantes (Kilpatrick, 2011).

En este sentido, el propósito que persigue el álgebra temprana no se fundamenta sólo en preparar a los estudiantes para el estudio del álgebra en niveles educativos superiores, sino desarrollar en ellos modos de pensamiento que les permitan alcanzar una comprensión profunda y compleja de las matemáticas escolares, de manera que éstos permeen en otros bloques de contenido como numeración, medida, geometría, etcétera.

Según Blanton y Kaput (2005) el álgebra temprana busca promover en las aulas de clase hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas, por medio de actividades dirigidas a la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas. Así también, se debe propiciar un ambiente escolar en donde los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas e igualmente practiquen habilidades de cálculo.

Del mismo modo, resulta interesante profundizar en la propuesta que plantea Kieran para abordar el desarrollo del pensamiento algebraico:

> El pensamiento algebraico en los primeros cursos académicos implica el desarrollo de diversos tipos de reflexiones como parte de las actividades en los que puede utilizarse la representación simbólica algebraica mediante letras como herramienta, pero no exclusiva, del álgebra, de modo que pueda llevarse a cabo también sin ningún tipo de representación simbólica con letras, como por ejemplo el análisis de las relaciones entre cantidades, identificar estructuras, estudiar el cambio, la generalización, la resolución de problemas, el modelado, la justificación, el ensayo y error y la predicción. (Kieran, 2004, p. 149)

Por otra parte, Radford (2011) asegura que "el pensamiento algebraico temprano se basa en las posibilidades del estudiante de comprender patrones en formas co-variantes desarrolladas culturalmente y utilizarlos para tratar cuestiones de términos remotos y no específicos" (p. 23), es decir, para alcanzar un desarrollo del pensamiento algebraico temprano los estudiantes deben identificar regularidades relacionando tanto estructuras numéricas como espaciales.

Estos planteamientos permiten ampliar y considerar nuevos conocimientos y actividades que faciliten el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra temprana desde las primeras edades, cumpliendo con las metas que este propone.

3. METODOLOGÍA

De acuerdo con las finalidades del estudio, para realizar el análisis de los currículos de Estados Unidos, Australia, Singapur y Chile se ha usado el método de análisis de contenido, que es "una técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto" (Krippenddorff, 1990, p. 28). Esta técnica busca proporcionar conocimientos, nuevas interacciones y una representación de los hechos, en nuestro caso, el progreso del álgebra temprana a nivel curricular. Además, permite descubrir la estructura interna de los textos a través del estudio de su contenido semántico (Rico y Fernández-Cano, 2013) y establecer "un conjunto de procedimientos estricto y sistemático para el análisis riguroso, el examen y la verificación de los contenidos de datos escritos" (Cohen, Manion y Morrison, 2011, p. 563).

Para el desarrollo de la investigación se han considerado las siguientes etapas:

1. Seleccionar las unidades de muestreo, en nuestro caso las orientaciones curriculares vigentes de matemáticas de países avanzados en el estudio del álgebra temprana en Educación Infantil y Primaria: Estados Unidos (NCTM, 2003; CCSSM, 2010), Australia (ACARA, 2015), Singapur (NEL, 2013; MOE, 2012) y Chile (MINEDUC, 2012, 2018).
2. Identificar los contenidos u objetivos de aprendizaje que se encuentran vinculados, de manera implícita o explícita, al álgebra temprana, analizando su despliegue y evolución.
3. Organizar los contenidos u objetivos de aprendizaje de álgebra temprana de los distintos currículos, estableciendo categorías inductivas de conocimiento para la Educación Infantil y Primaria. Para llevar a cabo esta organización y establecer dichas categorías se consideran todos los contenidos u objetivos de aprendizaje que aparecen en los distintos currículos analizados, esto supone, por lo tanto, que una categoría no requiera que los contenidos u objetivos de aprendizaje estén presente en todos los currículos. En las tablas 1 y 2 se muestran algunos ejemplos del proceso de obtención de categorías.

Tabla 1. Ejemplificación de la organización de los contenidos curriculares de álgebra temprana y establecimiento de categorías de conocimiento en Educación Infantil

Unidades de muestreo	**Contenidos**	**Categoría de conocimiento**
NCTM (2003)	Seleccionar, clasificar y ordenar objetos por el tamaño, la cantidad y otras propiedades.	Experimentar con elementos u objetos a partir del reconocimiento de atributos para establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencia, etc.)
NEL (2013)	Emparejar, clasificar y comparar cosas por un atributo (por ejemplo según el color, la forma o tamaño)	

Tabla 2. Ejemplificación de la organización de los contenidos curriculares de álgebra temprana y establecimiento de categorías de conocimiento en Educación Primaria

Unidades de muestreo	Contenidos	Categoría de conocimiento
NCTM (2003)	Describir y extender patrones geométricos y numéricos y hacer generalizaciones acerca de ellos.	Comprensión de distintos tipos de relaciones y patrones
ACARA (2015)	Investigar y describir patrones numéricos formados por conteo de saltos y patrones con objetos.	

4. Establecer un sistema de codificación cuantitativo, por medio de la presencia o ausencia de los contenidos u objetivos de aprendizaje relacionados al álgebra temprana en los diversos currículos analizados, de acuerdo a las categorías inductivas de conocimiento propuestas en la etapa anterior. En concreto, se ha asignado 1 punto en caso de presencia de estos y 0 en caso de ausencia.
5. Sistematizar la información por medio de tablas comparativas y gráficos, cuya lectura permita: a) establecer semejanzas y diferencias a partir del análisis de los contenidos que se promueven en las diversas propuestas curriculares y, b) analizar la presencia de los conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en los currículos de Educación Infantil y Primaria.

4. RESULTADOS

Considerando las finalidades de nuestro estudio, se describen los datos obtenidos a partir del análisis de contenido de los currículos de Estados Unidos, Australia, Singapur y Chile.

4.1 El álgebra temprana en el currículo escolar de Estados Unidos

Los documentos oficiales que rigen el currículo escolar de los Estados Unidos son los Principios y Estándares para la Educación Matemática del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2003), y los Estándares Comunes para las Matemáticas de la *Common Core State Standards for Mathematics* (CCSSM, 2010). Resulta de gran interés profundizar en el análisis de estos documentos, dado que han tenido un alto impacto a nivel internacional al ser considerados modelos de referencia, generando una repercusión en los currículos de diversos países, sobre todo del contexto latinoamericano como por ejemplo Chile.

Los Principios y Estándares del NCTM (2003) proponen estándares de contenidos y estándares de proceso desde el *Prekindergarten* hasta el nivel 12 (3-18 años): los estándares de contenido (Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medida, Análisis de datos y probabilidad) describen explícitamente lo que deberían aprender y, los estándares de proceso (resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación) ponen de relieve las formas de adquisición y uso de dichos contenidos. Estos contenidos y procesos "son también reflejo de la cultura matemática que la sociedad necesita, de la práctica educativa anterior, y de los valores y expectativas que comparten los profesores, los educadores matemáticos, los matemáticos y el público en general" (NCTM, 2003, p. xvii).

El Estándar de álgebra "se centra en las relaciones entre cantidades -incluyendo las funciones-, las formas de representación de relaciones matemáticas y el análisis del cambio" (p. 39), como se muestra en la tabla 3.

Los conocimientos algebraicos en la propuesta del NCTM se desarrollan en diversas fases: a) en los primeros niveles se introduce el trabajo con patrones y relaciones, a partir de la manipulación de objetos y posteriormente utilizando secuencias de sonidos y secuencias numéricas; b) así también, se da paso a las representaciones para desarrollar la comprensión de simbología y modelizar situaciones de adicción y sustracción, hasta alcanzar la descripción de cambios tanto cualitativos como cuantitativos; c) luego se fomenta la construcción de patrones numéricos y geométricos y el uso de funciones por medio de tablas y gráficas; d) posteriormente se introduce el concepto de variable como cantidad desconocida y se exploran relaciones mediante ecuaciones; e) finalmente, se introduce la modelización de situaciones usando representaciones de tipo gráfico y tabular para extraer conclusiones, así como el análisis de situaciones de cambios que experimentan dos variables.

Tabla 3. Estándares de contenido de álgebra temprana para la Educación Infantil y Primaria (NCTM, 2003, p. 402)

	Pre-K-2 (3-8 años)	3-5 (9-11 años)
Comprender patrones, relaciones y funciones	Seleccionar, clasificar y ordenar objetos por el tamaño, la cantidad y otras propiedades. Reconocer, describir y ampliar patrones tales como secuencias de sonidos y formas o sencillos patrones numéricos, y pasar de una representación a otra. Analizar cómo se generan patrones de repetición y de crecimiento.	Describir y extender patrones geométricos y numéricos y hacer generalizaciones acerca de ellos. Representar y analizar patrones y funciones, verbalmente y mediante tablas y gráficas.
Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos	Ilustrar los principios generales y las propiedades de las operaciones, como la conmutatividad, usando números. Usar representaciones concretas, pictóricas y verbales para desarrollar la comprensión de notaciones simbólicas inventadas y convencionales.	Identificar propiedades como la conmutatividad, la asociatividad y distributividad, y emplearlas en el cálculo con números naturales. Representar la idea de variable como cantidad desconocida, por medio de una letra o un símbolo. Expresar relaciones matemáticas mediante ecuaciones.
Utilizar modelos matemáticos para representar y comprender las relaciones cuantitativas	Modelizar situaciones relativas a la adición y sustracción de números naturales, utilizando objetos, dibujos y símbolos.	Modelizar situaciones-problema con objetos, y usar representaciones como gráficas, tablas y ecuaciones para extraer conclusiones.
Analizar el cambio en diversos contextos	Describir cambios cualitativos, como "ser más alto". Describir cambios cuantitativos, como el aumento de estatura de un alumno en dos pulgadas en un año.	Investigar de qué manera el cambio que experimenta una variable se relaciona con el de una segunda variable. Identificar y describir situaciones con tasas de cambio constantes o variables, y compararlas.

Otro referente curricular destacado en Estados Unidos son los CCSSM, que definen "lo que los estudiantes deben entender y poder hacer en su estudio de las matemáticas" (CCSSM, 2010, p.4), y establecen un conjunto de orientaciones que impulsan el desarrollo de una educación de alta calidad. Se organizan en estándares para la práctica matemática y estándares para el contenido matemático. Los estándares para la práctica han sido adaptadas de los cinco estándares de proceso del NCTM (2003) y de los cinco aspectos de competencia descritos en el informe "*Adding It Up*", del National Research Council de Estados Unidos (NRC, 2001): a) Dar sentido a los problemas; b) Desarrollar un pensamiento abstracto y cuantitativo; c) Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros; d) Modelar usando matemáticas; e) Usar herramientas adecuadas de manera estratégica; f) Reconocer la importancia de la precisión; g) Buscar y hacer uso de una estructura; y h) Buscar y expresar regularidades en un razonamiento repetido. Los estándares para el contenido matemático responden a una combinación equilibrada de procedimientos y conocimientos que los estudiantes deben manejar para conectar la práctica con el contenido. Para lograr el desarrollo de los estándares de contenido, se establecieron un conjunto de dominios de acuerdo a cada grado educativo: desde Kindergarten hasta el grado 2 (4-8 años) se incluye conteo y cardinalidad, operaciones y pensamiento algebraico, números y operaciones en base diez, medición de datos, geometría; y en los grados 3, 4 y 5 (9-11 años) sus dominios corresponden a operaciones y pensamiento algebraico, números y operaciones en base diez, números y operaciones: fracciones, medición de datos, geometría.

La presencia del álgebra temprana en los estándares de contenido se evidencia en el dominio de operaciones y pensamiento algebraico, como se aprecia en la tabla 4.

Tabla 4. Estándares de contenidos matemáticos en relación al álgebra temprana en la Educación Infantil y Primaria (CCSSM, 2010)

	Estándares de contenido
Kindergarten (3-6 años)	Entender la suma como unir y sumar, y entender la resta como separar y tomar de.
Grado 1 (6-7 años)	Representar y resolver problemas que involucran sumas y restas. Comprender y aplicar las propiedades de las operaciones y la relación entre la suma y la resta. Sumar y restar hasta 20. Trabaja con ecuaciones de suma y resta.
Grado 2 (7-8 años)	Representar y resolver problemas que involucran sumas y restas. Sumar y restar hasta 20. Trabaja con grupos iguales de objetos para obtener bases para la multiplicación.
Grado 3 (8-9 años)	Representar y resolver problemas de multiplicación y división. Comprender las propiedades de la multiplicación y la relación entre multiplicación y división. Multiplica y divide entre 100. Resuelve problemas relacionados con las cuatro operaciones e identifique y explica patrones en aritmética.
Grado 4 (9-10 años)	Usa las cuatro operaciones con números enteros para resolver problemas. Familiarizarse con factores y múltiplos. Generar y analizar patrones.
Grado 5 (10-11 años)	Escribir e interpretar expresiones numéricas. Analizar patrones y relaciones.

El pensamiento algebraico en los CCSSM (2010) se desarrolla por medio de las siguientes fases: a) los primeros grados se encuentran relacionados fuertemente con la operatoria de adición y sustracción, al profundizar en términos como unir y separar, representar y comprender sus propiedades e incorporar trabajos con ecuaciones de sumas y restas; b) luego se establece la operatoria de multiplicación y división (Grado 3), por medio de la resolución de problemas, la comprensión de sus propiedades y la relación entre ambas operaciones. A partir de las cuatro operaciones básicas se introduce al trabajo con patrones numéricos; c) finalmente se establecen vínculos entre la operatoria y las expresiones numéricas, dando origen a la generalización y al análisis de patrones y relaciones durante los Grados 4 y 5.

A modo general, se puede apreciar que el álgebra temprana está presente en los CCSSM (2010) desde los primeros grados educativos al igual que en el NCTM (2003); sin embargo, éstos últimos resultan ser más coherentes con el estudio del álgebra. Se observan también algunas diferencias en la evolución y propuesta para el desarrollo de ciertos contenidos, como lo es la generación de patrones y relaciones, que se evidencian en grados más avanzados según los CCSSM, mientras que el NCTM los promueve desde edades tempranas.

4.2 El álgebra temprana en el currículo escolar de Australia

El currículo de matemáticas australiano, que depende del organismo *Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority* (ACARA), se enfoca en "desarrollar una comprensión matemática sofisticada y refinada, con fluidez, razonamiento lógico, pensamiento analítico y habilidades para resolver problemas" (ACARA, 2015, p. 4), comenzando su desarrollo desde *Foundation* (5 años) hasta el año 12 (18 años). Se estructura en tres líneas de contenido (Números y álgebra, Medición y geometría, Estadística y probabilidad) y cuatro de competencias (comprensión, fluidez, resolución de problemas, razonamiento). Las líneas de competencia describen las acciones en las que los estudiantes pueden participar al aprender y usar el contenido, proporcionando el lenguaje para construir en el desarrollo del aprendizaje de las matemáticas. Este currículo, además, garantiza el vínculo entre las matemáticas y otras disciplinas, es decir, propicia que las diversas interrelaciones que componen la matemática, tales como, habilidades, conceptos, procesos, propiedades, etc., puedan ser aplicadas más allá del aula de matemáticas.

Los contenidos que se abordan en la línea de Números y Álgebra se agrupan en seis sublíneas de contenido, que se desarrollan de acuerdo al nivel educativo de los estudiantes: Números y valor posicional (F-8), Fracciones y decimales (1-6), Números reales (7-10), Dinero y matemáticas financieras (1-10), Patrones y álgebra (F-10), relaciones lineales y no lineales (7-10). Los contenidos correspondientes a la sublínea de Patrones y álgebra se presentan en la tabla 5.

Tabla 5. Descripciones de contenido de la sublínea "Patrones y álgebra" para la Educación Infantil y Primaria (ACARA, 2015)

	Contenidos
Foundation (5 -6 años)	Ordenar y clasificar objetos familiares y explicar la base de estas clasificaciones. Copiar, continuar y crear patrones con objetos y dibujos.
Año 1 (6-7 años)	Investigar y describir patrones numéricos formados por conteo de saltos y patrones con objetos.
Año 2 (7-8 años)	Describir patrones numéricos e identificar elementos faltantes. Resolver problemas usando oraciones numéricas para sumar o restar.
Año 3 (8-9 años)	Describir, continuar y crear patrones numéricos resultantes de realizar sumas o restas.
Año 4 (9-10 años)	Explorar y describir patrones numéricos resultantes de realizar la multiplicación. Resolver problemas verbales mediante el uso de oraciones numéricas que impliquen multiplicación y división donde no hay resto. Encontrar cantidades desconocidas en oraciones numéricas que involucran suma y resta e identificar oraciones numéricas equivalentes que involucren suma o resta.
Año 5 (10-11 años)	Describir, continuar y crear patrones con fracciones, decimales y números enteros resultantes de realizar sumas y restas. Encontrar cantidades desconocidas en oraciones numéricas que involucren multiplicación y división e identificar oraciones numéricas equivalentes que involucren multiplicación y división.
Año 6 (11-12 años)	Continuar y crear secuencias que involucren números enteros, fracciones y decimales. Describir la regla utilizada para crear la secuencia. Explorar el uso de corchetes y orden de las operaciones para escribir oraciones numéricas.

Los conocimientos que promueve el currículo australiano para alcanzar el desarrollo del pensamiento algebraico están presentes desde la Educación Infantil (*Foundation*) y se desarrollan por medio de las siguientes fases: a) inicialmente con la clasificación de objetos y luego en el trabajo con patrones, desde su forma experiencial, usando materiales, sonidos, movimientos o dibujos; b) luego, al iniciar la Educación Primaria, se profundiza el trabajo con patrones, al describir patrones numéricos y establecer relaciones. El uso de patrones numéricos se extiende y profundiza en toda la Educación Primaria; c) en los niveles posteriores, los estudiantes deben crear patrones numéricos como resultado de realizar operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división, hasta alcanzar la descripción de patrones con fracciones, decimales y números enteros; y d) al finalizar la Educación Primaria, los estudiantes deben ser capaces de crear secuencias numéricas que involucren números enteros y racionales, explicando la regla utilizada. Por otro lado, se evidencia la resolución de problemas al utilizar números en diversos contextos que impliquen operatoria de adición, sustracción, multiplicación y divisiones exactas. Con el desarrollo de este contenido, el currículo realiza una primera aproximación al trabajo con ecuaciones y desigualdades, al encontrar cantidades desconocidas en oraciones numéricas e identificar equivalencias. Finalmente, se explora en el uso de paréntesis y prioridad de las operaciones al escribir oraciones numéricas.

Así pues, para alcanzar el desarrollo del pensamiento algebraico, tanto el currículo de Estados Unidos como el de Australia, proponen el trabajo con patrones desde la Educación Infantil. Para ello, ambos currículos acercan este contenido a la experiencia de los estudiantes, por medio del reconocimiento y descripción de patrones en secuencias de sonido, formas, objetos y dibujos.

Por otra parte, a diferencia del currículo estadounidense, el currículo australiano aborda una cantidad menor de contenidos durante la Educación Primaria, pero profundiza ampliamente en el trabajo con patrones y secuencias. Así también, se da prioridad al trabajo con operaciones numéricas, uso de incógnitas y expresiones equivalentes.

4.3 El álgebra temprana en el currículo escolar de Singapur

El sistema educativo en Singapur se rige por el Ministerio de Educación (MOE, *Ministry of Education*) y comienza a implementarse en la Educación Infantil (4 a 6 años de edad). El desarrollo de la Educación Infantil se fundamenta a partir del marco *Nurturing Early Learners* (NEL), en el que el ámbito de las matemáticas se establece a partir del área de aprendizaje de la Aritmética. Según el marco NEL (2013, p. 6), "el desarrollo de conceptos y habilidades de aritmética, implica ayudar a los niños a conocer y usar conceptos y habilidades, de modo que establezcan relaciones y conexiones que luego puedan aplicar significativamente en sus experiencias diarias". En este sentido, la Aritmética como área de aprendizaje se desarrolla en la Educación Infantil a través de tres líneas centrales: Relaciones y patrones simples, Conteo y sentido numérico, Formas básicas y conceptos espaciales simples.

El estudio del álgebra temprana se ve incorporado explícitamente en la línea de Relaciones y patrones, donde se conocen y establecen relaciones simples a través del desarrollo de habilidades y conceptos, tales como emparejar, clasificar, comparar y ordenar. Así también, el trabajo con patrones permite a los niños desarrollar sus capacidades de pensamiento lógico, las cuales son fundamentales para comprender el concepto de número (NEL, 2013).

El plan de estudio de matemáticas de Educación Primaria pone especial énfasis en cinco componentes (comprensión conceptual, dominio de habilidades, procesos matemáticos, metacognición y actitudes) y está organizado en tres líneas de contenido: Números y álgebra, Medición y geometría, Estadística. La línea de contenido de Números y álgebra se divide en sublíneas de acuerdo a cada nivel educativo (Números enteros, Dinero, Fracciones, Decimales, Porcentajes, Relaciones proporcionales, Tasa y velocidad). Los contenidos de álgebra que se evidencian a lo largo del currículo (tabla 6) están ligados principalmente a la sublínea de contenido de Números Enteros, sin embargo, en el nivel de Primaria 6 se presenta una sublínea específica para el estudio del álgebra temprana.

Tabla 6. Contenidos en relación al estudio del álgebra temprana en currículo de Singapur de Educación Infantil (NEL, 2013) y Educación Primaria (Ministry of Education Singapore, 2012)

	Contenidos
Kindergarten (4-6 años)	Emparejar, clasificar y comparar cosas por un atributo (por ejemplo según el color, la forma o tamaño) Poner las cosas en orden según el tamaño o la longitud y eventos de secuencia Reconocer, extender y crear patrones simples (por ejemplo: patrón AB)
Primaria 1 (6-7 años)	Números enteros: Números hasta el 100 Comparar y ordenar números Patrones en secuencias numéricas Números ordinales (primero, segundo hasta el décimo) y símbolos (1º, 2º, 3º, etc.)
Primaria 2 (7-8 años)	Números enteros: Números hasta el 1000 Comparar y ordenar números Patrones en secuencias numéricas Números pares e impares
Primaria 3 (8-9 años)	Números enteros: Números hasta 10.000 Comparar y Ordenar números Patrones en secuencias numéricas

Primaria 4 (9-10 años)	Números enteros: Números hasta el 100.000 Comparar y ordenar números Patrones en secuencias numéricas
Primaria 5 (10-11 años)	Relaciones: Notación, representación e interpretación de $a{:}b$ y $a{:}b{:}c$, donde a, b y c son números enteros, excluyendo las relaciones que implican fracciones y decimales Relaciones equivalentes Dividir una cantidad en una relación determinada Expresar una relación en su forma más simple Encontrar la proporción de dos o tres cantidades dadas Encontrar el término que falta en un par de relaciones equivalentes Resolver problemas de palabras en dos pasos en relación con la proporción
Primaria 6 (11-12 años)	Álgebra: Uso de letras para representar un número desconocido Notación, representación e interpretación de expresiones algebraicas simples, tales como: $a \pm 3$, $a \times 3$ ó $3a$, $a{:}\,3$ ó $\frac{a}{3}$ Simplificar expresiones lineales simples excluyendo los paréntesis Evaluar expresiones lineales simples por sustitución Resolver ecuaciones lineales simples que implican un coeficiente de números enteros sólo en contextos simples

La presencia del álgebra temprana en las orientaciones curriculares de Singapur se manifiesta en las siguientes etapas: a) la Educación Infantil se ve marcada por el reconocimiento de patrones simples y relaciones de números por medio de la clasificación, orden y comparación de objetos, b) mientras tanto, en la Educación Primaria el desarrollo curricular de estos contenidos se vincula al estudio de los Números enteros. Los Números enteros se trabajan de forma gradual, partiendo desde el 100 en Primaria 1 hasta el 10.000 en Primaria 4. Así pues, se establece en cada uno de estos niveles la comparación y orden de estos números, dando paso a la descripción y creación de patrones a partir del análisis de las secuencias numéricas que se registran; c) por otra parte, en Primaria 5, los contenidos relacionados con el álgebra temprana se manifiestan a través de la sublínea de Relaciones, haciendo uso de la notación algebraica para representar el concepto de razón, estableciendo relaciones equivalentes para introducir el concepto de proporción, y con ello determinar el término desconocido en relaciones equivalentes; d) luego, en el nivel de Primaria 6, se dedica de forma preferente una sublínea de contenido al estudio del álgebra temprana por medio del lenguaje algebraico al emplear letras para representar una cantidad desconocida, y traducir a números y símbolos expresiones del lenguaje común. Así también, se origina el uso de expresiones lineales simples al evaluar expresiones algebraicas por sustitución y reducir términos semejantes por medio de la simplificación. El desarrollo del pensamiento algebraico finaliza en Educación Primaria con la resolución de ecuaciones lineales de primer grado en contextos simples.

A modo general, los contenidos que promueve el currículo de Singapur para alcanzar el desarrollo del pensamiento algebraico desde las primeras edades se fundamentan, en gran medida, en el uso de patrones y sucesiones numéricas, en sintonía con los currículos de Estados Unidos y Australia.

Por otro lado, tanto las orientaciones curriculares de Singapur como de Australia, vinculan el estudio del álgebra temprana a los números, al ser considerados como parte de una sola línea de contenidos. Ambos currículos destacan la importancia de trabajar estos contenidos en forma simultánea, dado que uno complementa el estudio del otro, es decir, la enseñanza de los números requiere del álgebra y el estudio del álgebra requiere de la comprensión de los números.

4.4 El álgebra temprana en el currículo escolar de Chile

En Chile, el Ministerio de Educación (MINEDUC) plantea el currículo para el desarrollo de la Educación Infantil a partir de las Bases Curriculares para la Educación Parvularia (MINEDUC, 2018), las cuales constituyen un referente a nivel nacional donde se "define principalmente qué y para qué deben aprender los párvulos desde sus primeros meses de vida hasta el ingreso de la Educación Básica" (p. 9).

Los objetivos de aprendizaje que proponen estas Bases Curriculares se organizan en tres ámbitos de experiencia: Desarrollo personal y social, Comunicación integral, Interacción y comprensión del entorno. Este último ámbito de aprendizaje alberga el núcleo Pensamiento Matemático, haciendo referencia a los diferentes procesos a través de los cuales los niños interpretan y explican los diversos elementos y situaciones del entorno, tales como, ubicación en el espacio-tiempo, relaciones de orden, comparación, clasificación, seriación, identificación de patrones, etc., como también, a la construcción de la noción de número y el uso inicial de la función ordenadora y cuantificadora del mismo.

Para efectos de este estudio, nos centraremos en los objetivos curriculares relacionados con la enseñanza del álgebra temprana correspondientes al 3° nivel curricular, nivel de Transición (tabla 7), referido a niños de 4 a 6 años de edad.

Por otra parte, la implementación del currículo escolar para la Educación Básica (6 a 12 años) se fundamenta a partir de las Bases Curriculares Primero a Sexto Básico (MINEDUC, 2012). La asignatura de matemáticas tiene como propósito "enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en todos los estudiantes" (MINEDUC, 2012, p. 214). Para desarrollar el pensamiento matemático se establecen cuatro habilidades relacionadas entre sí: resolver problemas, argumentar y comunicar, modelar y representar. Estas habilidades representan un rol fundamental en la adquisición de nuevas destrezas, conceptos y en la aplicación de conocimientos para resolver problemas rutinarios y no rutinarios, propios de la matemática y de otros ámbitos. Así también, la adquisición de nuevos conceptos en la asignatura de matemáticas se organiza a través de cinco ejes temáticos: Números y operaciones, Patrones y álgebra, Geometría, Medición, Datos y probabilidades.

El eje de patrones y álgebra pretende que los estudiantes expliquen y describan relaciones de todo tipo, entre números, formas, objetos y conceptos. El uso de patrones, observados en secuencia de objetos, imágenes o números que representan regularidades, debe ser representado de manera concreta, pictórica y simbólica, desde donde los estudiantes deben ser capaces de transitar de una forma de representación a otra.

La tabla 7 muestra los objetivos de aprendizaje vinculados al álgebra temprana que plantean las Bases Curriculares del Ministerio de Educación para la Educación Parvularia y Educación Básica.

Tabla 7. Objetivos de aprendizaje en relación al álgebra temprana en la Educación Parvularia (MINEDUC, 2018) y Educación Básica (MINEDUC, 2012)

	Objetivos de Aprendizaje
3º Nivel de Transición (4-6 años)	Crear patrones sonoros, visuales, gestuales, corporales u otros, de dos o tres elementos. Experimentar con diversos objetos estableciendo relaciones al clasificar por dos o tres atributos a la vez (forma, color, tamaño, función, masa, materialidad, entre otros) y seriar por altura, ancho, longitud o capacidad para contener. Emplear cuantificadores, tales como: "más que", "menos que", "igual que", al comparar cantidades de objetos en situaciones cotidianas.

1º Básico (6-7 años)	Reconocer, describir, crear y continuar patrones repetitivos (sonidos, figuras, ritmos...) y patrones numéricos hasta el 20, crecientes y decrecientes, usando material concreto, pictórico y simbólico, de manera manual y/o por medio de software educativo. Describir y registrar la igualdad y la desigualdad como equilibrio y desequilibrio, usando una balanza en forma concreta, pictórica y simbólica del 0 al 20, usando el símbolo igual (=).
2º básico (7-8 años)	Crear, representar y continuar una variedad de patrones numéricos y completar los elementos faltantes, de manera manual y/o usando software educativo. Demostrar, explicar y registrar la igualdad y la desigualdad en forma concreta y pictórica del 0 al 20, usando el símbolo igual (=) y los símbolos no igual (>, <).
3º Básico (8-9 años)	Generar, describir y registrar patrones numéricos, usando una variedad de estrategias en tablas del 100, de manera manual y/o con software educativo. Resolver ecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones y un símbolo geométrico que represente un número desconocido, en forma pictórica y simbólica del 0 al 100.
4º Básico (9-10 años)	Identificar y describir patrones numéricos en tablas que involucren una operación, de manera manual y/o usando software educativo. Resolver ecuaciones e inecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones, comprobando los resultados en forma pictórica y simbólica del 0 al 100 y aplicando las relaciones inversas entre la adición y la sustracción.
5º Básico (10-11 años)	Descubrir alguna regla que explique una sucesión dada y que permita hacer predicciones. Resolver problemas, usando ecuaciones e inecuaciones de un paso, que involucren adiciones y sustracciones, en forma pictórica y simbólica.
6º Básico (11-12 años)	Demostrar que comprenden la relación entre los valores de una tabla y aplicarla en la resolución de problemas sencillos: a) identificando patrones entre los valores de la tabla b) formulando una regla con lenguaje matemático Representar generalizaciones de relaciones entre números naturales, usando expresiones con letras y ecuaciones. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, utilizando estrategias como: a) usar una balanza b) usar la descomposición y la correspondencia 1 a 1 entre los términos en cada lado de la ecuación y aplicando procedimientos formales de resolución.

El álgebra temprana está presente en todos los niveles del currículo escolar chileno. La adquisición del aprendizaje del álgebra en los estudiantes se evidencia a partir del progreso de diversas etapas: a) comenzando en el nivel de transición para la Educación Parvularia con la indagación en diversos patrones (sonoros, visuales, gestuales, etc.) y, estableciendo relaciones de clasificación y cuantificación a partir de diversos objetos; b) posteriormente en los primeros niveles de la Educación Básica se inicia el desarrollo de un trabajo más amplio con reconocimiento y descripción de patrones repetitivos, para avanzar hacia el registro de patrones numéricos de forma manual y/o software educativos por medio de tablas; c) para luego descubrir y formular reglas con lenguaje matemático a partir de una sucesión para realizar predicciones e indagar en el trabajo con ecuaciones e inecuaciones que involucre adiciones y sustracciones; d) hasta finalizar la Educación Básica con la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita, aplicando procedimientos formales.

Si bien, el tratamiento que recibe el álgebra en el currículo escolar chilenos para la Educación Infantil y Primaria se ve influenciado fuertemente por las directrices que proponen los *Principles and Standard for School Mathematics* (NCTM, 2003), no se ha considerado abordar de manera más específica la modelización de problemas utilizando tablas, gráficas y ecuaciones y, el análisis de situaciones de cambio por medio del uso de variables.

4.5 ¿Qué conocimientos promueve el currículo escolar para desarrollar el pensamiento algebraico? Hacia una caracterización del álgebra temprana

A partir del análisis de las diversas propuestas curriculares podemos evidenciar el despliegue y evolución de los conocimientos que se ven implicados en el estudio del álgebra temprana de algunos currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria que incluyen explícitamente conocimientos de esta naturaleza. Para alcanzar el desarrollo del pensamiento algebraico, estos currículos proponen abordar en cada nivel educativo diversos conocimientos por medio de la adquisición de conceptos y habilidades. El bloque de álgebra temprana impulsa el tratamiento de diversos contenidos, estableciendo ciertas diferencias en el grado de profundización y prioridad que estos consiguen a lo largo del currículo escolar.

En relación a la Educación Infantil, y con base a poder caracterizar el álgebra temprana y analizar su presencia o ausencia en los currículos de esta etapa, se han establecido tres categorías de contenidos a partir de la revisión curricular realizada:

- Experimentar con elementos u objetos a partir del reconocimiento de atributos para establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencia, etc.).

- Seriación a partir de patrones de repetición: Identificación, construcción y representación del patrón.
- Descripción de cambios cualitativos y cuantitativos.

A partir de éstas categorías, hemos clasificado los contenidos propuestos en las orientaciones curriculares. La figura 1, muestra las diferencias respecto a la presencia de los conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en la Educación Infantil en los currículos contemporáneos considerados en este estudio.

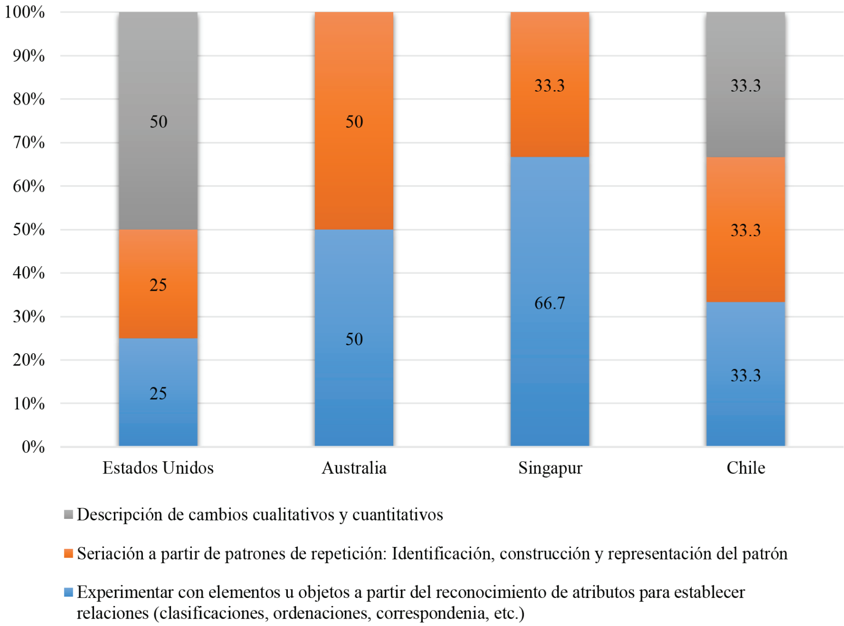


Figura 1. Presencia de los conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en la Educación Infantil.

El conocimiento relacionado a la experimentación con elementos u objetos a partir del reconocimiento de atributos para establecer relaciones se evidencia en todos los currículos contemporáneos, alcanzando una mayor presencia (por encima del 65%) en el currículo de Singapur. Una menor presencia presenta el conocimiento correspondiente a la descripción de cambios cualitativos y cuantitativos (no supera el 50%), dado que sólo se observa en los currículos de

Estados Unidos y Chile, siendo el conocimiento con mayor predominancia para el currículo de Estados Unidos, quedando ausente en los currículos de Australia y Singapur.

El conocimiento correspondiente a seriación a partir de patrones de repetición está presente en todas las orientaciones curriculares, pero su presencia no excede el 50%.

Cabe señalar que el currículo australiano muestra un equilibrio en la presencia de los conocimientos que promueve el currículo para el desarrollo del álgebra temprana en la Educación Infantil, considerando la experimentación con elementos para establecer relaciones y la seriación a partir de patrones. A su vez en el currículo chileno, la presencia de los conocimientos que se establecen para alcanzar el pensamiento algebraico en la Educación Infantil se desarrolla de manera proporcional.

Por otra parte, para realizar el análisis comparativo de los currículos de Educación Primaria se han considerado las categorías de conocimientos importantes de álgebra temprana para esta etapa propuestos por Alsina (2019):

- La comprensión de distintos tipos de relaciones (de equivalencia, de orden, etc.) y de patrones (de crecimiento, de decrecimiento, etc.).
- El uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas.
- La comprensión del cambio.
- Además, a partir del análisis de las orientaciones curriculares se ha incorporado otra categoría: el uso de variables para determinar una constante o incógnita, dado que al revisar los contenidos que promueven las orientaciones curriculares, especialmente en los últimos niveles de Educación Primaria, se plantea iniciar la comprensión conceptual respecto de los diferentes usos de la variable como cantidad desconocida, ya sea para determinar el término que falta en un par de relaciones equivalentes, determinar una cantidad desconocida en oraciones numéricas, determinar una proporción, resolver ecuaciones lineales e inecuaciones, entre otros.

A partir de las categorías de conocimiento propuestas, hemos clasificado los contenidos revisados en las orientaciones curriculares. La figura 2, muestra las diferencias relacionadas con la presencia de los conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en la Educación Primaria en los currículos de los diferentes países analizados en este estudio.

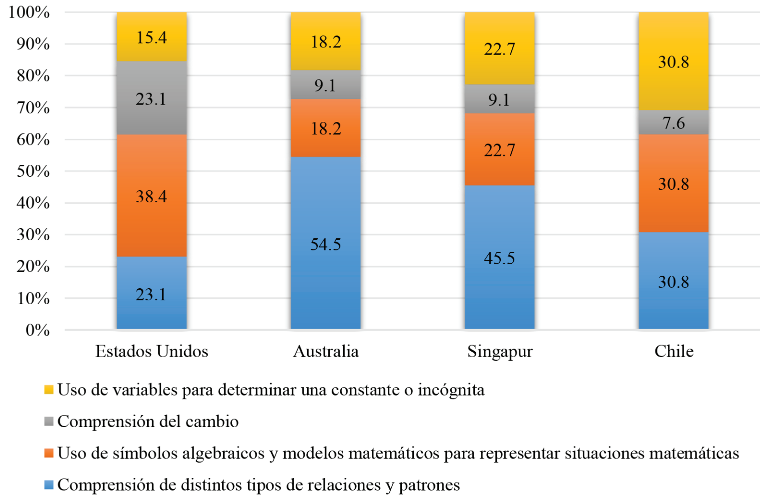


Figura 2. Presencia de los conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en la Educación Primaria.

Los resultados obtenidos muestran una mayor presencia del conocimiento vinculado a la comprensión de distintos tipos de relaciones y patrones en los currículos de Australia y Singapur (por encima del 45%). En el currículo de Estados Unidos, la mayor presencia de los conocimientos se relaciona al uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones (alcanzando 38,4%). En el caso de Chile, tres de los cuatro conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en la Educación Primaria se desarrollan en forma proporcional a lo largo del currículo escolar, con una presencia del 30,8%. Finalmente, se observa una presencia menor del conocimiento relacionado a la comprensión del cambio (por debajo del 25%) en los currículos de Estados Unidos, Australia, Singapur y Chile.

La revisión de los currículos contemporáneos nos ha permitido realizar una primera aproximación hacia la caracterización del álgebra temprana. A partir de este análisis y considerando los referentes teóricos estudiados, realizamos una primera caracterización del álgebra temprana como *la capacidad de desarrollar modos de pensamiento algebraico durante las primeras edades en situaciones vinculadas tanto al álgebra propiamente como a otras áreas del currículo de matemática, tales como números, geometría, medida, etc. Para empoderar estos modos de pensamiento algebraico, se debería capacitar a todos los niños y niñas de Educación Infantil para experimentar con elementos u objetos a partir del* *reconocimiento de atributos con el propósito de establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencia, etc.), realizar seriaciones a partir de patrones de repetición (identificación, construcción y representación del patrón) y describir cambios cualitativos y cuantitativos; y se debería capacitar a todos los niños y niñas de Educación Primaria para comprender distintos tipos de relaciones (de equivalencia, de orden, etc.) y de patrones (de crecimiento, de decrecimiento, etc.), usar símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas, comprender el cambio y usar variables para determinar una constante o incógnita.*

5. CONSIDERACIONES FINALES

En este artículo se ha presentado un análisis de la incorporación del álgebra temprana en las etapas de Educación Infantil y Primaria (4 a 12 años de edad aproximadamente) a nivel curricular. Para ello, se han analizado las orientaciones curriculares de países que incluyen explícitamente este bloque de contenido desde los primeros años de escolaridad. Esta revisión ha permitido, por una parte, caracterizar el álgebra temprana a partir de los conocimientos que fomentan el desarrollo del pensamiento algebraico en Educación Infantil y Primaria y, por otra, realizar un estudio comparativo que evidencie la presencia de estos conocimientos, a modo de itinerario vertical a lo largo de todo el currículo escolar.

A modo de síntesis, los conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en Educación Infantil son: experimentación con elementos a partir del reconocimiento de atributos para establecer relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencias, etc.); seriaciones a partir de patrones de repetición (identificación, construcción y representación del patrón); y descripción de cambios cualitativos y cuantitativos y; en Educación Primaria: comprensión de distintos tipos de relaciones (de equivalencia, de orden, etc.) y de patrones (de crecimiento, de decrecimiento, etc.); uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas; comprensión del cambio; y uso de variables para determinar una constante o incógnita.

Por otra parte, los resultados obtenidos muestran que el desarrollo del pensamiento algebraico se encuentra estrechamente relacionado con el tratamiento y evolución que reciben los contenidos matemáticos vinculados a la enseñanza del álgebra en los distintos niveles educativos. En este sentido, el estudio del álgebra temprana en la Educación Infantil se ve marcada por la experimentación con elementos u objetos a partir del reconocimiento de atributos para establecer relaciones, con una presencia media del 43,8%, mientras que el conocimiento con menor presencia corresponde a la descripción de cambios cualitativos y cuantitativos, con una presencia media del 20,8%. En la Educación Primaria se profundiza mayoritariamente en la comprensión de distintos tipos de relaciones y patrones, teniendo una presencia media del 38,5%, mientras que el conocimiento con menor presencia es la comprensión del cambio, con una presencia media del 12,2%.

Todos los currículos que hemos analizado enfatizan la importancia del desarrollo de los patrones y relaciones como base para construir un itinerario algebraico desde la Educación Infantil a Primaria. Por ello, es necesario establecer una estrecha coordinación entre ambas etapas educativas para garantizar la continuidad de los objetivos establecidos en las orientaciones curriculares y lograr una enseñanza eficaz del álgebra temprana desde las primeras edades, que asegure las bases para su posterior profundización en la educación secundaria.

Así también, dado los cambios que han sufrido los planes curriculares escolares durante los últimos años, consideramos que es necesario ofrecer a los futuros maestros y a los maestros en activo experiencias de formación que incorporen aspectos que permitan reconocer y promover el desarrollo del pensamiento algebraico en sus estudiantes. Estas experiencias de formación deben suponer, por una parte, el desarrollo y reflexión sobre tareas matemáticas de carácter algebraico, así como estrategias para propiciar su enseñanza, mediante la representación de situaciones y problemas con patrones, secuencias, uso de expresiones simbólicas formuladas con variables, modelización, funciones, proporcionalidad, expresiones equivalentes, planteamiento de fórmulas sencillas y resolución de ecuaciones.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, Folio N° 72200447.

REFERENCIAS

ACARA (2015). The Australian Curriculum: Mathematics. Recuperado de: https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años).* Graó.

Andréu, J. (2002). *Las técnicas de Análisis de Contenido: Una revisión actualizada*. Editorial Fundación Centro de Estudios Andaluces.

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelp, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bastable, V y Schifter, D. (2007). Classroom stories: examples of elementary students engaged in Early Algebra. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 165-184). Lawrence Erlbaum Associates.

Blanton M. L., y Kaput J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic y algebra in elementary school*. Heinemann.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). NCTM e IAP.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2019). Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5. *Estudio de Educación y Desarrollo, 42*(3), 479-522

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. y Brizuela, B. M. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. Presentado en *the Twenty–second annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Tucson, Arizona.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Routledge.

Common Core State Standars for Mathematics (2010). Common Core State Standards Initiative. http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf

Davis, R. B. (1985). ICME-5 Report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behaviour, 4*, 195-208.

Hill H. C., Ball D.L. y Schilling S.G. (2008): Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Kaput, J. (1995). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. *Paper presented at the Annual. Meeting of the National Council of Teachers Mathematics*. Boston MA.

Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Routledge.

Kaput, J. y Blanton, M. (2001). Student achievement in algebraic thinking: A comparison of third-graders' performance on a state fourth-grade assessment. En R. Speiser, C.Maher, y C. Walter (Eds.), *Proceedings of the 23rd Annual Meeting of the Qorth American Chapter of the Psychology of Mathematics Education*, 1, 99-108.

Kaput, J. J., Carraher, D. W., y Blanton, M. L. (2009). Algebra in the Early Grades. Taylor & Francis Group.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator, 8*, 139-151.

Kilpatrick, J. (2011). En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 125-130). Springer-Verlag.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y Práctica*. Ediciones Paidós ibérica, S.A.

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. En K. Stacey, H. Click, M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI study conference* (pp.47-70). Kluwer Academic Publishers.

Ministerio de Educación (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática*. Unidad de Curriculum y Evaluación.

Ministerio de Educación (2018). *Bases Curriculares 2018: Educación Parvularia*. Unidad de Curriculum y Evaluación.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

NRC (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. The National Academies Press.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 17-24). PME.

Rico, L., Díez, A., Castro, E. y Lupiáñez, J. L. (2011). Currículo de matemáticas para la educación obligatoria en España durante el periodo 1945-2011. *Siglo XXI, 29*(2), 139-172.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática* (pp.1-22). Comares.

Singapore, Republic of. Ministry of Education (2012). *Mathematics Syllabus: Primary on to six*. Curriculum Planning and Development Division. Ministry of Education.

Singapore, Republic of. Ministry of Education (2013). *Nurturing Early Learners: A Curriculum for Kindergartens in Singapore: Numeracy: Volume 6.* Ministry of Education.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algebre. In C. Laborde (Eds.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l'informatique* (pp. 189-199). La Pensée Sauvage.

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números. Revista de Didáctica de las matemáticas,* 97, 51-67.

Nataly Pincheira Hauck

Dirección: Universidad de Girona. Facultad de Educación y Psicología.
Departamento de Didácticas Específicas

 DOI: 10.24844/EM3301.07

Construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos: un estudio exploratorio con estudiantes de Educación Primaria

Building sample spaces linked to different events: an exploratory study with primary school students

Luis Armando Hernández-Solís,[1] Carmen Batanero,[2] María M. Gea,[3] Rocío Álvarez-Arroyo[4]

Resumen: Se presenta un estudio exploratorio en que se investiga la construcción del espacio muestral asociado a varios tipos de sucesos. Se analizan las respuestas de 55 estudiantes costarricenses de 6º curso de educación primaria (entre 11 y 12 años), 29 de una escuela privada y 26 de otra pública. Mediante dos ítems de elaboración propia, uno en contexto de urnas y otro de ruletas, se les pide construir el espacio muestral compatible con la descripción de un suceso seguro, probable, equiprobable e imposible. Se categorizan las respuestas atendiendo al tipo de suceso que tendría lugar, teniendo en cuenta los espacios muestrales que construyen, y analizando las diferencias en los dos contextos y en las dos escuelas. Las tareas más sencillas fueron construir un espacio muestral compatible con un suceso posible y equiprobable, mientras que pocos estudiantes construyen correctamente un espacio muestral que corresponda al suceso seguro e imposible. Estos resultados apoyan otras investigaciones previas que indican la dificultad que para los estudiantes tienen los conceptos de seguro e imposible.

Fecha de recepción: 09 de junio de 2020. **Fecha de aceptación:** 02 de noviembre de 2020

[1] Universidad Estatal a Distancia-Costa Rica, lhernandez@uned.ac.cr, orcid.org/0000-0003-2956-8102
[2] Universidad de Granada, batanero@ugr.es, orcid.org/0000-0002-4189-7139
[3] Universidad de Granada, mmgea@ugr.es, orcid.org/0000-0002-5229-0121
[4] Universidad de Granada, rocioaarroyo@ugr.es, orcid.org/0000-0002-3201-8542

Palabras clave: *tipos de sucesos, intuiciones, espacio muestral, alumnos de educación primaria.*

Abstract. We present an exploratory study in which we analyse the construction of the sample space associated with various types of events. We analyse the responses of 55 students from 6th degree of primary education, 29 of them from a private school and 26 from a public school. We propose them two items one in the urn context and another in roulettes context, in which the students are asked to build the sample space compatible with the description of a certain, probable, equiprobable and impossible event. The responses are categorized according to the type of event that would take place, when taking into account the sample spaces the children construct, and we analyse the differences in the two contexts and schools. The simpler tasks were building a sample space compatible with a possible and equiprobable event, while few students correctly constructed a sample space corresponding to the certain and impossible event. These results support other previous research that indicates the difficulty for students of the concepts of certain and impossible.

Keywords: *types of events, intuition, sample space, primary school students.*

INTRODUCCIÓN

Numerosos autores, entre otros Fischbein (1975) y Fischbein y Gazit (1984), resaltaron el papel de la enseñanza para educar las intuiciones en probabilidad, que con frecuencia se desarrollan inadecuadamente sin una instrucción específica, y que son necesarias para tomar decisiones correctas en la vida cotidiana y profesional.

En estas situaciones es con frecuencia posible medir la incertidumbre de un cierto fenómeno por medio de la probabilidad, que es un instrumento para expresar, cuantificar y modelizar esta incertidumbre (Pratt y Kazak, 2018). Consecuentemente, una finalidad principal de la enseñanza de la probabilidad es proporcionar al niño experiencia con las situaciones aleatorias que le permitan manejarse en un mundo incierto, donde estos fenómenos están presentes en las actividades más variadas (Jones, Langrall y Money, 2007). Esta necesidad ha repercutido en el currículo de matemáticas, donde se ha incorporado, en las últimas décadas, la probabilidad en la educación primaria (Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority, 2013; Common Core State Standards Initiative, 2010, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, España, 2014; National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Además, la probabilidad se incluye en el currículo de matemáticas por ser una rama de esta ciencia que enriquece las restantes e interacciona con ella (Franklin *et al.* 2007).

En Costa Rica se aprobaron nuevos programas escolares de Matemática en 2012, en donde el área de Estadística y Probabilidad adquirió un relieve mucho mayor, respecto a los anteriores currículos nacionales, que incluían contenidos de probabilidad de forma muy reducida en educación primaria. Ello incidía en la poca trascendencia que se les daba a estos temas que, además, no tenían continuidad en educación secundaria. El aumento de más tópicos de probabilidad en los nuevos programas escolares de Matemática del Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012) tienen como propósito "...formar en el pensamiento aleatorio y en el desarrollo de capacidades para abordar el azar, lo impredecible, la incertidumbre, características que participan en el conocimiento y en la vida de múltiples maneras" (p.55). Se justifica este énfasis señalando "El lugar relevante que se da a esta área obedece al papel que juega la información y el manejo del azar en la sociedad moderna" (p. 55).

Vásquez y Alsina (2015; 2017) sugieren que esta incorporación plantea un desafío, pues muchos profesores actuales de educación primaria no han recibido suficiente formación en probabilidad. En su trabajo indican que algunos necesitan mejor preparación en nociones básicas de probabilidad –tales como experimento aleatorio, espacio muestral, suceso probable o seguro–. Esta carencia ha sido también evidenciada en Costa Rica (Alpízar *et al.*, 2012; Alpízar, Chavarría y Oviedo, 2015). Debido a la poca relevancia de estos contenidos en planes de estudio anteriores, tampoco hay investigaciones sobre el aprendizaje de la probabilidad a nivel escolar en Costa Rica y las realizadas en otros contextos son escasas.

Con el fin de orientar al profesor en el tipo de tareas adecuadas a los estudiantes que cursan la educación primaria, hemos iniciado un proyecto de investigación dirigido a conocer el razonamiento probabilístico típico de estos estudiantes. En concreto, en este trabajo nos centramos en estudiantes de 6º curso de educación primaria (edades entre 11 y 13 años), eligiendo este curso porque con él se concluye esta etapa educativa. Además, el grupo de estudiantes que forma la muestra han seguido el currículo actual de Matemática (MEP, 2012), que a partir de 2015 se aplicó de forma completa en todos los niveles educativos. En concreto, los contenidos de probabilidad en la educación primaria que han seguido los estudiantes de la muestra son:

> Primer ciclo (1º a 3º cursos): Identificar situaciones aleatorias y seguras dentro de la cotidianidad y eventos asociados con ellas. Clasificar eventos aleatorios en más o menos probables para situaciones o experimentos particulares. Identificar eventos de acuerdo con los resultados simples que están vinculados con ellos (p. 147).
> Segundo ciclo (4º a 6º cursos): Identificar eventos más probables, menos probables o igualmente probables de acuerdo con el número de resultados simples pertenecientes a cada evento. Determinar probabilidades elementales vinculadas con eventos particulares. Plantear y resolver problemas vinculados con situaciones aleatorias (p. 247).

Puesto que las investigaciones anteriores sobre el razonamiento probabilístico de los estudiantes de esta edad se han realizado cuando ellos no habían recibido enseñanza de la probabilidad, nuestra investigación aporta información original, que puede ser comparada con los resultados de dichos estudios. Nuestro trabajo, además, se enfoca, tanto en el lenguaje del azar, cuyo conocimiento es considerado por Watson y Moritz (2013) una parte básica de la cultura estadística, como en la interpretación que los estudiantes realizan del espacio muestral en un experimento aleatorio sencillo. Específicamente evaluamos su conocimiento de los términos suceso seguro, imposible, posible y equiprobable, cada uno de los cuales corresponde a un concepto; además, exploramos la forma en que los estudiantes relacionan estas nociones con el conjunto de resultados de un experimento aleatorio simple (que matemáticamente sería el espacio muestral).

Para evaluar el conocimiento de los términos mencionados en las investigaciones previas a la nuestra, se pide al niño escribir o identificar una frase con cada una de las palabras posible, imposible, seguro o indicar un sinónimo de las mismas. En nuestro trabajo se pedirá construir un espacio muestral con un número pequeño de sucesos, de modo que un cierto suceso descrito en el enunciado de la tarea corresponda a un suceso seguro, posible, equiprobable o imposible en dicho experimento. Se comparan, además, los espacios muestrales construidos por los estudiantes en el contexto de ruletas y de urnas; así como los resultados respecto al tipo de institución educativa, privada o pública. Nos interesamos por el espacio muestral, pues como Keren (1984) indica, los estudiantes construyen espacios muestrales informales, que no son siempre los esperados por el investigador y que es necesario conocer qué espacios muestrales construyen para comprender sus estrategias en la resolución de problemas de probabilidad.

FUNDAMENTOS

Intuición y lenguaje de la probabilidad

Puesto que la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria es básicamente intuitiva y depende sustancialmente del lenguaje que los estudiantes dominan, dos puntos a tener en cuenta en nuestro trabajo son las intuiciones que llevan al tema y el lenguaje que se utiliza en la clase de probabilidad.

Respecto a las intuiciones, Fischbein (1987) las considera parte de conducta inteligente. Las describe como adquisiciones cognitivas que intervienen en las acciones cotidianas y guían el razonamiento. El autor diferencia entre intuiciones primarias (que se adquieren sin enseñanza, a partir de la experiencia) y secundarias (que son consecuencia de la instrucción); cada uno de estos tipos de intuiciones pueden, a su vez, ser correcta o incorrecta. Fischbein (1975) indica que algunas personas adquieren intuiciones incorrectas en probabilidad que son muy difíciles de cambiar a partir de una cierta edad, por lo que es conveniente identificarlas a tiempo, para darles ocasión de corregirlas. En nuestro trabajo analizamos la intuición que el niño tiene del espacio muestral, es decir, del conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio sencillo y cómo relaciona este espacio muestral con un suceso seguro, posible, equiprobable o posible. Cabe señalar que, aunque los estudiantes han recibido instrucción en probabilidad, el tipo de tareas que se les presentan en los ítems 1 y 2 no forman parte de la enseñanza recibida, de acuerdo con la información proporcionada por los docentes a cargo de los grupos y la revisión de los libros de texto utilizados.

Puesto que los estudiantes de la muestra están recibiendo instrucción en probabilidad, es importante considerar el lenguaje que ellos utilizan, pues en la educación primaria los conceptos matemáticos se introducen mostrando ejemplos, a partir del lenguaje propio de la edad y contexto. Poco a poco, se dota a estos ejemplos y a las definiciones informales construidas por los estudiantes de mayor abstracción (Schleppegrell, 2007). El lenguaje tiene también una gran importancia, tanto para la comunicación de ideas matemáticas, como para la resolución de problemas, ya que los objetos matemáticos no son ostensivos y necesitan ser representados mediante diferente lenguaje (Godino, Batanero y Font, 2007). Por otro lado, Vygotsky (2012) considera que el lenguaje está unido al pensamiento y que su adquisición es una parte central en el aprendizaje, que es para el autor, un proceso social.

Hernández (2015) resalta la importancia de conocer el vocabulario que los alumnos asocian a las situaciones aleatorias y a la probabilidad, ya que algunos términos que utilizamos en matemáticas no tienen el mismo significado en su uso coloquial fuera del aula. Entre los términos asociados a la probabilidad que tienen esta diferencia se sitúan los investigados en este trabajo, ya que cuando se usa en una frase la palabra "seguro" no siempre se quiere decir que el hecho descrito se producirá, mientras que en probabilidad el suceso seguro incluye todos los sucesos elementales del espacio muestral y, por tanto, ocurre siempre.

Igualmente, en algunas investigaciones que han analizado el lenguaje probabilístico en los libros de texto, por ejemplo, en Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013) y Ortiz, Albanese y Serrano (2016), se sugiere que el lenguaje verbal se usa para sugerir un significado específico de la probabilidad. Por ejemplo, los términos caso favorable o juego equitativo están ligados al significado clásico, mientras que frecuencia y repetición están asociados al frecuencial. También se reitera que hay palabras del lenguaje ordinario, entre ellas las usadas en nuestro trabajo, que no tienen un sentido equivalente en matemáticas.

ANTECEDENTES DEL TRABAJO

Las investigaciones sobre el lenguaje de probabilidad se han llevado a cabo en un periodo en que la probabilidad no se enseñaba en la escuela primaria y se han realizado en muchos casos con estudiantes mayores que los que forman parte de nuestro estudio. Por ejemplo, Green (1983), en un estudio con 3000 estudiantes ingleses de 11 a 16 años, les propuso un cuestionario que recoge versiones en papel y lápiz de muchos de los experimentos realizados con dispositivos físicos por Piaget e Inhelder (1951). Uno de los apartados de su cuestionario evaluaba el conocimiento del lenguaje de la probabilidad por parte de los estudiantes. Concretamente, analizaron varios términos, entre ellos algunos equivalentes a los usados en nuestro trabajo, específicamente "no puede ocurrir" (para nosotros imposible), "probable", "improbable", "posible", "cincuenta por ciento de probabilidades" o "igual posibilidad" (que sería equivalente a equiprobable), "siempre ocurre" (para nosotros seguro). Las tareas propuestas fueron pedir al niño explicar con sus propias palabras qué significa el término, dar sinónimos de las palabras o escribir una frase utilizándola. El autor obtuvo en los estudiantes de 6º curso 49% de respuestas correctas para el significado de "no puede ocurrir", 22% en "siempre ocurre", 84% en "posible" y 18% en "igual posibilidad".

La investigación de Green (1983) fue replicada por Cañizares (1997) con 320 estudiantes españoles de 10 a 14 años, y la autora obtuvo en los estudiantes de 6º curso 46,2% de respuestas correctas para el significado de “no puede ocurrir”, 23% en “siempre ocurre”, 81% en “posible”, 43% en “igual posibilidad”. Sus resultados fueron mejores que los del estudio de Green (1983), encontrándose en ambos casos la mayor dificultad en comprender la idea de suceso seguro (siempre ocurre) e igual posibilidad (equiprobable).

Nacarato y Grando (2014) realizaron entrevistas a 12 estudiantes de 6º curso de Educación Primaria en Sao Paulo, Brasil, a los que pidieron ordenar en una escala de mayor a menor probabilidad los términos improbable, poco probable, probable y muy probable. Esta experiencia fue sugerida anteriormente por Ernest (1984), quien también añadió que se podría pedir a los estudiantes asignar a cada una de estas palabras un número o fracción entre 0 y 1. Nacarato y Grando indicaron que ninguno de los estudiantes ordenó los términos en la forma esperada por los investigadores, siendo lo más frecuente cambiar el orden de probable y muy probable.

Watson (2005) resalta el hecho de que algunos estudiantes interpretan la probabilidad del 50% como que cualquier resultado puede ocurrir, en vez de asociarla a un experimento con dos sucesos equiprobables. En vez de ello, lo ligan con un experimento con dos resultados, aunque no sean equiprobables e incluso a experimentos con más de dos resultados, por ejemplo, lanzar un dado.

Watson y Moritz (2010), por su parte, analizaron los resultados a dos preguntas de una encuesta realizada con 2700 estudiantes australianos de 5 a 11 años, donde se pedía evaluar frases tomadas de las noticias en los medios de comunicación, utilizando la escala cualitativa de probabilidad, es decir, utilizando palabras que expresasen la probabilidad del suceso, como “probable”, “imposible”, “muy o poco probable” y colocándolas en la recta numérica entre 0 y 1. La mayoría de los estudiantes situó el término imposible al comienzo de la escala de probabilidad, pero no siempre en el extremo, e igualmente no siempre se interpretó seguro como algo que siempre ocurre. Se observó también que al avanzar la edad mejoraba la ordenación de los términos dados por parte de los estudiantes.

Hernández-Salmerón, López-Martín y Batanero (2017) realizan una investigación con 89 estudiantes de 1º y 2º curso de educación secundaria obligatoria en España (13-14 años), utilizando un cuestionario sobre el conocimiento del lenguaje del azar. Una de las tareas fue escribir sinónimos de las palabras “imposible”, “posible”, “igual posibilidad”, “poca posibilidad”, “seguro”, “muy posible”. El porcentaje de estudiantes que no pudo dar ningún sinónimo correcto para imposible fue de 48,2% en 1º curso y de 33% en el 2º curso, mientras que estos porcentajes crecieron al 73,2% y 60,6% para seguro. Las autoras indican que algunos alumnos interpretaron como seguro frases como "puede que sí o puede que no ocurra" e indica la necesidad de dedicar algún tiempo a discutir con los estudiantes el significado que en matemática se da a los términos relacionados con el azar.

En todas estas investigaciones se pregunta a los estudiantes por sinónimos de los términos probabilísticos, se les pide ordenarlos en una escala de probabilidad, o bien se les piden describan sucesos que sean probables, imposibles, seguros, etc. Nosotros tomaremos una aproximación diferente, pues les presentamos una tarea, con el dibujo de un dispositivo aleatorio (ruletas o urnas) cuya composición deben fijar para que un determinado suceso tenga una cierta probabilidad, que se les precisa mediante una expresión del lenguaje verbal probabilístico.

También tendremos en cuenta las investigaciones sobre la comprensión del espacio muestral que es, de acuerdo a Langrall y Mooney (2005), fundamental para el razonamiento probabilístico. Aunque Piaget e Inhelder (1951) sugieren que los estudiantes de 7 años pueden listar todos los resultados de un experimento aleatorio sencillo, Borovcnik y Bentz (1991) encontraron algunos estudiantes de 11 años que no llegaban a completar esta tarea. La comprensión del espacio muestral según Horvath y Lehrer (1998) requiere coordinar las siguientes capacidades: a) reconocer todos los posibles resultados de un experimento, b) poderlas describir en forma completa y c) relacionar el espacio muestral con la mayor o menor posibilidad de cada resultado del experimento. Los autores indican que algunos estudiantes no llegan a comprender este último punto.

Por otro lado, Langrall y Money (2005) proponen una escala de valoración de la comprensión de los estudiantes del espacio muestral, pidiéndoles que completen el espacio muestral de un experimento; por ejemplo, completar todas las posibilidades que pueden ocurrir al lanzar un dado. El nivel más bajo, donde se sitúan muchos estudiantes, consiste en concentrarse simplemente en un suceso, por ejemplo, para construir el espacio muestral en un experimento consistente en extraer fichas de una urna, considerar solo fichas del mismo color. Ello se debe a que su razonamiento es determinista y no tienen en cuenta todos los sucesos que podrían ocurrir en un experimento. El segundo nivel se alcanza cuando se es capaz de listar varios sucesos diferentes del espacio muestral, pero no todos; el tercero si se consigue describir exhaustivamente todos los sucesos posibles de un espacio muestral y el más elevado ser capaz de realizar una lista de los elementos del espacio muestral de un experimento compuesto sencillo, por ejemplo, lanzar dos monedas al aire.

La clasificación de los casos como favorables o desfavorables para que ocurra un cierto suceso, es un paso crucial para determinar la probabilidad del mismo. Sin embargo, Francisco y Maher (2005) y Nilsson (2007) muestran que es una tarea compleja para los estudiantes y que algunos que pueden listar todos los sucesos de un espacio muestral tienen dificultad en determinar el numerador y denominador para aplicar la regla de Laplace, porque no separan bien los casos en favorables y desfavorables.

MÉTODO

La muestra estuvo formada por 55 estudiantes (27 mujeres y 28 hombres) de 6º curso de educación primaria, 40 de 11 años y 15 de 12 años, de los cuales 29 realizaban sus estudios en una institución privada y 26 en una institución pública (estatal-gratuita), ambas de la provincia de Cartago, Costa Rica. Las instituciones son muy cercanas geográficamente, a menos de dos kilómetros de distancia; y tienen aproximadamente la misma cantidad de estudiantes en educación primaria (rondan los 450 estudiantes). Los estudiantes de la escuela privada provienen de diferentes cantones y distritos de la provincia, a diferencia de la escuela pública, donde más del 90% de los estudiantes de la muestra pertenecen al distrito donde está ubicada la escuela. Aunque no se hizo un estudio económico, nuestro conocimiento de las instituciones educativas indica que existen marcadas diferencias en este aspecto entre los estudiantes de una y otra escuela.

Ambas instituciones se rigen por el programa de estudios de Matemática (MEP, 2012). Sin embargo, mientras que en la escuela pública se imparten ocho lecciones semanales de Matemática, según lo que establece el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica; en la escuela privada se imparten solo cinco lecciones semanales de Matemática, una de ellas dedicada específicamente al área de Estadística y Probabilidad, desde el 2016. Las docentes encargadas de los cursos nos informaron que ambos grupos desarrollaron los contenidos sugeridos en las orientaciones curriculares descritas en la introducción de este trabajo a partir del mismo libro de texto, dándole gran relevancia a este recurso y a las actividades "lápiz y papel".

A dicha muestra se aplicó un cuestionario con diferentes preguntas sobre probabilidad. En este trabajo se analizan los dos ítems presentados en la figura 1, que son de creación propia y tratan de la construcción de un espacio muestral y de los conceptos de suceso seguro, imposible, posible y equiprobable en un contexto de juego de azar. Otros ítems relacionados con la comparación de probabilidades en contexto de urnas de han publicado en Hernández-Solís, Batanero, Gea, M. y Álvarez-Arroyo (2021).

Para resolver la tarea, el estudiante ha de pensar en un experimento aleatorio que se pueda realizar con el dispositivo dado (ruleta o urna) y donde el suceso pedido tenga la probabilidad expresada verbalmente. Para ello, debe imaginar un conjunto dicotómico de posibilidades divididas en dos subconjuntos (casos favorables y casos desfavorables).

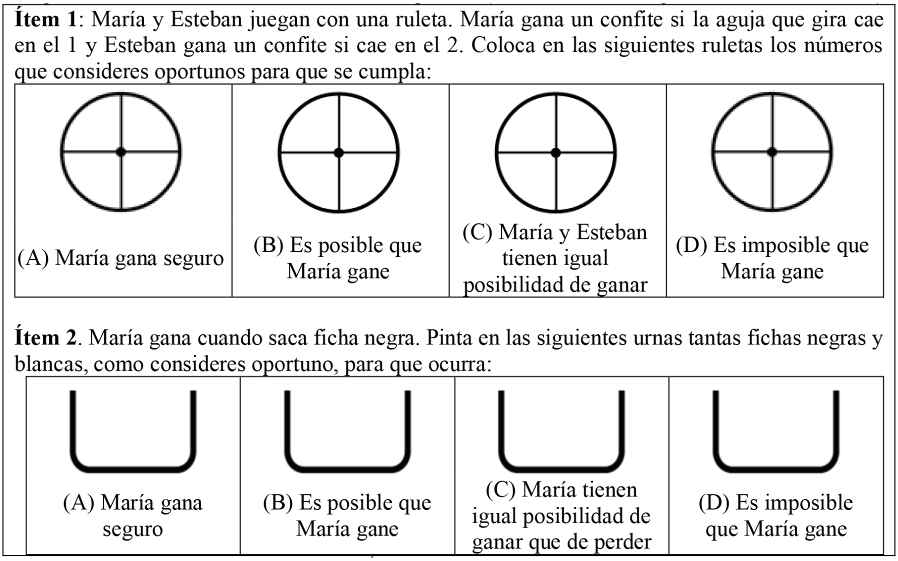


Figura 1. Ítems analizados en este trabajo.

De acuerdo a la figura 1, se utilizarán los contextos de ruletas, divididas en cuatro partes iguales y fichas de dos colores en urnas. Según Cañizares (1997), el contexto de la ruleta favorece las comparaciones de tipo parte-todo, mientras el contexto de fichas utilizado en el segundo ítem, donde se puede aplicar la regla de Laplace, favorece la comparación entre casos favorables y casos desfavorables (comparación parte-parte). Cada uno de los ítems presenta cuatro apartados; en el primero se pide generar un espacio muestral donde el suceso "María gana" sea seguro, en el segundo que sea posible, en el tercero que sea un suceso equiprobable a su contrario y el cuarto que sea un suceso imposible.

En el primero de los ítems el juego se realiza utilizando la representación de una ruleta donde, si los espacios de división fuesen de diferente amplitud, no se podría aplicar la regla de Laplace, sino la probabilidad geométrica para calcular probabilidades, y esto excede lo establecido para este nivel educativo, por lo que se ha optado en dividir cada ruleta en cuatro sectores circulares con igual área. El estudiante puede crear un espacio muestral de hasta cuatro sucesos diferentes (cuatro números distintos), en cuyo caso todos los sucesos elementales serían equiprobables, e igualmente la probabilidad de ganar el juego de los niños imaginarios del enunciado. Pero si alguno de los números se repite (por ejemplo, construir una ruleta numerada 1, 1, 2, 3), se consigue un espacio muestral donde el suceso "1" tiene doble probabilidad que los restantes, y por tanto María doble probabilidad de ganar que Esteban. Para conseguir el suceso seguro se debe repetir cuatro veces el número 1 ("María gana seguro") y para lograr el imposible ("Es imposible que María gane"), se debe excluir el número 1 de todos los sectores. En resumen, la resolución de la tarea requiere la intuición o el conocimiento del experimento aleatorio, y suceso, sucesos posibles del experimento, suceso favorable (gana María) y desfavorable (no gana María), así como de la intuición de seguro, posible, equiprobable e imposible, según el apartado.

En el segundo ítem (contexto de urnas), la única restricción es que el espacio muestral consta de fichas negras y blancas, y María gana sacando la ficha negra. Por ello se puede construir un espacio muestral con cualquier número de fichas, aunque es de esperar que el estudiante piense en un número pequeño de ellas. De nuevo ha de pensar en el experimento aleatorio y sus posibles resultados, así como en los casos favorables, casos desfavorables y los sucesos del tipo dado en el apartado. Para lograr el suceso seguro, debe rellenar la urna sólo con fichas negras y para el imposible sólo con fichas blancas, en cualquier cantidad para los dos tipos de suceso. El suceso equiprobable constará del mismo número de fichas blancas y de fichas negras, y el posible cualquier composición con al menos una ficha de cada color.

Los cuestionarios se aplicaron a los estudiantes durante una de sus clases de matemáticas, con asistencia del profesor y de uno de los investigadores, quien explicó a los estudiantes lo que se les pedía en la tarea. Los estudiantes las completaron con interés e individualmente por escrito, y la actividad sirvió para la clase de probabilidad, resultando de interés para los estudiantes y el profesor. En el momento de la aplicación del cuestionario, los niños estaban comenzando el curso lectivo, por lo que no habían estudiado contenidos de probabilidad correspondientes al 6º curso.

Recogidos los datos, se analizaron los cuestionarios y se clasificaron los tipos de respuesta en cada apartado, de acuerdo al tipo de espacio muestral construido.

RESULTADOS

A continuación, se describen algunas posibles respuestas correctas e incorrectas para cada uno de los apartados de los ítems, presentando algunos ejemplos de respuestas de los estudiantes que participaron en el estudio.

Espacio muestral que corresponde al suceso seguro: La respuesta al primer apartado de cada ítem sería correcta si se construye un espacio muestral formado sólo por casos favorables al suceso gana María, lo que asegura que María gane el juego. En la figura 2, presentamos dos ejemplos, uno para cada ítem. En el primero de ellos, el niño numera todos los sectores de la ruleta con el número uno y en el segundo llena la urna con cuatro fichas negras. El primer ejemplo es la única posibilidad correcta para que el suceso “gana María” sea seguro en el primer ítem, mientras en el segundo caso se podría haber utilizado cualquier cantidad de fichas negras.

Correcto, ruletas	Correcto, urnas
 (A) María gana seguro	 (A) María gana seguro

Figura 2. Espacios muestrales correctos construidos para un suceso seguro.

En los ejemplos incorrectos que se muestran en la figura 3, se propone un espacio muestral con diferentes tipos de sucesos, incluyendo, en consecuencia, casos favorables y casos desfavorables al suceso “gana María”. Por tanto, no puede asegurarse que María ganará.

En el ejemplo incorrecto 1 presentado para el contexto de la ruleta, la probabilidad de ganar María sería $1/4$, igual que la de su compañero, quien también tiene un caso favorable entre cuatro y por tanto no es seguro que María gane el juego, sino que se ha construido el espacio muestral que corresponde a un suceso equiprobable (tanto María como Esteban tienen igual probabilidad de ganar). En el ejemplo incorrecto 2, el estudiante construye un espacio muestral para el suceso "muy probable que María gane", ya que aparecen tres casos favorables de cuatro posibles, por lo que la probabilidad de que María gane es $\frac{3}{4}$. En el ejemplo incorrecto 3, se incluyen cinco casos favorables frente a dos desfavorables, y en el ejemplo 4, se presentan siete casos favorables y uno desfavorable.

Hay que señalar, que en los ejemplos incorrectos del 2 al 4 los estudiantes confunden muy probable con seguro, confusión que ya apareció en las investigaciones de Cañizares (1997), Green (1983) y Hernández-Salmerón *et al.* (2017). Nuestra explicación alternativa para estos razonamientos es un sentido de justicia, unido a la intuición que se aproxima al concepto de suceso seguro, ya que se da a María una alta probabilidad de ganar; sin embargo, se dejan la posibilidad de que gane Esteban, pues quizás no sería natural para el niño dejarlo sin oportunidades de ganar, ya que participa en el juego.

Incorrecto 1, ruletas	Incorrecto 2, ruletas	Incorrecto 3, urnas	Incorrecto 4, urnas
 (A) María gana seguro	 (A) María gana seguro	 (A) María gana seguro	 (A) María gana seguro

Figura 3. Espacios muestrales incorrectos construidos para un suceso seguro.

Espacio muestral que corresponde a un suceso posible. En el segundo apartado de cada ítem se pide construir un espacio muestral en el que María tiene posibilidad, pero no seguridad, de ganar el juego. Por tanto, se admite una amplia variedad de soluciones correctas, pues excluido el caso de imposibilidad y el de seguridad, consideraríamos correctas todas las demás respuestas.

En esta tarea no se encontraron espacios muestrales incorrectos para el suceso posible, aunque hubo graduación en el sentido que algunos estudiantes produjeron espacios muestrales que proporcionaban sucesos muy poco probables, probables, equiprobables o muy probable, pero no seguros ni imposibles. Mostramos en la figura 4 un par de ejemplos que corresponden a espacios muestrales correctos, ya que se incluyen tanto casos favorables como desfavorables. De hecho, son bastantes los que producen sucesos equiprobables, esto se ilustra con el ejemplo de urnas mostrado en la figura 4. De nuevo, conjeturamos que el sentido de justicia de los estudiantes los lleva a construir un espacio muestral en que los dos jugadores tengan la misma probabilidad de ganar.

Correcto, ruletas	Correcto, urnas
 (B) Es posible que María gane	 (B) Es posible que María gane

Figura 4. Espacios muestrales construidos para un suceso posible.

Espacio muestral que corresponde al suceso equiprobable. El tercer apartado requiere que los estudiantes construyan un espacio muestral en que María y Esteban tengan las mismas posibilidades de ganar. Los estudiantes parecen tener clara la idea de equiprobabilidad, pues construyen en general ejemplos correctos de espacios muestrales con el mismo número de casos favorables y casos desfavorables, como se observa en la figura 5.

En lo ejemplos correctos 1, 2 y 4, los estudiantes usan dos casos favorables para cada jugador, con la diferencia de disposición entre ruletas en el 1 y 2, donde en el primero los casos favorables se alternan y en el segundo se encuentran consecutivos. Aunque este aspecto pueda parecer no relevante, algunos estudiantes asocian mayor o menor probabilidad según la disposición u orden de los sectores en una ruleta o dispositivo continuo (Maury, 1984). En el ejemplo 3, se da una composición en donde el niño considera otros casos desfavorables además del “2” con el que juega Esteban. En el ejemplo 5 de urnas, cabe destacar la cantidad de casos posibles (22) que presentó el niño en la construcción del espacio muestral, siendo la mitad de ellos favorables y el resto desfavorables al suceso “ganar María”.

Correcto 1, ruletas	Correcto 2, ruletas	Correcto 3, ruletas	Correcto 4, urnas	Correcto 5, urnas
 (C) María y Esteban tienen posibilidad de ganar	 (C) María y Esteban tienen posibilidad de ganar	 (C) María y Esteban tienen posibilidad de ganar	 (C) María y Esteban tienen posibilidad de ganar	 (C) María y Esteban tienen posibilidad de ganar

Figura 5. Espacios muestrales construidos para un suceso equiprobable.

Hemos encontrado también algunas respuestas incorrectas en este apartado. Por ejemplo, algunos estudiantes utilizan un número mayor de casos favorables, y por tanto mostrarían el sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre y Durand, 1988), al considerar equiprobable cualquier resultado de un experimento aleatorio, independientemente del número de casos favorables y posibles. Se muestran ejemplos en la figura 6, el primero de ellos presenta tres casos favorables y solo uno desfavorable, al igual que el segundo. Es posible que el estudiante solo considere sucesos no elementales, sin tener en cuenta su probabilidad, es decir, solo considere que es equiprobable si hay fichas blancas y negras, independientemente de la cantidad. Este resultado concuerda con lo expresado por Francisco y Maher (2005) y Nilsson (2007) quienes señalan que algunos estudiantes que pueden listar todos los sucesos de un espacio muestral tienen dificultad en clasificar los casos en favorables y en desfavorables.

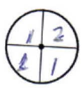
Incorrecto, ruletas	Incorrecto, urnas
 (C) María y Esteban tienen igual posibilidad de ganar	 (C) María y Esteban tienen igual posibilidad de ganar

Figura 6. Espacios muestrales incorrectos construidos para un suceso equiprobable.

Espacio muestral que corresponde a un suceso imposible. Finalmente, la última tarea consiste en determinar un espacio muestral que haga imposible a María ganar el juego. Algunos ejemplos correctos, uno en contexto de ruletas y otro de urnas se presentan en la figura 7; en los dos ejemplos mostrados el estudiante solo incluye casos desfavorables.

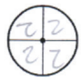
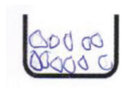
Correcto, ruletas	Correcto, urnas
 (D) Es imposible que María gane	 (D) Es imposible que María gane

Figura 7. Espacios muestrales construidos para un suceso imposible

Se presentan en la figura 8, ejemplos incorrectos donde se evidencia una confusión entre muy poco probable e imposible, ya citada por Cañizares (1997), Green (1983) y Hernández-Salmerón *et al.* (2017). Es decir, al considerar el suceso imposible, los estudiantes incluyen algunos casos favorables, incluso en el ejemplo incorrecto 1 de ruletas, aunque proponen más casos favorables que desfavorables. Pensamos que estos estudiantes (una minoría) están atribuyendo a la palabra imposible el sentido de mala suerte, es decir, aunque se tenga bastante probabilidad, todavía se ve el hecho de ganar como algo muy difícil de que ocurra. Cañizares (1997) encontró este tipo de creencias en sus entrevistas a estudiantes sobre la idea de juego equitativo. Además, en el ejemplo incorrecto 4 se muestra como el estudiante confunde poco probable con imposible, ya que mantiene un caso favorable en el espacio muestral.

Incorrecto1, ruletas	Incorrecto 2, ruletas	Incorrecto 3, urnas	Incorrecto 4, urnas
 (D) Es imposible que María gane	 (D) Es imposible que María gane	 (D) Es imposible que María gane	 (D) Es imposible que María gane

Figura 8. Espacios muestrales construidos para un suceso imposible.

A continuación, se analizan en primer lugar, las frecuencias de respuestas correspondiente a espacios muestrales construidos en contexto de ruletas, seguidamente en contexto de urna y finalmente se comparan los dos contextos. En cada apartado el análisis se realiza globalmente y comparando los resultados de las dos escuelas.

ESPACIOS MUESTRALES CONSTRUIDOS EN CONTEXTO DE RULETAS

Encontramos diferentes tipos de respuesta en cada apartado del primer ítem. En general, las respuestas han sido variadas, puesto que, para cada tipo de suceso pedido se han construido espacios muestrales asociados a sucesos seguros, posibles, equiprobables, etc. Esto indica una diversidad de intuiciones sobre las ideas de espacio muestral y los tipos de sucesos solicitados. En la tabla 1 presentamos la frecuencia y porcentaje de estudiantes que construyen varios tipos de espacio muestral (correspondiente al suceso *María gana* seguro, muy probable, equiprobable, poco probable e imposible, en función de lo pedido en cada apartado (seguro, posible, equiprobable e imposible). Se ha marcado en negrita las frecuencias y porcentajes que corresponden a las respuestas correctas.

Tabla 1. Frecuencia y porcentaje de estudiantes en la muestra global, según el espacio muestral construido en cada apartado del ítem 1 (contexto de ruletas).

	Apartado del ítem y suceso pedido							
Espacio muestral construido	*1. Seguro*		*2. Posible*		*3. Equiprobable*		*4. Imposible*	
	n	%	n	%	n	%	n	%
Suceso seguro	**19**	**34,5**					1	1,8
Suceso muy probable	23	41,8	**20**	**36,4**			10	18,2
Suceso equiprobable	6	11,0	**27**	**49,1**	**50**	**90,9**	9	16,4
Suceso poco probable	5	9,1	**6**	**10,9**	3	5,5	19	34,5
Suceso imposible							**14**	**25,5**
No construye	2	3,6	2	3,6	2	3,6	2	3,6

Son muy pocos los estudiantes que no completaron la tarea, lo cual indica el interés con que colaboraron a nuestro trabajo. Los mejores resultados se obtienen al construir un espacio muestral donde el suceso "María gana", sea un suceso posible, correctamente contestado por todos los estudiantes que participaron en este apartado (96,4%). Esto indica una buena intuición de la idea de suceso posible, lo que se debe sin duda a que en este apartado se pueden admitir como correctas muchas respuestas (muy probable, equiprobable, poco probable). También, se obtuvo buen rendimiento al construir el espacio muestral asociado al suceso equiprobable, cuya construcción fue correcta para una amplia mayoría.

Observamos la mayor dificultad en el suceso seguro, interpretado con alta frecuencia como muy probable, y también en el suceso imposible, considerado por una proporción importante como poco probable; en estos dos tipos de sucesos aparecen otras interpretaciones en porcentajes importantes de estudiantes, en concreto incluso se observa confusión entre suceso muy y poco probable.

En la tabla 2 se comparan los resultados del ítem 1 separados por escuela, donde se repiten en cada grupo los resultados observados en la tabla 1, salvo una pequeña variación en el número de no respuestas por escuela. Es decir, en el contexto de ruletas donde se aprecian pocas diferencias porcentuales en los espacios muestrales construidos de acuerdo al suceso solicitado. Cabe señalar que los estudiantes de la escuela pública tuvieron todas las respuestas correctas en el suceso equiprobable "María y Esteban tienen igual posibilidad de ganar"; y los estudiantes de la escuela privada tuvieron un rendimiento levemente mejor (31,0%) respecto a los de la escuela pública (19,2%) al responder correctamente el suceso imposible.

Tabla 2. Porcentaje de respuestas en cada apartado del ítem 1 (ruletas) por escuela.

Espacio muestral construido	Suceso seguro		Posible		Equiprobable		Imposible	
	Priv.	Púb.	Priv.	Púb.	Priv.	Púb.	Priv.	Púb.
Suceso seguro	**34,5**	**34,6**						3,8
Suceso muy probable	41,4	42,3	**31,0**	**42,3**			10,3	26,9
Suceso equiprobable	6,9	15,4	**51,7**	**46,2**	**82,8**	**100,0**	13,8	19,2
Suceso poco probable	10,3	7,7	**10,3**	**11,5**	10,3		37,9	30,8
Suceso imposible							**31,0**	**19,2**
No construye	6,9		6,9		6,9		6,9	

ESPACIOS MUESTRALES CONSTRUIDOS EN CONTEXTO DE URNAS

En la tabla 3 presentamos la frecuencia y porcentaje de estudiantes que construyen varios tipos de espacio muestral en el ítem 2, contexto de urnas en cada apartado (suceso "gana María" seguro, posible, equiprobable e imposible). Se ha marcado en negrita las frecuencias y porcentajes que corresponden a las respuestas correctas.

Tabla 3. Frecuencia y porcentaje de estudiantes en la muestra global, según el espacio muestral construido en cada apartado del ítem 2 (contexto de urnas).

	Apartado del ítem y suceso pedido							
Espacio muestral construido	*1. Seguro*		*2. Posible*		*3. Equiprobable*		*4. Imposible*	
	n	%	n	%	n	%	n	%
Suceso seguro	**16**	**29,1**						
Suceso muy probable	19	34,6	**16**	**29,1**	2	3,6	6	10,9
Suceso equiprobable	1	1,8	**7**	**12,8**	**39**	**70,9**	2	3,6
Suceso posible	17	30,9	**28**	**50,9**	13	23,7	15	27,3
Suceso poco probable	1	1,8	**2**	**3,6**			17	30,9
Suceso imposible							**13**	**23,7**
No construye	1	1,8	2	3,6	1	1,8	2	3,6

Aquí también es importante resaltar el interés por parte de todos los estudiantes de la muestra para completar el cuestionario ya que son muy pocas las no respuestas. Al igual que el ítem de contexto ruletas, donde hubo mejores resultados fue al construir el espacio muestral correspondiente al suceso posible, correctamente respondido por toda la muestra que realizó el apartado (96,4%). También hubo buen rendimiento en el suceso equiprobable, donde 7 de cada 10 estudiantes respondieron correctamente. Al igual que el ítem de contexto de ruletas, observamos la mayor dificultad en el suceso seguro, interpretado con alta frecuencia como muy probable o posible, y el suceso imposible, generalmente considerado como poco probable o posible; en estos dos tipos de sucesos aparecen también otras interpretaciones.

En la tabla 4 se comparan los resultados por escuela en el contexto de urnas, donde se aprecian pocas diferencias porcentuales en los espacios muestrales construidos de acuerdo al suceso solicitado. Los estudiantes de la escuela privada tuvieron un rendimiento levemente mejor (27,6%) respecto a los de la escuela pública (19,2%) en responder correctamente el suceso imposible, y también, un rendimiento mayor aproximadamente del 10% de respuestas correctas en el de suceso equiprobable.

Tabla 4. Porcentaje de respuestas en cada apartado del ítem 2 (urnas) por escuela.

	Tipo de suceso pedido							
Espacio muestral construido	*Seguro*		*Posible*		*Equiprobable*		*Imposible*	
	Priv.	Púb.	Priv.	Púb.	Priv.	Púb.	Priv.	Púb.
Suceso seguro	**27,6**	**30,8**						
Suceso muy probable	27,6	42,3	**31,0**	**26,9**	6,9		6,9	15,4
Suceso equiprobable		3,8	**6,9**	**19,2**	**75,9**	**65,4**		7,7
Suceso posible	37,9	23,1	**55,2**	**46,2**	13,8	34,6	27,6	26,9
Suceso poco probable	3,4		**3,4**	**3,8**			31,0	30,8
Suceso imposible							**27,6**	**19,2**
No construye	3,4		3,4	3,8	3,4		6,9	3,7

COMPARACIÓN DE RESULTADOS POR CONTEXTO

En la tabla 5 se comparan las respuestas de los estudiantes en porcentajes de acuerdo al contexto del ítem en cada uno de los apartados, señalando en negrita las respuestas correctas.

Tabla 5. Porcentaje espacios muestrales construidos según suceso pedido por contexto.

Espacio muestral construido	*Apartado del ítem y suceso pedido*							
	1. Seguro		*2. Posible*		*3. Equiprobable*		*4. Imposible*	
	Ruleta	Urna	Ruleta	Urna	Ruleta	Urna	Ruleta	Urna
Suceso seguro	**34,5**	**29,1**					1,8	
Suceso muy probable	41,8	34,6	**36,4**	**29,1**		3,6	18,2	10,9
Suceso equiprobable	11,0	1,8	**49,1**	**12,8**	**90,9**	**70,9**	16,4	3,6
Suceso posible		30,9		**50,9**		23,7		27,3
Suceso poco probable	9,1	1,8	**10,9**	**3,6**	5,5		34,5	30,9
Imposible							**25,0**	**23,7**
No construye	3,6	1,8	3,6	3,6	3,6	1,8	3,6	3,6

Globalmente y en diferente grado, se aprecia una menor dificultad en la construcción de espacios muestrales en el contexto ruletas, siendo la mayor diferencia en el suceso equiprobable, donde 20% más de los estudiantes lograron responder correctamente este apartado, seguido por el de los sucesos seguro e imposible donde hay una diferencia del 5,4% y 1,8% respectivamente en las respuestas correctas. El suceso posible no presenta diferencias porcentuales; sin embargo, sí hay mayor diversidad en las respuestas en el contexto urnas, debido a que es una tarea que presenta menos restricciones.

En la tabla 6, se presenta la distribución del número de apartados correctos en cada uno de los dos contextos, donde el máximo posible serían 4 respuestas correctas.

Tabla 6. Frecuencia y porcentaje de número de respuestas correctas en los dos contextos.

Respuestas correctas	Ítem 1. Ruletas			Ítem 2. Urnas		
	n	%	Porcentaje acumulado	n	%	Porcentaje acumulado
0	3	5,5	5,5	2	3,6	3,6
1	26	47,2	52,7	23	41,8	45,4
2	10	18,2	70,9	16	29,1	74,5
3	9	16,4	87,3	9	16,4	90,9
4	7	12,7	100,0	5	9,1	100,0

Al comparar el número de respuestas correctas en cada ítem, observamos que siete estudiantes en el primer ítem y cinco en el segundo logran responder correctamente los cuatro apartados de cada ítem. Por otro lado, se dan porcentajes muy similares en cada contexto respecto al número de tareas resueltas correctamente. El porcentaje de estudiantes que contesta adecuadamente a dos preguntas o menos en ambos contextos ronda el 70%; sin embargo, hay que señalar que en el contexto urnas el 54,6% de los estudiantes respondieron 2 o más apartados correctamente, a diferencia del contexto de ruletas donde esto ocurrió en el 47,3% de los estudiantes.

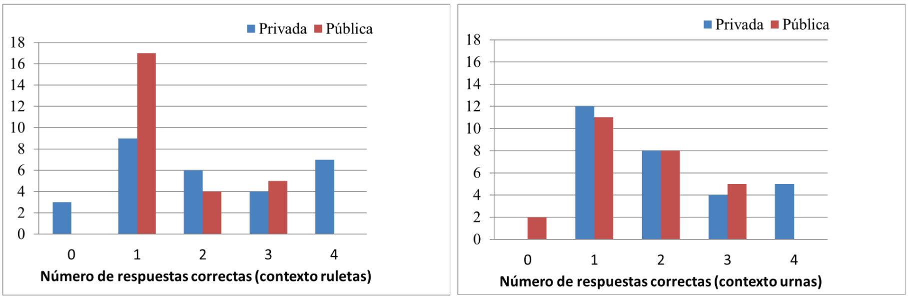


Figura 9. Distribución del número de respuestas correctas en cada contexto según tipo de escuela.

En la figura 9 se comparan el número de respuestas correctas en cada contexto según tipo de escuela. En general, los estudiantes de la escuela privada tuvieron mejores rendimientos en ambos contextos respecto a los de la escuela pública. En el contexto de ruletas se observa que 65,4% de los estudiantes de la escuela pública solo tuvieron un apartado correcto, a diferencia de los de la escuela privada donde 58,6% tuvieron más de uno. Respecto al contexto de urnas, todos los estudiantes de la escuela privada al menos lograron un apartado correcto, a diferencia de los de escuela pública. Además, mientras ningún niño de la escuela pública obtuvo los cuatro apartados correctos en los dos ítems, en la escuela privada 24,1% de los estudiantes lo logró en contexto de ruletas y 17,2% en el de urnas.

DISCUSIÓN E IMPLICACIONES PARA EL AULA

Como se indicó en la introducción, la habilidad general que se pretende lograr al final del ciclo educativo es identificar distintos sucesos (más probables, menos probables o igualmente probables) de acuerdo con el número de resultados simples de cada uno de estos. En las tareas propuestas se debe construir un espacio muestral a partir de ciertas condiciones iniciales, lo que plantea un desafío para el estudiante al no ser una tarea usual.

Los resultados del estudio muestran una intuición razonable de la idea de espacio muestral en la muestra de estudiantes que han participado, tanto en contexto de urnas, como en contexto de ruletas. Estos han sido capaces, en su mayoría, de construir un espacio muestral adecuado cuando en el enunciado de las tareas se solicitó un suceso posible y un suceso equiprobable. Este hecho señala que los estudiantes ya han cimentado un paso importante en su avance en el estudio de la probabilidad, según Bryant y Nunes (2012).

Se ha podido constatar, sin embargo, al igual que en las investigaciones de Cañizares (1997), Green (1983) y Hernández-Salmerón *et al.* (2017), que algunos estudiantes confunden el suceso seguro con el suceso muy probable, y el suceso imposible con el suceso muy poco probable. Pero, además, hemos encontrado otras intuiciones erróneas, como considerar equiprobable un suceso con más casos favorables que desfavorables (o viceversa), considerar seguro un suceso poco probable o considerar seguro un suceso improbable. Atendiendo a las indicaciones de Fischbein (1975), hay que considerar con atención las intuiciones primarias sobre el significado de los tipos de sucesos que los estudiantes traen a la clase, pues las intuiciones incorrectas son muy difíciles de cambiar.

Estos hallazgos indican también la necesidad de prestar mayor cuidado al lenguaje de probabilidad que se utiliza en la clase, puesto que los estudiantes no solo le asocian significados del contexto cotidiano que no corresponden al matemático, sino también significados muy diferentes, tanto a lo cotidiano como a lo matemático. Nos parece que el lenguaje del azar es sencillo para el niño, pero a veces no se atiende el hecho de que detrás de cada término hay conceptos asociados cuya intuición primero y comprensión posterior requiere de tiempo y esfuerzo, si queremos que el niño progrese adecuadamente en su estudio posterior de la probabilidad.

Pero el lenguaje influye en el conocimiento informal de probabilidad de los estudiantes, con el que llegan a la escuela e interpretan las tareas de probabilidad que les planteamos (Amir y Williams, 1999). Molnar (2018) recuerda que las ambigüedades del lenguaje en probabilidad pueden llevar a la formación de intuiciones erróneas, y que el profesor debe estar atento al significado que los estudiantes dan a los términos probabilísticos.

Será, entonces, importante dedicar un tiempo a que los estudiantes refuercen este lenguaje y realicen tareas como las propuestas en que ellos mismos deben explicitar el espacio muestral del experimento. Nunes, Bryant, Evans, Gottardis y Terlektsi (2014) indican que es posible apoyar la idea de espacio muestral a partir de los 10 años, cuando se comienzan a desarrollar los esquemas conceptuales de clasificación, conjunción o razón, que utilizan en otros temas matemáticos.

Igualmente tendrán gran importancia los generadores de sucesos aleatorios, tanto manipulativos (dados, ruletas, fichas en urnas, etc.) como los representados gráficamente que se hayan utilizado en las situaciones propuestas a los estudiantes, pues no todos tienen las mismas propiedades (Gandhi, 2018). Aunque aparentemente no ha habido diferencias notables en el número de niños que ha dado respuesta correcta para cada apartado en los dos contextos considerados, hemos notado que el número total de respuestas correctas es mayor en el contexto de ruletas, que al haberse dividido solo en cuartos ha facilitado la comparación de probabilidades a los estudiantes. Recomendamos, por tanto, el uso de una variedad de tareas y dispositivos manipulativos en la enseñanza de la probabilidad a estos estudiantes.

AGRADECIMIENTO

Proyecto PID2019-105601GB-I00/ AEI / 10.13039/501100011033 y Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

Alpízar, M., Barrantes, J., Bolaños, H., Céspedes, M., Delgado, E., Freer, D., Padilla, E., y Víquez, M. (2012). Aspectos relevantes sobre la formación docente en I y II ciclos en los temas probabilidad y estadística. *Educare, 16*(2), 113-129.

Alpízar, M., Chavarría, L. y Oviedo, K. (2015). Percepción de un grupo de docentes de I y II ciclo de educación general básica de escuelas públicas de Heredia sobre los temas de estadística y probabilidad. *Actualidades Investigativas en Educación, 15*(1), 1-23. https://dx.doi.org/10.15517/aie.v15i1.17728

Amir, G. S., y Williams, J. S. (1999). Cultural influences on children's probabilistic thinking. *The Journal of Mathematical Behavior, 18*(1), 85-107. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00018-8

Australian Curriculum, Assessment and Reporting Authority (ACARA) (2013). *The Australian curriculum: Mathematics.* Autor.

Bryant, P. y Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: A literature review.* Nuffield Foundation

Borovcnik, M. y Bentz, H. J. (1991). Empirical research in understanding probability. En M. Borovnick y R. Kapadia (Eds.), *Chance encounters: Probability in education* (pp. 73-105). Springer.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada.

Common Core State Standards Initiative, CCSSI (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf.

Ernest, P. (1984). Introducing the concept of probability. *Mathematics Teacher, 77,* 524– 525.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probability thinking in children.* Reidel.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics.* Reidel

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics, 15*(1), 1-24.

Francisco, J. M. y Maher, C. A. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(2–3), 361–372.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M, y Scheaffer, R. (2007). Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K-12 curriculum framework. American Statistical Association. http://www.amstat.org/Education/gaise/

Gandhi, H. (2018). Understanding children's meanings of randomness in relation to random generators. En C. Batanero y E. Chernoff (Eds.). *Teaching and Learning Stochastics* (pp. 181-200). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_11

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1.

Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión 35,* 75-91.

Green, D. R. (1983). School pupils' probability concepts. *Teaching Statistics, 5*(2), 34-42.

Hernández, E. (2015). *El lenguaje del azar en alumnos de educación secundaria obligatoria.* (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Granada.

Hernández-Salmerón, E., López-Martín, M. M. y Batanero, C. (2017). *Estudio exploratorio sobre el lenguaje del azar en educación secundaria obligatoria.* En J. M. Muñoz, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX*I (pp. 305-314). Universidad de Zaragoza.

Hernández-Solís, L., Batanero, C., Gea, M. y Álvarez-Arroyo, R. (2021). Comparing probabilities in urns: A study with primary school students. *Uniciencia, 35*(2), 1-18. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.9

Horvath, J. K. y Lehrer, R. (1998). A model-based perspective on the development of children's understanding of chance and uncertainty. En S. Lajoie (Ed.), *Reflections on statistics: learning, teaching, and assessment in grades K-12* (pp. 121-148). Routledge.

Jones, G., Langrall, C., y Mooney, E. (2007). Research in probability: responding to classroom realities. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (vol. 2, pp. 909-955). Information Age Publishing y NCTM.

Keren, G. (1984). On the importance of identifying the correct 'problem space'. *Cognition, 16,* 121–128.

Langrall, C. y Mooney, E. (2005). Characteristics of elementary school students' probabilistic reasoning. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school* (pp. 95-119). Springer.

Lecoutre, M. P. y Durand, J. L. (1988). Judgements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aleatoire. *Educational Studies in Mathematics, 19,* 357-368.

Maury, S. (1984). La quantification des probabilites: analyse des argumentes utilises par les eleves de classe de seconde. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 5*(2), 187-215.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.* Autor.

Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas. I, II y III Ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado.* Autor.

Molnar, A. (2018). Language and lexical ambiguity in the probability register. En C. Batanero y A. Chernoff (Eds.), *Teaching and learning stochastics* (pp. 23-37). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_2.

Nacarato, A. M. y Grando, R. C. (2014). The role of language in building probabilistic thinking. *Statistics Education Research Journal, 13*(2), 93.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Nilsson, P. (2007). Different ways in which students handle chance encounters in the explorativesetting of a dice game. *Educational Studies in Mathematics, 66*(3), 293–315. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9062-0.

Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., Gottardis, L. y Terlektsi, M. E. (2014). The cognitive demands of understanding the sample space. *ZDM Mathematics Education, 46*(3), 437–448.

Ortiz, J. J., Albanese, V. y Serrano, L. (2016). El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 397-406). SEIEM.

Pratt, D. y Kazak, S. (2018). Research on uncertainty. In International handbook of research in statistics education (pp. 193-227). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_6

Schleppegrell, M. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writing Quarterly, 23*, 139-159. https://doi.org/10.1080/10573560601158461

Vásquez. C. y Alsina, Á. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 7*, 27-48. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i7.104.

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2017). Aproximación al conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad desde el modelo del Conocimiento Didáctico-matemático. *Educación matemática, 29*(3), 79-108.

Vygotski, L. S. (2012). *Thought and language.* MIT press.

Watson, J. (2005). The probabilistic reasoning of middle school students. En G. A. Jones (Ed.), Exploring probability in school (pp. 145-169). Springer.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2010). The development of comprehension of chance language: Evaluation and interpretation. *School Science and Mathematics, 103*(2), 65-80. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2003.tb18222.x

María M. Gea

Dirección: Facultad de Ciencias de la Educación, Campus de Cartuja, 18071, Granada, España

 DOI: 10.24844/EM3301.08

Conocimientos geométricos como respuesta a un problema espacial en el desarrollo de un recorrido de estudio e investigación

Geometric knowledge as an answer to a spatial problem via a study and research path

Carlos Rojas Suárez[1] y Tomás Ángel Sierra Delgado[2]

Resumen: Con este trabajo pretendemos hacer frente al fenómeno didáctico de *la pérdida de las razones de ser* de los saberes geométricos propuestos para la Educación Secundaria Obligatoria. Así postulamos que los problemas espaciales pueden constituirse en una posible *razón de ser* de dichos saberes. Para ello, hemos implementado, en un grupo de 14 estudiantes de Secundaria, un proceso de estudio conocido como *recorrido de estudio e investigación*, que se inicia con una cuestión en torno al problema espacial de diseño y construcción de un envase de litro. Analizamos mediante *los indicadores del grado de completitud de una organización matemática local,* la actividad matemática llevada a cabo por los estudiantes. Los resultados sugieren que con dicho proceso de estudio: a) es posible abordar de modo funcional parte de los conocimientos geométricos propuestos en el currículo de Secundaria, y b) superar la rigidez de la actividad matemática escolar, habitual en las clases de Secundaria, que, por un lado, limita la posibilidad de usar diferentes técnicas para resolver una misma tarea y construir nuevas técnicas y, por otro, no ayuda a cuestionar el dominio de validez de las técnicas utilizadas en clase.

Fecha de recepción: 30 de abril de 2020. **Fecha de aceptación**: 29 de octubre de 2020.

[1] Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid (UCM), Madrid, España, carlroja@ucm.es, orcid.org/0000-0002-8689-8549

[2] Departamento de Didáctica de Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas, Facultad de Educación, Universidad Complutense de Madrid (UCM), Madrid, España, tomass@ucm.es, orcid.org/0000-0003-2731-0028

Palabras clave: Enseñanza de la geometría. Conocimientos geométricos. Problemas espaciales. Recorrido de estudio e investigación. Teoría antropológica de lo didáctico.

Abstract: In this work we intend to tackle the didactic phenomenon of the *loss of the raisons d'être* of geometric knowledge proposed for Compulsory Secondary Education. Thus, we conjecture that spatial problems may become a possible *reason d'être* of such knowledge. In search of evidences for our conjecture, we have implemented, in a group of 14 secondary students, a kind of study process known as *study and research path*, which starts with a question about the spatial problem of designing and constructing a one-litre container. Then, by using the *degree of completeness indicators of a local mathematical organisation*, we analyse the mathematical activity carried out by the students. Our analysis suggests that: a) with this study process it is possible to address in a functional way part of the geometric knowledge proposed in the Secondary curriculum, and b) the rigidity of the school mathematical activity, usual in Secondary classes, on the one hand, limits the possibility of using different techniques to solve the same task and to construct new techniques; and, on the other hand, does not help to question the validity domain of the techniques used in class.

Keywords: Geometry teaching. Geometric knowledge. Spatial problems. Study and research path. Anthropological theory of the didactic.

INTRODUCCIÓN

Una de las funciones de la institución escolar –en particular de la escuela obligatoria– en la sociedad es conseguir que las nuevas generaciones de ciudadanos aprendan los conocimientos que forman parte de su legado cultural. En general, la enseñanza de esos conocimientos tiene como objetivo que los miembros de dicha sociedad puedan llegar a desenvolverse de modo eficaz en la vida cotidiana.

Habitualmente una de las disciplinas que forma parte del legado cultural incluido en el currículo son las matemáticas. De hecho, los conocimientos matemáticos son considerados como una parte importante de la enseñanza escolar, lo que lleva a pensar que debe haber una especial articulación entre lo que se propone para ser enseñado. Sin embargo, no es así ya que, por ejemplo, en la estructura del currículo español de matemáticas (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte [MECD], 2015) para la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (alumnos de 12 a 16 años) aparece un listado de contenidos separados por bloques, cuyas temáticas se presentan de forma aislada. Ello se traduce en que en la enseñanza de las matemáticas existe una cierta desarticulación que sugiere, por ejemplo, que estudiar geometría y estudiar funciones son asuntos completamente separados, pues aparecen en bloques aislados.

De este modo, a pesar de que en el currículo diseñado se suele indicar que los contenidos propuestos para ser enseñados deben presentarse de manera integrada y articulada, finalmente esta responsabilidad termina dejándose, implícitamente, solo en manos de los profesores. Esto, por supuesto, constituye un encargo complejo que los profesores por sí solos difícilmente pueden abordar, ya que se trata de un problema de investigación didáctica que desborda su práctica profesional.

En la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) se postula que para llevar a cabo la enseñanza de un saber es importante considerar cuáles son algunas de las cuestiones a las que responde dicho saber; es decir, cuáles son sus posibles *razones de ser*, en una institución determinada. La búsqueda de las razones a las que debería responder la enseñanza de la geometría en la enseñanza secundaria, en particular la geometría bidimensional (2D) y la geometría tridimensional (3D), nos llevó a diseñar e implementar un dispositivo didáctico, que, dentro de la TAD, se denomina *recorrido de estudio e investigación* (REI), en torno al diseño y construcción de envases. Pretendimos que dichas razones de ser de la enseñanza de la geometría ayudaran no solo a dar sentido a varios de los saberes propuestos en el currículo de la ESO, sino también a encontrar la conexión y la articulación, tanto entre las geometrías 2D y 3D, como con otros saberes matemáticos que propone este currículo.

En este artículo, analizamos la actividad matemática desarrollada por 14 estudiantes de secundaria al abordar uno de los tipos de tareas que formaron parte del REI propuesto. Con lo cual, pretendemos establecer si efectivamente las cuestiones que aparecen en dicho REI pueden constituirse en una posible razón de ser de algunos de los saberes geométricos propuestos para la ESO y qué conocimientos de la geometría 2D y 3D se ponen en juego durante su abordaje. Para ello, usamos los *indicadores del grado de completitud de una organización matemática local* (Bosch *et al.*, 2004), que nos permiten caracterizar la organización matemática (OM) realmente construida por los alumnos y dar cuenta de algunas de las restricciones que han dificultado la búsqueda de respuestas a cuestiones sobre el diseño y elaboración de un envase en cartulina, con capacidad para un litro.

El contraste entre estos indicadores y la actividad matemática desarrollada por los estudiantes nos va a permitir determinar hasta qué punto, en qué medida, las praxeologías matemáticas puestas en juego se han mostrado como relativamente completas y, en consecuencia, si ha sido posible llevar a cabo una actividad de modelización.

En lo que sigue, mostramos algunos antecedentes de la investigación de la que forma parte este trabajo. Explicamos el marco teórico que fundamenta nuestra investigación. Describimos el REI que hemos implementado, centrándonos en la actividad matemática desarrollada que queremos analizar. Presentamos algunos resultados obtenidos al aplicar el instrumento de análisis y algunas de las restricciones y limitaciones encontradas, y terminamos con nuestras conclusiones.

ALGUNOS ANTECEDENTES

Santaló (1985), trató la problemática en torno a la enseñanza de la geometría en el ciclo secundario en España (alumnos de 12 a 16 años), mostrando que tanto en el ciclo primario (alumnos hasta los 12 años) como al terminar la secundaria había dos tendencias claramente diferenciadas, la geometría experimental e intuitiva y, la geometría axiomática. El problema se encontraba pues en el ciclo de la enseñanza secundaria, específicamente en el ciclo básico de tres años (alumnos de 12 a 14 años) que correspondía a la etapa obligatoria, porque para ese momento primaban las presentaciones rigurosas y sistemáticas que habían abandonado el carácter práctico de la geometría, *elevándola* al mundo de las ideas. Así, Santaló afirmaba:

> La máxima preocupación debe ser para el ciclo básico. Si el Estado impone su obligatoriedad debe procurar que su enseñanza sea verdaderamente útil a los alumnos, tanto en su aspecto formativo, cosa no fácil de evaluar, como en su aspecto informativo, más fácil de decidir a través de los contenidos. Estos contenidos, que deben ser adaptados a las necesidades de la sociedad ambiente, deben revisarse periódicamente y son rápidamente cambiantes, de manera que un primer obstáculo a vencer es la inercia usual de los enseñantes, que quisieran enseñar siempre lo

> que ellos aprendieron, y de los responsables de la enseñanza, casi siempre misoneístas y temerosos de introducir cambios con demasiada frecuencia, sin tener en cuenta que la escuela no debe distanciarse demasiado del mundo exterior a ella. Cuando lo que se enseña en el aula es muy distinto de lo que se aprende en la calle, el sistema educativo se desequilibra. (Santaló, 1985, p. 14)

Dentro de las propuestas planteadas por Santaló (1985) para que la enseñanza de la geometría resulte útil a los estudiantes, destacan; primero, no pensar que se deba partir de cero en el aula, pues los estudiantes traen consigo varios conocimientos provenientes de la escuela, y de la vida familiar y social; segundo, "lo que sea intuitivamente evidente para el alumno debe aceptarse como tal, para poder seguir adelante en la adquisición de conocimientos menos evidentes" (p. 20); y tercero, mostrar cada vez que sea posible, la conexión entre las diferentes partes de las matemáticas.

Esta problemática sobre la diferenciación que existe entre la enseñanza de la geometría experimental y la geometría axiomática, que ha advertido Santaló, guarda relación con el trabajo de tesis doctoral llevado a cabo por René Berthelot y Marie-Hélène Salin (1992); quienes resaltan la importancia de un tipo de conocimiento que sirve para operar directamente sobre el espacio sensible –conocimiento espacial–, y de cómo los conocimientos geométricos aparecen diluyendo este conocimiento en la medida en que se avanza en la vida escolar; y porque proponen la necesidad de vincular estos dos tipos de conocimiento.

En un estudio exploratorio llevado a cabo por Pérez y Guillén (2007), en el que se indagó sobre las creencias y las concepciones en torno a la enseñanza de la geometría de un grupo de 19 profesores de secundaria, se encontró, entre otras cosas, que los bloques que se privilegian en la enseñanza de las matemáticas en la ESO son los de aritmética y de álgebra y también, aunque algo menos, el de análisis. Así, en el caso de que no hubiese tiempo suficiente para abordar todo el currículo, la geometría no se abordaría. Estos autores señalaron también que en el estudio que realizan los alumnos de la ESO, sobre la geometría, se presta mucha atención a los problemas de operar o calcular áreas y volúmenes, y se dedica mucho menos tiempo a los procesos de reproducción, descripción, clasificación, representación, construcción, etcétera.

En lo referente a los poliedros, en Pérez y Guillén (2008), se encontró que su estudio se limita a los prismas, pirámides, poliedros regulares, cilindros, conos y esferas. Y, en Guillén, González y García (2009), donde se analizó la propuesta que hacen los textos escolares sobre los cuerpos de revolución se afirma que:

"El cálculo de áreas y volúmenes en secundaria se basa fundamentalmente en la aplicación de las fórmulas a partir de sus elementos" (p. 255). Por ejemplo, el cálculo del área de una superficie rectangular dada la medida de sus lados, o el del volumen de un paralelepípedo dada la medida de sus aristas. Esto desvela el fenómeno didáctico de reducir la enseñanza de las figuras geométricas a su estudio aritmético y algorítmico, dejando de lado el análisis de su determinación y construcción. Lo que conlleva también un uso exclusivamente aritmético de las fórmulas en geometría. Dicho fenómeno forma parte de un problema más general de la situación actual de las matemáticas en la educación primaria y secundaria, tal como se señala en las conclusiones del *Libro Blanco de las Matemáticas*: "[...] es frecuente que la enseñanza de las matemáticas se reduzca a procedimientos y rutinas" (RSME, 2020, p. 544).

También en la Educación Secundaria, pero en el contexto costarricense, se ha estudiado la problemática que presenta la enseñanza de la geometría, porque los contenidos en la educación formal son mostrados como productos acabados (Gamboa y Ballestero, 2010). Es decir, como aquellos que no son susceptibles de cambios y que aparecen como cristalizados, de modo que su enseñanza no considera ninguna reflexión en torno a su construcción. Esta forma de concebir y presentar los contenidos de una disciplina se sitúa dentro de lo que Chevallard (2013, 2017) llama el *paradigma de la visita de las obras*.

Como alternativa al paradigma de la visita de las obras, Chevallard propone el *paradigma de cuestionamiento del mundo*, en el que la lógica lineal dominante del currículo se rompe mediante el estudio funcional de las matemáticas, donde los conocimientos matemáticos surgen a partir de las cuestiones a las que responden, proponiendo tipos de tareas o problemas en los que dichos conocimientos sean una buena herramienta para resolverlos. De este modo, los contenidos que son propuestos en el currículo aparecerán como necesarios para el abordaje de dicho problema, y no como un listado *a priori* de contenidos que apenas aparecen justificados.

Los estudios sobre la enseñanza-aprendizaje de la geometría realizados dentro de la teoría de las situaciones didácticas (TSD) (Berthelot y Salin, 1992, 2001), permiten postular que una vía para recuperar algunas de las razones de ser de algunos de los saberes geométricos propuestos en el currículo de la ESO, se encuentra en torno a la resolución de un tipo de problemas que dichos autores llaman *problemas espaciales*. Estos tratan sobre situaciones que tienen lugar en el espacio sensible. Así, en el tipo de problema de diseño, que consideramos en este trabajo, los conocimientos geométricos sirven como herramienta eficaz para su solución.

En Perrin-Glorian *et al.*, (2013), se afirma también que la problemática de modelización o espacio-geométrica que proponen Berthelot y Salin, consistente en partir de un problema del espacio sensible o problema espacial, pasar a representarlo mediante un modelo geométrico, utlizar las propiedades geométricas correspondientes y terminar validándolo en el espacio sensible, resulta de gran interés para llevarla a cabo en la enseñanza. Lo que ha de permitir considerar la relación entre el espacio sensible y el espacio geométrico, y en particular realizar una enseñanza coherente de la geometría a lo largo de la escolaridad obligatoria, que necesita tener en cuenta ambos espacios y ligarlos con el desarrollo del alumno.

A continuación, describimos brevemente el marco teórico en el que nos situamos, que dispone a su vez de un modelo metodológico, y esbozamos en qué consisten los problemas espaciales y su relación con los conocimientos espaciales y geométricos, ya que estos se encuentran estrechamente ligados con nuestro postulado.

MARCO TEÓRICO

Para hacer frente al fenómeno didáctico general de *la pérdida de las razones de ser de la enseñanza de la geometría*, utilizamos las herramientas que propone la TAD y nos apoyamos en diferentes estudios realizados dentro de la TSD que han mostrado la interrelación entre algunos problemas espaciales y los conocimientos geométricos.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico y los recorridos de estudio e investigación

La TAD puede entenderse como una evolución de la TSD, propuesta por Guy Brousseau. Según Gascón (2013), la TSD constituye el germen del programa epistemológico que surge frente a la "insuficiencia manifiesta de los modelos epistemológicos dominantes en las instituciones escolares para formular y abordar los problemas didáctico-matemáticos" (p. 79). Dicha insuficiencia proviene de cómo conciben la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y las matemáticas mismas, tales modelos. La diferencia con dichos modelos es que:

> En el caso particular de la TSD se postula que un *conocimiento matemático* está definido por las *situaciones* que lo determinan, esto es, por un conjunto de situaciones para las que dicho conocimiento es idóneo porque proporciona la solución óptima en el contexto de una institución determinada. Las situaciones contienen la "razón de ser" del conocimiento que definen, esto es, las cuestiones que le dan sentido, así como las restricciones que limitan su uso en una institución determinada y las aplicaciones potenciales del mismo. (Gascón 2013, p. 79)

Yves Chevallard propone, a principios de los ochenta, estudiar los fenómenos de trasposición didáctica siguiendo, al igual que la TSD, los principios del programa epistemológico. Es decir, cuestiona los diferentes modelos epistemológicos del saber matemático que viven en cada una de la instituciones que intervienen en la transposición didáctica y propone nuevos modelos alternativos que posibilitan; de una parte, poner de relieve los fenómenos didácticos que se presentan en dichas instituciones; y de otra, formular y abordar los problemas didácticos relacionados con esos fenómenos (Gascón, 2014). A partir de allí, surge la TAD, que, a diferencia de los otros enfoques en didáctica de las matemáticas, basados en modelos cognitivos, precisa de "un *modelo de las matemáticas institucionales* que incluya la *matemática escolar* como un caso particular y de un modelo de las *actividades matemáticas institucionales* que incluya la *enseñanza-aprendizaje escolar de las matemáticas*, como una actividad matemática institucional particular" (Gascón, 1998, p. 20). Con lo cual, la TAD propone concebir el conocimiento matemático en estructuras cuya unidad mínima es la organización o praxeología matemática (OM). Estas estructuras se componen de:

> [...] un bloque práctico o "saber-hacer" formado por los tipos de tareas y las técnicas [T/τ] y por un bloque teórico o "saber" formado por el discurso tecnológico-teórico [θ/Θ] que describe, explica y justifica la práctica. [...] Las OM surgen como producto de un *proceso de estudio* estructurado en seis dimensiones o *momentos didácticos*. La forma concreta de llevar a cabo un proceso de estudio en una institución determinada se describe a su vez en términos de *organizaciones o praxeologías didácticas [OD]*. (Bosch *et al.*, 2004, p. 7)

La TAD propone un modelo ideal de proceso de estudio para el aprendizaje de las matemáticas a través de la modelización, los REI (Barquero, 2009; Fonseca, Pereira, y Casas, 2011), caracterizado porque parte de una cuestión importante viva y rica, con fuerte poder generador. En ellos el objetivo del estudio no viene definido como un conjunto de saberes designados de antemano, sino como un conjunto de cuestiones cruciales –derivadas de dicha cuestión inicial– a las que la comunidad de estudio se propone aportar una respuesta. Se recupera así la relación natural entre cuestiones y respuestas de cualquier actividad de formación.

Los REI pueden describirse mediante una estructura arborescente de cuestiones y respuestas, que surgen con la movilización de los medios, saberes y respuestas disponibles. Son, por tanto, una herramienta muy apropiada tanto para describir los procesos de estudio existentes o posibles como para implementar en el aula secuencias de enseñanza basadas en la actividad matemática de modelización (Rodríquez-Quintana, 2005).

En suma, los REI son un dispositivo didáctico concreto que permite el estudio de las OM en la escuela e implican un cambio en la lógica tradicional que rige las formas de hacer en la enseñanza de las matemáticas. Primero, porque los conocimientos aparecen como necesarios para dar respuesta a las cuestiones que se abordan; y segundo, porque las respuestas a dichas cuestiones y las propias cuestiones no son responsabilidad exclusiva del profesor, sino también de los estudiantes, quienes las construyen como fruto del trabajo grupal.

LOS PROBLEMAS ESPACIALES Y LOS CONOCIMIENTOS GEOMÉTRICOS

En estudios que parten de la tesis de René Berthelot y Marie-Hélène Salin (Berthelot y Salin, 2001; Bloch y Salin, 2005), y en otros previos donde se cuestiona la geometría y su enseñanza (Brousseau, 2000), se afirma que existe una interrelación entre problemas espaciales y conocimientos geométricos. Dicha interrelación pone de relieve que, durante la resolución de un problema espacial pueden emerger –como necesarios– ciertos conocimientos geométricos. Esta resolución del problema implica una *relación de modelización espacio-geométrica* (Bloch y Salin, 2005), que viene caracterizada por “una relación con el espacio, [que aparece] inscrito en situaciones donde las nociones geométricas intervienen como medios de decisión, de acción o de previsión razonada sobre un espacio sensible"[3] (p. 130). Berthelot y Salin consideran que una problemática de modelización espacio-geométrica es aquella donde se trabaja con objetos físicos, la validación se lleva a cabo en el espacio sensible, y en el proceso de resolución se utilizan las propiedades geométricas.

En nuestra investigación tomamos la definición de *problemas espaciales* que ha presentado Salin (2004), debido al amplio espectro de situaciones que abarca. Estos, se caracterizan a nivel general porque:

> Su finalidad concierne al espacio sensible [y] pueden tratar sobre la realización de: acciones [como] fabricar, desplazarse, desplazar, dibujar, etc., [y sobre] comunicaciones a propósito de acciones o de constataciones [...] [Además, porque] el éxito o el fracaso viene determinado para el individuo por la comparación entre el resultado esperado y el resultado obtenido. (p. 39)

Esta definición de problema espacial nos lleva de manera implícita a la caracterización de los conocimientos espaciales. Según Berthelot y Salin (1992), dichos conocimientos; de una parte, pueden ser descritos mediante la geometría; y de otra, "permiten a cada uno controlar la anticipación de los efectos de sus acciones sobre el espacio [...], así como la comunicación de información espacial"[4] (p. 9).

Según Salin (2004), los conocimientos espaciales surgen de forma natural y no es necesario ir a la escuela para su utilización. Sin embargo, los conocimientos geométricos deben ser enseñados de manera explícita. Además, la geometría constituye una buena herramienta para actuar de manera efectiva sobre el espacio sensible, es decir, el espacio físico en el que todos nos encontramos. Ahora bien, ¿por qué esto es importante en la enseñanza de la geometría? Para responder a esta pregunta pensemos en un carpintero que debe construir un marco para una ventana. Si un día le pidiesen construir un marco para una ventana con forma de elipse, ¿qué estrategia debería de tomar? Una solución práctica podría ser copiar la forma de la ventana con un trozo de papel lo suficientemente grande. Otra, implicaría conocer qué elementos definen una forma elíptica y ello requeriría el estudio de la elipse. Así, en este ejemplo, algunos de los conocimientos espaciales necesarios para construir el marco de la ventana, copiando su forma, estarían vinculados con la orientación, con la estimación tanto del tamaño del trozo de papel necesario para copiar su forma como de la

[3] Traducción propia.
[4] Traducción propia.

cantidad de madera suficiente para construirla, con la manipulación de herramientas de carpintería, etc. Sin embrago, si el carpintero quisiera resolver cualquiera de las situaciones en las que tuviese que construir muchos marcos elípticos, le resultará más eficaz conocer las propiedades geométricas de la elipse y utilizar dicho modelo para resolverlas.

A continuación, presentamos el problema de investigación que estamos abordando y las hipótesis planteadas. Luego, explicamos la metodología empleada en la experimentación del dispositivo didáctico con el que hemos sometido a prueba dichas hipótesis.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Tras el análisis de algunos de los libros de texto propuestos para la ESO (Rojas y Sierra, 2017), encontramos que, en la enseñanza de la geometría se suelen proponer tipos de tareas asociadas con un listado de temas poco relacionados entre sí. Además, cuando se propone una tarea, por lo general se sugiere una única vía de solución para esta, bien sea a través de un ejemplo o de una secuencia de instrucciones. Dicho análisis nos condujo a concluir principalmente que: (a) los manuales escolares son una extensión del currículo de matemáticas porque reproducen las visiones segmentadas y segregadas que este refleja del conocimiento, y (b) los tipos de tareas y técnicas propuestos en los manuales escolares presentan una relación cíclica, es decir, que las tareas promueven la aplicación de las técnicas y estas se proponen para justificar la presencia de las tareas. Esto ratificó la existencia del fenómeno didáctico, que hemos explicitado así:

> *Actualmente, en el currículo de matemáticas para la ESO y en los manuales escolares correspondientes, se proponen una serie de saberes geométricos a enseñar, sin que aparezcan de modo explícito las cuestiones a las que responden, es decir, no se explicitan las razones de ser de dichos saberes.*

En correspondencia con este fenómeno, sumado al hecho de que tanto en el currículo de la ESO como en los manuales escolares se presenta una separación entre la geometría 2D y 3D, y permeados por los presupuestos epistemológicos de la TAD, la pregunta general de nuestra investigación puede formularse brevemente como sigue:

¿Qué tipo de organizaciones matemático-didácticas (OMD) permitirían sacar a la luz y situar en el centro del proceso de estudio las razones de ser de algunos de los contenidos geométricos de la ESO, permitiendo articular su relación dentro de la geometría en 2D y 3D?

Ahora bien, en este trabajo nos hemos centrado en la siguiente cuestión derivada de este problema didáctico general:

> *Los problemas espaciales tal como fueron caracterizados en (Salin, 2004), ¿pueden constituirse en una posible razón de ser de un ámbito significativo de los conocimientos de la geometría elemental de la ESO? Más concretamente,* ¿qué conocimientos de la geometría 2D y 3D requieren *las cuestiones y las tareas que se plantean cuando se pretende diseñar y construir un envase de un litro?* ¿Qué *restricciones y limitaciones es previsible que surjan a lo largo del desarrollo de un REI generado por el problema espacial asociado a dicha construcción?*

METODOLOGÍA

La implementación de un REI supone tener en cuenta diferentes restricciones (Rodríquez-Quintana, 2005), tales como la limitación de los tiempos para abordar un problema en profundidad y poder indagar y discutir las posibles soluciones con todo el grupo de estudio. Para disponer de más tiempo del que brindan las clases de matemáticas, decidimos hacer una convocatoria abierta a estudiantes de cuarto de la ESO y de primero de bachillerato[5] de un instituto de Educación Secundaria de Getafe, para conformar un grupo de estudio al que llamamos *Semillero matemático*, que funcionaría una vez a la semana durante una hora y media, en horario extraescolar. Catorce estudiantes acudieron tras la convocatoria, 10 de cuarto de la ESO y cuatro de primero de bachillerato. En el grupo de alumnos, había 12 que obtenían buenos resultados en las evaluaciones de las asignaturas de Matemáticas y 2 que no, según nos informó la profesora titular

[5] La decisión de elegir dichos cursos obedeció a que el trabajo con estos estudiantes nos podía permitir analizar hasta qué punto ellos podrían ser capaces de utilizar los conocimientos geométricos, que han estudiando hasta entonces, en la resolucion de un problema espacial abierto. Es decir, hasta qué punto los estudiantes han percibido los conocimientos geométricos con un caracter funcional.

del área de matemáticas. Estos dos alumnos mostraron una especial motivación por el problema planteado a lo largo del estudio realizado.

En el REI, sobre el análisis, diseño y construcción de un envase, planteamos cuestiones en torno a tres tipos de tareas que fueron abordadas en grupos de 3 o 4 estudiantes. En el primer tipo de tareas, instamos a los estudiantes a realizar un primer análisis de la forma, dimensiones y capacidad, de algunos de los recipientes que actualmente se usan para envasar leche, zumo, vino y caldo de pollo. En el segundo, les pedimos que construyeran un envase en cartulina con capacidad para un litro. Y en el tercero, les propusimos diseñar el *mejor envase* para un perfume. Al final, los estudiantes debieron entregar un informe argumentando por qué el envase diseñado es el mejor. En el desarrollo del REI, se pretendió que la responsabilidad del planteamiento de las cuestiones fuera compartida por los alumnos y el profesor. El profesor asumió el papel de director del estudio más que el de un enseñante tradicional que muestra a los alumnos las respuestas a las cuestiones planteadas.

La estructura de trabajo seguida comportó tres fases: presentación de la cuestión inicial por el profesor, trabajo grupal y puesta en común. La segunda estuvo a cargo de los estudiantes y la tercera compartida por los estudiantes y el profesor. El profesor, que hizo la función de investigador, pasaba por cada grupo preguntando por las ideas, decisiones, procedimientos, etc., que emergían durante el abordaje de cada tarea. En la puesta en común, el profesor intervino planteando preguntas con el objetivo de intentar desvelar la mayor cantidad de elementos que pudieran emerger durante la búsqueda de respuestas a cada tarea. Como los alumnos necesitaron más de una sesión para responder a cada tarea, al inicio de cada sesión se hacía un breve recuerdo de lo realizado en la anterior.

Los datos empíricos recogidos del desarrollo del estudio provienen de la información proporcionada por tres fuentes: (a) registros audiovisuales, (b) el diario de campo del investigador, y (c) el cuaderno que usan los estudiantes para escribir los procedimientos empleados. En el trabajo que presentamos, los datos provienen de algunas de las trascripciones de los diálogos entre los estudiantes y el profesor de las sesiones tercera, cuarta y quinta de la experimentación del REI en las que se propuso Q_2 (Figura 1. Mapa de cuestiones que han aparecido durante la implementación del REI.). Las trascripciones se obtuvieron del registro audiovisual de dichas sesiones, donde hemos extraído y analizado las respuestas que dieron los estudiantes, utilizando para ello, lo indicadores del grado de completitud de una OM.

DESARROLLO DE LA EXPERIMENTACIÓN

Durante la implementación del REI emergieron varias cuestiones derivadas de la cuestión generatriz (Q_G). Dichas cuestiones, que hemos estructurado en un mapa (Figura 1. Mapa de cuestiones que han aparecido durante la implementación del REI.), se corresponden con los tres tipos de tareas mencionados en la sección de *metodología*.

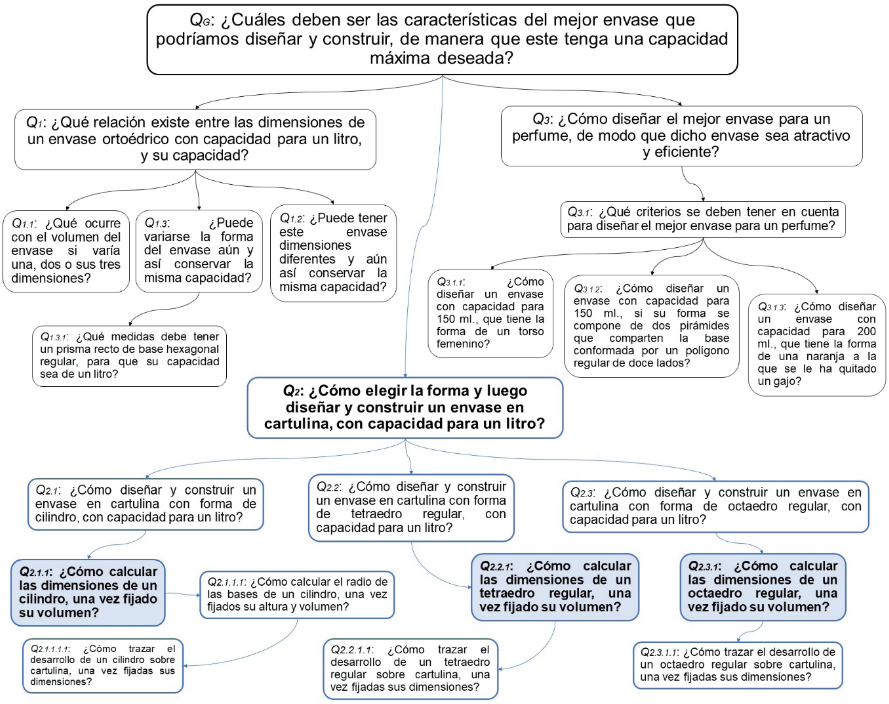


Figura 1. Mapa de cuestiones que han aparecido durante la implementación del REI.

En este artículo nos limitamos solo a los datos que hacen referencia al modo en que los alumnos intentaron buscar una respuesta a la cuestión Q_2 = *¿Cómo elegir la forma y luego diseñar y construir un envase en cartulina, con capacidad para un litro?* Específicamente, consideramos los que contienen información sobre la manera en que los estudiantes calcularon las dimensiones del envase que diseñaron.

Una vez propuesta Q_2, los estudiantes desarrollaron su trabajo en tres grupos:

- El grupo 1 (G_1), formado por los estudiantes E1, E2, E3 y E4, buscó responder a $Q_{2.1}$ = *¿Cómo diseñar y construir un envase en cartulina con forma de cilindro, con capacidad para un litro?* Y después a $Q_{2.1.1}$ = ***¿Cómo calcular las dimensiones de un cilindro, una vez fijado su volumen?*** (Figura 2. Cilindro construido por los integrantes del G_1.)

- El grupo 2 (G_2) (constituido por E5, E6, E7, y E8), trató de encontrar la respuesta a $Q_{2.2}$ = *¿Cómo diseñar y construir un envase en cartulina con forma de tetraedro regular, con capacidad para un litro?* Y después a $Q_{2.2.1}$ ***= ¿Cómo calcular las dimensiones de un tetraedro regular, una vez fijado su volumen?*** (Figura 3. Tetraedro regular construido por los integrantes del G_2.)

- El grupo 3 (G_3) (integrado por E9, E10 y E11), se propuso responder a $Q_{2.3}$ = *¿Cómo diseñar y construir un envase en cartulina con forma de octaedro regular, con capacidad para un litro?* Y después a $Q_{2.3.1}$ = ***¿Cómo calcular las dimensiones de un octaedro regular, una vez fijado su volumen?*** (Figura 4. Octaedro regular construido por los integrantes del G3.)

El tiempo dedicado a responder a Q_2 fue de tres semanas, a partir de la tercera sesión del semillero, con una sesión de hora y media por semana.

Durante la puesta en común, los estudiantes arguyeron en relación con el envase construido: (a) sobre la forma elegida, (b) sobre el porqué de dicha elección, y (c) sobre la manera en que calcularon las dimensiones del envase. Por tanto, hemos transcrito los diálogos en los que los estudiantes presentaron dichos argumentos al profesor (*P*) y a los demás compañeros, y los hemos tomado como objeto de análisis y de discusión para rastrear el tipo de conocimientos geométricos que han emergido en repuesta a Q_2.

Puesta en común de G_1

E1: [...] hemos optado por el cilindro (Figura 2. Cilindro construido por los integrantes del G1.), porque tiene una forma cómoda y porque nos supone menos trabajo realizar uno [...] la altura treinta centímetros, porque, más o menos, hemos semejado –creo– a una lata de Pringles...

E2: [...] también hemos optado por un cilindro... por la comodidad a la hora de cogerlo.

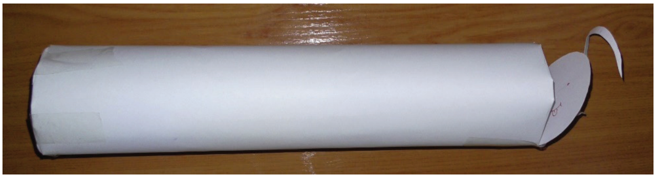


Figura 2. Cilindro construido por los integrantes del G_1.

Cuando les preguntamos qué debieron tener en cuenta para hacer los trazos del desarrollo del cilindro sobre la cartulina, respondieron:

E3: Las medidas del cilindro. La altura, el diámetro de las bases, y el ancho que va a tener el cilindro.

P: [...] el desarrollo de ese cilindro en particular, ¿qué figuras implicó trazar [sobre la cartulina]?

E3: Un círculo y un rectángulo. ¡Dos círculos!

E2: Dos círculos que eran las dos bases, y el rectángulo, que sería el cuerpo del cilindro.

P: ¿Qué medidas debieron tener esas figuras?

E2: Bueno, pues realmente la altura la hicimos un poco así a ojo. Treinta, pues por hacer una altura medianamente decente. Y luego, por la fórmula para hallar el área... averiguamos el radio [...].

E4: Pensamos que el volumen [del cilindro] que es la altura, por pi [π], por el radio al cuadrado, tenía que ser mil centímetros cúbicos. Entonces, sustituimos la altura por treinta, el pi por [...] la tecla de la calculadora, y luego tuvimos que calcular el radio, que nos salió 3,25. Y de ahí [...] el diámetro.

P: ¿Por qué es necesario calcular el diámetro de la circunferencia?

E4: Pues calculamos el diámetro, para poder calcular el perímetro [de la circunferencia], [...] esto es una medida del rectángulo.

Minutos después, preguntamos:

P: [...] para poder hacer los trazos [...] y poder construir ese recipiente, las medidas que tuvieron en cuenta sobre la cartulina, ¿fueron exactamente aquellas que calcularon [...] o tuvieron algunas tolerancias?

E2: [...] la verdad es que hubo muchos decimales, entonces, fuimos redondeándolo lo más posible [...].

Cuando sometieron a prueba la fórmula usada por ellos (i.e., $V = h\pi r^2$, siendo r el radio, h la altura del cilindro, y V el volumen buscado), encontraron que el cilindro diseñado tenía un volumen de *995,492* cm^3.

E2: [...] da así... porque hemos cogido aproximaciones. En realidad, no son 3,25 el radio, es 3,257... Si no, al coger más decimales, sí que nos da... no nos da el mil, pero nos da 999,9. Entonces... aquí ... lo hemos redondeado, lo hemos aproximado, pero realmente es por un milímetro [...].

Puesta en común de G_2

E5: [...] nosotros lo primero que hicimos fue decidir qué forma iba a tener nuestra figura, para poder después hacer todas las fórmulas [...] Hemos decidido hacer un tetraedro regular (Figura 3. Tetraedro regular construido por los integrantes del G2.), [...] y lo primero que hicimos fue la fórmula de volumen. Y a partir de allí, pues hicimos la fórmula de equis elevado a tres por raíz de dos...

E6: Bueno, al principio intentamos averiguar la medida de un lado,...

E5: ¡Exacto! Lo hicimos por estándar, o sea por tanteo de... a base de prueba y error de... Hicimos 21, vimos que nos pasamos mucho, luego hicimos 20,1, 20,2, hasta llegar más o menos. Y luego nos dimos cuenta de que obviamente se podría hacer con la equis, y lo hicimos ya por exactitud. Y cuando ya tuvimos el lado, pues decidimos [...] planificar en el papel cómo haríamos la forma para después empezar a doblarla [...] cuando quisimos plasmarlo en el papel, pues... nos costaba mucho, entonces decidimos [...] romper en triángulos rectángulos, cada uno de los triángulos que no eran rectángulos. Pues necesitábamos hallar la hipotenusa, y para eso hicimos el teorema de Pitágoras...

E6: Necesitábamos saber la altura [...] de un triángulo equilátero.

P: ¿Por qué surgió la necesidad de hallar esa altura?

E5: ¡Porque no teníamos compás!

P: ¿Para qué necesitaban el compás?

E5: Para poder hallar a partir de esta base [señalando la base de uno de los triángulos equiláteros que constituyen el desarrollo del tetraedro], directamente pincha aquí y hacer así, pinchar aquí y hacer así [haciendo un gesto con sus manos sobre la pizarra, para simular el trazado e intersección de dos arcos], y ya nos daba el punto exacto. Como no lo teníamos, pues...

Figura 3. Tetraedro regular construido por los integrantes del G_2.

Luego preguntamos por el proceso que siguieron para calcular el valor de *x* que aparece en la fórmula usada (i.e., $V = [(x^3\sqrt{2})/12]$, donde *x* es la longitud de la arista del tetraedro regular y *V* el volumen buscado).

P: [...] Han dicho al principio, que comenzaron a probar con varios números [...], pero después dijeron: entonces tomamos la decisión de trabajarlo con equis, porque es más preciso. Y, ¿cómo fue ese trabajo con equis?

E6: Pues, al tener la fórmula general de un tetraedro [...] la hemos igualado a mil. [...] Y nos da básicamente, [...] 23,9, y muchísimos decimales, por lo que optamos por el redondeo. Porque precisar tantos decimales en una regla, pues, no podemos.

Con relación a la elección de la forma tetraédrica, los estudiantes indicaron:

E5: No tuvimos en cuenta, ni la comodidad, ni la capacidad de... vacío de él [refiriéndose al orificio de entrada y salida del contenido].

E6: Por lo que hemos hecho esta figura, no es más para... un motivo comercial, sino para demostrar que hay muchísima variedad de figuras...

Puesta en común de G_3

E9: [...] Nosotros para este proyecto, quisimos innovar un poco, y pues pensamos en hacer un octaedro regular (Figura 4. Octaedro regular construido por los integrantes del G3.). Al principio pensamos en hacer... un cono o una pirámide, pero... quisimos probar otro. Es cierto que... nos ha costado bastante [...]. Como podéis ver aquí en esta fórmula [$V = [(l^3\sqrt{2})/3]$, donde l es la longitud de la arista del octaedro regular y V el volumen buscado] da exactamente... un litro, pero se pasa, a lo mejor unas centésimas o un poco más.

P: Si se trata de innovar [...], ¿por qué esa forma en particular?

E10: [...] porque es la que nos salían los cálculos mejor.

E9: [...] Justo los cálculos los hicimos así: primero pensamos en números enteros y cuando vimos que se nos aproximaba un poco, empezamos con decimales, y exactamente cada lado equilátero mide 12,85 centímetros [...].

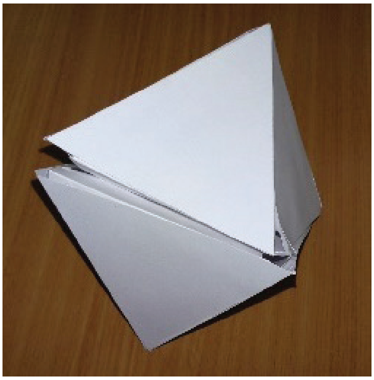


Figura 4. Octaedro regular construido por los integrantes del G_3.

Cuando preguntamos por la manera como calcularon la medida del lado de los triángulos que constituyen el desarrollo del octaedro, los estudiantes respondieron:

E9: [...] Primero, para aproximarnos... a un litro, lo que pensamos en hacer es por tanteo, y primero pusimos 13 y vimos que se acercaba un poco, y luego bajamos a 12,5, y ya veíamos que se bajaba un poco. Entonces, ahí fuimos aproximando hasta que nos dio eso.

P: Y les dio en este caso 1000,23 centímetros cúbicos. Ciertamente un poco más que el litro...

E10: ¡Claro, un poquito! ¡Hombre, no se va a notar!, digo yo.

Sobre el proceso seguido para trazar el desarrollo del octaedro regular, los estudiantes indicaron:

> E9: Hicimos un triángulo [equilátero], y utilizamos ese triángulo y lo cortamos de base [como una plantilla], y de ahí hicimos cada uno.

PRESENTACIÓN DEL INSTRUMENTO DE ANÁLISIS DE LA OM ELABORADA Y DE SUS RESULTADOS

Dentro de la TAD "toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización" (Fonseca, Gascón, y Lucas, 2014, p. 294). Queremos analizar hasta qué punto ha sido posible llevar a cabo una actividad de modelización espacio-geométrica en el REI experimentado. Uno de los instrumentos que nos proporciona la TAD para analizar las OMD, que tomaremos aquí como herramienta de análisis, lo constituye *los indicadores del grado de completitud de una OM local relativamente completa*. A propósito de ello:

> Parece evidente que una OM local que permita abordar –y, por tanto, integre en cierta medida– este tipo de cuestiones [de modelización matemática] también cumplirá los indicadores anteriores relativos a la flexibilidad de las técnicas, el desarrollo de los tipos de tareas y la existencia de un cuestionamiento tecnológico funcional. (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004, p. 219)

En Bosch *et al.*, (2004), se definen siete indicadores del "grado de completitud" de una OM, que nos van a servir para analizar la OM elaborada durante el REI implementado. A continuación, mostramos y analizamos hasta qué punto se cumplen cada uno de los indicadores, porque ello nos servirá; de una parte, para identificar las limitaciones y restricciones encontradas durante el desarrollo de la tarea propuesta; y de otra, para desvelar los conocimientos geométricos que se pusieron en juego durante la búsqueda de respuestas a Q_2.

– El primer indicador pretende analizar en qué medida se ha producido *una integración de los tipos de tareas*.

Todos los tipos de tareas tienen un nexo común que es responder a Q_2. Cada grupo de estudiantes debió llevar a cabo una tarea del tipo T_2: *Diseñar y construir un envase en cartulina, con capacidad para un litro*, que dentro de cada grupo se tradujo en una tarea:

- En G_1, t_{21}: *Diseñar y construir un envase con forma de cilindro con capacidad para un litro*; y una vez elegida la forma del envase resolvieron: t_{211} = ***Calcular las dimensiones de un cilindro, sabiendo que su volumen es de un litro.*** Esta tarea requiere una técnica compleja de resolución que consiste en buscar la solución de una ecuación con dos incógnitas, por lo que la ecuación tiene infinitas soluciones. Los alumnos de este grupo simplificaron la tarea dando un valor concreto (30 cm) a la altura y la técnica utilizada se redujo a resolver una ecuación con una incógnita. Después construyeron un círculo con el radio obtenido y un rectángulo de lados la longitud del círculo y la altura del cilindro.

- En G_2, t_{22}: *Diseñar y construir un envase con forma de tetraedro, con capacidad para un litro*; y una vez elegida la forma del envase resolvieron: t_{221}: ***Calcular las dimensiones de un tetraedro regular, con un volumen de un litro***. Aquí la técnica se reduce a "resolver una ecuación con una incógnita", que es la utilizada por los alumnos del grupo. Después construyeron cuatro triángulos equiláteros iguales con la longitud de lado obtenida.

- En G_3: t_{23}: *Diseñar y construir un envase con forma de octaedro, con capacidad para un litro*; y una vez elegida la forma del envase resolvieron: t_{231}: ***Calcular las dimensiones de un tetraedro regular, con un volumen de un litro***. Aquí la técnica también consiste en resolver una ecuación con una incógnita. Sin embargo, aquí los alumnos utilizaron la técnica de ir probando valores en la fórmula hasta acercarse al valor del volumen. Luego construyeron 8 triángulos equiláteros iguales con la longitud del lado obtenida.

Para elegir las formas de los envases, buscaron en su libro de texto y eligieron la forma de dos poliedros regulares y del cilindro, porque allí tenían disponible la fórmula de su volumen. Tomaron dichas fórmulas sin ningún cuestionamiento sobre su validez. Así, podemos concluir que los tipos de tareas propuestos anteriormente aparecen integradas, porque todas pretenden responder a Q_2, pero apenas existe un cuestionamiento tecnológico de las técnicas utilizadas. Para existir dicho cuestionamiento debería haberlo provocado el profesor, pues los propios alumnos no tienen por costumbre hacerlo por propia iniciativa.

– Con el segundo indicador se pretende estudiar si existen *diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas.*

En el desarrollo de T_2, las técnicas empleadas en cada grupo para calcular las medidas del envase fueron:

– En G_1, han utilizado primero τ_{21}: *elegir una forma cómoda y fácil de manejar y que suponga poco trabajo realizarla.* Así han elegido el cilindro. Para resolver t_{211}, han utilizado:

  - τ_{211}: *Usar la fórmula* $V = h\pi r^2$ (donde V representa el volumen del cilindro, $\boldsymbol{h}$, la altura del cilindro y $\boldsymbol{r}$ el radio de las circunferencias de las bases*) y asignar valores a* $\mathbf{h}$ *parecidos a algún objeto real conocido y después obtener* $\boldsymbol{r}$ *en la ecuación* $V = h\pi r^2$ *utilizando las propiedades de simplificación.*
    Han decidido asignar a la altura $\boldsymbol{h}$ el valor de 30, porque han encontrado que en el mercado hay un envase de parecida altura y han obtenido que $\boldsymbol{r}$ es 3,2576..., donde V viene dado en cm^3 y $\boldsymbol{h}$ y $\boldsymbol{r}$ en cm. Aquí se observa que los alumnos han hecho un uso de la fórmula del volumen del cilindro, primero aritmético y después algebraico, pero no han sido capaces de utilizarla como una función, donde $\boldsymbol{h}$ y $\boldsymbol{r}$ jueguen el papel intercambiable de variables dependiente e independiente.

– En G_2, han utilizado primero τ_{22}: *elegir una forma genérica cualquiera de la que dispongamos de la fórmula de su volumen.* Y han elegido un tetraedro. Para resolver t_{221}, han empleado las dos técnicas siguientes:

  - τ_{2211}: *Utilizar la fórmula* $V = [(x^3\sqrt{2})/12]$ (donde V representa el volumen del tetraedro regular y x representa la arista del tetraedro) *y hallar el valor de* x*, por tanteo, dando valores hasta acercarse lo más posible a* $V = 1000$.

  - τ_{2212}: *Utilizar la fórmula* $V = [(x^3\sqrt{2})/12]$ (donde V representa el volumen del tetraedro regular y x representa la arista del tetraedro) *y* *hallar el valor de x utilizando las propiedades de simplificación en la ecuación que proporciona la fórmula.*

En ambos casos, V viene dado en cm^3 y x en cm.

Posteriormente para la elaboración del desarrollo del envase utilizaron diversas técnicas para construir el triángulo equilátero que ya han sido explicadas y analizadas en Rojas y Sierra (2018).

– En G_3, han utilizado primero τ_{23}: *elegir una forma innovadora de la que se disponga de la fórmula de su volumen y para la que sea posible realizar los cálculos de forma más ajustada*. Y han elegido un octaedro. Luego, para resolver t_{231}, han usado la técnica:

  - τ_{23}: *Emplear la fórmula* $V = [(l^3\sqrt{2})/3]$ (donde V representa el volumen del octaedro regular y l, la arista del octaedro) *y hallar el valor de l, probando y dando valores hasta acercarse lo más posible a* $V = 1000$. Donde V viene dado en cm^3 y l en cm.

Por tanto, en la búsqueda de respuestas a T_2 se han utilizado diferentes técnicas. Los criterios empleados se basan principalmente en que exista un fácil acceso a una fórmula para calcular el volumen del sólido elegido y en que resulte fácil y cómodo tanto calcular las dimensiones del sólido como elaborar su desarrollo plano en cartulina. También se propusieron otros criterios menos claros como el de innovar y el de escoger un sólido cualquiera, para dar la idea de que hay muchos posibles. Las técnicas utilizadas muestran que los alumnos manejan las fórmulas, en primer lugar, como programas de cálculo aritmético y solo algunos, en segundo lugar, son capaces de usarlas como ecuaciones. En ningún caso, los alumnos son capaces de considerar las fórmulas como modelos funcionales. En general, los criterios tienden a intentar simplificar y cerrar la tarea a resolver.

– El tercer indicador, analizar si existe *independencia de los ostensivos que integran las técnicas.*

Hemos visto, en el indicador anterior, que los estudiantes han utilizado la notación que aparecía en el libro de texto o en el documento resumen donde venían las diferentes fórmulas del volumen de sólidos. Así, las fórmulas del volumen del tetraedro y del octaedro que venían en dichos textos eran $V = [(l^3\sqrt{2})/12]$ y $V = [(l^3\sqrt{2})/3]$ respectivamente. Pero en el caso del tetraedro, como los alumnos decidieron considerar la fórmula como una ecuación donde la incógnita era el valor del lado, cambiaron la l por la x, ya que para ellos la incógnita de una ecuación siempre debe venir representada por la letra x.

Por tanto, se observa que existe rigidez en el uso de ostensivos en la actividad matemática desarrollada por los alumnos.

– El cuarto indicador tiene como objetivo estudiar *si existen tareas y técnicas "inversas"*.

El tipo de tareas T_2 propuesto hace referencia a un tipo de tareas inversas de las que se suelen proponer en las clases de Secundaria que son del tipo T_2^{inv}: "*Elegir la forma de un envase y, conocidas sus dimensiones, calcular su volumen*". Además, T_2 resulta de una mayor dificultad, pues tiene un carácter abierto; los estudiantes primero, deben elegir la forma del envase que pretenden diseñar; y luego, decidir la manera en que calcularán sus medidas. Los alumnos de G_1 y G_3 al principio intentan resolver las tareas del tipo T_2, utilizando la técnica directa que consiste en asignar valores a las dimensiones del envase probando hasta conseguir que el volumen sea aproximadamente un litro. Sin embargo, G_1 y G_2 acaban usando la técnica inversa que consiste en considerar la fórmula como un modelo algebraico. En general, los alumnos tienden a forzar y modificar la tarea para evitar usar una técnica no habitual y así poder aplicar una técnica escolar estándar.

– El quinto indicador estudia si existe *interpretación del resultado de aplicar las técnicas.*

Los estudiantes no se cuestionaron sobre la validez de las fórmulas utilizadas y las aceptaron sin que anteriormente hubieran sido justificadas en clase o en el libro de texto.

Ninguno de los estudiantes se cuestionó sobre la relación existente entre la capacidad de un objeto y su volumen. Asimismo, ninguno consideró que el envase a elaborar debería tener un determinado grosor.

En general, no hubo interpretación del funcionamiento de las técnicas.

– Con el sexto indicador se analiza si ha habido *necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas inicialmente considerados.*

En este caso, hemos visto que la elección del tipo de tareas T_2 estuvo fuertemente condicionada por las ventajas que ofrecen las técnicas empleadas para calcular las medidas del envase. Esto se puede evidenciar en los argumentos presentados por los estudiantes, cuando indagamos por los motivos que les condujeron a la elección de la forma del envase diseñado y construido. Así, en G_1, fue la *comodidad a la hora de manipularlo* y la presunción de menos trabajo en la construcción. En G_2, dicen que hay *muchísimas figuras* con capacidad de un litro, pero eligen el tetraedro porque disponen de una fórmula sencilla para calcular el volumen. En G_3, primero pretenden innovar, pero después optan por el octaedro porque es el sólido para el que les resulta más fácil realizar los cálculos.

En la actividad matemática llevada a cabo, creemos que sí se construyó, por algunos alumnos, la técnica que consiste en utilizar la fórmula del volumen como un modelo algebraico. Además, pensamos que se puede crear la necesidad de construir otra técnica nueva donde se considere la fórmula del volumen del envase elegido como un modelo funcional. Así, en una etapa posterior del desarrollo del REI hemos propuesto el uso de GeoGebra para facilitar la elaboración de dicha técnica.

– El séptimo indicador propone estudiar la *existencia de tareas matemáticas "abiertas".*

Este indicador contiene en cierta forma los otros seis indicadores, en la medida que estos caracterizan al tipo de tareas abiertas y, en particular, las tareas de modelización matemática. Para que estas existan con normalidad en una institución escolar se requiere que las OM con las que se trabaja sean relativamente completas, esto es, OM que cumplan en una medida apreciable los indicadores en cuestión. Dado que las OM escolares no cumplen en general estas condiciones, era previsible que, ante una tarea abierta como la propuesta, los estudiantes encontraran muchas dificultades. En efecto, las tareas propuestas son abiertas porque no se conoce de antemano qué técnica o técnicas permitirán resolverlas. Así, para llevar a cabo T_2, los alumnos necesitaron elegir la técnica de resolución, y esto les llevó a elegir de entre las disponibles, que aparecían en su libro de texto o en sus apuntes de clase, aquellas más fáciles de aplicar. Al final, hemos visto que los alumnos tienen tendencia a cerrar las tareas propuestas y apenas optan por crear técnicas nuevas.

RESTRICCIONES Y LIMITACIONES ENCONTRADAS

En la escuela secundaria existen ciertas restricciones, es decir, condiciones inmodificables por el profesor y, limitaciones, que se derivan de sus propias normas y estructura, para poder implementar nuevos dispositivos didácticos. De este modo,

> [...] para la TAD, no es posible modificar las praxeologías matemáticas y didácticas que viven en una institución determinada como consecuencia exclusiva de la *voluntad de los agentes de las instituciones* en cuestión, sean estos profesores, autores de cualquier tipo de materiales escolares o autoridades educativas. (Fonseca *et al.*, 2014, p. 314).

Así, los profesores y estudiantes están sujetos a un currículo –sobre el que no pueden intervenir– que supone la segmentación de la enseñanza en un conjunto de temas separados, que se deben tratar en un horario de clases de 50 a 55 minutos. Esto, aunque ha generado las condiciones necesarias para que el modelo de enseñanza actual se lleve a cabo, también genera importantes restricciones para abordar, en profundidad, cuestiones que podrían dar sentido a varios de los saberes propuestos en el currículo actual.

En nuestro caso, algunas de las restricciones y limitaciones encontradas, durante el desarrollo del tipo de tareas propuesto (i.e., T_2), están íntimamente relacionadas con los indicadores del grado de completitud discutidos anteriormente. Los cuales, recíprocamente, son condiciones necesarias para llevar a cabo una actividad abierta de modelización. Con lo cual, dichas restricciones y limitaciones se reflejaron, por ejemplo, en:

- la ausencia de una interpretación algebraico-funcional de T_2, ya que los estudiantes buscaron una solución particular para el cálculo de las medidas del envase, sin detenerse a cuestionarse sobre el hecho de que dicha solución forma parte de un conjunto infinito de soluciones que, está asociado a la posible variación del conjunto de dimensiones de dicho envase que, hacen que su volumen pudiera ser de 1000 cm^3;

- el uso casi excluido de las fórmulas empleadas como programas de cálculo aritmético, porque la tendencia fue a introducir valores en las fórmulas a fin de que el volumen de los envases se aproximase al solicitado;

- la dependencia de ostensivos empleados habitualmente en el cálculo de volúmenes, vinculada con el uso de un listado-resumen de fórmulas que habitualmente usan los estudiantes en la clase de geometría, y con la necesidad de incluir la letra x en el planteamiento y solución de ecuaciones, como fue el caso del grupo que diseñó el envase con forma de tetraedro regular;

- la falta de planteamiento de tareas inversas en el currículo habitual genera en los estudiantes la necesidad de transformar T_2, de naturaleza inversa, en un tipo de tarea directa. Muestra de ello es que los estudiantes tendieron al diseño de un envase cuyo volumen pudiese calcularse, preferiblemente, con una fórmula que incluyese una sola variable, incluso, reduciendo T_2 al cálculo del volumen de un sólido a partir de la medida de uno de sus elementos;

- la ausencia del cuestionamiento de la validez de las fórmulas empleadas y de la construcción de nuevas técnicas. Principalmente, porque los estudiantes están habituados a usar las fórmulas sin que previamente se discuta su significado y su validez, y porque no se acostumbra a proponer que sean ellos quienes construyan dichas fórmulas.

Esto significa que, tanto en el currículo como en la actividad matemática escolar que siguen habitualmente los estudiantes, las tareas abiertas de modelización no suelen estar presentes.

CONCLUSIONES

El análisis de los resultados obtenidos y las hipótesis que pretendíamos validar nos permiten concluir que, durante la resolución del problema espacial sobre el diseño y construcción de un envase con capacidad para un litro, pueden emerger algunos de los saberes geométricos propuestos en el currículo escolar para ser enseñados. Por ejemplo, los contenidos de *geometría tridimensional* en 3º ESO (alumnos de 14/15 años), y de *conocimientos geométricos para la resolución de problemas del mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes* en 4º ESO (alumnos de 15/16 años), tanto en enseñanzas académicas como en aplicadas (MECD, 2015). Al construir el desarrollo de los envases aparece la necesidad de representar y estudiar *las características y propiedades de las figuras planas*, por ejemplo, en nuestro caso, triángulos equiláteros, triángulos rectángulos, rectángulos, círculos. Aquí ha surgido la necesidad de relacionar las geometrías 2*D* y 3*D*, lo que ha ayudado a articular ambos tipos de conocimientos geométricos. Los tipos de conocimientos geométricos van a estar muy relacionados con el tipo de envase que deseen diseñar y construir cada grupo de alumnos. Por ello, será muy útil que el profesor haga una buena gestión de las sesiones de clase, con el objetivo de que sea necesario elaborar una variedad de tipos de envase, que permita abordar la mayor parte de los conocimientos geométricos que propone el currículo.

Las cuestiones que han surgido en el desarrollo del REI al resolver los problemas espaciales de diseño y construcción de un envase, se han constituido en algunas de las razones de ser de los saberes geométricos mencionados en el apartado anterior, que forman parte del currículo de la ESO. Por tanto, consideramos relevante incluir dichos problemas en las OMD para enseñar geometría. Llevar a cabo procesos de estudio parecidos al experimentado, implicaría cambios importantes en la lógica de enseñanza habitual, porque les otorgaría mayor responsabilidad a los estudiantes en su formación académica y obligaría a hacer frente a ciertas limitaciones y restricciones que el sistema escolar impone, superando la obligación de un horario escolar compartimentado en clases de 50 minutos. Se necesita al menos un tiempo de 90 minutos para poder realizar una actividad matemática que permita reflexionar, cuestionar y contrastar en equipo las posibles respuestas al tipo de tareas planteado.

Consideramos necesario proponer procesos de estudio en secundaria como el implementado, para que los estudiantes se vean abocados a elaborar técnicas para resolver las tareas propuestas. Es importante crear la necesidad de que describan, expliquen y justifiquen dichas técnicas. Se deben plantear tareas donde las técnicas, ya conocidas, fracasen y los alumnos sientan la necesidad de construir técnicas nuevas que permitan su resolución.

En la actividad matemática efectivamente desarrollada hemos podido constatar que los estudiantes intentan afrontar el tipo de problemas planteado con técnicas que proporciona el libro de texto o los apuntes y documentos aportados por los profesores. La tendencia de los alumnos es resolver las tareas propuestas con técnicas ya construidas o proporcionadas por otros sin cuestionarse si dichas técnicas son válidas o no. En general, renuncian a construir técnicas nuevas. Hemos constatado que durante el desarrollo del REI los propios estudiantes construyeron alguna de las técnicas necesarias para la resolución del tipo de tareas propuesto, como se documenta en (Rojas y Sierra, 2018).

En la búsqueda de respuestas al tipo de problema planteado, los alumnos han utilizado las propiedades geométricas de las figuras planas como el triángulo equilátero y rectángulo, el círculo y el rectángulo para construir los diferentes envases. Así, han utilizado la modelización espacio-geométrica (aunque no de manera explícita), y algunos han sido capaces de utilizar las fórmulas del volumen como modelos algebraicos, pero ninguno ha considerado las fórmulas como posibles modelos funcionales. Por todo ello, hemos pensado continuar este trabajo diseñando y experimentando, con la ayuda de GeoGebra, un proceso de estudio donde la necesidad de considerar las fórmulas geométricas como modelos algebraico-funcionales surja como respuesta a un problema espacial.

Finalmente, consideramos que el REI implementado se ha llevado a cabo de una forma abierta y libre, dejando que los estudiantes tomasen decisiones sin apenas influencia y dirección por parte del profesor. Sin embargo, pensamos que si nuestro objetivo es conseguir que los estudiantes construyan nuevas técnicas geométricas, sean capaces de cuestionar su validez, interpreten las fórmulas geométricas como modelos algebraico-funcionales y, en definitiva, lleven a cabo una genuina actividad de modelización, se necesita una gestión del REI donde el profesor oriente el estudio favoreciendo cuestiones fructíferas en la dirección de potenciar, provocar y posibilitar dichos resultados. Dicha estrategia didáctica vendrá justificada y fundamentada por la construcción de un modelo epistemológico de referencia de los conocimientos en juego al querer resolver el tipo de tareas de elaboración de un envase, que estamos desarrollando en estos momentos.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación se ha desarrollado en el marco del proyecto I+D+i “Propuestas para una enseñanza basada en el paradigma del cuestionamiento del mundo” (Q-mundo): RTI2018-101153-A-C22 del Programa Estatal de I+D+i Orientada a los Retos de la Sociedad. Agradecemos al profesor Josep Gascón los comentarios y sugerencias realizadas después de la lectura de este trabajo.

REFERENCIAS

Barquero, B. (2009). *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas* (Tesis doctoral no publicada), Universidad Autónoma de Barcelona. http://hdl.handle.net/10803/3110

Berthelot, R., y Salin, M. H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* (Tesis doctoral no publicada), Université Sciences et Technologies - Bordeaux I. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00414065

Berthelot, R., y Salin, M. H. (2001). L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive? *Petit x*, *56*, 5-34.

Bloch, I., y Salin, M. H. (2005). Vers une problématique de modélisation dans l'enseignement elementaire de la geometrie. En M. H. Salin, P. Clanché, y B. Sarrazy (Eds.), *Sur la théorie des situations didactiques* (pp. 125-142). La Pensée Sauvage.

Bosch, M., Fonseca, C., y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*, 1-47.

Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie [Conferencia]. *Seminaire de Didactique des Mathématiques*, Rethymnon, Grèce. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(2), 161-182. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *La Gaceta de la RSME*, *20*(1), 159-169.

Fonseca, C., Gascón, J., y Lucas, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, *17*(3), 289-318. https://doi.org/10.12802/relime.13.1732

Fonseca, C., Pereira, A., y Casas, J. M. (2011). Una herramienta para el estudio funcional de las matemáticas: los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). *Educación Matemática*, *23*(1), 97-121.

Gamboa, R., y Ballestero, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, *XIV*(2), 125-142. http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/EDUCARE/article/view/906

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18*(1), 7-34.

Gascón, J. (2013). La revolución brousseauniana como razón de ser del grupo Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *3*, 69-87.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, *26*(Especial), 99-123.

Guillén, G., Gonzalez, E., y García, M. A. (2009). Criterios específicos para analizar la geometría en libros de texto para la enseñanza primaria y secundaria obligatoria. Análisis desde los cuerpos de revolución. En M. J. Gonzáles, M. T. Gonzáles, y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (Número 3, pp. 247-258). SEIEM.

Pérez, S., y Guillén, G. (2007). Estudio exploratorio sobre creencias y concepciones de profesores de secundaria en relación con la geometría y su enseñanza. En M. Camacho Machín, P. Flores Martínez, y P. Bolea Catalán (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 295-305). SEIEM.

Pérez, S., y Guillén, G. (2008). Estudio Exploratorio sobre la enseñanza de contenidos geométricos y de medición en secundaria. En R. Luengo González, B. Gómez Alfonso, M. Camacho Machín, y L. J. Blanco Nieto (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 295-305). SEIEM.

Perrin-Glorian, M.-J., Mathé, A. C., y Leclercq, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 a 15 ans? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères IREM*, *90*, 5-41.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. (2015). *Boletín Oficial del Estado*, núm. 3, del 3 de enero de 2015. https://www.boe.es/buscar/pdf/2015/BOE-A-2015-37-consolidado.pdf

Rodríquez-Quintana, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de matemáticas una propuesta integradora desde el enfoque antropológico* (Tesis de doctorado no publicada), Universidad Complutense de Madrid. https://eprints.ucm.es/7256/

Rojas, C., y Sierra, T. (2017). Análisis del currículo y de manuales escolares para el caso de los conocimientos espaciales y geométricos en la educación secundaria obligatoria [Ponencia]. *XXI Simposio de la SEIEM*, Zaragoza, España.

Rojas, C., y Sierra, T. (2018). Emergencia de algunos concimientos geométricos durante las solución de un problema espacial. En L. Rodríquez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, Á. Aguilar-González, P. Alonso, F. García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 485-494). Ediciones de la Universidad de Oviedo. https://www.seiem.es/docs/actas/22/ActasXXIIDefinitivas.pdf

RSME, (2020). *Libro Blanco de la Matemáticas*. Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A.

Salin, M. H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la enseñanza elemental. En C. Chamorro (Ed.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 37-80). Ministerio de Educación y Ciencia.

Santaló, L. (1985). La Enseñanza de la Geometría en el Ciclo Secundario (alumnos de 12 a 16 años de edad). En Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia. (Ed.), *La enseñanza de la metamática a debate* (pp. 11-23). http://hdl.handle.net/10256.2/10194

Carlos Rojas Suárez

Dirección: Calle Barranquilla n 53-108, Medellín, Colombia.
Facultad de Educación. Universidad de Antioquia.

Teléfono: +57 300 578 59 21

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN DOI: 10.24844/EM3301.09

Estrategias cognitivas ejecutadas en la resolución de problemas matemáticos en una prueba de admisión a la educación superior

Cognitive strategies performed in the resolution of mathematical problems in a test of admission to higher education

Randall Blanco-Benamburg,[1] Katherine Palma-Picado,[2]
Tania Elena Moreira-Mora[3]

Resumen: El propósito del estudio fue analizar las estrategias cognitivas ejecutadas en la resolución de ítems matemáticos de la prueba de aptitud académica (PAA) del Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR), desde un enfoque metodológico descriptivo y transversal. La principal técnica para la recolección de datos fue la entrevista cognitiva, con el uso de un protocolo validado con un panel de expertos y un grupo focal. Entre los principales resultados se encontró que los participantes no ejecutan la totalidad de las tareas en cada una de las etapas de resolución: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y verificar. También se encontraron diferencias en la ejecución de las tareas entre los tipos de razonamiento: inductivo, deductivo, resolución de problemas, probabilístico y con figuras. Estos hallazgos pueden ser una respuesta a la problemática del bajo desempeño del estudiantado en pruebas enfocadas en estrategias heurísticas al brindar información específica sobre la ruta de resolución, utilizada por estudiantes de alto desempeño matemático, a partir de un conjunto de tareas cognitivas que se pueden desarrollar en el aula.

Fecha de recepción: 18 de octubre de 2019. **Fecha de aceptación:** 09 de septiembre de 2020.

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica, rblanco@itcr.ac.cr, orcid.org/0000-0002-0984-1768
[2] Instituto Tecnológico de Costa Rica, kpalma@itcr.ac.cr, orcid.org/0000-0003-3323-5714
[3] Instituto Tecnológico de Costa Rica, tmoreira@itcr.ac.cr, orcid.org/0000-0002-8955-0804

Palabras clave: *estrategias cognitivas, pruebas estandarizadas, razonamiento matemático, entrevista cognitiva, educación superior.*

Abstract: The purpose of the study was to analyze the cognitive strategies executed in the resolution of the mathematic items for the test of academic abilities from the Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR), from a methodologic descriptive and cross approach. The principal technique for collecting the data was with a cognitive interview, with the use of a protocol validated for a panel of experts and a focal group. Between the principal results, was found that the participants did not execute the total tasks on each one of the steps of resolution: understand the problem, conceive and execute a plan and verify it. In addition, differences were found in the execution of tasks between the types of reasoning: inductive, deductive, problem resolution, probabilistic and with figures. From a pedagogical standpoint, this research could point to a solution for the low performance rates in tests that include heuristics in that it provides specific information related to problem solving routes used by high achieving students. This understanding could guide classroom instruction.

Keywords: *cognitive strategies, standardized testing, math reasoning, cognitive interview, higher education.*

1. INTRODUCCIÓN

El Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR) es una institución de educación superior pública, que ha aplicado la prueba de aptitud académica (PAA) desde su apertura en 1973 para seleccionar a los candidatos. Esta prueba está conformada por dos componentes: matemático y verbal, cuyos ítems se han enfocado en la medición de las habilidades de razonamiento en ambas áreas.

En el 2009 se realizó una investigación descriptiva con la finalidad de identificar esas habilidades verbales y matemáticas y ajustar la tabla de especificaciones de la PAA al perfil de entrada de los estudiantes y a las nuevas demandas cognoscitivas de las carreras para garantizar una muestra representativa de estas habilidades (Moreira-Mora, 2010). No obstante, el proceso de validación involucra la acumulación de evidencia relevante para proveer una amplia base científica para la interpretación de las puntuaciones de acuerdo con los propósitos de su uso. De ahí surgió la necesidad de obtener nuevas evidencias relacionadas con las estrategias de razonamiento usadas por los examinados en la resolución de problemas matemáticos.

Román y Carbonero (2002, citados por Carbonero y Coromoto, 2006), plantean que la deficiente utilización de estrategias cognitivas y metacognitivas es una de las causas de los fracasos de los alumnos y por lo tanto se requiere contemplar en la instrucción matemática, el desarrollo de heurísticos o estrategias para analizar o resolver conflictos, razonamiento inductivo e intuitivo, y la comprobación de hipótesis (p. 349). La identificación de estas estrategias cognitivas permite obtener evidencias asociadas a los procesos de respuesta.

Según Padilla y Benitez (2014), la mayoría de los estudios de validación se han enfocado en las evidencias asociadas al contenido y al constructo; no obstante, los estudios basados en los procesos de respuesta de los participantes fueron estudiados solo en 1,8% de los artículos analizados. Según estos autores, la mayoría de estos estudios han sido en el área de salud y, en general, buscan identificar los elementos de los ítems que pueden causar desajustes entre los procesos de respuesta y las especificaciones delineadas en la prueba.

A pesar de la relevancia de las estrategias cognitivas en la resolución de pruebas estandarizadas de ingreso a las universidades costarricenses como la Universidad de Costa Rica (UCR), Universidad Nacional (UNA) y el ITCR, en el país no se han llevado a cabo estudios que permitan identificar las estrategias ejecutadas por los estudiantes al resolver estos ítems. Únicamente se ha realizado un estudio relacionado con las habilidades verbales de la prueba de aptitud académica de la UCR y la UNA (Brizuela, Jiménez, Pérez y Rojas, 2016); por lo tanto, el objetivo del presente estudio fue analizar las estrategias cognitivas ejecutadas por los estudiantes para la resolución de ítems de matemática de la PAA del ITCR.

2. ANTECEDENTES

A partir del estudio de Valle, Juárez y Guzmán (2007) con estudiantes de la Olimpiada Mexicana de Matemática, se identificaron dificultades para comprender los problemas planteados, así como un mejor desempeño en la definición de estrategias de solución entre quienes habían recibido entrenamiento previo. Para el análisis de los datos recurrieron a descripción verbal de las estrategias, al cálculo de la frecuencia de uso de ellas y de la incidencia en las distintas áreas de la matemática a la que pertenecían los problemas.

Vergel, Duarte y Martínez (2015) desarrollaron una investigación que consistió en correlacionar la planificación de estrategias para la enseñanza de las matemáticas con el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de cálculo integral de universidades de Santander; concluyeron que las actividades del docente para mejorar la comprensión de los temas de mayor dificultad, está relacionada con el nivel de desarrollo de pensamiento. Al respecto Marugán, Martín, Catalina y Román (2012), señalan que la elaboración de una estrategia cognitiva facilita una mejor comprensión, retención y recuperación informativa, de tal forma que a mayor elaboración mayor codificación y recuperación de la información.

En otro estudio con estudiantes mexicanos que inician carreras universitarias y otros que están concluyendo su formación se encontró que el desempeño cognitivo mejora cuando: el estudiante se enfrenta a problemas que le son familiares, cuando hay conexión entre la capacidad del estudiante para representar gráficamente una situación mediante dibujos, diagramas, gráficas o esquemas lo que a su vez constituye un mecanismo de autocontrol del propio razonamiento (Waldegg y Agüero, 1999).

3. MARCO TEÓRICO

3.1. Estrategias de resolución de problemas

En general, las estrategias cognitivas ayudan al individuo a enfocar su atención en las cuestiones relevantes o significativas de la tarea que se le presenta; lo motivan a establecer conexiones, a procesar y a reorganizar la información de manera profunda (Woolfolk, 2010). Es así como la mente del ser humano trabaja formando representaciones mentales a las cuales se les aplica procesos cognitivos que aseguran la obtención del conocimiento favoreciendo la codificación y almacenamiento de información, su recuperación posterior y su utilización en la solución de problemas (Osses y Jaramillo, 2008).

En el campo particular de la matemática, las estrategias cognitivas se han definido como los procesos que el individuo elige frente a una tarea matemática con el propósito de facilitar la adquisición, el almacenamiento y/o la utilización de información o conocimientos (Sanjurjo y Vera, 1994). Para Valle, Cabanach, Rodríguez, Nuñez y González-Pienda (2006) existen diferentes clasificaciones para designar las estrategias cognitivas, aunque para el caso de resolución de problemas matemáticos hay coincidencia en que las básicas son:

- De organización: implica la lectura comprensiva de enunciados para identificar el problema, organizar los datos, establecer prioridades y buscar relaciones.
- De formulación: consiste en la exploración que hace el individuo para considerar diferentes opciones de solución, definir un plan a seguir y ejecutarlo.
- De selección: referido a la elección que hace el individuo sobre cuál tipo de razonamiento aplicar. De acuerdo con Beltrán (2002), la selección implica diferenciar entre y dentro de las fuentes de información según la importancia y relevancia de criterio.
- De memorización: implica el proceso de recuperación de información (Woolfolk, 2010).

Sobre el estudio de estrategias para resolver problemas matemáticos son reconocidos los trabajos de Polya (1987), quien considera que la experiencia previa de la persona y la observación de la forma como otros resuelven problemas son insumos importantes. Además, afirma que las heurísticas utilizadas en el proceso de resolución no dependen del contenido involucrado en el problema que se pretenda resolver. Su modelo, propuesto en 1965, considera cuatro pasos para la solución de problemas:

1. Comprender el problema: Se debe comprender el enunciado, separar las partes principales, la incógnita, los datos, la condición, hacer una figura si corresponde, introducir la notación adecuada y preguntarse si el problema tendrá solución.
2. Concebir un plan: En esta etapa se deben identificar cálculos, razonamientos o construcciones que deberán realizarse para determinar la solución. En este proceso es útil preguntarse: si se conoce un problema relacionado, si puede enunciarse de modo diferente, si conviene primero resolver un problema similar más simple.
3. Ejecución del plan: Para ejecutar el plan diseñado se requiere, además de concebir la idea, utilizar conocimientos previos, concentración, hábitos de pensa-

miento y paciencia. La implementación puede conducir a la solución o a una nueva estrategia.

4. Visión retrospectiva: Una vez ejecutado el plan y redactada la solución es recomendable que se revise el trabajo realizado, para confirmar la respuesta correcta a lo que se cuestionó, incluso si se puede resolver el problema de otra manera.

3.2 Habilidades de razonamiento matemático

Los ítems de razonamiento matemático de la PAA del ITCR se clasifican en las siguientes categorías:

- Resolución de problemas: El examinado debe hacer uso de conocimientos básicos, definir y ejecutar una estrategia de solución. La solución de un problema, como señalan Marino y Rodríguez (2015) "implica un proceso creativo y de una complejidad cognitiva mayor, en tanto que el alumno debe elaborar su propio método de resolución, apelando a sus conocimientos previos, estableciendo nuevas relaciones entre ellos y, además, empleando diversos procedimientos, tanto algorítmicos como heurísticos" (p. 161).
- Deductiva: Según Lassiter y Goodman (2015), el razonamiento deductivo "implica procedimientos matemáticamente bien definidos para extraer las consecuencias que siguen con certeza o necesidad de algún tipo de evidencia" (p. 124). Mediante la deducción se conduce de forma sistemática de un grupo de proposiciones a otra.
- Inductiva: Mediante la inducción se pueden crear nuevos conceptos analizando semejanzas o diferencias, este razonamiento "se hace visible a través de operaciones como clasificar, completar series, hacer analogías y comparaciones con diferentes tipos de símbolos (verbales, figuras, entre otros), que permiten llegar a hacer inferencias para definir esos nuevos conceptos y posteriormente aplicarlos y evaluarlos" (Iriarte, Espeleta, Zapata, Cortina, Zambrano y Fernández, 2010, p. 42). Este razonamiento se caracteriza por ampliar la información de la que se parte y por la comprobación de la validez de la nueva información (Cañadas y Castro, 2006).

- Probabilística: implica el análisis de situaciones que no han ocurrido y tienen más de un resultado probable. La capacidad de pensar a partir de las probabilidades es considerada un tipo de razonamiento particular, el cual es muy útil en la toma de decisiones en la vida cotidiana (Nickerson, 2004, citado por Erdem y Gürbüz, 2016, p. 39).
- Con figuras: está relacionada con la habilidad de percibir formas y transformarlas mentalmente. Según Smith (2009), citada por Noriega, Vásquez y García (2011, p. 98), la visualización espacial se caracteriza por "la capacidad de ver, concebir, manipular mentalmente los objetos del mundo visual y realizar transformaciones a partir de lo percibido; distinguiéndola de la mera habilidad o memoria visual, que es una forma estática o reproductiva de visualización".

4. MÉTODO

En función del objetivo de esta investigación se optó por un diseño descriptivo y transversal, la técnica de la entrevista cognitiva y un protocolo para la recolección de los reportes verbales y las respuestas sobre las tareas cognitivas.

La técnica se basa en entrevistas uno a uno realizadas con apoyo de un cuestionario guía (Jobe, 2003); que permite al entrevistado revelar los motivos de sus respuestas, la elaboración de ellas, las dificultades en la comprensión de las preguntas y las tareas de recuperación de información, entre otras (Briceño, Álvarez, Barco, Álvarez, Delgado y Zúñiga, 2016, p. 191). Al respecto Smith y Molina (2011) señalan que al entrevistado se le piden dos cosas básicas: decir en voz alta todo lo que está pensando mientras completa el cuestionario (autorreporte verbal) y contestar una serie de preguntas (pruebas cognitivas de reporte verbal). Como resalta Hernández (2002), el pensamiento en voz alta permite al investigador hacer patentes comportamientos representativos de los procesos complejos que se dan en la solución de problemas y, además, ofrece una idea de la estructura y la forma en que trabaja la mente.

En cuanto a la construcción del protocolo fue necesario la revisión de literatura y un riguroso proceso de validación como se describe en las siguientes etapas del procedimiento metodológico.

4.1. Primera fase: Definición de las categorías de las habilidades matemáticas medidas en la PAA

Para definir las categorías se efectuaron las siguientes actividades:

a) Revisión de la literatura para la descripción conceptual de las categorías de razonamiento matemático.
b) Especificación de cada categoría con sus correspondientes etapas y tareas cognitivas.

4.2. Segunda fase: Construcción y validación del protocolo

En la primera etapa se trabajó con un primer panel de jueces con el propósito de revisar la estructura y contenidos de los componentes del protocolo, mientras que en la segunda etapa se realizó una aplicación piloto del instrumento para ser analizada por un segundo panel de expertos.

El juicio de expertos se define como una opinión informada de personas con trayectoria en el tema, que son reconocidas por otros como expertos cualificados en este y que, pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones (Escobar-Perez y Cuervo-Martinez, 2008).

La primera etapa fue realizada en marzo del 2018 con la colaboración de 9 jueces con la finalidad de revisar la estructura y contenidos de los componentes del protocolo. Entre este equipo de jueces se contó con dos en el área de la psicología cognitiva y otros siete con amplia experiencia en la construcción de pruebas estandarizadas en matemática.

Para esta etapa se construyó una guía con las siguientes secciones: introducción, datos generales del experto, instrucciones, definiciones de las categorías de razonamiento matemático y una tabla para calificar la coherencia de las tareas cognitivas basada en el modelo de Cuatro Etapas propuesto por Tourangeau, así como de la estructura del protocolo.

A manera de resumen, las observaciones hechas por los 9 jueces, tanto al instrumento del protocolo como al consentimiento informado de los participantes, se centraron en aspectos de contenido y formato. Específicamente, las principales recomendaciones al protocolo fueron:

- Realizar con los jueces participantes de la fase siguiente el análisis de un ítem de la aplicación piloto para que ellos comprendan el constructo de razonamiento matemático y sus categorías.
- Revisar las definiciones de las categorías e incorporar ejemplos de ítems matemáticos.
- Permutar algunas tareas entre las etapas, incluir otras nuevas y algunas relacionadas con lo heurístico.
- Brindar una definición de cada etapa del modelo para la construcción del protocolo.
- Entre las recomendaciones para mejorar el desempeño de los estudiantes durante la entrevista cognitiva se destacan las siguientes:
- Incluir un ejercicio matemático para practicar el reporte verbal, antes de la aplicación de la entrevista cognitiva.
- Tratar de simplificar el nivel de complejidad de las tareas para facilitar su comprensión y reducir el listado en algunas etapas.
- Facilitar una ficha con el listado de las tareas para que los estudiantes puedan seguir la lectura del investigador.
- Utilizar un vocabulario menos técnico para facilitar la comprensión de los ítems.

Finalmente, se revisaron algunos aspectos de formato y de redacción en todas las secciones del protocolo. Tales recomendaciones fueron consideradas tanto para la aplicación piloto de la segunda etapa como para mejorar la estructura y contenidos del protocolo.

La segunda etapa de la validación inició con la aplicación piloto del instrumento para evaluar la relevancia, la suficiencia, el contenido y la representatividad de las preguntas y las tareas cognitivas descritas en el protocolo, en cada una de las categorías del razonamiento matemático. Esta aplicación fue realizada en abril del 2018 con cuatro estudiantes que ingresaron al ITCR ese año. Esta muestra estaba constituida por 3 hombres y una mujer, provenientes de dos colegios públicos, uno subvencionado y otro privado.

Para esta etapa se contó con la colaboración de 8 jueces, quienes cumplían con el perfil requerido y participaron en dos talleres. El primer taller fue en mayo 2018 para explicar la metodología de trabajo, la técnica de la entrevista cognitiva con el uso del protocolo y las categorías de razonamiento matemático de la PAA. El segundo, se realizó en junio de ese mismo año para el análisis de las descripciones conceptuales de las categorías de razonamiento matemático y sus tareas cognitivas. En esta sesión los jueces compartieron sus observaciones individuales de los 8 ítems seleccionados del folleto de práctica de la PAA del 2017 que representaban todas las categorías. Entre las recomendaciones derivadas de esta discusión grupal se destacan:

- Revisar en las tareas cognitivas: el orden, la pertinencia con la categoría o la etapa, la claridad y la incorporación de otras tareas específicas a cada tipo de razonamiento.
- Revisar en las preguntas abiertas: la redacción, agregar y replantear algunas para indagar más en los procesos mentales del participante.
- Separar el razonamiento deductivo y el inductivo para diferenciarlas por sus tareas cognitivas específicas.
- Del modelo de Cuatro Etapas de Tourangeau utilizado en el protocolo, valorar la opción de eliminar la etapa de estimación porque se confundía con recuperación de la información.
- Ampliar las tareas de la etapa de comprensión y de verificación.
- Señalar en la transcripción los tiempos de las pausas durante la resolución del ítem.

Tales recomendaciones fueron incluidas para mejorar el protocolo y la técnica de la entrevista cognitiva antes de la aplicación principal. Además de estas mejoras, el cambio más relevante fue la transición del modelo de Tourangeau hacia el de cuatro pasos de Polya (1987), ya que, de esta forma se evitaba la confusión entre la etapa de recuperación de la información y la estimación, cuyas tareas están contenidas en el paso de comprender el problema de Polya, quien además considera la verificación de la respuesta; etapa relevante en cualquier estrategia de resolución de problemas matemáticos.

Una vez concluida esta segunda fase, el protocolo quedó organizado en tres partes. En la primera se describe brevemente la técnica de la entrevista cognitiva y los objetivos. Luego, en la parte de entrenamiento, el participante realiza un ejercicio matemático de baja dificultad para ensayar el reporte verbal. La tercera incluía el listado de las preguntas abiertas (pruebas cognitivas de reporte verbal) y las tareas cognitivas por cada categoría de razonamiento matemático. En esta sección los participantes tenían la oportunidad de reflexionar sobre lo ejecutado en cada una de las etapas, además del autoreporte verbal inicial. Como lo indica Hernández (2002, p. 42), se exploró no sólo lo que reside en las mentes de los participantes, sino que se estudiaron sus estrategias en la solución de problemas y su reflexión sobre las mismas.

4.3 Tercera fase: Aplicación principal de la entrevista cognitiva

El marco de la muestra estaba constituido por 174 estudiantes que obtuvieron una nota igual o mayor a 90 en el componente de matemática de la PAA del 2017, que se caracterizaba por estar conformada por 79,19% de hombres y 20,81% de mujeres, quienes provenían el 41,52% de colegios privados, el 36,84% de públicos y el 21,63% de subvencionados. De esta lista de estudiantes se seleccionaron 18 de manera aleatoria, quienes habían matriculado cursos en el segundo semestre del 2018.

Los criterios técnicos para la selección de los ítems fueron los siguientes: tener un nivel de dificultad intermedio, entre 40% y 60% de acierto, mostrar una discriminación igual o mayor a 0,30 y representar diversas tareas de las estrategias de razonamiento de cada categoría, como se resume en la tabla 1.

Tabla 1. Descripción de los ítems utilizados en la aplicación principal de la entrevista cognitiva.

Ítems seleccionados	Índice de dificultad	Índice de discriminación	Total de reportes verbales	Distribución de los jueces
Inductivo N° 1	49	0,46	10	J3 y J4
Inductivo N° 2	45	0,33	8	J3 y J4
Deductivo N° 3	62	0,49	8	J1 y J2
Deductivo N° 4	47	0,36	10	J2 y J3
Resolución de problemas N° 5	58	0,49	6	J5 y J6
Resolución de problemas N° 6	46	0,44	6	J5 y J6
Resolución de problemas N° 7	52	0,48	6	J5 y J6
Con figuras N° 8	54	0,34	6	J7 y J8
Con figuras N° 9	57	0,35	6	J7 y J8
Con figuras N° 10	47	0,27	6	J7 y J8
Probabilístico N° 11	42	0,41	6	J9 y J4
Probabilístico N° 12	37	0,32	6	J2 y J9
Probabilístico N° 13	42	0,52	6	J9 y J1

Como se observa, el ítem N° 1 resultó fácil y el N° 12 difícil; mientras que el N° 10 mostró un índice de discriminación menor a 0,30; aun así, se consideraron aceptables para la aplicación principal de la investigación.

El objetivo de esta evaluación fue juzgar de manera integral la relevancia, la suficiencia y la representatividad de las tareas cognitivas ejecutadas por los participantes en cada etapa, según la categoría de razonamiento matemático. En este juzgamiento se eliminó el dominio de contenido por recomendación de los jueces en el proceso de validación del protocolo. En esta evaluación colaboró un panel de 9 expertos en la enseñanza de la matemática en educación superior, de los cuales 6 habían participado en la fase piloto. A cada uno de los jueces se le asignó tres ítems con sus correspondientes reportes verbales. La estrategia de trabajo se desarrolló de la siguiente manera:

a) Revisión de las transcripciones por parte de los investigadores.
b) Asignación de cada reporte verbal a dos jueces.
c) Organización de los reportes verbales por ítem en un archivo de Word.
d) Elaboración de la guía de juzgamiento de las respuestas ejecutadas por los participantes (solución, preguntas y tareas) con base en los siguientes dominios:

    - La suficiencia del conjunto de tareas en cada etapa (comprensión, elaboración, ejecución y verificación).
    - La relevancia de cada tarea en cada etapa.
    - La representatividad del conjunto de tareas de cada etapa con la categoría de razonamiento (inductivo, deductivo, resolución de problemas, figuras y probabilístico).

e) Preparación de las carpetas digitales de trabajo por categoría y por juez, con los archivos en Word que contenían los reportes verbales de los ítems y una hoja de cálculo preparada para registrar las evaluaciones; más una carpeta física con las hojas de los ítems resueltos (material confidencial de la PAA) y la guía de juzgamiento de las tareas ejecutadas por los participantes.
f) Inducción general a los expertos el 12 de noviembre del 2018 para explicar el procedimiento de análisis y la guía de juzgamiento.
g) Juzgamiento individual de las estrategias de razonamiento ejecutadas por los participantes en cuatro sesiones presenciales realizadas entre el 12 y el 26 de noviembre con los expertos.

Para determinar el grado de acuerdo entre los jueces en la evaluación de cada una de las tareas cognitivas según etapa y categoría de razonamiento matemático, se utilizó la medida de acuerdo Kappa, calculada con el paquete Statistical Package for the Social Sciences (SPSS) 19, cuyos resultados se resumen en la tabla 2. Para la interpretación de este coeficiente se utilizaron los parámetros recomendados en la literatura (Landis y Koch, 1977, p. 165): pobre (menor a 0), ligero (0 – 0.20), justo (0.21 – 0.40), moderado (0.41 – 0.60), sustancial (0.61 – 0.80) y casi perfecto (0.81–1).

Tabla 2. Coeficiente Kappa de Cohen del juzgamiento de las tareas ejecutadas por etapa y categoría de razonamiento.

Aplicación principal	*Medida de acuerdo Kappa*	*Nivel de significancia*
Inductivo N°1	*.417*	*.000*
Inductivo N°2	.361	.004
Deductivo N°3	.258	.030
Deductivo N° 4	.506	.000
Resolución de problemas N° 5	.289	.013
Resolución de problemas N° 6	.193	.093
Resolución de problemas N° 7	.308	.005
Con figuras N° 8	.452	.000
Con figuras N° 9	.482	.000
Con figuras N° 10	.541	.000
Probabilístico N° 11	.417	.001
Probabilístico N° 12	.146	.176
Probabilístico N° 13	.501	.000

En general, los coeficientes Kappa oscilaron entre los valores justos (0,21 - 0,40) y moderados (0,41 - 0,60). De acuerdo con Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008, p. 32), "lo común es obtener un amplio espectro de valores intermedios que se interpretan teniendo como referencia la complejidad de la evaluación y el número de categorías a evaluar". Según estos resultados se rechaza la H_0 cuando el valor observado excede al valor crítico (con un α de 0.05); por lo tanto, se puede concluir que hay acuerdo entre los expertos, el valor de k muestra la proporción de acuerdo eliminando el acuerdo que podría ser efecto del azar, con excepción de dos ítems: resolución de problemas N° 6 y razonamiento probabilístico N° 12.

5. RESULTADOS

La estrategia de análisis de esta investigación se fundamentó en la triangulación de la información obtenida en diferentes fuentes: los reportes verbales de la entrevista cognitiva, las soluciones escritas de los estudiantes en los folletos de examen, las observaciones del equipo de investigadores y las evaluaciones de los jueces. Como lo destacan Okuda y Gómez-Restrepo (2005), la triangulación ofrece la alternativa de poder visualizar un problema desde diferentes ángulos, le confiere a un estudio rigor, profundidad, complejidad y permite dar grados variables de consistencia a los hallazgos.

En función del objetivo de esta investigación se describen de manera individual cada una de las categorías de razonamiento matemático, según las etapas del modelo teórico de Polya, para destacar las particularidades y similitudes en las estrategias ejecutadas por los participantes en los diferentes ítems.

En la categoría de razonamiento deductivo se incluyeron dos ítems, uno basado en un silogismo y el otro en un algoritmo, de los que debían deducir una conclusión que con certeza fuera verdadera. Estos ítems se aplicaron a un total de 12 estudiantes, quienes durante el reporte verbal y las preguntas abiertas (pruebas cognitivas) expresaron sus estrategias de razonamiento.

Tabla 3. Valores absolutos y relativos de las tareas cognitivas ejecutadas en razonamiento deductivo.

Tareas	Total	Porcentaje
Comprensión		
T1: Identificó información clave.	12	100
T2: Relacionó la pregunta con ejercicios previos.	10	83
T3: Recordó conceptos matemáticos o fórmulas.	11	92
Concebir el plan		
T1: Relacionó información clave con algún procedimiento conocido.	10	83
T2: Definió una estrategia de solución.	11	92
T3: Representó información de otra manera.	2	17
Ejecutar el plan		
T1: Ejecutó la estrategia de solución inicial.	12	100
T2: Relacionó premisas utilizando conectores lógicos.	12	100
T3: Dedujo nuevas proposiciones verdaderas.	12	100
Verificación		
T1: Comprobó la estrategia seleccionada.	7	58
T2: Comprobó cada paso ejecutado.	9	75
T3: Volvió a leer el enunciado.	10	83
T4: Lo resolvió de otra manera.	1	8
T5: Descartó opciones.	11	92

Como se muestra en la tabla 3, las tres tareas de la etapa de comprensión fueron ejecutadas por la mayoría de los participantes. Por ejemplo, al consultarles si relacionó la pregunta con ejercicios resueltos, uno manifestó:

> E9: De hecho, en Español con las tablas de verdad.

En general, se observó que algunos participantes necesitaron volver a leer el ítem para comprenderlo.

En la etapa siguiente relacionada con la elaboración del plan, solo ejecutaron dos tareas; en tanto que la representación de la información de manera diferente fue ejecutada solo por dos participantes. Una posible explicación es que el ítem de silogismo es difícil representarlo de otra manera y el segundo estaba organizado en forma gráfica. Además, como lo indica uno de los jueces:

> J1: "Es después de leer la pregunta que se le ocurre utilizar las respuestas para descartar y llegar a la respuesta. El ensayo y error fue parte de lo que definió su estrategia".

En general, la elaboración del plan se centra en relacionar la información clave con algún procedimiento conocido y definir una estrategia rápida, que no necesariamente aparece de forma inmediata.

En la ejecución del plan, las tres tareas fueron ejecutadas por todos, lo que demuestra que son relevantes para la deducción de nuevas proposiciones verdaderas y el uso de conectores lógicos.

Finalmente, en la verificación resalta que solo un estudiante utilizó otra estrategia para comprobar la respuesta; a pesar de ser una tarea muy pertinente para confirmar que la respuesta sea la correcta. En tanto que las tareas más frecuentes fueron volver a leer el enunciado y descartar opciones, como bien lo expresa uno de los participantes:

> E17: Descartar opciones lo que hace es hacer más rápido.

En suma, los participantes no realizan todas las tareas de verificación, probablemente, por el poco tiempo disponible para resolverlo. Además, el hecho de que los ítems son de selección única y al encontrar entre las opciones la respuesta obtenida asumen que está correcta; por lo que no verifican el procedimiento.

Desde el punto de vista de los jueces, la tarea 4 de la etapa de verificación no fue relevante en el trabajo realizado por los participantes y con un nivel bajo de relevancia las tareas 3 de concebir el plan, 1 y 2 de verificación.

En la categoría de razonamiento inductivo se incluyeron dos ítems, en los cuales debían identificar un patrón para generar nuevos términos de una secuencia. Las tareas ejecutadas por los 12 participantes se resumen en la tabla 4.

Tabla 4. Valores absolutos y relativos de las tareas cognitivas ejecutadas en razonamiento inductivo.

Tareas	Total	Porcentaje
Comprensión		
T1: Identificó información clave.	12	100
T2: Relacionó la pregunta con ejercicios previos.	12	100
T3: Recordó conceptos matemáticos o fórmulas.	12	100
T4: Identificó patrones.	12	100
Concebir el plan		
T1: Relacionó la información clave con algún procedimiento conocido.	9	75
T2: Definió una estrategia de solución.	12	100
T3: Representó la información de otra manera.	4	33
Ejecutar el plan		
T1: Ejecutó la estrategia de solución inicial.	9	75
T2: Analizó semejanzas o diferencias para identificar un patrón.	12	100
T3: Obtuvo una fórmula para el término general de la sucesión.	3	25
T4: Calculó términos desconocidos de una sucesión.	6	50
Verificación		
T1: Comprobó la estrategia seleccionada.	7	58
T2: Comprobó cada paso ejecutado.	8	67
T3: Volvió a leer el enunciado.	8	67
T4: Lo resolvió de otra manera.	3	25
T5: Descartó opciones.	6	50

Tal como se observa en la tabla 4, todos ejecutaron las 4 tareas de comprensión. En la etapa de concebir el plan, el relacionar información clave con algún procedimiento conocido y definir una estrategia de solución fueron las tareas más frecuentes y la menos frecuente fue representar la información de otra manera porque no era necesario. En ambos se requería identificar un patrón, en uno de ellos se debía encontrar un término desconocido y trabajar con él para luego responder, mientras que en el otro, lo que debían seleccionar era un término de la sucesión.

En la etapa de ejecutar el plan dos tareas son las más frecuentes, en especial, la tarea 2 que fue utilizada por todos. Ninguno de los ítems seleccionados para esta categoría requería encontrar una fórmula general.

En la última etapa, las tres primeras tareas fueron las más utilizadas, al igual que en la categoría de razonamiento deductivo. En uno de los ítems descartar opciones fue una tarea ejecutada por todos, mientras que en el otro no era necesario. Por ejemplo un participante indica:

> E14: ...Lo que se puede hacer es verificar si en todos los datos de la sucesión coincide el mismo patrón ...

Los jueces no consideraron relevante la tarea 3 de la etapa de ejecución y clasificaron en un nivel bajo las tareas 3 de concebir el plan y 4 y 5 de verificación.

En la categoría de resolución de problemas se trabajó con tres ítems en los cuales era necesario realizar algunas operaciones aritméticas y cuya solución podría encontrarse por diferentes caminos. Por ejemplo, podía ser útil el uso de ecuaciones de primer grado con una incógnita, el apoyo con diagramas o el análisis de casos particulares para deducir la solución general. Estos ítems fueron realizados por un total de 18 participantes, cuyas tareas ejecutadas se resumen en la tabla 5.

Tabla 5. Valores absolutos y relativos de las tareas cognitivas ejecutadas en resolución de problemas.

Tareas	Total	Porcentaje
Comprensión		
T1: Identificó información clave.	18	100
T2: Relacionó la pregunta con ejercicios previos.	13	72
T3: Recordó conceptos matemáticos o fórmulas.	12	67
T4: Formuló el problema de otra manera.	7	39
Concebir el plan		
T1: Definió una estrategia de solución.	16	89
T2: Planteó una operación o ecuación.	13	72
T3: Representó la información de otra manera.	11	61

Tareas	Total	Porcentaje
Ejecutar el plan		
T1: Ejecutó la estrategia de solución inicial.	13	72
T2: Realizó operaciones aritméticas o ecuaciones.	17	94
T3: Simplificó una expresión.	8	44
T4: Hizo una lista de datos.	9	50
T5: Ordenó la información.	10	56
T6: Utilizó una representación gráfica.	7	39
Verificación		
T1: Comprobó la estrategia seleccionada.	15	83
T2: Comprobó cada paso ejecutado.	16	89
T3: Volvió a leer el enunciado.	12	67
T4: Lo resolvió de otra manera.	8	44
T5: Descartó opciones.	6	33

Como se puede observar, todos ejecutaron la tarea 1 de comprensión. Las tareas 2, 3 y 4 fueron realizadas por la mayoría, pero solamente 7 optaron por un planteamiento alternativo del problema. El 72% de ellos consideró que anteriormente había realizado algún ítem similar, por ejemplo:

> E14: Para unas más complejas ya tenía un procedimiento que había aprendido, es uno muy sencillo, usted empieza a dibujar cajitas, entonces al final usted suma resta los residuos y lo divide entre las cajitas, eso ayuda mucho.

Las tres tareas de la etapa concebir un plan fueron realizadas por la mayoría. A diferencia de los ítems de razonamiento deductivo e inductivo, en la resolución de problemas sí recurrieron a otras formas de representar la información. Por ejemplo, el uso del lenguaje algebraico, como lo comenta uno de ellos:

> E16: Yo lo leí y ya sabía que R iba a ser una suma de varios números, entonces si yo ponía todos esos números en relación al primero podía obtenerlo a partir de una fórmula.

En la etapa de ejecución la tarea más realizada fue resolver operaciones aritméticas o ecuaciones. En tanto que, no más de la mitad de ellos realizó alguna representación gráfica o simplificó una expresión. Entre 56% y 92% realizó las otras tres tareas. Uno de los participantes muestra cómo recurrió a trabajo aritmético y algebraico:

> E5: Lo que hice fue empezar con el dato que me daban y fui restando, sumando y dividiendo o multiplicando. Me dio una respuesta que no estaba entre las opciones, entonces me fui por otro método que es plantearlo con una variable.

En la etapa de verificación menos de la mitad optó por descartar opciones para poder encontrar la respuesta correcta y solo la mitad intentó resolver el problema de una segunda forma para verificar la respuesta obtenida. Al menos dos terceras partes realizaron las primeras tres tareas. Un participante describe de la siguiente manera su trabajo de verificación:

> E4: Uno podría plantearse una ecuación, pero creo que hubiera sido bastante más complicado haberla planteado así. Creo que la mejor forma de comprobarlo es con un ejemplo.

Sobre las tareas de resolución de problemas, los jueces consideraron relevantes todas las tareas, pero con un nivel bajo la 3 de concebir el plan, la 6 de ejecución y la 4 y 5 de verificación.

La característica particular de la categoría de razonamiento con figuras es la habilidad de percibir formas y transformarlas mentalmente. En el primero de los ítems utilizados los participantes debían identificar el porcentaje sombreado de una figura, en el segundo reconocer un patrón a partir de una secuencia de figuras para generar un nuevo elemento y en el tercero comparar el área de dos figuras descritas en el enunciado. En la tabla 6 se muestran los datos de las tareas ejecutadas en esta categoría de razonamiento.

Tabla 6. Valores absolutos y relativos de las tareas cognitivas ejecutadas en razonamiento con figuras

Tareas	Total	Porcentaje
Comprensión		
T1: Identificó información clave.	18	100
T2: Recordó conceptos matemáticos o fórmulas.	18	100
T3: Recordó procedimientos aplicados en ejercicios similares.	12	67
T4: Representó la información de otra manera.	12	67
T5: Realizó anotaciones o resaltó elementos de la figura.	13	72
T6: Integró partes de una figura para construirla.	8	44
T7: Buscó semejanzas y diferencias entre figuras de una secuencia.	7	39
T8: Identificó diferentes posiciones o simetrías.	9	50
Concebir el plan		
T1: Definió una estrategia de solución.	18	100
T2: Determinó si necesitaba calcular: área, perímetro, volumen o longitud.	6	33
T3: Seleccionó una fórmula.	6	33
T4: Dividió en regiones según alguna propiedad.	5	28
T5: Agrupó regiones de una figura.	6	33
T6: Determinó secciones de una figura tridimensional.	0	0
T7: Dio un orden particular.	11	61
T8: Pensó en otra variación de la figura.	11	61
Ejecutar el plan		
T1: Ejecutó la estrategia de solución inicial.	16	89
T2: Visualizó la figura en otra posición, dimensión o proporción.	8	44
T3: Aplicó una fórmula.	6	33
T4: Agregó elementos nuevos.	5	28
T5: Aplicó propiedades de simetrías.	6	33
Verificación		
T1: Comprobó la estrategia seleccionada.	14	78
T2: Comprobó cada paso ejecutado.	14	78
T3: Volvió a leer el enunciado.	14	78
T4: Lo resolvió de otra manera.	5	28
T5: Descartó opciones.	2	11

En la etapa de comprensión las tareas más relevantes fueron las dos primeras, enfocadas en la identificación de información y conceptos claves. Algunas no eran necesarias para esta muestra de ítems, tales como las tareas 6, 7 y 8; aunque sí para otros tipos de ítems de este razonamiento.

En la siguiente etapa, la tarea que fue ejecutada por los 18 participantes fue la elaboración de una estrategia, las tareas 4 y 5 resultaron irrelevantes, pues no fueron ejecutadas por la mayoría de los participantes en alguno de los tres ítems, a diferencia de la 2 y 3 que sí fueron ejecutadas por quienes resolvieron el tercer ítem. En lo que respecta a la tarea 6 no se puede afirmar que sea irrelevante, puesto que ningún ítem contenía una figura tridimensional. En este sentido uno de los jueces manifiesta:

> J8: El estudiante no confeccionó ninguna figura de referencia, entonces muchas de las tareas dadas no las realizó, pero a mi criterio esto no significa que las tareas no sean relevantes.

De las 5 tareas de ejecución del plan, la más importante fue la realización de la estrategia definida inicialmente y, a pesar de que algunas tareas presentan baja frecuencia, sí son relevantes para la resolución de los ítems. La aplicación de propiedades de simetrías resultó irrelevante para la muestra de ítems.

En la etapa final de verificación, las 3 primeras tareas fueron las más utilizadas para la comprobación de la estrategia, los pasos y revisión del enunciado, como lo expresa un participante:

> E4. Asegurándome de que los datos que puse inicialmente fueran los correctos, que me daban en el ejercicio. ¡Eh!, comprobé la multiplicación, era una multiplicación bastante sencilla...

Desde el punto de vista de los jueces, fueron relevantes las dos primeras tareas de la etapa de comprensión, la primera de concebir el plan y de ejecución y las tres primeras de verificación.

En los ítems de razonamiento probabilístico resultaba importante que los estudiantes identificaran el carácter aleatorio de las situaciones planteadas. En dos de los ítems era necesario calcular probabilidades mediante la definición clásica y en el otro debían identificar los casos probables y determinar cuáles eventos tenían mayor probabilidad de ocurrir.

Tabla 7. Valores absolutos y relativos de las tareas cognitivas ejecutadas en razonamiento probabilístico

Tareas	Total	Porcentaje
Comprensión		
T1: Identificó información clave.	17	94
T2: Recordó conceptos matemáticos o fórmulas.	18	100
T3: Recordó procedimientos aplicados en ejercicios similares.	13	72
T4: Representó la información de otra manera.	9	50
T5: Reconoció casos posibles y favorables.	18	100
Concebir el plan		
T1: Definió una estrategia de solución.	16	89
T2: Elaboró un diagrama.	2	11
T3: Resumió información mediante una lista o tabla.	5	28
T4: Planteó una estrategia donde aplique: técnicas de conteo, definición o propiedades de probabilidad, operaciones con conjuntos.	14	78
Ejecutar el plan		
T1: Ejecutó la estrategia de solución inicial.	14	78
T2: Dedujo información de un diagrama.	4	22
T3: Aplicó reglas de conteo.	5	28
T4: Calculó probabilidades.	15	83
T5: Utilizó propiedades de probabilidad.	7	39
T6: Aplicó operaciones con conjuntos.	2	11
Verificación		
T1: Comprobó la estrategia seleccionada.	10	56
T2: Comprobó cada paso ejecutado.	11	61
T3: Volvió a leer el enunciado.	13	72
T4: Lo resolvió de otra manera.	0	0
T5: Descartó opciones.	3	17

Como se muestra en la tabla 7, todas las tareas de la etapa de comprensión fueron ejecutadas por al menos la mitad de los participantes. En uno de los ítems representar la información de una manera alternativa no resultó importante, probablemente porque ya se les presentaba en una tabla. Una dificultad presentada estuvo relacionada con la comprensión de que el evento era aleatorio y no podía seguir una secuencia. Esto lo resalta uno de los jueces:

> J9: El estudiante había escogido la respuesta correcta desde el inicio. Sin embargo, luego, comienza a analizar los datos obtenidos como un patrón.

En la etapa de concebir el plan, los entrevistados definieron una estrategia tomando en cuenta conceptos de probabilidad, conteo o conjuntos. Las tareas relacionadas con representación de información mediante diagramas, tablas o listas no fueron utilizadas por la mayoría. Es importante señalar que dos fallaron un mismo ítem para el que no ejecutaron la mayoría de las tareas, como indica un juez:

> J2: Los estudiantes que fallaron en plantear la estrategia fallaron en la respuesta correcta.

En la etapa de ejecutar el plan solamente las tareas 1 y 4 fueron realizadas por la mayoría. Las tareas 2 y 5 resultaron relevantes solo para uno de los ítems.

En la etapa de verificación llama la atención que ningún participante intentó una segunda estrategia de solución para comprobar la respuesta. Solo 3 de ellos descartaron opciones. Las restantes tareas sí fueron realizadas por la mayoría, como lo expresa uno de ellos:

> E3: Devolviéndome a leer el problema para ver que todos los datos los había apuntado bien, que había hecho la suma del total, que había visto cuántos eran los hombres de pelo negro, para tener los casos favorables y los casos posibles bien y ver que había hecho la división bien.

En la etapa de comprensión los jueces consideraron relevantes todas, excepto la 4. En las etapas de concebir el plan y de ejecutarlo indicaron que son relevantes las tareas 1 y 4, en la fase de verificación consideraron relevantes la 2 y la 3.

6. CONCLUSIONES

En relación con la etapa de la descripción conceptual se encontró una diversidad de definiciones en la literatura, de manera que, se asumieron aquellas más apropiadas a la medición de las habilidades de razonamiento inductivo, deductivo, resolución de problemas, probabilístico y de figuras en una prueba estandarizada de aptitud académica. Para algunos autores estas categorías están incluidas en un concepto más amplio como el de resolución de problemas. No obstante, esta clasificación permitió identificar diferencias en la ejecución de las tareas según las categorías de razonamiento.

En cuanto a los hallazgos de la entrevista cognitiva se destaca que es la estrategia más apropiada para obtener evidencias de los procesos de respuesta y comprender la ejecución de las tareas desde el punto de vista de los entrevistados. Como lo destacan Briceño *et al*. (2016) esta técnica permite determinar los procesos cognitivos encubiertos y manifiestos que el entrevistado utiliza para responder. Para lograr este propósito fue necesario garantizar la calidad del protocolo de la entrevista, ya que, esto permitió evaluar la relevancia, la suficiencia y la representatividad de las preguntas y las tareas cognitivas descritas en cada una de las categorías del razonamiento matemático de una manera objetiva y más precisa. También fue acertado el criterio de selección de los participantes, lo que favoreció su desempeño en la entrevista.

De los principales resultados se tiene que la tarea más relevante ejecutada en la etapa de comprensión fue la identificación de la información clave que se utilizó en todas las categorías de razonamiento. También recordar conceptos matemáticos, fórmulas y procedimientos fue relevante para los ítems: inductivo, probabilístico, con figuras y resolución de problemas. Al respecto, Hernández (2002, p. 143) señala que en la primera lectura la mayoría de los estudiantes identifican lo que se pregunta en el problema, luego los datos que les provee para entenderla y tratan de relacionarla con algo visto anteriormente o con el conocimiento que tienen. Por otra parte, hay tareas muy específicas como fue el caso de identificar patrones para inductivo.

En la etapa de concebir el plan, señalar una estrategia para resolver el problema fue utilizada en todas las categorías. En el caso de tareas específicas relevantes, se encontró en razonamiento inductivo y deductivo relacionar la información con un procedimiento conocido; en probabilístico usar técnicas de conteo, definición y propiedades de la probabilidad y operaciones con conjuntos; en resolución de problemas plantear una operación o una ecuación y en razonamiento con figuras ordenar y variar la figura. Al respecto, Iriarte *et al.* (2010) indican que el procedimiento para la resolución de un problema empieza con tratar de comprender qué debe hacerse, segundo entender la información que se tiene para buscar la solución y tercero buscar estrategias adecuadas para llegar con esta información a la solución.

En la etapa de ejecución se encontró que la estrategia de solución inicial se implementó en todas las categorías de razonamiento. Además, de las siguientes tareas específicas: realizar operaciones aritméticas o una ecuación en resolución de problemas; visualizar la figura de otra manera; calcular probabilidades, identificar patrones y relacionar premisas.

En todas las categorías de razonamiento se incluyeron las mismas tareas de verificación, de las cuales las más relevantes fueron comprobar la estrategia seleccionada, los pasos ejecutados y releer el enunciado. Solamente en razonamiento deductivo 92% de los participantes descartaron opciones para encontrar la respuesta. En esta etapa la evaluación tiene dos propósitos: una justificar los resultados conseguidos; otra confirmar los objetivos alcanzados (Iriarte, 2002).

En definitiva, estos resultados pueden contribuir a la labor docente para desarrollar habilidades de razonamiento matemático, ya que brinda información específica sobre la ruta de resolución utilizada por estudiantes de alto desempeño, de manera que se trascienda el enfoque mecánico en la enseñanza de la matemática, como lo afirman Pérez y Ramírez (2008).

REFERENCIAS

Beltrán, J. (2002). *Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje*. Ed. Síntesis.

Briceño, A., Álvarez, C., Barco, B., Álvarez, K., Delgado, I. y Zúñiga, V. (2016). Entrevistas cognitivas y su utilidad en la adaptación y validación de escalas para niños y adolescentes. *Revista Electrónica Científica y Académica de Clínica Alemana*, *6*, 190-195.

Brizuela, A., Jiménez, K., Pérez, N. y Rojas, G. (2016). Autorreportes verbales en voz alta para la identificación de procesos de razonamiento en pruebas estandarizadas. *Revista Costarricense de Psicología*, *35*(1), 17-30.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2006). Un procedimiento para la caracterización de estrategias en problemas de sucesiones que involucran el razonamiento inductivo. *Indivisa*, IV, 13-24.

Carbonero, M. A. y Coromoto, J. (2006). Entrenamiento de alumnos de Educación Superior en estrategias de aprendizaje en matemáticas. *Psicothema*, *18*(3), 348-352.

Erdem, E. y Gürbüz, R. (2016). Evaluation of Probabilistic Reasoning Evidence from Seventh-graders. *Educational Research Quarterly, 40*(2), 36-66.

Escobar-Pérez, J. y Cuervo-Martínez, A. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en Medición*, *6*, 27-36.

Hernández, A. (2002). *Procesos cognoscitivos y metacognoscitivos en estudiantes universitarios puertorriqueños en la solución de problemas matemáticos no típicos*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Puerto Rico.

IBM Corporation (2016). *IBM SPSS Statistics for Windows, Version 19.0*. IBM Corporation.

Iriarte, F., Espeleta, A., Zapata, E., Cortina, L., Zambrano, E. y Fernández, F. (2010). El razonamiento lógico en estudiantes universitarios. *Zona próxima*, 12.

Jobe, J. B. (2003). Cognitive psychology and self-reports: Models and methods. *Quality of Life Research*, *12*, 219-227.

Juan-Espinosa, M. (1997). *Geografía de la inteligencia humana. Las aptitudes cognitivas*. Ediciones Pirámide.

Landis, J. R., y Koch, G. G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics*, *33*(1), 159-174.

Lassiter, D. y Goodman, N. (2015). How many kinds of reasoning? Inference, probability and natural language semantics. *Cognition*, 136, 123-134. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2014.10.016

Marino, T. y Rodríguez, M. (2009). Un estudio exploratorio sobre heurísticas en estudiantes de un curso de matemática de nivel pre-universitario. *Paradigma*, *XXX*(2), 159-178.

Marugán, M., Martín L. J., Catalina, J., Román, J. M. (2012). Estrategias cognitivas de elaboración y naturaleza de los contenidos universitarios. *Psicología Educativa Revista de los Psicológos de la Educación*, *19*(1), 13-20. https://doi.org/10.5093/ed2013a3

Moreira-Mora, T. E. (julio, 2010). Tabla de especificaciones: Una experiencia de validación de la prueba de aptitud académica del Tecnológico de Costa Rica. En Federación Iberoamericana de Asociaciones de Psicología, *VII Congreso Iberoamericano de Psicología*, Oviedo, España.

Noriega, M., Vásquez, S. y García, S. (2011). Componentes de la competencia espacial. Exploración en ingresantes a la facultad de Arquitectura, diseño y urbanismo. *Revista de Orientación Educacional, 25*(47), 95-112.

Osses, S. y Jaramillo, S. (2008). Metacognición: un camino para aprender a aprender. *Estudios Pedagógicos, XXXIV*(1), 187-197.

Okuda, M. y Gómez-Restrepo, C. (2005). Métodos en investigación cualitativa: triangulación. *Revista Colombiana de Psiquiatría, 24*(1), 118-124.

Padilla, J. L. y Benítez, I. (2014) Validity evidence based on response processes. *Psicothema*, *26*(1), 136-144. http//doi.org/10.7334/psicothema2013.259

Pérez, Y. y Ramírez, R. (2008). *Desarrollo instruccional sobre estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos dirigido a docentes de primer grado de Educación Básica. Caso Colegio San Ignacio*. (Tesis de post-grado no publicada), Universidad Pedagógica.

Polya, G. (1987). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas.

Sanjurjo L. y Vera M. (1994). *Aprendizaje significativo y enseñanza en los niveles medio y superior*. Editorial Homo Sapiens.

Smith, V. y Molina, M. (2011). *Cuaderno metodológico 5. La entrevista cognitiva: Guía para su aplicación en la evaluación y mejoramiento de instrumentos de papel y lápiz*.

Tourangeau, R. (1984). Cognitive science and survey methods. In Jabine, T.; Straf, M.; Tanur, J., *Cognitive Aspects of survey methodology: Building a Bridge between Disciplines*. National Academy Press.

Valle, A., Cabanach, R. G., Rodríguez, S., Núñez, J. C. y González-Pienda, J. A. (2006). Metas académicas, estrategias cognitivas y estrategias de autorregulación del estudio. *Psicothema*, *18*(2), 165-170.

Valle, M. C., Juárez, M. A. y Guzmán, M. E. (2007). Estrategias generales en la resolución de problemas de la olimpiada mexicana de matemáticas. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *9*(2), 2-11.

Vergel, M., Duarte, H., y Martínez, J. (2015). *Desarrollo del pensamiento matemático en estudiantes de cálculo integral su relación con la planificación docente*. Revista Científica, *23*, 17-29. https://doi.org/10.14483/udistrital.jour.RC.2015.23.a2

Waldegg, G. y Agüero, M. (1999). Habilidades cognoscitivas y esquemas de razonamiento en estudiantes universitarios. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *4*(8), 203-244.

Woolfolk, A. (2010). *Psicología Educativa* (11a. edición) (L. Pineda Trad.). Prentice Hall.

Randall Blanco-Benamburg

Dirección: Costa Rica, Cartago, Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Matemática, apartado postal: 159-7050

Teléfono: (506) 2550 2693

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN DOI: 10.24844/EM3301.10

Interacciones entre proposiciones condicionales y sistemas matemáticos de símbolos en una tarea matemática

Interactions between conditional propositions and mathematical symbol systems in a mathematical task

Eduardo Mario Lacues Apud,[1] Leonora Díaz Moreno,[2]
Juan Antonio Huertas[3]

Resumen: Se presentan resultados de una investigación con estudiantes de un curso de Cálculo de primer año universitario, diseñada para indagar acerca del uso que ellos hacen de los enunciados condicionales (condición suficiente, condición necesaria) y su relación con los Sistemas Matemáticos de Símbolos en los que se presenta la información sobre estos enunciados (registro gráfico, registro algebraico). Las preguntas formuladas en esta instancia son similares a las que se deben responder en actividades relacionadas con la noción de función. Se encontraron diferencias en el rendimiento de los estudiantes, que indican que las tareas sobre condición necesaria presentadas en el registro gráfico resultan significativamente más sencillas que las demás; hay indicios de un mejor rendimiento en tareas presentadas en el registro gráfico respecto de las correspondientes al algebraico y en las tareas sobre condición necesaria en relación con las respectivas sobre condición suficiente.

Fecha de recepción: 06 de mayo de 2019. **Fecha de aceptación**: 10 de enero de 2021

[1] Departamento de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Católica del Uruguay (UCU), elacues@gmail.com, orcid.org/0000-0001-7449-999X

[2] Pontificia Universidad Católica de Chile, leonoradiazmoreno@gmail.com, orcid.org/0000-0001-5765-6332

[3] Departamento de Psicología Básica, Universidad Autónoma de Madrid (UAM), Juanantonio.huertas@uam.es, orcid.org/0000-0002-1518-8398

Palabras clave: *Condición necesaria, Condición suficiente, Sistemas Matemáticos de Símbolos, Registros de Representación, Funciones.*

Abstract: Results from an investigation with freshmen in a first year university Calculus course are presented, which was designed to inquiry about their use of conditional propositions (necessary condition, sufficient condition) and its relation with the Mathematical Symbol System used to present information about these propositions (graphic register, algebraic register). The questions formulated in this instance are similar to those that must be answered in activities related with the notion of function. Differences in students' performance indicate that tasks about necessary condition on graphic register result significantly easier than others; there is evidence of a better performance in tasks on graphic register in relation with algebraic one, and in tasks about necessary condition with respect to sufficient condition.

Keywords: *Necessary condition, Sufficient condition, Mathematical Symbol Systems, Representations registers, Functions.*

INTRODUCCIÓN

Estudios desde principios de los noventa a la fecha reportan de modo persistente, problemas de los ingresantes a la universidad con el aprendizaje de las Matemáticas (Tall, 1990; Artigue, 2000; Camarena, 2010) y, en particular, dificultades con conceptos formalizados para los que son insuficientes sus recursos previos. Por ejemplo, para construir un pensamiento analítico que considere sus habilidades algebraicas previas, deben abordar las brechas de igualdad y de razonamiento (Artigue, 1995): se requiere añadir, a una igualdad resultado de equivalencias algebraicas, una igualdad resultado de proximidad, y a un razonar por equivalencias sucesivas, un razonamiento por condiciones suficientes.

Por su parte, la actividad con la noción de condicional y, específicamente, la distinción entre condición necesaria y condición suficiente, es crucial para los estudiantes ingresantes a programas científico-tecnológicos, dada su presencia en argumentaciones y demostraciones en los cursos iniciales de Matemáticas.

Algunos informes de investigación revelan dificultades que enfrentan estos estudiantes. Los novatos tienen formas de aproximación a la noción de demostración basadas en consideraciones contextuales o intuitivas (Camacho, Sánchez y Zubieta, 2014) donde la relevancia de la estructura lógica no es reconocida, a diferencia de lo que hacen los expertos que se preocupan por reconocer la validez de las inferencias realizadas (Inglis y Alcock, 2012).

Lew, Fukawa-Conelly, Mejía-Ramos y Weber (2016) señalan que la mirada de un profesor sobre una demostración, centrada en ideas cruciales que la organizan, suele no coincidir con la de sus estudiantes focalizada más bien en los detalles de los cálculos que se realizan; indican que las acepciones técnicas de ciertos términos no son compartidas por profesor y estudiantes. La conjunción de estos factores puede explicar por qué los estudiantes podrían no comprender lo que la lección de su profesor está enseñando.

En otro orden, algunos estudios han proporcionado información acerca de estrategias usadas por estudiantes en los procesos de construir o escribir demostraciones.

Weber y Alcock (2004) han distinguido entre pruebas sintácticas y pruebas semánticas; en las primeras, el sujeto manipula formalmente las representaciones simbólicas hasta obtener la conclusión mientras que, en las segundas el ejecutante apela a instanciaciones[4] de los objetos matemáticos a los que la prueba refiere para avanzar hacia la solución.

Zazkis, Weber y Mejía-Ramos (2015) identificaron dos estrategias de abordaje usadas por estudiantes de Matemáticas al construir pruebas y las relacionaron con los procesos de resolución de problemas:

> Cuando usan una estrategia orientada a un objetivo los estudiantes estarían desarrollando una comprensión profunda de la proposición que estén probando, eligiendo un plan con base en esa comprensión, desarrollando un argumento gráfico acerca de la validez de la proposición y formalizando este argumento en una prueba. Cuando usen una estrategia superficial los estudiantes estarían comenzando a probar diferentes planes inmediatamente luego de leer la proposición y abandonarían cada uno de los planes a la primera señal de dificultad.[5] (p. 12)

Es interesante destacar que en la primera estrategia descrita, los estudiantes construyen argumentos gráficos que luego formalizan. Esto puede interpretarse

[4] "Por instanciación nos referimos a una manera sistemáticamente repetible por la que el individuo piensa en un objeto matemático, que es internamente significativa para ese individuo." Traducción de los autores.

[5] Traducción de los autores

en términos de los procesos de conversión entre registros semióticos de representación (Duval, 1998), que se discutirán más adelante. La construcción de diagramas o gráficas también es mencionada por Weber y Alcock (2004) como una de las posibles formas de instanciación.

Estos antecedentes conducen a distinguir dos elementos que interactúan en los procesos de construcción o en la aceptación de la validez de una demostración. Por un lado, las reglas de inferencia que permiten justificar los pasos sucesivos de una prueba a partir de los anteriores dependen de la definición del valor de verdad del condicional, cuyas características técnicas son frecuentemente causa de dificultades. Por otro, las formas de representación que los ejecutantes asumen para llevar adelante la tarea parecen tener incidencia en el éxito conseguido.

Responder a la interrogante de la influencia del registro de representación, sea algebraico o gráfico, en la dificultad de la tarea con el condicional, aportaría antecedentes para diseños de enseñanza que podrían contribuir a mejorar los desempeños de estudiantes ingresantes.

En este trabajo se presenta una investigación desarrollada en un curso de Cálculo en primer semestre de carreras de ingeniería, destinada a estudiar dos de los aspectos que se han destacado y se señalan a continuación.

En primer término, interesó conocer qué uso de la noción de condicional hacen los alumnos ingresantes a la universidad, en particular, de la distinción entre condición necesaria y condición suficiente. En segundo lugar, se propuso responder a la interrogante acerca de la influencia que pudiera tener el registro de representación en el que se muestra la consigna (algebraico o gráfico) en la dificultad de la tarea. Desde el punto de vista didáctico estas dos cuestiones son relevantes. Tienen implicaciones sobre la elección de estrategias de enseñanza y la forma de presentación de tareas a los estudiantes, entre otros aspectos.

Los trabajos fueron planteados sobre los contenidos matemáticos de imagen y preimagen por medio de una función. Se eligió la noción de función porque permite fácilmente presentar tareas en los registros algebraico y gráfico. Asociadas a esta noción, las de imagen y preimagen brindan oportunidades para formular consignas en las que el reconocimiento de condiciones necesarias o suficientes es crucial, así como las instancias de cuantificación que en ellas aparecen.

En la sección siguiente se introducen nociones sobre los Sistemas Matemáticos de Símbolos (SMS). A continuación de ésta, se discute con cierto detalle cuestiones relativas a la argumentación matemática con base en el condicional. Luego de estas dos secciones se informa acerca del diseño metodológico, el procesamiento de los datos y las conclusiones extraídas.

SISTEMAS MATEMÁTICOS DE SÍMBOLOS Y REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

Al hablar de Sistemas Matemáticos de Símbolos, la ubicación del adjetivo "Matemáticos" calificando al sustantivo "Sistemas" es deliberada y pretende poner énfasis en que no son los símbolos los que se consideran matemáticos, sino los sistemas que integran ciertos símbolos y una lengua vernácula. Esta es la posición que defiende Puig (2003) al señalar que quien dota de significado al texto es el sistema y no los signos ni la lengua por sí mismos. Enfatiza de este modo la necesidad de considerar no los signos de manera individual, sino la entidad constituida por un conjunto de signos (no necesariamente lingüísticos) junto con una cierta lengua vernácula, cuyas configuraciones cobran sentido en un proceso social por el que se van produciendo consensos en la actividad matemática.

Tomando como referencia a Palmer (1977) la definición de SMS fue establecida por Kaput (1987) como un sistema de representación. En esta definición es central la noción de esquema simbólico, caracterizado como el par formado por una colección de caracteres y otra de reglas que establecen la forma en que pueden combinarse, ordenarse o transformarse estos caracteres. La colección de reglas conforma la sintaxis del esquema simbólico.

Siguiendo esta formulación, un sistema de símbolos es una terna formada por esquema simbólico, un campo de referencia y una correspondencia entre ellos, que podría no ser biunívoca. Cuando el campo de referencia es una estructura matemática, se tiene un Sistema Matemático de Símbolos.

Al comentar este desarrollo, Radford (1998) llama la atención sobre una dualidad que Kaput atribuye a los SMS: por un lado, éstos median en las actividades de comunicación gracias a su condición de ser compartidos por la comunidad; por otro, intervienen en el funcionamiento cognitivo individual de una forma que Kaput (1987) mismo refiere así: "[...] con las acciones más tempranas y las estructuras cristalizadas en símbolos estables y concretamente manipulables, la mente es liberada para actuar sobre o reflexionar acerca de esas acciones y estructuras en formas nuevas, tal vez conduciendo a otro círculo de construcciones matemáticas".[6] (p. 162)

Es decir, en este proceso, los SMS se convierten en portadores de significados que resumen conjuntos (eventualmente ordenados) de acciones sobre objetos matemáticos, y pasan a ser a su vez posibles participantes en nuevas construcciones matemáticas, susceptibles de representación. Por su parte, en la

[6] Traducción de los autores

caracterización de Martí y Pozo (2000) los SMS resultan ser una clase de sistemas externos de representación: tienen existencia independiente de su creador, permanecen en el tiempo a la vez que se organizan espacialmente, y son el resultado de consensos. El problema de la representación ha sido estudiado desde diferentes perspectivas en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática: vinculando la función comunicacional de los SMS con la cognitiva (Radford, 1998), lo que se complementa con el señalamiento que hace Berger (2004) en el sentido de que el uso comunicacional de los signos evoluciona hacia una coincidencia entre los significados personales de los conceptos matemáticos y los sociales sostenidos por la comunidad matemática; Arcavi (2003) enfatiza que diferentes representaciones aportan visiones complementarias, lo que se asocia con el éxito en resolución de problemas mediante la habilidad para articular diferentes representaciones (Gagatsis y Shiakalli, 2004) y con el aprendizaje a través de la generación de representaciones propias y consensuadas con los pares (Selling, 2015), cuestión que también ha sido estudiada en otras disciplinas (Pocoví y Collivadino, 2014). Los desempeños de los estudiantes al usar en forma casi exclusiva un sistema de representación (algebraico o gráfico) han sido también reportados (Alcock y Simpson, 2004; 2005) mientras que la emergencia de objetos matemáticos y las dificultades asociadas con los procesos de conversión entre registros han sido también estudiados (Rojas, 2015). Estos puntos de vista ayudan a situar el problema de la apropiación por parte de los estudiantes (en nuestro caso, universitarios) de los objetos matemáticos con los que toman contacto a través de los signos (palabras, símbolos matemáticos) que integran el discurso matemático. Este discurso está conformado en torno a un conjunto de consensos, que dota de un significado preciso, compartido por la comunidad matemática, a las expresiones que se usan para comunicar resultados o argumentar en torno a la validez de enunciados en Matemática.

Dado que los problemas que han dado origen a estas formas de representación suelen ser ajenos a los estudiantes, es difícil que las estructuras comunicativas que finalmente han sido consensuadas sean visibles para ellos y pueden resultarles artificiales. En la clase junto con este discurso coexisten otros, asociados con la intención de enseñar y de aprender, que no necesariamente son concurrentes, sino que en ocasiones presentan divergencias tan marcadas que suponen un obstáculo en la aprehensión de los saberes por parte de los aprendices. Si bien la preocupación que genera esta situación es de larga data (Kieran, 1992) la dificultad que implica para cada principiante apropiarse de este discurso para usarlo de manera competente es de las menos atendidas desde la enseñanza de las Matemáticas. Por otro lado, la consideración del desarrollo histórico del uso de símbolos en Matemática permite ampliar la perspectiva. A partir de un trabajo de Vieta sobre una traducción al latín de los documentos de Diofanto, sitúa Kieran (1992) a fines del siglo XV el comienzo de la etapa simbólica, la última de las tres en la que separa la historia de la evolución del simbolismo algebraico. Según esta autora, Diofanto marca el final de la primera, que ella llama retórica y está caracterizada por una ausencia total de formalismo, y el comienzo de la segunda. Ésta se extiende hasta el siglo XV, cuando en Europa a partir de los procedimientos diofánticos comienzan a elaborarse métodos generales para abordar la resolución de diferentes problemas algebraicos.

En apoyo a esta descripción, Radford y Puig (2007) señalan que en sus orígenes en Mesopotamia, el álgebra trataba las cantidades desconocidas (las variables en un sentido actual) como elementos contextualizados, lo que permitía asignarles naturalmente un significado (por ejemplo, geométrico) y otorgaba medios para comprobar la validez de los cálculos efectuados (siguiendo con el ejemplo, mediante la transformación del problema geométrico asociado). Esta asociación de lo algebraico con lo geométrico se mantuvo hasta el Renacimiento. La solución de un problema, en esta etapa retórica, está fuertemente atada al contexto y resulta, por lo tanto, particular. Por eso, no se perciben todavía procesos de abstracción o generalización que permitan reconocer estructuras matemáticas, algoritmos o estrategias de resolución. La formulación verbal se complica gradualmente al extremo que podría ser muy confuso expresar los procesos que se siguen. En una etapa como la de Diofanto, la representación de los procesos se ha hecho a través de símbolos, pero aún no se expresan éstos en toda su generalidad. Por eso, la relación del ejecutante con el proceso de solución del problema, si bien no es tan directa como en el caso retórico, conserva cierta cercanía, manifestada en el mantenimiento de los datos numéricos, lo que transforma al proceso en una solución para ese caso, aun cuando pueda vislumbrarse lo que sería una generalización.

En la etapa simbólica, la distancia entre el ejecutante y la tarea se ha agrandado, y los procesos que se siguen pueden plantearse en términos abstractos: ya no se opera con números, sino con variables. Llegados a este punto, el propio procedimiento puede ser objeto de generalización, de manera que se extienda a otras situaciones. Un aporte para avanzar en el desarrollo de la lógica aristotélica fue el trabajo de George Boole para intentar algebrizar el cálculo de predicados. Como señala Glymour (1998) uno de los postulados asumidos por

Boole era que las leyes del pensamiento tenían una forma algebraica. El trabajo de Boole significó el primer desarrollo importante en Lógica desde Aristóteles. Sin embargo, pese a su magnitud, no pudo resolver ciertas cuestiones relacionadas con la noción de prueba, en particular aquéllas donde aparecen variables individuales cuantificadas, como las relacionadas con el límite matemático. El resultado de tales procesos históricos, en opinión de Radford y Puig (2007) a través de lo que denominan "Embedment Principle", es un sistema algebraico constituido por un conjunto de reglas sintácticas y significados portadoras del funcionamiento cognitivo de generaciones anteriores:

> Esta actividad cognitiva histórica depositada en signos, el sistema semiótico que ellas forman, y las prácticas sociales que ellas median ofrecen a nuestros estudiantes ciertas líneas de desarrollo conceptual, vectores maleables de crecimiento cognitivo que los estudiantes pueden seguir y transformar de acuerdo con las actividades en las que se involucren.[7] (Radford y Puig, p. 148)

Esto es, la actividad histórico-cognitiva asentada en signos, el sistema semiótico que forman y las prácticas sociales que median, ofrecen a los estudiantes direcciones de desarrollo y formas de apropiación del saber escolar del Álgebra. El logro de dominio en el uso de SMS por los aprendices, permite tomar distancia de las formas más concretas de formulación de los problemas. Llevado a un extremo, esto puede significar que los estudiantes sean capaces de ejecutar algoritmos correctamente, sin tener en cuenta los problemas a los que esos algoritmos originalmente dieron respuesta. Esto comporta el riesgo de confundir la habilidad en la ejecución de rutinas de cálculo con la comprensión conceptual del problema, que incluye, entre otros elementos, la interpretación de los significados de los símbolos utilizados y de las relaciones que con su uso se establecen entre las entidades involucradas. Vale la pena destacar que otra de las características que los SMS comparten con el lenguaje, es que muchos de sus significados dependen del contexto en el que se formulan las sentencias. En cada caso, las propiedades que se resumen en esos SMS son diferentes, y para cada aprendiz constituye un problema identificar, a partir del contexto en el que están siendo usadas, cuáles son las pertinentes. Regine Douady (1984) introdujo en su tesis doctoral la noción de "juego de cuadros" para aludir a contextos de formulación de sentencias matemáticas y destacó la

[7] Traducción de los autores.

importancia de promover desde la enseñanza las competencias de los aprendices para transitar entre estos "cuadros" o "marcos". Ella justifica este énfasis en los procesos de cambio de cuadro a partir de dos principios: el de que todo concepto matemático es susceptible de ser representado en más de un marco, y el de que estas representaciones no coinciden, dado que cada representación favorece la comprensión de algún aspecto del concepto que resulta menos claramente aprehensible en otra representación.

Duoady avanzó en lo que quería decir al referirse a un marco (Douady, 1986), estableciendo que se conforma con objetos matemáticos, considerando las relaciones que existen entre ellos y las formulaciones que representan a unos y otras, y se manejó con ideas intuitivas a este respecto (marco físico, marco geométrico, marco algebraico, marco numérico, entre otros). Su trabajo fue pionero y disparador de otros desarrollos. Raymond Duval (Duval, 1995; 1998) al introducir la teoría de los registros de representación semiótica, avanzó en el desarrollo de estas nociones. Cada registro semiótico es un sistema de representación en el que es posible ejecutar al menos tres operaciones: el reconocimiento de formulaciones simbólicas como representantes de ciertas entidades, la transformación de una formulación en otra dentro del mismo sistema (tratamiento) y, la transformación de una formulación en un cierto sistema en otra de otro sistema (conversión). En cada registro de representación se configura un SMS que no sólo incorpora los signos propios del registro, sino las reglas de tratamiento y las referencias que permiten los procesos de traducción entre registros. Las operaciones de conversión dan cuenta de los procesos de traducción que permiten el "juego de marcos" o desplazamientos entre registros, es decir, la posibilidad de establecer similitudes, tal vez parciales, entre las representaciones en diferentes registros del mismo concepto matemático. Es pertinente aclarar que, si bien aparece "registro algebraico" como designación de uno de los marcos, podría hablarse más precisamente de "registro analítico-algebraico", para dar cuenta de que las representaciones algebraicas de funciones juegan, además, un papel importante en las nociones variacionales que son propias del estudio del Cálculo.

CONDICIONES NECESARIA Y SUFICIENTE EN LA ARGUMENTACIÓN MATEMÁTICA

Al problema de decidir si una función es sobreyectiva debe responderse argumentando si dado un elemento del codominio de la función, existe un elemento del dominio cuya imagen sea el elemento elegido. En esta situación hay al menos tres señalamientos a hacer.

El primero, es la presencia de cuantificadores, uno universal "[...] dado un elemento [...]", otro existencial. La aparición de éste es evidente, pero la del primero es implícita. El segundo punto destacable es la necesidad de articular el registro de representación en el que se está trabajando con las acciones que se requiere ejecutar para dar la respuesta. El tercer elemento por señalar, es la estructura lógica que está presente en la sentencia a analizar. En nuestro ejemplo, si la función viene dada por medio de una ecuación algebraica, se debe discutir la existencia de soluciones de una cierta ecuación dependiente de un parámetro. En cambio, si la función se representa por medio de una gráfica cartesiana donde se ubicó la variable independiente en el eje de abscisas, la cuestión es decidir si una recta paralela a este eje interseca a la gráfica cuando la ordenada de la recta recorre todos los valores del codominio. El conectivo que aparece es una conjunción: se interroga acerca de la existencia de un elemento que esté en el dominio y cuya imagen sea el elemento dado en el codominio. Como en el caso de los cuantificadores, este conectivo puede aparecer de manera poco explícita. Otra situación similar se da en la actividad para probar que una función tiene límite en un punto. En el currículo de los primeros cursos de Cálculo en carreras en ingeniería en Uruguay, esta definición ocupa un lugar importante: se usa para probar que ciertas funciones tienen un cierto límite en un punto, o para demostrar reglas que proporcionan procedimientos para el cálculo de límites, o para justificar resultados de interés intra-matemático, como la unicidad del límite en caso de existir. En el proceso de usar la definición para justificar la existencia de un cierto límite, es necesario y suficiente verificar que, si se quiere conseguir que la variable dependiente esté en cierto conjunto arbitrariamente elegido, alcanza con encontrar un conjunto adecuado en el que esté la variable independiente. Como antes, hay varias apariciones de cuantificadores y una estructura lógica basada en el conectivo condicional. En efecto, la definición de límite de una función en un punto, tal como quedó establecida a partir de Cauchy, puede escribirse de la siguiente manera:

$\lim\limits_{x \to a} f(x)=b$ si y solo si dado $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<|x-a|<\delta$ entonces $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Explicitando en detalle la traducción de los elementos simbólicos que aparecen en ella, puede redactarse diciendo:

> La función f tiene límite b en el punto a si y solo si dado ε positivo existe δ positivo de forma que, para cualquier x, si ocurre que la distancia de x al punto a es positiva y menor que δ resulta que la distancia de la imagen de x por medio de f al número b es menor que ε.

Por lo tanto, afirmar que una función tiene límite en un punto es equivalente a decir que:

> Existe un número b para el cual, dado ε positivo existe δ positivo de forma que para cualquier x, si ocurre que la distancia de x al punto a es positiva y menor que δ resulta que la distancia de la imagen de x por medio de f al número b es menor que ε.

En definitiva, pueden reconocerse tres instancias de cuantificación en esta definición, dos de ellas más bien explícitas (“dado $\varepsilon>0$”, “existe $\delta>0$”) y otra prácticamente oculta (“existe un número b”). Por otro lado, la sentencia cuyo valor de verdad debe ser analizado para decidir acerca de la existencia del límite es un condicional. Ha sido señalado (Durand-Guerrier, 2005; Morou y Kalospyros, s.f.) que este “ocultamiento” de los cuantificadores está asociado con dificultades en la comprensión de los contenidos matemáticos y puede, por eso, inducir a errores en el desempeño de los estudiantes, en particular, en los procesos de demostración y en el uso de las sentencias condicionales, lo que en muchos países ocurre en el momento del ingreso a carreras universitarias en el área de ciencias o tecnologías.

Por su parte, un resultado central en matemáticas es el que establece que el conjunto vacío, representado con la letra nórdica $\emptyset$, está contenido en cualquier otro conjunto. Cuando se examina esta proposición desde la perspectiva de la definición de inclusión de conjuntos, queda claro que un condicional debe ser cierto cuando su antecedente es falso, sin que importe el valor del consecuente. En efecto, decimos que el conjunto X está contenido en el conjunto Y si y solo si para cualquier a, si a es un elemento de X, entonces es un elemento de Y. En términos formales, $X\subset Y \Leftrightarrow (\forall a)\ (a\in X \Rightarrow a\in Y)$. Concretada al caso en que X es el conjunto vacío $\emptyset$, la expresión anterior queda: $\emptyset\subset Y \Leftrightarrow (\forall a)\ (a\in\emptyset \Rightarrow a\in Y)$. Para que la proposición $(\forall a)\ (a\in\emptyset \Rightarrow a\in Y$ sea cierta, debe ocurrir que $a\in\emptyset \Rightarrow a\in Y$ sea cierta para cualquier a. De acuerdo con la definición de valor de verdad del condicional, esto ocurrirá a menos que $a\in\emptyset$ sea cierto y $a\in Y$ sea falso. Ahora bien, por definición, $a\in\emptyset$ toma el valor falso para cualquier a, en tanto $a\in Y$ puede ser tanto falso como cierto, dependiendo de $\mathbf{a}$ y de $\mathbf{Y}$. De aquí se concluye que $\emptyset$ es un subconjunto de cada conjunto. Esta característica técnica de la definición del valor de verdad del condicional, necesaria internamente en Matemática, no forma parte de las concepciones habituales.

Es frecuente que se asocie el condicional con la representación de relaciones causales. Cuando se quiere analizar si un fenómeno A es causa de otro B, hay que considerar, en cada caso de ocurrencia de A, si B también ocurre. Lo que importa en este análisis es que A ocurra; en términos lógicos, solo tiene interés el caso en el que el valor de verdad de la proposición "A ocurre" es cierto. En otras palabras, no es relevante preguntarse qué valor toma una proposición condicional cuando el antecedente es falso.

Esta es la clase de concepciones a las que Durand-Guerrier (2003) se vio enfrentada con sorpresa en su experiencia como docente en un curso de primer año universitario. Al proponer a sus estudiantes la determinación de los valores de una variable para los cuales una sentencia condicional resultaba cierta, encontró que solo unos pocos incluían en la respuesta los valores de la variable para los cuales el antecedente resultaba falso. Incluso pudo constatar que varios alumnos no se convencieron de que esta respuesta era correcta. En este sentido, es relevante la investigación de Alcock y Weber (2005) que destaca como uno de sus resultados que la aceptación de la validez de una argumentación descansa no solo en su estructura deductiva, sino además en la existencia de razones contextuales suficientemente fuertes para aceptar que las reglas de inferencia usadas son correctas. Esta constatación permite conjeturar plausiblemente que lo que hace sentido para el estudiantado, no toma por base un modo argumentativo aristotélico.

El ejemplo que sigue destaca la importancia que tiene la definición técnica del condicional en las demostraciones matemáticas; además, muestra cómo la posibilidad de construir y articular diferentes representaciones del mismo objeto matemático puede ayudar a superar las limitaciones que cada representación aislada tiene. P. N. Johnson-Laird (1984) al presentar la existencia de una controversia acerca de la forma en que los humanos razonan, plantea el estudio de las respuestas que se recogen al extraer conclusiones a partir de silogismos. Uno de ellos es el siguiente, en el que se pedía a estudiantes universitarios que extrajeran alguna conclusión, si había alguna, a partir de las sentencias:

a) Todos los apicultores son artistas.
b) Ningún químico es apicultor.

Johnson-Laird afirma que "Algunos artistas no son químicos" es una conclusión a la que se arriba y destaca que ningún participante en el estudio la dio. Este resultado se enmarca en el llamado silogismo Darapti (Brunschvicg, 1945) y, como se verá a continuación, es incorrecto. En términos del cálculo de predicados, tomando $M(x)$ como x es apicultor, $N(x)$ como x es artista y $P(x)$ como x es químico, podemos formular el silogismo anterior de la siguiente manera: $(\forall a)(M(a) \rightarrow N(a)) \wedge \neg (\exists a)(P(a) \wedge M(a)) \rightarrow (\exists a)(N(a) \wedge \neg P(a))$. Sin embargo, esta conclusión es errónea de acuerdo con lo que se detalla a continuación:

I) Si se asume que no hay apicultores, (es decir $M(a)$ toma el valor falso para cualquier a) entonces:

a) $(\forall a)(M(a) \rightarrow N(a))$ es cierto, porque el condicional $M(a) \rightarrow N(a)$ es cierto para cualquier a, porque su antecedente $M(a)$ es falso para cualquier a.
b) $\neg (\exists a)(P(a) \wedge M(a))$ es cierto, porque $(\exists a)(P(a) \wedge M(a))$ es falso, dado que la conjunción $P(a) \wedge M(a)$ es falsa para cualquier a, porque $M(a)$ es falso para cualquier a.
c) De acuerdo con i) y ii), $(\forall a)(M(a) \rightarrow N(a)) \wedge \neg (\exists a)(P(a) \wedge M(a))$ resulta ser cierto.

II) Si se asume que no hay artistas (es decir, $N(a)$ es falso para cualquier valor de a) o que todos son químicos (o sea, $P(a)$ es cierto para cualquier a y entonces $\neg P(a)$ es falso para cualquier a) resulta que la conjunción $N(a) \wedge \neg P(a)$ es falsa para cualquier a, con lo que $(\exists a)(N(a) \wedge \neg P(a))$ es falso.

III) Con esto, el condicional resulta falso.[8]

Es interesante notar que si se acepta que existen apicultores entonces la fórmula $(\forall a)(M(a) \rightarrow N(a)) \wedge \neg (\exists a)(P(a) \wedge M(a)) \rightarrow (\exists a)(N(a) \wedge \neg P(a))$ resulta cierta, porque no es posible conseguir que el antecedente sea cierto y el consecuente falso.

En efecto, admitido que $M(a)$ es cierto para algún a, digamos a_0, para que el antecedente sea cierto debe ocurrir que $N(a)$ tome el valor cierto para a_0 (en caso contrario $(\forall a)(M(a) \rightarrow N(a))$ resultaría falso). Con este resultado, si

[8] Existen otras asignaciones para conseguir que esta fórmula sea falsa.

fuera el consecuente falso, $P(a)$ debería ser cierto para a_0 (de lo contrario $(\exists a)(N(a) \wedge \neg P(a))$ sería cierto). Entonces, la fórmula $\neg (\exists a)(P(a) \wedge M(a))$ es falsa, dado que $P(a) \wedge M(a)$ queda cierta para a_0.

Es decir, lo que parece llevar al error que comete Johnson-Laird (1984) es la no consideración de un caso en el que una sentencia condicional es cierta porque su antecedente es falso. Sin embargo, aún en Matemática, las nociones de implicación y de prueba están principalmente asociadas a la consideración de los casos en los que las premisas, cuya conjunción constituye el antecedente, son ciertas. Tal como señalan Hoyles y Küchemann (2002), es necesario realizar una distinción entre la implicación material asociada con el conectivo lógico condicional y, las proposiciones hipotéticas, en las que se analiza si una sentencia (la conclusión) es consecuencia lógica de otras (las premisas) a partir de considerar cuál es el valor de verdad de la conclusión cuando todas las premisas son ciertas. Aun cuando ambas nociones están indisolublemente ligadas (una proposición hipotética se formaliza como una implicación material) esta asociación no es clara para los aprendices, e incluso para los profesores (Durand-Guerrier, 2003). Hasta aquí se ha manejado esta situación en el SMS propio del cálculo de predicados. Cerrando esta sección, se ejemplifican los procesos de conversión presentando, a continuación, un análisis del mismo silogismo, pero en el SMS de la teoría intuitiva de conjuntos.

Para esto se toma el universo U como el conjunto de todas las personas, P como el de los químicos, N como el de los artistas, M como el de los apicultores.

La premisa "Todos los apicultores son artistas" queda representada por el hecho de que $M \subseteq N$. La premisa "Ningún químico es apicultor" queda representada por el hecho de que $P \cap M = \emptyset$. La pretendida conclusión "Algunos artistas no son químicos" podría representarse como $N\text{-}P \neq \emptyset$ o, equivalentemente, como $N \not\subset P$.

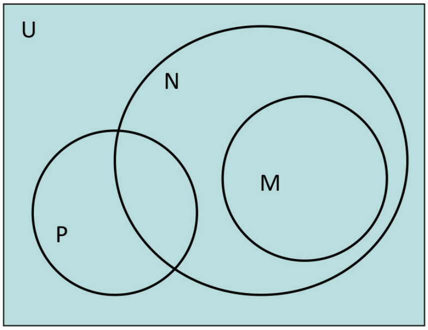


Diagrama 1

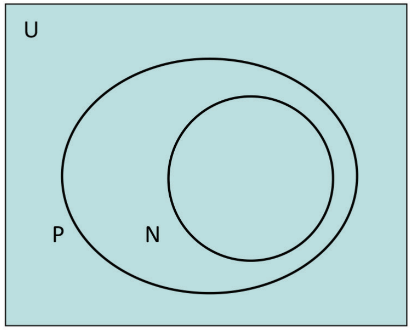


Diagrama 2

Así que, si $\mathrm{M} \neq \emptyset$ (es decir, "existen apicultores" es cierto), como $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$ y $\mathrm{P} \cap \mathrm{M} = \emptyset$, entonces no puede ocurrir que $\mathrm{N} \subset \mathrm{P}$ (o sea, hay artistas que no son químicos), como se ve en el diagrama 1. Ahora consideremos el caso que $\mathrm{M} = \emptyset$. Esto se representa en el diagrama 2 con la ausencia de referencias a M (este es un ejemplo de cómo cada registro de representación tiene limitaciones para dar cuenta de ciertos aspectos de lo representado: los diagramas de Venn no permiten, por su propia conformación, representar al conjunto vacío). Nada impide que $\mathrm{N} \subset \mathrm{P}$, lo que equivale a decir que "Todos los artistas son químicos" lo cual contradice la pretendida conclusión. Esto cierra el desarrollo del ejemplo, en el que se ha expuesto que cada representación presenta limitaciones y cómo la articulación de diferentes representaciones del mismo objeto contribuye a la comprensión del tema en discusión. Los ejemplos anteriores ilustran la coexistencia de diversos discursos en el aula y ponen de relieve que la Lógica Matemática emerge como disciplina (a fines del siglo XIX) para responder a problemas internos a la Matemática (teoría de conjuntos, formalización del análisis, entre otros). Algunas de sus construcciones, como la definición del condicional, son concesiones obligadas por la necesidad de coherencia interna. Sin embargo, otras necesidades o diferentes entornos pueden dar lugar a otras maneras de argumentar, no sólo en ámbitos externos a las Matemáticas, sino incluso internamente. Es en este sentido que algunos autores (Crespo, Farfán y Lezama, 2010) destacan que la presencia de algunas formas argumentativas en el aula no puede explicarse a partir de la lógica aristotélica, que sin embargo es la que subyace a las Matemáticas.

MOTIVACIONES PARA ESTA EXPERIENCIA

Además de los señalados, un elemento destacable que emerge del trabajo de Alcock y Simpson (2004; 2005) es la constatación de la existencia de dos clases de aprendices, aquellos que priorizan en su trabajo los aspectos de la representación algebraica, con poco o ningún apoyo en gráficas de algún tipo, y los que apelan principalmente a representaciones gráficas para visualizar las relaciones relevantes. Cabe entonces preguntarse acerca de la relación entre la dificultad de una tarea matemática y el sistema de representación en el que ha sido planteada. Por otro lado, en el discurso matemático del aula aparecen constantemente argumentos deductivos donde el reconocimiento de la relación entre dos enunciados (cuál es suficiente, necesario o suficiente y necesario para el otro) es crucial para establecer la validez del razonamiento en cuestión.

Adicionalmente, en la organización curricular de la enseñanza media superior en Uruguay el tratamiento de los temas de Cálculo Diferencial tiene un sesgo hacia la adquisición de habilidades de cálculo, mientras que los cursos universitarios iniciales cambian el foco a aspectos conceptuales, donde las nociones de demostración y de rigor juegan un papel principal. Por estos motivos, se eligió indagar acerca del uso por parte de los estudiantes de las nociones de condición necesaria o condición suficiente en formulaciones condicionales, presentadas o bien en el registro algebraico o bien en el gráfico, en situaciones como las que deben abordar en tareas usuales que se refieren a la definición de límite de una función en un punto, en los cursos universitarios iniciales de Cálculo. Se optó por un diseño que minimizara los cambios en el desarrollo habitual del curso, dado que se pretendía recoger información que pudiera ser útil en el desarrollo de intervenciones didácticas que incorporaran la enseñanza de temas de Lógica en el marco de los contenidos de Cálculo. Más específicamente, se decidió responder a las siguientes cuestiones:

1) ¿Qué uso de los enunciados condicionales (condición suficiente, condición necesaria) muestran ingresantes a la universidad?

2) ¿Qué registro de representación, gráfico o algebraico, presenta mayor dificultad en tareas con enunciados condicionales?

El marco conceptual para responder a estas preguntas está constituido, por un lado, por los aspectos destacados en la relación entre los SMS y la actividad matemática, y, por otro, con las nociones de condicional proporcionadas por la Lógica. A continuación, se describe esta experiencia.

DISEÑO DE LA EXPERIENCIA

PARTICIPANTES

Los participantes en esta experiencia fueron cuarenta estudiantes de primer año de carreras de ingeniería de la Universidad Católica del Uruguay (UCU), que asistían al primer curso de Cálculo. Se eligió esta muestra teniendo en cuenta que el estudio de Cálculo puede considerarse el punto de partida para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado.

INSTRUMENTOS

Para esta experiencia se prepararon dos cuestionarios de ocho ítems con cuatro alternativas de respuesta cada uno. Ambos cuestionarios fueron elaborados de manera que la mitad de las preguntas están formuladas como condición suficiente y la otra mitad en modo de condición necesaria.

Estos cuestionarios fueron aplicados en la tercera semana del curso (marzo de 2017), en dos clases consecutivas, de sesenta minutos de duración cada una, antes del comienzo del tratamiento del tema de límite de una función en un punto. Con esta separación temporal se buscó evitar que se favoreciera la posibilidad de que los estudiantes los vincularan y por eso, se vieran eventualmente inducidos a llevar a cabo operaciones de conversión. Se indicó a los estudiantes que la relevancia de la tarea consistía en su relación con tema a seguir, el de límite, dado que les anticipaba algunas de las cuestiones que deberían resolver. Las respuestas de los estudiantes fueron registradas en hojas individuales que les fueron provistas, en las que debían marcar la opción que consideraban correcta.

La fiabilidad del cuestionario se estudió con un Alfa de Cronbach. La consistencia interna de los instrumentos fue aceptable, teniendo en cuenta que se trataba de pruebas de 16 preguntas (alfa de Cronbach de.59). Este análisis muestra que todos los ítems se comportan de manera similar, la supresión de alguno no aumenta la fiabilidad.

En el llamado Cuestionario Gráfico (CG) las preguntas se referían a una función presentada a través de su gráfica cartesiana, de la que no se daba la fórmula algebraica. En el llamado Cuestionario Algebraico (CA) los ítems interrogaban acerca de una función presentada a través de su ecuación algebraica de la que no se daba la gráfica.

Los enunciados que se referían a cada condición usaban formatos diferentes:

a) para la condición suficiente se usaron "para que ocurra Q es suficiente que P", "P alcanza para Q", "si P entonces Q", "cuando ocurre P resulta Q".
b) para la condición necesaria se usaron "para que sea P debe ser Q", "Q es necesaria para P", "sólo si Q resulta P", "para estar seguro de que sea Q, debe ser P".

Con el fin de garantizar que las preguntas estaban formuladas siguiendo las condiciones propuestas, dos profesores universitarios de Matemática clasificaron cada ítem según fuese de condición necesaria o suficiente.

Las alternativas de respuestas incorrectas fueron elegidas a partir de observaciones informales de situaciones de clase o de registros escritos de estudiantes en pruebas de evaluación en cursos anteriores de la misma asignatura, en las que, a partir del uso del lenguaje oral de los estudiantes, se detectaron formas de interpretar la estructura condicional que no eran las correctas. Otras de las opciones incorrectas de respuesta incluían desconocimiento de los contenidos matemáticos.

Se presentan algunos ítems de estos cuestionarios, con sus respectivos análisis didácticos.

Las preguntas del formulario algebraico se refieren a la función f dada por cualquiera de las fórmulas siguientes $f(x)=x^3-3x+2$ o $f(x)=(x+2)(x-1)^2$. Se incluyeron las dos fórmulas para simplificar el trabajo algebraico necesario para responder alguna de las preguntas.

Las dos preguntas que se presentan a continuación resultaron difíciles, registrando cada una un porcentaje del 45% de respuesta correctas.

La pregunta 7 es la siguiente:

La afirmación "Para que f(x) sea positivo es suficiente que x sea positivo y distinto de 1":

a) es falsa porque f(-1) es positivo y -1 no es positivo

b) es falsa porque f(x) es positivo para x mayor que -2 y distinto de 1

c) es cierta porque, por ejemplo, 2 es positivo y f(2) es positivo

d) es cierta porque si x es positivo y distinto de 1 resulta f(x)>0

En esta pregunta es explícita la condición de suficiente que se da a un enunciado (x es positivo y distinto de 1) respecto al otro (para que f(x) sea positivo). Sin embargo, el orden en el que se presentan estos enunciados no es el más frecuentemente utilizado. La respuesta correcta es la d). Quienes contesten las opciones a) o b), posiblemente estén confundiendo la condición considerándola necesaria (verosímilmente, debido al orden de los enunciados) Los que elijan la opción c) cometen el error lógico de pretender establecer la validez de un enunciado a partir de la verificación de casos particulares.

La pregunta 8 va a continuación:

Para estar seguro de que x está entre 0 al menos y 2 a lo sumo:

a) f(x) debe estar entre 0 y 4, ya que si f(x) menor que 0 implica x menor que -2 y f(x) mayor que 4 implica x mayor que 2.

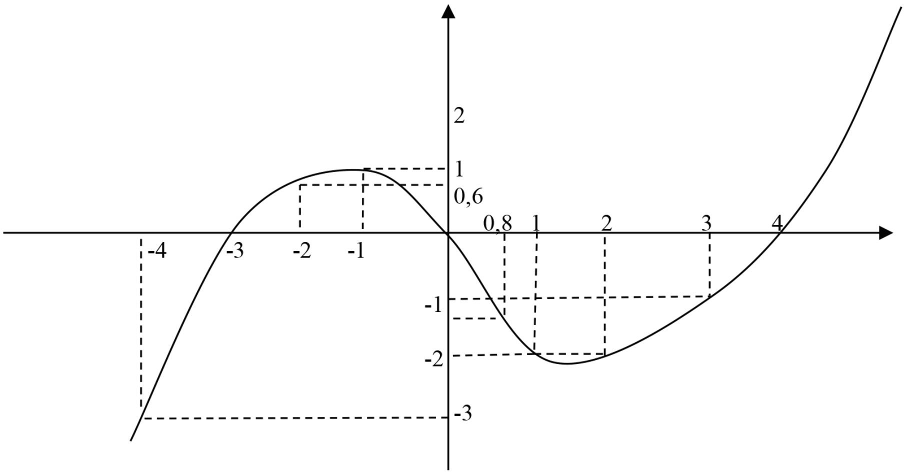
b) f(x) debe estar entre 0 y 1, ya que f(0)=2 y f(1)=0, ya que f es monótona decreciente entre 0 y 1.

c) f(x) debe ser menor que 4 porque f(x) es mayor que 4 si x es mayor que 2.

d) f(x) debe estar entre 0 y 4, ya que f(0)=2 y f(2)=4.

A diferencia de la anterior, la condición necesaria a la que refiere esta pregunta está implícita en el verbo "deber" utilizado. La respuesta correcta es la opción a). Quienes contestan la opción b) podrían estar considerando la condición como suficiente. En caso de marcar la opción c) posiblemente se esté cometiendo un error lógico al negar una conjunción. Finalmente, asumir la monotonía de la función en el intervalo entre 0 y 2 (lo que es erróneo) puede explicar la elección d).

Las preguntas del cuestionario gráfico se refieren a la siguiente gráfica.



La pregunta 1 se da a continuación:

> Es suficiente que x esté entre -2 y 3 para que f(x) esté:
>
> a) entre -1 y 1.
>
> b) entre -3 y 2.
>
> c) entre -2 y 1.
>
> d) entre -1 y 0,6.

Como en la pregunta 7 del cuestionario algebraico, se explicita el tipo de condición en el enunciado que se analiza. La diferencia entre estas dos preguntas está dada por la elección de los distractores. En las tres opciones incorrectas (a, c y d) los errores que explican que puedan ser elegidas están relacionadas con el contenido matemático involucrado (asumir monotonía de la función o hallar equivocadamente un valor).

La pregunta 5 es la siguiente:

> Para que f(x) esté entre 0 y 1, x debe estar
>
> a) entre -3 y 0 o entre 4 y un número α (que es mayor que 4 y no se puede determinar a partir de la información de la gráfica) donde la función toma el valor 1.

b) entre -3 y -1.

c) entre -1 y 0.

d) entre 0 y 1.

La estructura de esta pregunta es similar a la 8 del cuestionario algebraico. En efecto, la condición de necesaria se expresa a través del uso del verbo deber; además, las opciones b) y c) podrían ser contestadas por quienes confundan la condición con suficiente, mientras que la d) sería elegida por quienes confundan los roles de las variables independiente y dependiente. La opción correcta es la a).

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En esta experiencia se consideraron dos variables independientes y una variable dependiente.

La primera variable independiente se refiere a los SMS y los valores que toma son registro gráfico y registro algebraico, dado que cada una de las preguntas del cuestionario está formulada en uno de estos registros. La segunda variable independiente es la estructura lógica y toma los valores condición necesaria y condición suficiente, dado que, al igual que con la variable anterior, cada pregunta del cuestionario está redactada de manera que plantea una de estas dos condiciones. El rendimiento es la variable dependiente, medida a partir del número de respuestas correctas en cada cuestionario. Se tiene entonces un diseño factorial intrasujeto 2x2, con una variable dependiente, que es el promedio del número de respuestas correctas. La tabla 1 muestra los resultados registrados en el rendimiento, en relación con las variables independientes. En cada casilla se indica el número máximo de respuestas correctas (4 u 8 según el caso).

Tabla 1. Rendimiento en relación con tipo de registro y tipo de condición

	Registro gráfico	Registro algebraico	Total por condición
Condición necesaria	3,2 (4)	2,57 (4)	5,77 (8)
Condición suficiente	2,28 (4)	2,03 (4)	4,31 (8)
Total por registro	5,48 (8)	4,6 (8)	

Se analizaron estos datos con diferentes tipos de contrastes estadísticos, para indagar acerca de eventuales diferencias en el rendimiento en relación con las variables independientes.

Uno de ellos fue un ANOVA de medidas repetidas intrasujeto (SMS y estructura lógica, son los mismos estudiantes los que responden a todas las cuestiones) y sus interacciones. Resultó que el rendimiento en la combinación condición necesaria-registro gráfico es significativamente mayor que en cualquiera de las otras tres combinaciones (F15.1 nivel de confianza de 99%). Las diferencias entre las otras combinaciones no resultaron significativas.

Otro contraste estadístico fue el uso del test t de Student para muestras relacionadas, que mostró, en ambos casos, que las diferencias son significativas (nivel de confianza de 99%), a favor, respectivamente, del registro gráfico y de la condición necesaria.

En efecto, los estudiantes respondieron correctamente 58% de las preguntas sobre condición necesaria, mientras que el porcentaje de respuestas correctas sobre condición suficiente fue del 43%. Similarmente, se constató un porcentaje de 55% de respuestas correctas en el registro gráfico, y en el algebraico este porcentaje fue del 46%.

Estos mismos datos fueron analizados utilizando una prueba de los rangos con signos de Wilcoxon, y se obtuvieron los mismos resultados, es decir, existen diferencias significativas entre los rendimientos de los estudiantes cuando:

1) la tarea se presenta en un registro gráfico: resulta más fácil reconocer la estructura de condición necesaria que la de condición suficiente;

2) se compara globalmente el uso de las estructuras de condición necesaria y condición suficiente, resulta más fácil la primera que la segunda;

3) se compara globalmente el rendimiento, en el registro gráfico resulta mayor que en el algebraico.

Corresponde observar que los distractores elaborados para detectar errores sobre contenidos matemáticos tuvieron una muy baja frecuencia, lo que permite asociar los errores detectados con el uso del condicional.

CONCLUSIONES

Los resultados del estudio muestran diferencias en el uso que los estudiantes hacen de los enunciados condicionales (condición suficiente, condición necesaria) y su relación con los Sistemas Matemáticos de Símbolos en los que se presenta la información sobre estos enunciados (registro gráfico, registro algebraico) en un curso de Cálculo de primer año en la universidad. Las tareas sobre condición necesaria presentadas en el registro gráfico resultaron significativamente más sencillas que las demás, se obtuvieron indicios de un mejor rendimiento en tareas presentadas en el registro gráfico respecto de las correspondientes al algebraico y resultaron mejores los desempeños en las tareas sobre condición necesaria en relación con las tareas sobre condición suficiente.

En relación con la primera cuestión planteada en este estudio, el uso de las sentencias condicionales que hacen estudiantes ingresantes a la universidad, se constató que el grado de dificultad registrado en las tareas propuestas es alto. El promedio de respuestas correctas en general no superó el 60%. Ello alerta respecto de que gran parte de las expresiones del discurso del aula no estarían siendo comprendidas por los estudiantes; entre otras consecuencias, los estudiantes no están comprendiendo lo que se espera que entiendan a partir del discurso docente. Ello concurre con lo advertido por Camacho, Sánchez y Zubieta (2014) quienes han señalado que en los argumentos (incluso en los correctos) que utilizan estudiantes universitarios aparecen elementos contextuales o intuitivos y, difícilmente, se encuentra que ellos manejen las estructuras lógicas subyacentes.

Este es un hecho reseñado en la investigación en Matemática Educativa, y tiene explicaciones bastante diversas. Una de ellas radica en el carácter técnico de la lógica aristotélica en la que, en particular, la definición del valor de verdad del condicional responde a cuestiones que hasta cierto punto están alejadas de la experiencia cotidiana (Crespo, Farfán y Lezama, 2010). Otro argumento a considerar es el discurso en el aula, en especial, la forma en que son usados ciertos verbos que se asocian a la condición suficiente (alcanzar, bastar) o la necesaria (deber, tener que). Es posible que estos verbos sean usados en forma inadvertida, tanto por estudiantes como por profesores, indistintamente para cualquiera de las dos condiciones. También, en relación con el discurso, al menos en algunos idiomas como el español o el francés, puede señalarse que, en una sentencia condicional, los verbos deben conjugarse en diferentes modos, en el subjuntivo cuando el verbo aparece en el antecedente y en el potencial cuando está en el consecuente: "Si (verbo en modo subjuntivo) entonces (verbo en modo potencial)". Esta distinción de modos de conjugación resulta entonces asociada con el reconocimiento de dos partes asimétricas en la sentencia, de manera que una de ellas (el antecedente) es condición suficiente para la otra (el consecuente) o, equivalentemente, esta otra (el consecuente) es condición necesaria para aquella (el antecedente). Esta cuestión amerita una investigación específica, para establecer hasta qué punto la ocurrencia de ciertos verbos o de ciertas estructuras gramaticales puede incidir en el uso adecuado de las estructuras lógicas.

Los saberes de la vida diaria, los del currículo y los eruditos, establecen sus raíces en matrices de sentido de epistemes propias. Las metáforas de expresiones de condición y condicional en lo cotidiano aluden a estar sujeto, supeditado, subordinado, a ser dependiente. Por otra parte, esas palabras en el cálculo proposicional aluden a posibilidad, pudiendo haber otras opciones, otros caminos que se relacionan con el consecuente. Favorecer aprendizajes requerirá poner en diálogo estas distintas coherencias, articulándolas, con base en diseños científicos de enseñanza. En cualquier caso, resulta que, si se pretende que los aprendices utilicen elementos de Lógica Matemática en sus actividades y que, en particular, recurran al uso del condicional, deben concederse espacios para la enseñanza intencional de estos temas.

En ese sentido van propuestas como la de Durand-Guerrier (2005) para utilizar situaciones habituales de los cursos de Matemática de manera de enfatizar acerca del uso de sentencias condicionales y cuantificadores en los procesos de demostración, explicitando las reglas de inferencia usadas, o la de Morou y Kalospyros (s.f), diseñando un curso de lógica orientado a estudiantes en la enseñanza media en el que, entre otros focos, se enfatizó la traducción formal de argumentaciones en las que aparecen sentencias condicionales tomadas de diversas fuentes, incluyendo desde publicaciones recreativas hasta actividades en un curso de Cálculo.

En relación con la segunda cuestión estudiada, las diferencias detectadas que refieren al registro de representación son también de importancia didáctica. Es destacable que los resultados de este estudio muestran que el uso del registro gráfico y el reconocimiento de la condición necesaria resultan más sencillos que el uso del registro algebraico y el reconocimiento de la condición suficiente, respectivamente, y que la combinación condición necesaria-registro gráfico es la que con gran diferencia resulta la más fácil. La enseñanza tradicional ha privilegiado el uso del registro algebraico en detrimento de otros registros de representación. Por ejemplo, a una demostración basada en un diagrama de Venn correspondiente a un registro gráfico, no se le reconoce el mismo estatus de rigor matemático que a otra desarrollada en el registro algebraico. Teniendo en cuenta los resultados de este estudio, resulta una oportunidad revisar las prácticas de enseñanza buscando un balance más equilibrado en el uso de los registros de representación para favorecer el aprendizaje. Una cuestión a abordar, por lo tanto, es la de construir y poner a prueba diseños instruccionales que insistan en la articulación de diferentes registros, al menos, el gráfico y el algebraico, como los que proponen Blázquez y sus colaboradores (Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas, 2006).

De modo consistente aparece el registro gráfico asociado con un mejor desempeño en las tareas. Parafraseando a Radford y Puig (2007, p. 146) "el *significado* de los cálculos era asegurado por *transformaciones geométricas visuales*",[9] una posible explicación de esta diferencia es la forma en la que la gráfica de una función permite el acceso a la información, comparada con la de una ecuación. Por ejemplo, la decisión acerca de si la imagen de un cierto subconjunto del dominio está contenida en un cierto conjunto del recorrido puede tomarse a partir de verificar que los puntos de la gráfica se encuentran en un cierto rectángulo. Incluso algunas de estas operaciones pueden verse favorecidas por la posibilidad de ejecutar gestos, como señalar partes del dominio o del codominio, que simplifican el proceso de establecer relaciones entre estos subconjuntos.

En las formulaciones algebraicas se requieren tratamientos (en el sentido de Duval, 1998), a veces engorrosos y prolongados, antes de poder explicitar las relaciones entre las variables; entre otras situaciones, cuando el resultado de una inecuación es la unión de dos intervalos, puede ser difícil reconocer sus subconjuntos, lo que es relevante para decidir, entre dos enunciados dados, si uno de ellos es condición es suficiente o necesaria para el otro. Esto podría contribuir a explicar que las diferencias entre condición necesaria y condición suficiente se vean opacadas en este registro. No slo resultan más difíciles las tareas en el registro algebraico que en el gráfico, sino que, además, no se encuentra en el registro algebraico el reconocimiento de la distinción entre condición necesaria y condición suficiente, distinción que se reconoce en el registro gráfico. Una de las cuestiones que este estudio deja abierta es el grado en que una aproximación a la enseñanza con un énfasis mayor en representaciones gráficas podría favorecer los aprendizajes. Al menos algunas nociones

[9] Traducción de los autores

relacionadas con el concepto de función y las sentencias condicionales parecen resultar más accesibles desde este registro. Desde el punto de vista didáctico, un desafío es estudiar las relaciones entre el condicional y los SMS en términos de otros contenidos matemáticos. La definición de independencia lineal de vectores, en la que explícitamente resulta necesario estudiar una sentencia condicional, puede presentarse tanto algebraica como geométricamente ya sea en el plano o en el espacio; otro ejemplo se presenta en torno a la definición de monotonía de funciones reales con dominio real.

REFERENCIAS

Alcock, L., y Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(2), 125–134.

Alcock, L., y Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, *57*(1), 1–32.

Alcock, L., y Simpson, A. (2005). Convergence of sequences and series 2: Interactions between nonvisual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(1), 77–100.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 215–241.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológios, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 97–140). Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2000). Teaching and learning calculus. What can be learned from education research and curricular changes in France. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld, y J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV* (pp. 1–14). CBMS.

Berger, M. (2004). The funtional use of a mathematical sign. *Educational Studies in Mathematics*, *55*(1), 81–102.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. N., y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático de la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(2),189–209.

Brunschvicg, L. (1945). *Las etapas de la filosofía matemática*. Lautaro.

Camacho, V., Sánchez, J., y Zubieta, G. (2014). *Los estudiantes de ciencias, ¿pueden reconocer los argumentos lógicos involucrados en una demostración? Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 117–138.

Camarena, P. (2010). Aportaciones de investigación al aprendizaje y enseñanza de la Matemática en ingeniería. En *Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica* (pp. 1–47). Academia de Ingeniería de México. http://www.ai.org.mx/ai/archivos/ingresos/camarenagallardo/dra._patricia_camarena_gallardo.pdf

Crespo, C., Farfán, R. M., y Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(3), 283–306.

Douady, R. (1984). Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement mathématique. Une réalisation dans tout le cursus primaire (Tesis doctoral no publicada). Université de Paris VII.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 5–32.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(1), 5–34.

Durand-Guerrier, V. (2005). Natural deduction in predicate calculus a tool for analysing proof in a didactic perspective. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 409–419). ERME.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173–201). Grupo Editorial Iberoamérica.

Gagatsis, A., y Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, *24*(5), 645–657.

Glymour, C. (1998). *Thinking things through: An introduction to philosophical issues and achievements*. The MIT Press.

Hoyles, C., y Küchemann, D. (2002). Students' understanding of logical implication. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(3), 193–223.

Inglis, M., y Alcock, L. (2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(4), 358–390.

Johnson-Laird, P. N. (1984). El pensamiento como habilidad. En M. Carretero y J. Madruga (Eds.), *Lecturas en psicología del pensamiento* (pp. 123–145). Alianza Psicología.

Kaput, J. (1987). Towards a theory of symbol use in mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 159–196). Laurence Earlbaum Associates.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Macmillan.

Lew, K., Fukawa-Conelly, T. P., Mejía-Ramos, J. P., y Weber, K. (2016). Lectures in advanced mathematics: Why students might not understand what the mathematics professor is trying to convey. *Journal for Research in Mathematics Education*, *47*(2), 162–198.

Martí, E., y Pozo, J. I. (2000). Más allá de las representaciones mentales, la adquisición de sistemas externos de representación. *Infancia y aprendizaje*, *23*(90), 11–30.

Morou, A. P., y Kalospyros, N. A. E. (s.f). The role of logic in teaching, learning and analyzing proof. Recuperado en enero 13, 2021 de http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7_WG1_Morou&Kalospyros.pdf

Palmer, S. E. (1977). Fundamental aspects of cognitive representations. En E. Rosch y B. Lloyd (Eds.), *Cognition and categorization* (pp. 259–303). Laurence Earlbaum Associates.

Pocoví, M. C., y Collivadino, C. (2014). Traducción entre lenguajes simbólicos de distintas áreas del conocimiento: el caso del flujo del campo eléctrico. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(2), 53–69.

Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 174–186). Fondo de Cultura Económica.

Radford, L. (1998). On signs and representations. A cultural account. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, *35*(1), 277–302.

Radford, L., y Puig, L. (2007). Syntax and meanings as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(2), 145–164.

Rojas, P. J. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(1), 151–165.

Selling, S. K. (2015). Learning to represent, representing to learn. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 191–209.

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the learning of calculus and analysis. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *12*(3-4), 49–63.

Weber, K., y Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, *56*(2), 209–234.

Zazkis, D., Weber, K., y Mejía-Ramos, J. P. (2015). Two proving strategies of highly successful mathematics majors. *The Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 11–27.

Eduardo Mario Lacues Apud

Dirección Postal: Maipú 2026, Montevideo, CP 11600

 DOI: 10.24844/EM3301.11

Doctor José Carrillo Yáñez: homenaje póstumo a su legado de trabajo colaborativo y conformación de equipos de investigación

Dinazar Escudero-Avila, Eric Flores-Medrano

Este 23 de marzo, nuestra comunidad se unió en una voz para escribir mensajes de despedida a nuestro querido amigo, el profesor José Carrillo Yáñez. Su fallecimiento representa una pérdida irreparable para la Educación Matemática.

Pepe Carrillo, como le llamamos todos, familia y amigos, obtuvo la licenciatura en Matemáticas (1981) y el doctorado en Filosofía y Ciencias de la Educación (1996) en la Universidad de Sevilla, España. Se desempeñó como profesor en la Universidad de Huelva, España, donde, en diciembre de 2012, obtuvo la categoría de Catedrático Universitario. Fue presidente de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática de 2014 a 2017. Dirigió, aproximadamente, 20 trabajos doctorales, 35 de maestría y fue autor de más de 150 publicaciones entre libros, capítulos de libro y artículos de investigación, de los cuales siete fueron publicados en la *Revista Educación Matemática*. Sus trabajos de investigación comenzaron al explorar, en su tesis doctoral, los modos de resolver problemas y las concepciones del profesorado de matemáticas.

Sus intereses de investigación y su labor en la universidad de formador de maestros de primaria, le orientaron hacia el estudio del conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas. Así, a partir de la década de los 90 se comenzaron a gestar dos grupos académicos liderados por él, y que continúan activos hasta el día de hoy. Por un lado, el Proyecto de Investigación Colaborativa, conformado mayoritariamente por maestros y maestras de educación básica, el cual ha tenido la intención de construir, en comunidad, respuestas a los problemas profesionales detectados en su día a día. Por otro lado, en el seno del Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIDM), se conformó un grupo de estudiantes de máster y doctorado, profesores e investigadores cuyo objetivo fue lograr la comprensión de los distintos fenómenos relacionados con la labor del profesor de matemáticas.

Estos espacios construidos, gestionados e impulsados por Pepe, redituaron en la conformación de la Red Iberoamericana sobre el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, la cual tiene presencia en distintas universidades de 12 países y es reconocida ante la Asociación Universitaria Iberoamericana de Postgrado.

De entre las distintas cualidades que caracterizaban a este gran investigador podemos destacar su simpatía, carisma y cordialidad con todos aquellos que se acercaban a él, a su grupo de investigación y a su espacio de trabajo. Pero, sobre todo, es de resaltar su disposición al diálogo y la búsqueda continua de puntos en común, lo cual, sin duda, ayudó al desarrollo de la Educación Matemática. En este sentido, no era poco común que las personas se acercaran a Pepe en busca de apoyo académico, puesto que él tenía siempre una opinión acertada, un consejo valioso o una crítica constructiva, que sus colegas apreciaban.

A principios de 2012, un grupo de estudiantes de doctorado, con ideas germinales, planteó, en reuniones del SIDM, una serie de cuestionamientos a trabajos propios y ajenos al grupo. El liderazgo y visión de Pepe y la armonía de trabajo entre quienes éramos sus colaboradores, permitieron realizar una dura crítica interna y comenzar con el desarrollo de un nuevo modelo de conocimiento profesional, el Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK). Este fue un momento de florecimiento para su grupo de investigación, no solo por la creación del modelo en sí, sino por la motivación que Pepe imprimía para exponer este trabajo al escrutinio de importantes investigadores y grupos de investigación que pudieran leer y criticar el modelo en espacios como el PME, ICME, CERME, RELME, CIBEM, etcétera, con personas como Fay Turner, Mark Thames, Tim Rowland, Heather Hill, Jeremy Kilpatrick, Alain Kuzniak, Juan D. Godino, Lourdes Figueiras, entre muchos otros. A Pepe le interesaba que el trabajo que se generaba en el grupo se debatiera a partir de miradas objetivas que pudieran ayudar a conformar un producto sólido y útil para la formación y el desarrollo profesional. Hoy, el MTSK ha rebasado el uso exclusivo por parte de nuestro grupo y se encuentra en un acelerado crecimiento.

Esta misma capacidad para entablar diálogos permitió que la influencia académica de Pepe no se limitara a la alta especialización en un modelo. Gracias a sus gestiones, se logró el establecimiento de trabajos conjuntos con otros modelos analíticos y perspectivas teóricas, entre los cuales podemos destacar las colaboraciones con el grupo que investiga sobre Espacios de Trabajo Matemático.

Además, Pepe realizó diversas codirecciones de tesis en Didáctica de las Ciencias Experimentales. Esto ha permitido el surgimiento de modelos basados en el MTSK que pretenden analizar el conocimiento especializado de los profesores de física, biología, química, estadística, ingeniería eléctrica, lengua castellana y portuguesa.

Aunque extrañaremos, entre muchas otras cosas, sus consejos, su sentido del humor, sus preguntas incisivas y comentarios inteligentes, nos queda una larga agenda de trabajo que Pepe estableció y cuyo cumplimiento, esperamos nos acerque a hacer justicia al arduo trabajo que él realizó por la Educación Matemática. Y es que, ante la pregunta de Joan Manuel Serrat "¿quién pondrá fin a mi diario al caer la última hoja de mi calendario?", estamos convencidos de que a ese final del diario de Pepe le quedan muchas horas de discusión y que devendrá en múltiples tesis, artículos y programas de formación, continuados por quienes orgullosamente, nos llamamos a nosotros mismos el grupo de Pepe Carrillo.

Quienes escribimos este homenaje nos sentimos halagados con esta oportunidad, pero, a la vez, con una enorme responsabilidad de tratar de representar el sentir de una gran comunidad que conforma su grupo de investigación. Esperamos que nuestras palabras vertidas en este espacio sirvan para transmitir a Inma, Daniel, Samuel y Alejandro la gran admiración y agradecimiento que una comunidad entera siente por Pepe como profesor, investigador, colega y amigo. Deseamos que este sentido homenaje les reconforte.

Educación Matemática vol. 33 • núm. 1 • abril de 2021

www.revista-educacion-matematica.com