Versión electrónica ISSN: 2448-8089

Educación Matemática

México • vol. 33 • núm. 2• agosto de 2021

- Modelo de desarrollo del conocimiento matemático desde el Saber y Hacer del pueblo mapuche
  Anahí Huencho, Eugenio Chandía, Francisco Rojas, Guillermo Williamson. Chile
- Enfoque Ontosemiótico en el desarrollo de Capacidades Matemáticas: Escuela Intercultural Yarinacocha, Amazonia
  Ronald Gamarra Salinas, Julia Cecilia Yon Delgado, Mónica Rosario Yon Delgado. Perú
- Exploración de estrategias de enseñanza orientadas a la inclusión de todos los alumnos en la clase de matemática. Resultados de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores
  María Emilia Quaranta, María Mónica BecerrilPatricia García, María Paula Pérez, Patricia Sadovsky. Argentina
- Voces de estudiantes en clase de geometría y su potencial para desarrollar el discurso en el aula
  Patricia Perry, Leonor Camargo, Óscar Molina, Carmen Samper. Colombia
- "Los saltos de las ranas". Estudio de una secuencia didáctica de proporcionalidad, con problemas de comparación de razones, en quinto grado de primaria
  David Francisco Block Sevilla. México
- Un enfoque cognitivo en la comprensión de la comparación entre los cardinales del conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros en estudiantes de secundaria
  Tamara Lasnibat Godoy, Mónica Flores Sepúlveda, Eduardo Puraivan. Chile
- Ordenamiento de los registros semióticos en la didáctica del álgebra en la escuela secundaria. Correspondencia con la enseñanza de expresiones algebraicas racionales
  Eugenio Valiero, Melissa Barrionuevo, Flavia Villenas. Argentina
- Los gestos, una manera de comunicar matemática: el caso particular de las funciones
  Luis Sandoval-Troncoso, Carlos Ledezma. Chile y España
- Desarrollo profesional de profesores de matemáticas en ambientes virtuales: ventajas, aproximaciones teóricas y futuras líneas de investigación
  Fátima Widman Aguayo. México
- Influencia del software GeoGebra en el aprendizaje de la geometría en estudiantes de cuarto grado de secundaria en el distrito de Tambopata de la región de Madre de Dios
  Eliseo Pumacallahui Salcedo, Cory Ingrid Acuña Quispe, Dominga Asunción Calcina Álvarez. Perú
- El Programa de Matemática Educativa del Instituto Politécnico Nacional, una historia de discotinuidades y rupturas. Veinte años han pasado tan rápido(Green Day, 2005)
  Apolo Castañeda. México
- *La teoría de la objetivación. Una perspectiva vigotskiana sobre conocer y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, de Luis Radford
  Armando Solares-Rojas. México
- Ubiratan D'Ambrosio: El legado de una vida dedicada a la búsqueda de las matemáticas por la paz
  Milton Rosa, Daniel Clark Orey. Brasil
- In Memoriam Gérard Vergnaud
  Michèle Artigue, Janine Rogalski. Francia

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías

Avenilde Romo Vázquez
Editora en Jefe
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, IPN, México avenilde.romo@cinvestav.mx

Luis Manuel Aguayo
Editor Asociado
Universidad Pedagógica Nacional Unidad Zacatecas, México l_aguo@yahoo.com.mx,

Mario Sánchez Aguilar
Editor Asociado
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA), Instituto Politécnico Nacional, México mosanchez@ipn.mx

Consejo editorial

Alicia Ávila Storer
Universidad Pedagógica Nacional, México aliavi@prodigy.net.mx

Josep Gascón
Universidad Autónoma de Barcelona, España gascon@mat.uab.es

Salvador Llinares Ciscar
Universidad de Alicante, España sllinares@ua.es

Luis Radford
Université Laurentienne, Canadá Lradford@nickel.laurentian.ca

María Trigueros Gaisman
Departamento de Matemáticas, Instituto Tecnológico Autónomo de México, México trigue@itam.mx

Comité editorial

Edelmira Badillo Jiménez
Universidad Autónoma de Barcelona, España edelmira.badillo@uab.cat

Gustavo Barallobres
Universidad de Quebec en Montreal Canadá barallobres.gustavo@uqam.ca

Analia Bergé
Universidad de Quebec, Canadá analia_berge@uqar.ca

Claudia Broitman
Universidad Nacional de La Plata, Argentina claubroi@gmail.com

Leonor Camargo Uribe
Universidad Pedagógica Nacional, Colombia lcamargo@pedagogica.edu.co

Ceneida Fernández Verdú
Universidad de Alicante, España ceneida.fernandez@ua.es

Dilma Fregona
Universidad Nacional de Córdoba, Argentina dilmafregona@gmail.com

María Garcia González
Universidad Autónoma de Guerrero, México mgargonza@gmail.com

Manuel Goizueta
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile mgoizueta@gmail.com

Santiago Inzunza Cázares
Universidad Autónoma de Sinaloa, México sinzunza@uas.edu.mx

Rafael Martínez Planell
Universidad de Puerto Rico, Puerto Rico rmplanell@gmail.com

Paulino Preciado Babb
Universidad de Calgary, Canadá paulinopreciado@gmail.com

Solange Roa Fuentes
Universidad Industrial de Santander, Colombia roafuentes@gmail.com

Ana Isabel Sacristán Rock
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, IPN, México asacrist@cinvestav.mx

Diana Violeta Solares
Universidad Autónoma de Querétaro, México violetasolares@yahoo.com.mx

Gloria Sánchez-Matamoros
Universidad de Sevilla, España gsanchezmatamoros@us.es

Ernesto Sánchez Sánchez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, IPN, México esanchez@cinvestav.mx

Eric Medrano Flores
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México ericfm_0@hotmail.com

Ivonne Twiggy Sandoval
Universidad Pedagógica Nacional, México isandoval@upn.mx

Marilena Bittar
Fundaçao Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil marilena.bittar@ufms.br

Jesús Victoria Flores Salazar
Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú jvflores@pucp.pe

Alex Montecino
Universidad Católica Silva Henríquez, Chile alex.montecino.em@gmail.com

Melissa Andrade-Molina
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile melissa.andrade@pucv.cl

Yolanda Chávez
Gestión de arbitrajes

Rodolfo Méndez
Gestión y operación

Producción

Formas e Imágenes, S.A. de C.V. Diseño y corrección, formaseimagenes@gmail.com

La revista publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática. EDUCACIÓN MATEMÁTICA aparece tres veces al año y es indexada en el Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (IRMI-CYT), del CONACYT, SCOPUS (Elsevier, Bibliographic Databases), ZdM (Zentralbatt für Didaktik der Mathematik), MathDi (MathEducDatabase), Latindex, Redalyc (Red de revistas científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal), Scientific Electronic Library Online (SciElo) y Clase (Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades). Las colaboraciones son recibidas en la plataforma www.autores-educacion-matematica.com Mantenemos el contacto: revedumat@yahoo.com.mx

Educación Matemática

Sociedad Mexicana
de Investigación
y Divulgación
de la Educación
Matemática, A.C.

UNIVERSIDAD DE
GUADALAJARA

Red Universitaria e Institución Benemérita de Jalisco

Centro Universitario de Ciencias
Exactas e Ingenierías

Educación Matemática *vol. 33 • núm. 2 • agosto de 2021*

© Educación Matemática, agosto de 2021, vol. 33, núm. 2, es una publicación cuatrimestral editada por la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C., con domicilio en Adolfo Prieto 1734, Col. Del Valle centro, 03100, Benito Juárez, Ciudad de México, correo electrónico revedumat@yahoo.com.mx. y la Universidad de Guadalajara a través del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, dirección Blvd. Marcelino García Barragán #1421, esq Calzada Olímpica, C.P. 44430, Guadalajara, Jalisco, México, correo electrónico divcb@cucei.udg.mx

Editora responsable: Avenilde Romo Vázquez. Reserva de derechos al Uso Exclusivo del Título: 04-2015-10163264600-203, ISSN (web) 2448-8089, ambos otorgados por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor.

La presentación y disposición en conjunto de cada página de Educación Matemática, vol. 33, núm. 2, agosto de 2021, son propiedad de D.R. © Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C. y de la Universidad de Guadalajara (en trámite).

Diagramación y corrección de estilo: Formas e Imágenes, S.A. de C.V., Av. Universidad 1953, edif. 2, loc. E, Copilco el Bajo, Coyoacán, 04330, Ciudad de México, formaseimagenes@gmail.com

Fecha de la última actualización 29 de julio de 2021.

https://www.revista-educacion-matematica.org.mx

Contenido

Editorial 5
Avenilde Romo-Vázquez, María S. García González, Humberto Gutiérrez Pulido

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Modelo de desarrollo del conocimiento matemático desde el Saber y Hacer del pueblo mapuche 7
Model of the development of mathematical knowledge from the Knowing and Doing of the Mapuche people
Anahí Huencho, Eugenio Chandía, Francisco Rojas, Guillermo Williamson

Enfoque Ontosemiótico en el desarrollo de Capacidades Matemáticas: Escuela Intercultural Yarinacocha, Amazonia 37
Ontosemiotic approach in the development of Mathematical Capabilities: Intercultural School Yarinacocha, Amazonia
Ronald Gamarra Salinas, Julia Cecilia Yon Delgado, Mónica Rosario Yon Delgado

Exploración de estrategias de enseñanza orientadas a la inclusión de todos los alumnos en la clase de matemática. Resultados de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores 57
A search for teaching strategies aimed at the inclusion of all students within the mathematical class. Results from a collaborative work by teachers and researchers
María Emilia Quaranta, María Mónica Becerril, Patricia García, María Paula Pérez, Patricia Sadovsky

Voces de estudiantes en clase de geometría y su potencial para desarrollar el discurso en el aula 87
Students voices in geometry classroom and its potentialin the development of classroom discourse
Patricia Perry, Leonor Camargo, Óscar Molina, Carmen Samper

"Los saltos de las ranas". Estudio de una secuencia didáctica de proporcionalidad, con problemas de comparación de razones, en quinto grado de primaria 115
"The jumps of the frogs." Study of a didactic sequence on proportionality, with ratio comparison tasks, in fifth grade of primary school
David Block Sevilla

Un enfoque cognitivo en la comprensión de la comparación entre los cardinales del conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros en estudiantes de secundaria 147
A cognitive approach for understanding the comparison between the cardinals of the set of natural numbers and the set of integers in secondary student
Tamara Lasnibat Godoy, Mónica Flores Sepúlveda, Eduardo Puraivan

Ordenamiento de los registros semióticos en la didáctica del álgebra en la escuela secundaria. Correspondencia con la enseñanza de expresiones algebraicas racionales 173
Ordination of semiotic records in the algebra didactics at the secondary school. Correspondence with the teaching of rational algebraic expressions
Eugenio Valiero, Melissa Barrionuevo, Flavia Villenas

Los gestos, una manera de comunicar matemática: el caso particular de las funciones 205
Gestures as a way to communicate mathematics: The particular case of functions
Luis Sandoval-Troncoso, Carlos Ledezma

ENSAYO

Desarrollo profesional de profesores de matemáticas en ambientes virtuales: ventajas, aproximaciones teóricas y futuras líneas de investigación 227
Online mathematics teachers' professional development: advantages, theoretical perspectives and future investigation lines
Fátima Widman Aguayo

CONTRIBUCIÓN A LA DOCENCIA

Influencia del software GeoGebra en el aprendizaje de la geometría en estudiantes de cuarto grado de secundaria en el distrito de Tambopata de la región de Madre de Dios 245
GeoGebra software influence on learning geometry in fourth grade high school students in the Tambopata district of the Madre de Dios region
Eliseo Pumacallahui Salcedo, Cory Ingrid Acuña Quispe, Dominga Asunción Calcina Álvarez

RESEÑA

El Programa de Matemática Educativa del Instituto Politécnico Nacional, una historia de discotinuidades y rupturas 274
Veinte años han pasado tan rápido(Green Day, 2005)
Apolo Castañeda

RESEÑA DE LIBRO

La teoría de la objetivación. Una perspectiva vigotskiana sobre conocer y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, de Luis Radford 280
Armando Solares-Rojas

IN MEMORIAM

Ubiratan D'Ambrosio: El legado de una vida dedicada a la búsqueda de las matemáticas por la paz 285
Milton Rosa, Daniel Clark Orey

In Memoriam Gérard Vergnaud 288
Michèle Artigue, Janine Rogalski

EDITORIAL DOI: 10.24844/EM3302.00

Editorial

Avenilde Romo-Vázquez
Editora en jefe

María S. García González
Presidenta de la SOMIDEM

Humberto Gutiérrez Pulido
Universidad de Guadalajara

El rol de las revistas científicas es poco visibilizado por la sociedad, sin embargo su existencia es fundamental para garantizar el desarrollo social, cristalizado por la evolución de las disciplinas. La *Revista Educación Matemática* (REM) constituye un foro para exponer avances teóricos y metodológicos, análisis de prácticas educativas, funcionamiento de propuestas didácticas, primeros abordajes de problemáticas poco atendidas o emergentes y resultados de investigación. Y al mismo tiempo, es un espacio de formación continua para la comunidad de educadores matemáticos: investigadores consolidados, debutantes y en formación, profesores de matemáticas, diferentes actores del sistema educativo, que mediante los procesos de evaluación establecen diálogos, debates y reflexiones profundas, que desembocan en rutas que enriquecen las propuestas recibidas. En conjunto, sus números, ofrecen un panorama de las investigaciones desarrolladas en cada región, de las teorías que las sustentan y de los fenómenos didácticos que emergen en los diferentes niveles educativos y subsistemas de enseñanza, determinados por la sociedad y la pedagogía.

Mantener este proyecto editorial, autónomo e independiente, requiere de instituciones editoras como la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática SOMIDEM, A. C., que desde su creación en el año 2013, ha asegurado la publicación periódica de sus números y su acreditación ante diferentes índices de reconocido prestigio. Su actual Consejo Directivo ha

concretado un convenio de colaboración con la Universidad de Guadalajara (UdeG), una de las principales instituciones educativas en México, que cuenta con una red de 16 centros universitarios, el Sistema de Enseñanza Media Superior y el Sistema de Universidad Virtual, con sedes en las principales ciudades del estado de Jalisco, incidiendo positivamente en el desarrollo de la región occidente del país.. En la UdeG hay un interés especial en la enseñanza, aplicación e investigación en matemáticas, y en forma relevante en el Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) que tiene 18 programas de pregrado y 24 de posgrado, que conforman una población de 17 mil alumnos y poco más de 1 200 docentes. Uno de sus departamentos, el de Matemáticas, es responsable de la enseñanza de esta área en los 18 programas de pregrado y varios de posgrado, en especial la Licenciatura, las Maestrías en Enseñanza y en Ciencias en Matemáticas; así como el Doctorado en Ciencias en Matemáticas.

El CUCEI es el impulsor y responsable de la ejecución del convenio de la UdeG con la SOMIDEM en favor de la *REM*, realizado tanto por el interés especial que se tiene en la educación matemática, como por la importancia que tiene para el CUCEI y para la UdeG la investigación y su difusión, como lo ilustra el Programa de Revistas Científicas Universitarias, cuyo objetivo es fomentar la existencia de estas con altos estándares de calidad. A través de este programa, la UdeG apoya financieramente a las revistas para que mantengan su calidad y reconocimiento, y constituyan verdaderas alternativas para la difusión de resultados obtenidos por grupos de investigación de México e Iberoamérica, y con ello generar un mayor impacto en la sociedad y en la formación de recursos humanos de alto nivel.

La UdeG reconoce que una publicación como la *REM* es un patrimonio social y científico, resultado de la perseverancia y el esfuerzo de un sin número de académicos de la matemática educativa de México e Iberoamérica. Por ello ha convenido con la SOMIDEM compartir la responsabilidad de la edición de la *REM*, fortaleciendo así sus capacidades de gestión y de edición, conservando la calidad e independencia de sus procesos editoriales, y aspirando acrecentar su visibilidad e impacto. La sociedad SOMIDEM-UdeG abren en este 2021 nuevos horizontes para la *REM*, que se vislumbran en este número, diverso, interesante y promotor de nuestro quehacer disciplinar.

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN DOI: 10.24844/EM3302.01

Modelo de desarrollo del conocimiento matemático desde el Saber y Hacer del pueblo mapuche

Model of the development of mathematical knowledge from the Knowing and Doing of the Mapuche people

Anahí Huencho[1]
Eugenio Chandía[2]
Francisco Rojas[3]
Guillermo Williamson[4]

Resumen: Dos siglos de escuelas monoculturales en Chile repercuten en una enseñanza de las matemáticas estáticas y conductistas a la población en general, aun cuando lo matemático se sitúa histórica y culturalmente en lógicas de procedimientos orales y/o prácticos en diferentes grupos socioculturales invisibles a la escuela. Así, esta investigación busca interpretar y caracterizar el desarrollo del conocimiento matemático del mapuche desde prácticas situadas de y en comunidades, con el anhelo de proyectarlas al sistema educativo formal y así corroer el modelo establecido en Educación Matemática chilena, dando evidencia de un modelo de enseñanza y aprendizaje de la matemática propio del pueblo mapuche. A través de un análisis de carácter mixto,

Fecha de recepción: 02 de diciembre de 2019. **Fecha de aceptación:** 11 de febrero de 2021.

[1] Facultad de Educación, Universidad Católica de Temuco, Temuco, Chile. ahuencho@uct.cl, orcid.org/0000-0001-6114-5332

[2] Facultad de Educación, Universidad de Concepción, Concepción, Chile. echandia@udec.cl, orcid.org/0000-0003-2489-1226

[3] Facultad de Educación, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile. frojass@uc.cl, orcid.org/0000-0002-0328-8156

[4] Facultad de Educación, Universidad de la Frontera, Temuco, Chile. guillermo.williamson@ufrontera.cl, orcid.org/0000-0001-5313-342X

utilizando el Método Comparativo Constante y el ACL sobre entrevistas en profundidad con foco etnográfico en el marco de la Teoría Fundamentada, se constituye un Modelo Condicional/Consecuencial que caracteriza el desarrollo del conocimiento matemático mapuche desde dos focos: el Saber, centrado en la memoria oral transmitida en lengua mapuche (mapudungun) al resolver problemas matemáticos contextuales y el Hacer, centrado en elementos matemáticos implícitos en la acción desarrollada.

Palabras claves: *modelo educativo cultural, conocimiento matemático, matemática mapuche, práctica cultural situada.*

Abstract: Two centuries of monocultural schools in Chile have an impact on the teaching of static and behavioral mathematics to the general population, even though the mathematics is historically and culturally situated in the logic of oral and / or practical procedures in different sociocultural groups invisible to the school. Thus, this research seeks to interpret and characterize the development of mathematical knowledge of the Mapuche from practices located in and from communities, with the desire to project them to the formal educational system and thus corrode the model established in Chilean Mathematical Education, giving evidence of a model of teaching and learning of mathematics typical of the Mapuche people. Through a mixed character analysis, using the Constant Comparative Method and the Analysis of Latent Classes about in-depth interviews with an ethnographic focus in the framework of the Grounded Theory, a Conditional / Consequential Model that characterizes the development of mathematical knowledge is constituted Mapuche from two focuses: Knowledge, centered on the oral memory transmitted in the Mapuche language (mapudungun) when solving contextual mathematical problems and the Do, focusing on mathematical elements implicit in the action developed.

Keywords: *cultural educative model, mathematical knowledge, mapuche mathematics, situated cultural practice.*

1. ANTECEDENTES

Los procesos de escolarización de los pueblos originarios en Chile, y en particular del pueblo mapuche, se inician en el siglo XVIII y XIX, cuando diferentes credos religiosos crearon escuelas monoculturales basadas en la evangelización y castellanización, dejando ausentes de dichos procesos los saberes educativos de las distintas culturas (Flores y Azócar, 2006; Hanisch, 1974). Luego de dos siglos, la enseñanza monocultural transcendió en todos los niveles del sistema educativo chileno (Arias-Ortega *et al.*, 2018; OCDE, 2009; Del Pino y Ferrada, 2019; Luna *et al.*, 2018; Ortiz-Velosa y Arias-Ortega, 2019) perpetuando la cultura y los paradigmas de la enseñanza occidental, estableciéndolos como los únicos modelos válidos de enseñanza y aprendizaje (Ortiz-Velosa y Arias-Ortega, 2019; Quintriqueo *et al.*, 2015). Entre las causas de la perpetuidad del modelo monocultural se puede mencionar que los educadores, de cualquier nivel educativo, desconocen la sociedad y cultura donde están inmersos sus estudiantes, tanto por el confort del modelo monocultural, como también por la falta de categorías de conocimiento y habilidades posibles de ser incorporadas en el sistema educativo en todas sus dimensiones construidas de manera conjunta entre investigadores-educadores y comunidades indígenas chilenas (Luna *et al.*, 2018; Ortiz-Velosa y Arias-Ortega, 2019; Quintriqueo *et al.*, 2015). Esto ha traído como consecuencia funesta, el abandono progresivo del conocimiento de la cultura de los pueblos originarios en Chile (Noggler, 1982; Quintriqueo, 2010), y por ende su olvido y desaparición.

Lo anterior pone urgencia a la identificación del conocimiento, habilidades e interpretación de los modelos de formación inherentes de los pueblos originarios de Chile mediante procesos metodológicos rigurosos que incluyan a las comunidades como parte integral de las investigaciones (Peña-Cortés *et al.*, 2019). Para esto, se hace necesario comprender que un modelo se caracteriza como un sistema de interpretaciones y representaciones de situaciones específicas para objetivos establecidos, y que para lograr tales interpretaciones se debe usar un marco conceptual cognitivo que permita dar significado a lo percibido logrando representar el fenómeno. Este marco actúa como filtro, para seleccionar organizar, transformar o inferir patrones y regularidades bajo la superficie de lo que se quiere modelar (Lesh y Harel, 2003).

Por tanto, cualquier investigación que pretenda observar los modelos educativos del pueblo mapuche, debe reconocer que los resultados de su investigación podrían estar sesgados por la educación monocultural occidental que

han recibido los integrantes de las comunidades indígenas (Luna *et al.*, 2018; Quintriqueo *et al.*, 2015) o bien por quien trata de interpretarlos. Por ejemplo, Alarcón y colegas (2018) interpretan que la formación del pueblo mapuche considera cuestiones político-contingentes como pivotes para el aprendizaje de niños y niñas, lo que lleva a tensionar los modelos tradicionales de enseñanza con las actuales necesidades de cada comunidad. Pese a esto, los *kimche* (personas sabias) conservan una sólida identidad sociocultural asociada a sus costumbres y los conocimientos parentales (Quintriqueo *et al.*, 2015), resistiendo la incorporación de elementos de otras culturas (Alarcón *et al.*, 2018).

En Chile, en la década de 1990, se crea el Programa de Educación Intercultural Bilingüe (PEIB), con el objetivo de nivelar los resultados educativos de estudiantes indígenas a los estándares de calidad nacional. Y en el año 2009, se establecen los objetivos de aprendizaje para la creación del Sector Lengua Indígena (SLI) en Educación Básica, con el objetivo de fortalecer los conocimientos culturales y lingüísticos de cuatro pueblos originarios que mantienen vigente su lengua vernácula: aymara, mapuche, quechua y rapa nui. Se ha ido conformando un proceso de institucionalización de la PEIB en el Estado que, pleno de contradicciones, avances y retrocesos, ha permitido ir posicionándola en el marco del sistema educacional, de sus políticas y programas (Williamson, 2012), aunque con carencias en transversalidad curricular, participación y adecuación cultural. Pese a estas iniciativas, los resultados de investigación muestran un bajo impacto en el quiebre del modelo monocultural en el aula escolar (Peña-Cortés *et al.*, 2019). Aún más, los mismos niños y niñas mapuches expuestos a estas políticas educativas reconocen elementos que no pertenecen a su cultura (Peña-Cortés *et al.*, 2019), particularmente en relación con los modelos de transmisión de conocimiento. Esto se acentúa en educación matemática, ya que las políticas educativas evidencian un carácter compensatorio y no igualitario (Huencho *et al.*, 2017), sin mostrar evidencia de procesos matemáticos concretos asociados al pueblo mapuche (Huencho, 2015; S. Salas *et al.*, 2015). Esto hace poco atractivo el uso de los recursos educativos generados desde cada política educativa por parte de los docentes (Ibañez, 2010), quienes reconocen la necesidad de modelos de enseñanza específicos a las comunidades donde están insertos sus estudiantes, así como también reconocen su carencia para desarrollar en el aula el conocimiento matemático inherente a las prácticas del mapuche.

Como consecuencia directa del bajo impacto de las políticas educativas y de la carencia de recursos didácticos y conocimientos, los estudiantes indígenas resultan ser mal preparados tanto en el modelo monocultural como en el

intercultural (Canales y Webb, 2018; Undurraga, 2014). Se obtienen, por ejemplo, magros resultados en evaluaciones nacionales estandarizadas como el SIMCE[5] o la PSU[6] (Ortiz-Velosa y Arias-Ortega, 2019).

De lo anterior, esta investigación busca interpretar y caracterizar el desarrollo del conocimiento matemático del mapuche desde prácticas situadas *de* y *en* comunidades, con el anhelo de proyectarlas al sistema educativo formal y así corroer el modelo monocultural del sistema educativo chileno en el área de la Educación Matemática, dando evidencia de un modelo de enseñanza y aprendizaje de la matemática propio del pueblo mapuche. Así, el objetivo de este estudio es construir un Modelo Condicional/Consecuencial que caracterize el desarrollo del conocimiento matemático mapuche que emerge desde las prácticas y los relatos de las prácticas socioculturales propias del pueblo.

2. DESARROLLO DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO SITUADO

Los seres humanos, como agentes activos de su desarrollo cognitivo, construyen marcos contextuales y sistemas lógicos de acción, lo que da pie al desarrollo de un conocimiento sociocultural propio (D'Ambrosio, 2007; Fyhn *et al.*, 2016). Los sujetos, por medio de prácticas culturales tradicionales, interactúan con herramientas concretas y abstractas, complejas de evidenciar para un externo a la comunidad. El desarrollo de conocimiento sociocultural implica la transformación de las formas de percibir y comprender el mundo, a través de la interacción entre sujetos en un medio común (Rogoff, 2003). La producción científica en educación matemática es un campo en el que se disputan opciones conceptuales, metodológicas y políticas frente a la relación intercultural de saberes, que entre otros temas, atiende a la reinvención de prácticas de insubordinación creativa o subversión responsable (D'Ambrosio y Lopes, 2015) frente a la enseñanza monocultural, al curriculum que privilegia el enfoque cultural dominante y una pedagogía que subordina la diversidad a la homogeneidad cultural, lingüística y territorial del sistema educacional.

El desarrollo del conocimiento cultural mapuche se enmarca en la historia local, el territorio y el parentesco, los cuales configuran la educación familiar en el proceso de formarse como mapuche (Quintriqueo *et al.*, 2015; Quintriqueo y Torres,

[5] Sistema Nacional de Evaluación de resultados de aprendizaje del Ministerio de Educación de Chile.
[6] Prueba de Selección Universitaria de Chile.

2013). La interacción entre el que enseña y el que aprende con foco en cultivar y construir conocimiento mapuche, se sustenta en diversas prácticas culturales tradicionales donde se reflejan elementos conceptuales, procedimentales y valórico-actitudinales (Quilaqueo *et al.*, 2016; Quilaqueo y San Martín, 2008).

Desde una visión dinámica y constructivista de las matemáticas (Felbrich *et al.*, 2012; Kaiser y Maaß, 2007), las *prácticas matemáticas* tienen significado en sí mismas y se desarrollan dentro de un contexto en el que lo matemático se sitúa histórica y culturalmente en lógicas de procedimientos orales y/o prácticos en diferentes grupos socioculturales (Bishop, 1991; Sierpinska y Lerman, 1996). Así, la matemática que un observador pueda relacionar con un objeto, proceso o explicación, requiere de una interpretación situada para identificarla en las prácticas cotidianas de los diversos grupos socioculturales (Albertí, 2007). En el contexto mapuche, se ha podido identificar información matemática desde su composición lingüística y contexto de uso en el ámbito de los numerales y cuantificadores de tiempo, espacio, longitud y capacidad (Catrileo, 1985; Peña-Rincón y Hueitra-Santibañez, 2016; A. Salas, 1980). En el caso de los pueblos ágrafos, como ha sido el caso mapuche, la memoria oral es la clave que sustenta su desarrollo conceptual (Ong, 1987), lo que matemáticamente restringe las variedades de representaciones posibles.

3. MODELOS PARA LA COMPRENSIÓN DE FENÓMENOS

Los modelos se han usado tanto para describir la actividad matemática general o específica (Kuzniak, 2011; Van Hiele, 1959; Vygotsky, 1978), como para explicar, representar y comprender el proceso de enseñanza y aprendizaje observado en cualquier nivel educacional (Blömeke *et al.*, 2012; Brousseau, 1986; McDonald *et al.*, 2014; Shulman, 1987; Turner y Rowland, 2011).

Barbé y colegas (2005) plantean que el uso de modelos queda establecido por la realidad que el investigador quiere abordar. Así, cualquier modelo constituiría una propuesta metodológica de aproximación a la realidad diseñada por el investigador. Por tanto, el uso demostraría la comprensión de los componentes, patrones y relaciones de un fenómeno en relación con el objetivo de investigación, lo que equivaldría a un análisis del fenómeno; por ser planteado por un sujeto con intereses propios y marcos de disposiciones cognitivas y afectivas propias de su competencia profesional debería ser constantemente cuestionado y confrontado empíricamente (Blömeke *et al.*, 2012; Chevallard y Bosch, 2014).

De lo anterior, se puede establecer que los modelos son usados por las teorías principalmente para salir de su espacio conceptual al espacio empírico de desarrollo; los investigadores continuamente lo realizan al tratar de explicar, comprender o relacionar fenómenos con base en teorías pre-existentes o con el objetivo de crear nuevas, por ejemplo: al establecer modelos en la actividad matemática, comprender los modelos de los estudiantes, o representar el proceso de interacción en ambientes de aprendizaje (Lesh *et al.*, 2013). Debido a esto, se puede considerar que los modelos son principalmente usados para compartir con otros un fenómeno. Así, el modelado es inherentemente una empresa social y están involucradas formas significativas de generalización y transferibilidad (Lesh *et al.*, 2013).

Dentro del fenómeno cultural, también se observan modelos que tratan de abordarlo, interpretando y explicando la cultura de una comunidad, o bien, su transferencia. En este último caso, los modelos que tratan de explicar la transferencia cultural, se posicionan en marcos conceptuales sociales de aprendizaje (Miller *et al.*, 1966).

Entre los modelos de transferencia cultural, destaca el propuesto por Chau (1990), el cual consta de cuatro cuadrantes definidos por dos ejes. El eje horizontal, representa el continuo valor ideológico del etnocentrismo y el pluralismo, y el eje vertical define los objetivos de la intervención, organizados en un continuo, desde el cambio individual al cambio socioestructural. Así, el modelo no solo integra el conocimiento cultural a otro espacio de conocimiento, si no que distribuye la "transferencia o métodos de enseñanza" entre los objetivos micro y macrosociales que se quieren alcanzar con la combinación de los diferentes tipos de conocimiento. Lo anterior, permite establecer que los modelos culturales de enseñanza y aprendizaje deberían explorarse en las intersecciones de la cognición del instructor, las prácticas de enseñanza y los entornos de instrucción. Esta visión relacional sugiere que la implementación de los modelos culturales de enseñanza y aprendizaje implican necesariamente una transformación del entorno y las formas en que esos entornos se perciben como un apoyo o restricción de ciertas acciones. De hecho, es difícil imaginar la evolución de estos sin la coevolución de los entornos en los que se construyen y se representan (Ferrare y Hora, 2014).

Los modelos explicativos de la cultura de una comunidad, también son diversos dada las diferentes definiciones de cultura, así como de investigadores que la tratan de explicar. Sin embargo, se distribuyen en una dimensión que tiene en un extremo teorías de aprendizaje y enseñanza y en el otro extremo

datos empíricos de las comunidades, como lo explican Ferrare y Hora en su revisión de este tipo de modelos (2014). Los modelos teóricos culturales se han usado para comprender como individuos internalizan, organizan y promueven el conocimiento cultural. Por otra parte, los modelos empíricos se han usado para describir como las personas, eventos y objetos se ajustan en conjunto (Ferrare y Hora, 2014). De esta forma los modelos culturales consisten en información compartida que es internalizada a través de patrones de socialización entre y en grupos. En esta línea, antropólogos cognitivos definen los modelos culturales como teorías simplificadas sobre relaciones entre las personas, las prácticas y los eventos que se desarrollan a través de la activación repetida de las redes neuronales en relación con tareas y situaciones específicas (Ferrare y Hora, 2014).

De lo anterior, los modelos que tratan de explicar una cultura o la transferencia de ella son un ejemplo empírico y específico de la identificación de condiciones y consecuencias a niveles micro y macro de acciones e interacciones de los sujetos que la componen para el establecimiento de un núcleo central como representación y comprensión de los mismos en su cultura (Restrepo-Ochoa, 2013; Strauss y Corbin, 2002).

4. METODOLOGÍA

Dado el objetivo del estudio se considera un diseño cualitativo observacional. La técnica principal corresponde a entrevistas en profundidad con foco etnográfico dentro del marco de la Teoría Fundamentada. Se cumplieron los protocolos éticos exigidos por las universidades para esta modalidad de investigación, así como se respetaron los protocolos de conversación con las comunidades y sujetos participantes. El análisis de los datos fue de carácter mixto, utilizando el Método Comparativo Constante (Strauss y Corbin, 2002) y el ACL (Magidson y Vermunt, 2004).

En la investigación participaron 51 personas pertenecientes al pueblo mapuche (28 mujeres y 23 hombres), con edades entre 30 y 94 años. De ellos, 35 tienen como lengua materna el *mapudungun* (lengua mapuche), y el resto son hablantes o entienden la lengua. Se trabajó con las comunidades mapuche de *Peuman Mapu*, *Lladquihue Norte* y *Lladquihue Sur*, en las ciudades de Lautaro y Temuco, Región de la Araucanía, Chile. En cada comunidad, un integrante de confianza de esta seleccionó a sus representantes y guió la gestión de cada entrevista.

La entrevista en profundidad con enfoque etnográfico contempló lo siguiente: a) Historia de vida; b) Actividad con matemática implícita que realizaban o realizan; y c) Quién le enseñó y cómo lo aprendió. Las entrevistas se realizaron en el hogar de cada participante, en un transcurso de 10 meses. Cada entrevista fue videograbada, con un tiempo promedio de 2,5 horas de duración. La flexibilidad de la entrevista fue necesaria para adaptarse al perfil de los informantes y contextos en que ocurría el trabajo de campo.

Dentro de la Teoría Fundamentada, el procedimiento de análisis utilizado puede ser de origen cualitativo y/o cuantitativo, mientras no se pierda el foco dentro de la Teoría (Verd y Lozares, 2016). Para esta investigación se utilizó, por una parte, el Método Comparativo Constante con tal de organizar la información y establecer relaciones sustantivas y, por otra, el Análisis de Clases Latentes (ACL) (Magidson y Vermunt, 2004) para determinar un modelo que sea condicionado a la información que entrega cada individuo, tomando en cuenta la diversidad de experiencias de los participantes. Haciendo uso del registro de audio, se procedió por medio de ATLAS.ti a indexar los segmentos de las 11 primeras entrevistas para luego proceder a codificarlas con carga teórica, estableciendo así los indicadores de investigación. El rango escogido respondió a la necesidad de cubrir un margen aceptable de saturación que según Marshall *et al.*, (2013) disminuye en 75% la aparición de nuevos indicadores cuando el rango de entrevistas va de 7 a 12.

Con un marco significativo de indicadores, se prosiguió a establecer el peso conceptual de las intervenciones según la cantidad de características mencionadas en las entrevistas asociadas a un concepto o categoría, variando entre (1) una, (2) dos y (3) tres o más características. Finalmente se procede a indexar y establecer el peso conceptual de las restantes entrevistas, estableciendo relaciones mediante herramientas para importar códigos, comunes vecinos, co-ocurrencia o tablas de co-ocurrencia, y así determinar grupos de indicadores denominados "dimensiones" y conceptualizar sus relaciones internas y externas (Miles *et al.*, 2014).

Codificadas las entrevistas se procedió a establecer un Modelo Condicional/Consecuencial (Strauss y Corbin, 2002), usando el ACL para identificar asociaciones entre participantes que comparten características o elementos similares (Magidson y Vermunt, 2004; Rost, 2004). El ACL realiza clasificaciones basado en probabilidades, siendo los participantes clasificados en un perfil según la probabilidad estimada de pertenecer a él. De esta forma, los indicadores pueden ser agrupados en función de la distribución de presencia o ausencia y sus

correspondientes niveles de caracterización, generando relaciones entre los participantes y, por ende, entre las *clases latentes* que los diferencian y los agrupan en perfiles. El análisis fue hecho con la función "poLCA" del programa R-project (Finch y French, 2015). El número de clases se determinó con base en el criterio de información Akaike y Bayesiana (AIC y BIC), considerando que el menor valor en ambos criterios indica un modelo de clases latentes mejor ajustado (Rost, 2004).

Para caracterizar el Modelo y sus clases latentes, se procedió a seleccionar indicadores representativos de cada clase latente según el grupo de participantes que la componen en dos formas diferentes: a) indicadores con probabilidad condicional de 0.5 o más, y b) comparación entre las probabilidades condicionales de cada indicador de cada clase latente. Apartados los indicadores, se evalúa la estructura lógica que conceptualiza cada clase latente dentro del Modelo Condicional/Consecuencial. La información organizada se visualiza de forma compacta y accesible por medio de redes conceptuales/relacionales (Miles *et al.*, 2014).

5. RESULTADOS

5.1 Análisis descriptivo

Desde el análisis de las entrevistas, el Desarrollo del Conocimiento Matemático Mapuche (DCMM) se descompone analíticamente en dos dimensiones, el Conocimiento Matemático Mapuche (CMM) y el Desarrollo del Conocimiento Mapuche (DCM), ambos caracterizados por indicadores que desagregan sus respectivos componentes conceptuales (ver tabla 1).

Tabla 1. Dimensiones de clasificación del DCMM

Dimensiones	Indicadores
Conocimiento Matemático Mapuche (CMM)	<u>Actividades</u>: involucran el conocimiento ancestral y matemático de forma implícita en actividades cotidianas del mapuche. • **Cuidar animales** (AANI): proporcionar alimento y espacio físico a animales. • **Tejer** (ATEJ): dividido en tejer a telar con lana de oveja o cestos con fibra vegetal. • **Construir** (ACON): relacionada con el uso de madera, fibra vegetal y herramientas. • **Sembrar** (ASEM): asociada a la semilla y su técnica de incorporación en la tierra. • **Cocinar** (ACOC): manipulación de víveres variados para proveer de alimento. <u>Objetos matemáticos</u>: descripción de objetos o elementos que se emplean para determinar cierta estructura matemática en diferentes actividades. • **Longitud** (OLON): unidades de medidas no estandarizados como pasos, varas, etc. • **Tiempo** (OTIE): unidades de tiempo asociados a la ubicación de astros en el cielo. • **Capacidad** (OCAP): capacidad volumétrica no convencional, cestos o vasijas. • **Cuantificador** (OCUA): representar elementos a través de nudos, palos o marcas. <u>Acciones matemáticas</u>: explicitan un conjunto de tareas propias de una práctica matemática que proporcionan después de su ejecución matemática. • **Medir** (AcMED): aplicar un patrón de longitud, tiempo o capacidad, que se repite de manera uniforme y constante, obteniendo una cuantificación oral de la medida. • **Contar** (AcCON): aplicar una estrategia de enumeración que permita obtener una cuantificación, comunicándola por medio de un sistema numérico propio y oral. • **Representar** (AcREP): aplicar un medio de representación de cantidades, que permita visualizar la descomposición de la cantidad en unidades y la base del sistema numérico. • **Comparar** (AcCOM): aplicar una relación aditiva (diferencia) y multiplicativa (razón) en el proceso de cuantificación, comunicando oralmente o por medio de representaciones.

Desarrollo del Conocimiento Mapuche (DCM)	**Fase de inicio:** elementos que dan inicio a la transmisión de conocimiento para su desarrollo. • **Principio** (IPRI): condiciones de género, edad y contexto del conocimiento. • **Memoria** (IMEM): "saber sobre algo" o "saber hacer algo". • **Observación y/o escucha** (IOE): oralidad del relato u observación de la práctica. • **Lengua** (ILEN): el *mapudungun* como lengua vehicular del conocimiento. • **Lengua y matemática** (ILMAT): vocablos específicos de la matemática del pueblo. **Fase de proceso:** elementos para incorporar de forma permanente las enseñanzas de los otros. • **Práctica** (PPRA): el receptor ejecuta la práctica del relato o de la acción. • **Modela-Interviene** (PMINT): el modelador interviene, el efecto, constante apoyo. • **Modela-Impone** (PMIMP): el modelador impone, el efecto, obediencia. • **Modela-Ausente** (PMAUS): el modelador se ausenta, el efecto, autoaprendizaje. • **Argumentos** (PARG): set de argumentos que justifican procesos. • **Preguntas** (PPRE): set de interrogantes que se generan en la práctica. • **Análisis** (PANA): procesos de reflexión sobre acciones desarrolladas. • **Error** (PERR): evidencia de un proceso mal ejecutado, punto clave del desarrollo. • **Guía auto-apoyo** (PGUI): confección del receptor para beneficio individual, no se transmite, son evidencia de apropiarse del conocimiento y desarrollarlo. **Fase de evaluación:** valoración del *Proceso de Desarrollo*, se realiza una vez concluido este. • **Valoriza** (EVAL): se valoriza lo realizado por un agente conocedor del *Proceso*. • **Comunica** (ECOM): la valoración da sustento para comunicar el conocimiento adquirido, refuerza la memoria del sabio y nutre de elementos al nuevo proceso que inicia.

Al determinar la frecuencia, se observa que aquellos indicadores asociados a CMM presentan una frecuencia absoluta acumulada menor a la mitad de la frecuencia absoluta acumulada de los indicadores asociados a DCM. Esto se debe a que cada entrevistado posee la habilidad para hacer o recordar información, que no necesariamente atiende a los indicadores emergentes para la dimensión CMM. En cambio, y como se observa en la figura 1, los indicadores

asociados a la categoría DCM fueron observados en todas las entrevistas, independiente de la actividad de base, pero con claras diferencias en las rutas consideradas para el inicio, proceso y evaluación del desarrollo experimentado.

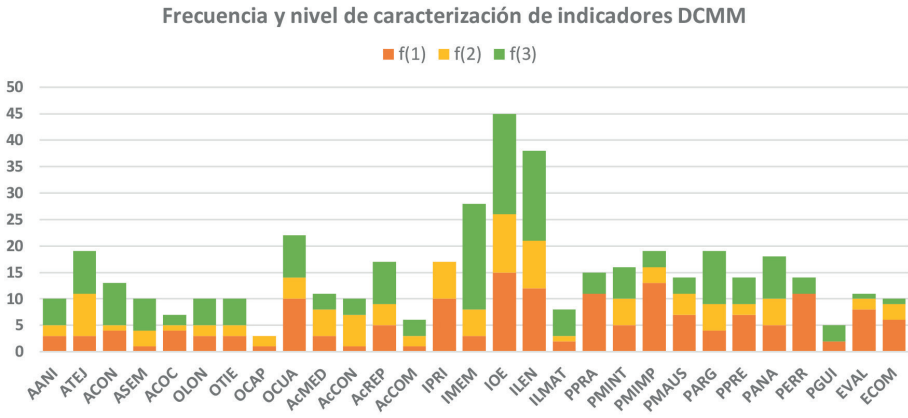


Figura 1. Frecuencia absoluta de indicadores DCMM.
Nota: f(1) una característica; f(2) dos características; f(3) tres o más características diferentes

De los 51 participantes, 45 mencionan la observación-escucha de una práctica o relato (IOE) como fundamental al desarrollar el conocimiento en el pueblo. Este indicador, IOE, es caracterizado de manera profunda por 19 de los 45 participantes. Por otra parte, el indicador OCAP es el que presenta menor frecuencia, siendo mencionado a nivel superficial por solo 3 entrevistados.

5.2. Análisis relacional dentro de cada dimensión

5.2.1. Conocimiento Matemático Mapuche (CMM)

En la figura 2 se evidencian las relaciones entre las destrezas reflejadas a través de actividades cotidianas que poseen matemática implícita y la forma de explicitar estos elementos a través de objetos y acciones matemáticas emergentes. Así, desde las actividades que contienen objetos matemáticos como cuidar animales (AANI), tejer (ATEJ), construir (ACON), sembrar (ASEM) y cocinar (ACOC),

se desprenden las acciones matemáticas involucradas como medir (AcMED), contar (AcCON), representar (AcREP) y comparar (AcCOM) en la manipulación conceptual de los objetos matemáticos de longitud (OLON), tiempo (OTIE), capacidad (OCAP), cuantificador (OCUA).

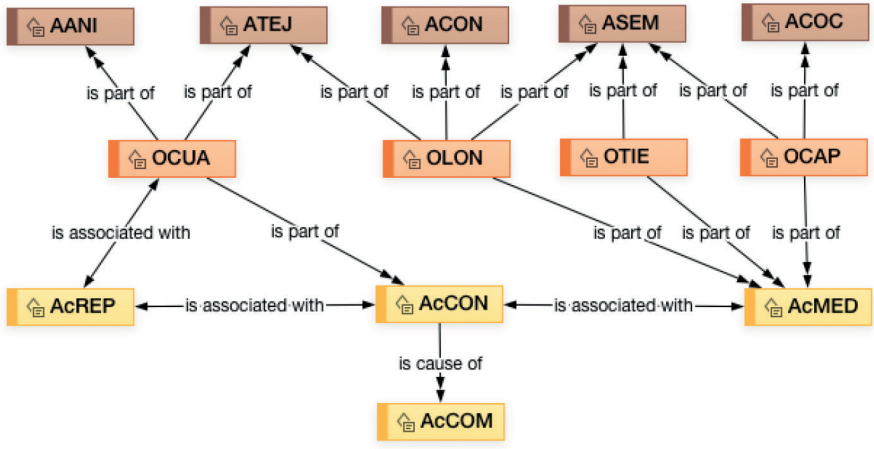


Figura 2. Relación de los indicadores dentro de la dimensión *CMM*.

De las actividades relativas al cuidado de animales (AANI) y a tejer (ATEJ), se desprende el uso de objetos cuantificadores (OCUA) por medio de la acción de representar (AcREP) asociado al conteo (AcCON) en lengua mapuche. Ahora, una cuestión interesante es que en las actividades de tejer, construir, sembrar y cocinar el proceso de medir, se observaron los objetos de longitud (OLON), tiempo (OTIE) y capacidad para cuantificar y dejar registro de esto (OCUA), principalmente por la acción de medir (AcMED). Esto se debe a que medir se asocia al proceso de contar, es decir cuantificar la medida, y este con el proceso de representar dada la necesidad de registrar la información cuantificada. Por último, la acción de comparar (AcCOM) se asocia a la acción de contar (AcCON) de los elementos, originando el objeto matemático de cuantificar (OCUA) en las actividades de construir, sembrar, y cocinar. Por ejemplo, la siguiente cita evidencia que, en la actividad de siembra, se mide (AcMED) la capacidad (OCAP) de los sacos cuantificándolos (OCUA + AcCON). Por otra parte, se observa la representación (AcREP) de estas cantidades (OCUA) en lana.

> Una siembra buena de lupino es la que da 40 sacos por 200 kilos de semilla, eso es para 1 hectárea (...), uno cosecha y guarda en sacos de 80 kilos cada uno. Si quiere más, puede sembrar hectárea y media, pero necesita 300 kilos de lupino, casi 4 sacos de esos. En un año bueno debiera darle 60 sacos de cosecha. (...) mi abuelo anotaba todo lo que había cosechado en lanas de diferentes colores con nudos y se lo pasaba a mi abuela. Ella repartía, cambiaba por otra cosa, el trueque, y cuidaba que alcanzara. [E23]

5.2.2. Desarrollo del Conocimiento del Pueblo Mapuche (DCM)

En las relaciones de los indicadores del DCM se caracterizan los elementos asociados a cada una de las fases de inicio, proceso y evaluación (figura 3). La fase de inicio del DCM enfatiza las condiciones y formas en las que el conocimiento mapuche se expresa. Se centra en la observación-escucha (IOE) que genera una persona con amplia capacidad de recordar hechos (IMEM) o replicar procesos apoyado del *mapudungun*. Así, desde el *mapudungun* (ILEN), se incorpora un conjunto de vocablos asociados a objetos y acciones matemáticas (ILMAT) dentro de una actividad que se inicia dependiendo de la edad, el género y la necesidad que impulsa la enseñanza (IPRI).

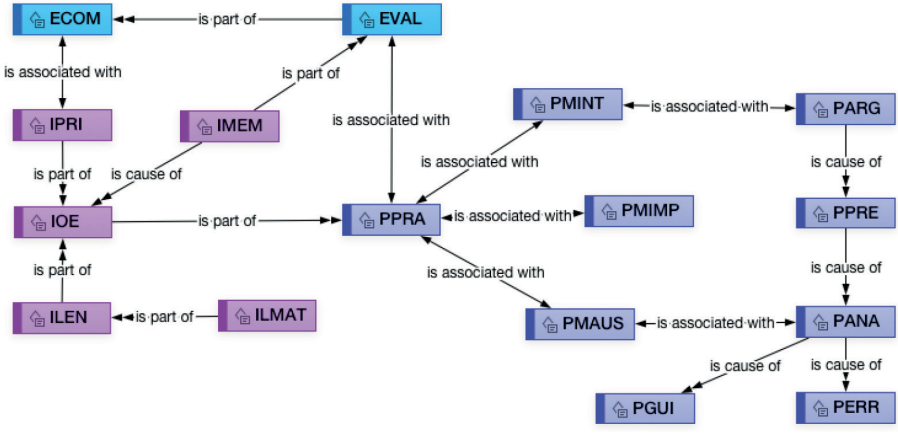


Figura 3. Relación de los indicadores dentro de la dimensión DCM.

En la fase de proceso del DCM se observa que la principal forma de transferencia es el sujeto modelador. Él es quien, en sus formas de mediar el conocimiento y en sus respectivas consecuencias sobre el agente que inicia su adquisición y desarrollo, determina tres rutas de desenlace diferenciadas. En la primera, el agente que modela interviene (PMINT) en el proceso de reproducir la acción desde el error (PERR), analiza (PANA), cuestiona la práctica (PPRE), argumenta (PARG) y retroalimenta por medio de explicaciones. En la segunda, el modelador impone (PMIMP) reglas, formas, acciones, esperando la obediencia del ejecutor. La última ruta se genera desde un proceso autónomo en donde el modelador natural se ausenta (PMAUS) y la adquisición del conocimiento depende del error (PERR) y su auto-análisis (PANA). El proceso puede generar la confección de una guía de apoyo (PGUI) para el auto-modelamiento en futuras acciones. Finalmente, en la fase de evaluación del DCM, se valida (EVAL) y potencia conceptualmente el ciclo del desarrollo. Esto lo realiza un agente con amplio conocimiento en la materia, interno o externo al proceso, generando una comunicación que nutre el conocimiento y contribuye a iniciar nuevos ciclos de enseñanza (ECOM).

> Mi papá me enseñó a construir *kultrun* [tambor mapuche], iuf! Las herramientas de antes no son como las de ahora, el papá me paso mi trozo de madera y me dijo que lo imitara, él me explicó cómo debía hacer, yo pensé y me hice mi propia ayuda memoria de todo lo que hice mal. Un día mi abuelo me alabó mi *kultrun*, ahora ya sabía hacer. [E18]

En la cita se evidencia que el entrevistado se sometió a un modelamiento (PMINT) que fue intervenido por los consejos y explicaciones del padre, quién le plantea que debe "imitar" (IOE). Luego se observa un proceso de reflexión de las acciones desarrolladas (PANA), considerando aquellas cuestiones mal ejecutadas (PERR), estableciendo por último una guía de autoayuda (PGUI). Por último, se observa la valorización del proceso de desarrollo por parte del abuelo (EVAL).

5.3. Modelo Condicional/Consecuencial para DCMM

En la última etapa de análisis y con el objetivo de levantar información para construir un Modelo Condicional/Consecuencial, se procedió a realizar un ACL para indagar en los patrones de respuesta y generar modelos acordes a las

particularidades de los entrevistados identificando posibles perfiles comunes entre ellos. De esta manera, se estimaron 2 modelos con dos y tres clases latentes, de los cuales el de dos clases latentes obtuvo el mejor ajuste (AIC = 2451.98; BIC = 2790.05). Así, se procedió a conceptualizar el DCMM desde el modelo con dos clases latentes. La tabla 2 deja en evidencia las probabilidades condicionales por cada indicador según su clase latente.

Tabla 2. Distribución de probabilidades por indicador condicionado a estar en C1 o C2 y por estar caracterizado por 1, 2 o 3 elementos.

	Indicadores - I	clase latente 1(C1) DCMM *desde el Saber*					clase latente 2 (C2) DCMM *desde el Hacer*		
Conocimiento Matemático Mapuche (CMM)	Actividades								
	AANI	.17	.00	.08	.08	.15	.08	.03	.05
	ATEJ	.08	.00	.08	.00	**.41**	.08	.18	.15
	ACON	.00	.00	.00	.00	.26	.10	.03	.13
	ASEM	.08	.00	.00	.08	.18	.03	.08	.08
	ACOC	.00	.00	.00	.00	.15	.10	.03	.03
	Objetos								
	OLON	.17	.00	.08	.08	.20	.08	.03	.10
	OTIE	.25	.00	.00	.25	.18	.08	.05	.05
	OCAP	.00	.00	.00	.00	.08	.03	.05	.00
	OCUA	**.70**	.06	.05	**.59**	.21	.09	.09	.03
	Acciones								
	AcMED	.33	.08	.25	.00	.18	.05	.05	.08
	AcCON	.17	.00	.17	.00	.21	.03	.10	.08
	AcREP	**.75**	.08	.08	**.59**	.21	.10	.08	.03
	AcPCOM	.17	.08	.00	.08	.10	.00	.05	.05

Desarrollo del Conocimiento Mapuche (DCM)	Inicio							
	IPRI	.08	.00	.08	.00	**.41**	.26	.15
	IMEM	**.50**	.05	.13	.31	.28	.13	.13
	IOE	**.83**	.00	.00	**.83**	**.90**	.38	.28
	ILEN	**1.00**	.08	.08	**.83**	**.67**	.28	.20
	ILMAT	**.42**	.00	.00	**.42**	.08	.05	.03
	Proceso							
	PPRA	.17	.17	.00	.00	.33	.23	.00
	PMINT	**.41**	.00	.00	**.41**	.28	.13	.13
	PMIMP	.08	.00	.00	.08	**.46**	.33	.08
	PMAUS	.08	.00	.00	.08	.33	.18	.10
	PARG	**.50**	.00	.08	**.42**	.33	.10	.10
	PPRE	**.59**	.08	.17	.33	.18	.15	.00
	PANA	.33	.00	.08	.25	.36	.13	.10
	PERR	.33	.25	.00	.08	.26	.21	.00
	PGUI	.08	.00	.00	.08	.10	.05	.00
	Evaluación							
	EVAL	.08	.08	.00	.00	.26	.18	.05
	ECOM	.08	.00	.00	.08	.23	.15	.08

Nota:= *P (I/C1, C_1))* = probabilidad de presentar el indicador *I* condicionado a estar en la clase latente 1 (*C1*) y presentar solo una característica (C_1) para el concepto o categoría establecida en el indicador. *P (I/C1, C_2))* = probabilidad de presentar el indicador *I* condicionado a estar en la clase latente 1 (*C1*) y presentar dos características (C_2) para el concepto o categoría establecida en el indicador. *P (I/C1, C_3))* = probabilidad de presentar el indicador *I* condicionado a estar en la clase latente 1 (*C1*) y presentar tres o más características (C_3) para el concepto o categoría establecida en el indicador. *P (I/C2, C_1))* = probabilidad de presentar el indicador *I* condicionado a estar en la clase latente 2 (*C2*) y presentar solo una característica (C_1) para el concepto o categoría establecida en el indicador. *P (I/C2, C_2))* = probabilidad de presentar el indicador *I* condicionado a estar en la clase latente 2 (*C2*) y presentar dos características (C_2) para el concepto o categoría establecida en el indicador. *P (I/C2, C_3))*= probabilidad de presentar el indicador *I* condicionado a estar en la clase latente 2 (*C2*) y presentar tres o más características (C_3) para el concepto o categoría establecida en el indicador. En negrita las probabilidades condicionales mayores a .4.

La primera clase latente, denominada DCMM desde el Saber, se conformó por 23% del total de entrevistados, principalmente por la experiencia de mujeres de entre 60 y 80 años, hablantes de *mapudungun* de primera lengua y un alto nivel de educación formal. Este grupo se caracteriza por personas que poseen un profundo conocimiento del pueblo, lo que se traduce en altas probabilidades condicionadas con tres características.

Por lo general, este grupo de personas ha desarrollado actividades cotidianas del pueblo en un periodo breve de su niñez basado en la práctica o los relatos de otros, en el contexto de la crianza con abuelas no escolarizadas y hablantes de *mapudungun*. Por ello, esta clase latente se ha denominado 'Desarrollo de Conocimiento Matemático Mapuche (DCMM) desde el Saber'.

La figura 4 sintetiza la C1 y sustenta el DCMM desde el Saber.

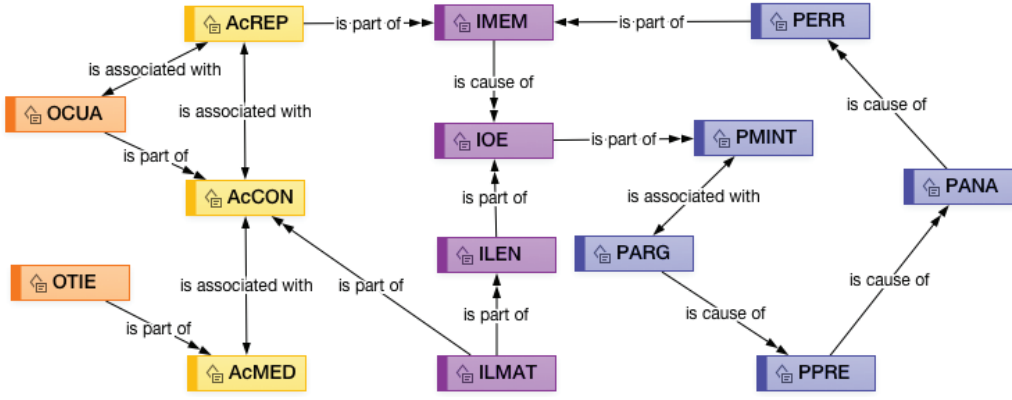


Figura 4. DCMM desde el saber.

El DCMM desde el Saber se sustenta en la memoria colectiva de gente conocedora de procesos y objetos relevantes para el pueblo que, desde la acción o el relato de la acción (P(IMEM/C1, C_3)=.31; P(IOE/C1, C_3)=.83), evidencian utilizar lógicas de razonamiento matemático que se acompañan del *mapudungun* (P(ILEN/C1, C_3)=.83; P(ILMAT/C1, C_3)=.42) y sus vocablos del sistema numérico, unidades de medidas no estandarizadas, fracciones, operaciones, entre otros.

La C1 se articula bajo el modelamiento de quien posee el conocimiento y se centra en la especificidad del proceso que regula el concepto (P(PMINT/C1, C_3)=.41;

P(PARG/C1, C_3)=.42; P(PPRE/C1, C_3)=.33). Así, la acción de medir (P(AcMED/C1, C_3)=.25), contar (P(AcCON/C1, C_3)=.17) y representar (P(AcREP/C1, C_3)=.59) asociado a los objetos de tiempo (P(OTIE/C1, C_3)=.25) y cuantificación (P(OCUA/C1, C_3)=.59) se desarrollan desde la visualización y determinación de patrones de uso, en lógicas contextuales específicas pero flexibles a las demandas del usuario. Cada paso a seguir dentro del proceso y la conceptualización del mismo se nutre y desarrolla a partir del error comparativo (P(PERR/C1, C_1)=.25), esto es, el conocedor del proceso o usuario del objeto matemático evidencia desconformidad en el producto, analiza los conceptos dentro del proceso (P(PANA/C1, C_3)=.25) y genera preguntas (P(PPRE/C1, C_3)=.33) y argumentaciones (P(PARG/C1, C_3)=.42) que permiten, fortalecer y desarrollar el razonamiento matemático en curso.

La siguiente cita evidencia alguna de estas relaciones:

> Yo observaba a mis abuelas, ellas me criaron. No hablaban castellano. Poseían sabiduría asociada a las costumbres del pueblo. (...) ellas salían todos los días con cuatro lanas de diferente color, trenzadas en un extremo y amarradas a su cintura, era para contabilizar sus animales. (...) cuando llegaban a la *ruka* [casa], comparaban sus registros y sumaban, todos los números en *mapudungun* y con cálculos mentales o sobre los *püron* [nudos] (...) lo que más recuerdo eran sus discusiones cuando no coincidían, allí ellas debían hacer memoria y recrear el proceso hasta que ambas quedaban conformes. Fui a la escuela internada, nunca viví el proceso. [E50]

Se observa que desde el cuidado de animales (AANI), el entrevistado recuerda (IMEM) haber escuchado (IOE) la lengua materna, el *mapudungun*, de sus abuelos (ILEN). De esta manera, el DCMM desde el Saber materializa el desarrollo del conocimiento matemático del pueblo mapuche centrando en el que conoce los procesos-objetos y modela el desarrollo del conocimiento con foco en la memoria oral del *mapudungun* y el error, el cual propicia la reevaluación, fortalecimiento y re-conceptualización del conocimiento.

Por otra parte, la C2, denominada DCMM desde el Hacer se conforma por 77% del total de entrevistados, principalmente por un grupo de hombres y mujeres de entre 30 a 60 años del sector rural, hablantes de *mapudungun* a nivel heterogéneo y educación formal de enseñanza básica o media incompleta monocultural. Esta clase latente se caracteriza por personas reconocidas como referentes expertos dentro de la actividad práctica que desarrollan, aunque entregan escasas características de los conceptos asociados a sus indicadores. Por

ello, la C2 es denominada 'Desarrollo de Conocimiento Matemático Mapuche (DCMM) desde el Hacer'.

La figura 5 sintetiza la C2 y sustenta el DCMM desde el Hacer.

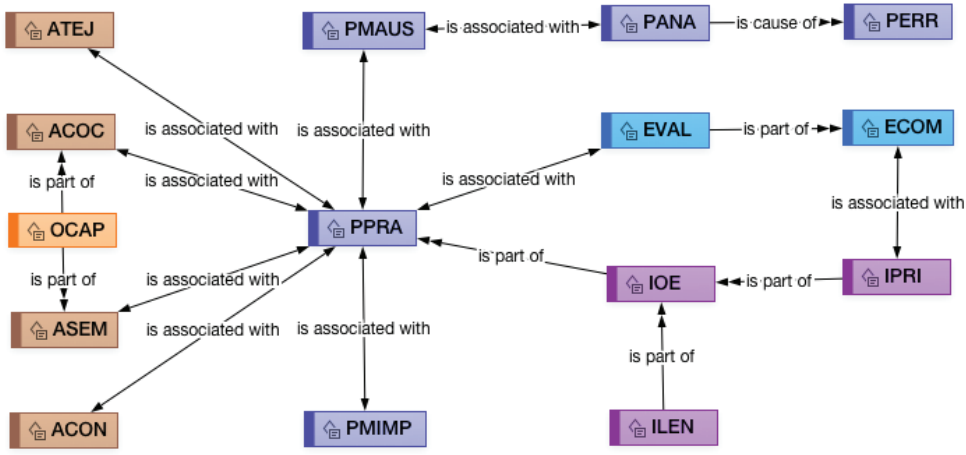


Figura 5. DCMM desde el hacer.

El DCMM desde el Hacer, se sustenta en la notable ejecución de prácticas asociadas a actividades que poseen matemática implícita en su proceso, como lo son tejer (P(ATEJ/C2)=.41), cocinar (P(ACOC/C2)=.15), sembrar (P(ASEM/C2)=.18) y construir (P(ACON/C2)=.26), y a objetos físicos que poseen capacidad volumétrica no convencional relacionado principalmente con la siembra y la cocina la cual se debe medir (P(AcMED/C2)=.18) y cuantificar (P(AcCON/C2)=.21). Así, a través de la observación-escucha de la práctica (P(IOE/C2)=.90), bajo los principios que sustentan su acción y el uso de lexemas de la lengua asociados a artefactos o procesos específicos del mapuche (P(ILEN/C2)=.67), el conocimiento se moviliza desde quien lo porta (P(PMIMP/C2)=.46) imponiendo su conocimiento, hasta quien lo adquiere en un continuo y colaborativo desarrollo desde la acción (P(PMINT/C2)=.46; P(PPRE/C2)=.33).

La movilización del conocimiento se articula desde la imposición de tareas concretas y aisladas dentro de la totalidad de la actividad (P(PMIMP/C2)=.46) o la ausencia del modelador de la práctica en el momento en que se inicie el proceso (P(PMAUS/C2)=.33). Aquí, el análisis del error (P(PANA/C2)=.26) junto con la actualización de objetos que intervienen en la actividad fomenta el

auto-análisis (P(PANA/C2)=.36) y la búsqueda de estrategias personales para evitar confusiones futuras, fortalecen el conocimiento matemático implícito en la actividad, sus lógicas de construcción y uso de artefactos. Finalmente, la evaluación de expertos (P(EVAL/C2)=.26), posibilita la sociabilización de la actividad por medio de la comunicación del producto evaluado (P(ECOM/C2)=.26). La actividad se conceptualiza en cada fase del proceso, y se fortalece y desarrolla en la comunicación, tal como se observa en las siguientes citas:

> Veía a mi mamá tejer a telar (...) ella tejía frazadas, mantas, fajas. Primero me mandaban a ayudar en el lavado de la lana, luego a buscar raíces, para teñir la lana. Me decía qué raíces debía buscar, no sabía por qué, ni qué color daba, inada! Cuando ya era más grande me permitía acompañarla mientras tejía, pero era solo para acercarle cosas, yo no tejía, ni hablaba para no desconcentrarla. [E12]
>
> Aprendí a sembrar solo, mi papá no estaba y mi abuela no podía hacerlo, había que comer así que había que sembrar. No fui más a la escuela y me puse a cultivar la tierra. Mi abuela decía, isiga no más hijo, va a salir bien! La primera siembra me salió toda despareja, pero en la siguiente resolví el problema, solo hice memoria de cómo lo había hecho y pensé una forma para que la semilla no se me amontonara. [E1]

Se observa el modelamiento impuesto (PMIMP) en actividades como el tejido (ATEJ) y la siembra (ASEM), así como la evaluación (EVAL) y el análisis (PANA) de los errores (PERR). De esta manera, el DCMM desde el Hacer materializa el desarrollo del conocimiento matemático del pueblo mapuche centrando en la acción ejecutada la práctica ubicada dentro de un bien comunitario. El desarrollo del conocimiento se modela desde la actualización de insumos para cumplir la tarea, desde donde los procesos antiguos se contrastan con los modernos y se establecen relaciones con matemática implícita en cada una de sus fases.

6. DISCUSIÓN

Para establecer el Modelo Condicional/Consecuencial denominado "Desarrollo del Conocimiento Matemático Mapuche (DCMM)", se interpretó lo percibido (Lesh y Harel, 2003) en las entrevistas sobre actividades cotidianas y su forma de transmisión del conocimiento dentro del pueblo mapuche, usando el marco de disposiciones del dominio cognitivo de la competencia profesional del investigador referido al conocimiento matemático (Blömeke *et al.*, 2012) y las redes

conceptuales/relaciones del modelo de análisis Condicional/Consecuencial (Miles *et al.*, 2014) que surgen a partir del ACL (Magidson y Vermunt, 2004).

El Modelo Condicional/Consecuencial DCMM, es coherente con el desarrollo del conocimiento humano (Rogoff, 2003). Sus clases latentes DCMM desde el Saber y DCMM desde el Hacer logran caracterizar el desarrollo del conocimiento matemático del mapuche, desde la interpretación de saberes y prácticas situadas (Albertí, 2007), en el marco de procesos educativos no formales mapuche en entornos familiares (Alarcón *et al.*, 2018; Peña-Cortés *et al.*, 2019), dependientes del contexto socio-histórico del grupo que lo desarrolla (Quintriqueo *et al.*, 2015).

El análisis descriptivo de esta investigación organiza la totalidad de indicadores emergentes en dos dimensiones denominadas Conocimiento Matemático Mapuche (CMM) y Desarrollo del Conocimiento Mapuche (DCM). Así, el CMM se despliega desde la definición de actividades cotidianas como sembrar, tejer, cocinar, construir y cuidar animales, que contemplan una matemática en principio no observada por la comunidad de forma, dado su cotidianeidad, pero implícita e identificable para un sujeto alfabetizado matemáticamente que tiene intención de diferenciarla. En esta matemática se caracterizan –como ya hemos señalado– dos categorías: acciones y objetos. Las acciones explicitan un conjunto de tareas propias de una práctica matemática, que en cantidad y descripción constituyen un marco estructurado y extenso en componentes conceptuales que integran y amplían en su definición el uso de numerales y cuantificadores en contexto del pueblo mapuche (Catrileo, 1985; Peña-Rincón y Hueitra-Santibañez, 2016; A. Salas, 1980), lo que se estructura en objetos matemáticos.

Por otro lado, el DCM distingue tres marcos de indicadores centrados en el inicio, proceso y evaluación de la transmisión y desarrollo de conocimientos mapuche arraigado en las actividades cotidianas con matemática implícita, pero enfocado en las características y formas en que los actores involucrados despliegan su conocimiento e interactúan con el aprendiz. Este conjunto de indicadores desagrega y profundiza el indicador denominado "Formas de construcción de conocimiento" de Quilaqueo y San Martín (2008), como sus modos de transferencia y enseñanza (Del Pino y Ferrada, 2019; Luna *et al.*, 2018), pero específicas hacia conceptos y objetos matemáticos propios del pueblo mapuche, al estar insertas en el "Saber" y en el "Hacer" de los sujetos entrevistados. Si bien se distinguen tres fases, estas están imbricadas en el desarrollo del CMM, tal como lo plantea Luna *et al.* (2018) cuando afirman que en los modelos de enseñanza del pueblo mapuche no es posible separar el método

del conocimiento, ya que este último está inserto en la práctica, siendo a la vez un medio y un fin. Si bien para su comprensión es necesario descomponerlo, tal como ha sucedido con los modelos explicativos del conocimiento del profesor de matemática (Shulman, 1986; Ball *et al.*, 2008; Blömeke *et al.*, 2015), en la práctica estos actúan de forma conjunta. Por lo demás, y dado el modelo de enseñanza, cada familiar o integrante de una comunidad mapuche es a la vez un profesor y aprendiz.

En cuanto al análisis relacional, el CMM evidencia las lógicas de composición entre los objetos y acciones matemáticas interpretadas desde un conjunto finito pero diverso de prácticas culturales mapuche, sin precedentes de investigación. La dimensión CMM como red conceptual no está acabada, posee limitaciones asociadas al número y cualidades de las prácticas culturales de las que emerge (Bishop, 1991). Por otro lado, el DCM como red conceptual, es un proceso amplio en rutas, permeable en contenidos y métodos y cíclico en su progreso, el cual permite entrelazar diversos elementos del pueblo mapuche antes investigados, asociado a lo conceptual, procedimental y valórico-actitudinal que se desprende del formarse como mapuche (Quilaqueo *et al.*, 2016; Quilaqueo y San Martín, 2008). Ambas redes conceptuales permiten tener una base para validar, nutrir y fortalecer desde las investigaciones ya desarrolladas, como también el expandirse y proyectar nuevos estudios.

Finalmente, el análisis Condicional/Consecuencial establece un modelo que caracteriza el DCMM con dos claras rutas de desarrollo de la matemática en el contexto mapuche que coexisten en temporalidad y territorio. El DCMM desde el Saber despliega un desarrollo del conocimiento matemático, rico en objetos, acciones y su conceptualización matemática, modelado por un agente experto en el área que fortalece el proceso explicitando y/o reviviendo los principales puntos de conflicto desde la acción y la oralidad del *mapudungun*. En cambio, el DCMM desde el Hacer construye una ruta de desarrollo centrado en la práctica cotidiana, donde las acciones y objetos matemáticos son medios implícitos en la tarea. Se aprende haciendo y reflexionando de forma autónoma sobre los errores o nichos de conflicto experimentados. Los conceptos se desarrollan por la actualización de variables que intervienen en la práctica. Así, el Modelo de DCMM corresponde a un formato inédito en su género por dos razones, primero, el comprender el desarrollo del conocimiento matemático dentro del pueblo mapuche ligado a su proceso de enseñanza-aprendizaje y segundo, el comprender el DCMM desde la diferencia socio-histórica del conjunto de personas de

un sector territorial común, lo que se explicita en cada una de las clases latentes que lo sustentan.

El Modelo de DCMM es una respuesta a los requerimientos establecidos desde la investigación a la enseñanza monocultural de las matemáticas en el sistema escolar chileno (Arias-Ortega *et al.*, 2018; OCDE, 2009; Del Pino y Ferrada, 2019; Luna, *et al.*, 2018; Ortiz-Velosa y Arias-Ortega, 2019). Tanto así, que se puede considerar como una primera aproximación de comprensión del conocimiento y habilidades que un profesor debe tener para enseñar matemática al pueblo mapuche. En él, la familia, la comunidad y sus actividades se establecen como elementos estructurales del conocimiento y de los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula escolar formal (Alarcón *et al.*, 2018). Se identificaron en ellas las acciones y objetos matemáticos propios del pueblo, que configuran, articulan y aseguran la transcendencia del mapuche y su cultura. Sin embargo, se debe reconocer que el Modelo de DCMM como respuesta al modelo monocultural de enseñanza de las matemáticas del sistema escolar, posee limitantes asociadas a la implementación del mismo, por lo que se hace necesario, acompañar el Modelo por un sistema de capacitación profesional docente que posibilite su real implicancia en el sistema escolar.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación se ha desarrollado dentro del proyecto número 21130915 subvencionado por CONICYT-PFCHA/Doctorado Nacional; y dentro del proyecto número 15110006 subvencionado por CONICYT/FONDAP.

This article was elaborated in the context of INCASI Network, a European project that has received funding from the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Sklodowska-Curie GA No 691004 and coordinated by Dr. Pedro López-Roldán. This article reflects only the author's view and the Agency is not responsible for any use that may be made of the information it contains.

REFERENCIAS

Alarcón, A., Castro, M., Astudillo, P., y Nahuelcheo, Y. (2018). La paradoja entre cultura y realidad: el esfuerzo de criar niños y niñas mapuche en comunidades indígenas de Chile. *Chungará, 50*(4), 651-662. https://doi.org/10.4067/S0717-73562018005001601

Albertí, M. (2007). *Interpretación matemática situada de una práctica artesanal* [Tesis de doctorado no publicada], Universidad Autónoma de Barcelona.

Arias-Ortega, K., Quintriqueo, S., y Valdebenito, V. (2018). Monoculturalism in pedagogical practices along basic teacher education in La Araucanía, Chile. *Educação e Pesquisa, 44*, 1-19. https://doi.org/10.1590/S1678-4634201711164545

Ball, D. L., Thames M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching What Makes It Special?. *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., y Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools. En C. Laborde, M. J. Perrin-Gloria, y A. Sierpinska (Eds.), *Beyond the apparent banality of the mathematics classroom* (pp. 235-268). Springer-MA. https://doi.org/10.1007/0-387-30451-7_9

Bishop, A. J. (1991). *Mathematics enculturation. A cultural perspective on mathematics education.* Kluwer Academic Publishers.

Blömeke, S., Gustafsson, J. E., y Shavelson, R. J. (2015). Beyond dichotomies: Competence viewed as a continuum. *Zeitschrift Fur Psychologie / Journal of Psychology, 223*, 3-13. https://doi.org/10.1027/2151-2604/a000194

Blömeke, S., Hoth, J., Döhrmann, M., Busse, A., Kaiser, G., y König, J. (2015). Teacher change during induction: Development of beginning primary teachers' knowledge, beliefs and performance. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(2), 287-308.

Blömeke, S., Suhl, U., Kaiser, G., y Döhrmann, M. (2012). Family background, entry selectivity and opportunities to learn: What matters in primary teacher education? An international comparison of fifteen countries. *Teaching and Teacher Education, 28*, 44-55. https://doi.org/10.1016/j.tate.2011.08.006

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *7*(2), 33-115.

Canales, A. y Webb, A. (2018). Educational Achievement of Indigenous Students in Chile: School Composition and Peer Effects. *Comparative Education Review, 62*(2), 231-273.

Catrileo, M. (1985). Concepto y forma de la cuantificación en mapudungun. *RLA: Revista de Lingüística Teórica y Aplicada, 23*(1), 179–188.

Chau, K. L. (1990). A model for teaching cross-cultural practice in social work. *Journal of Social Work Education, 26*(2), 124-133. https://doi.org/10.1080/10437797.1990.10672143

Chevallard, Y., y Bosch, M. (2014). Didactic transposition in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education*. Spriger. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_48

D'Ambrosio, U. (2007). La matemática como ciencia de la sociedad. En J. Giménez, J. Díez-Palomar y M. Civil (coords.), *Educación Matemática y Exclusión* (pp. 83-102), Graó.

D'Ambrosio, B. y Lopes, C. (2015). *Vertentes da subversão na produção cientifica em educação matemática*. Mercado de Letras.

Del Pino, M., y Ferrada, D. (2019). Construction of educational knowledge with the Mapuche community through dialogical-kishu kimkelay ta che research. *Educational Action Research, 27*(3), 414-434. https://doi.org/10.1080/09650792.2019.1616587

Depaepe, F., y König, J. (2018). General pedagogical knowledge, self-efficacy and instructional practice: Disentangling their relationship in pre-service teacher education. *Teaching and Teacher Education, 69*, 177-190. https://doi.org/10.1016/j.tate.2017.10.003

Felbrich, A., Kaiser, G., y Schmotz, C. (2012). The cultural dimension of beliefs: an investigation of future primary teachers' epistemological beliefs concerning the nature of mathematics in 15 countries. *ZDM - International Journal on Mathematics Education, 44*(3), 355–366. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0418-x

Ferrare, J. J., y Hora, M. T. (2014). Cultural models of teaching and learning in math and science: Exploring the intersections of culture, cognition, and pedagogical situations. *The Journal of Higher Education, 85*(6), 792-825. https://doi.org/10.1353/jhe.2014.0030

Finch, W. H., y French, B. F. (2015). *Latent variable modeling with R*. Routledge.

Flores, J., y Azócar, A. (2006). Fotografía de capuchinos y anglicanos a principios del siglo XX: La escuela como instrumento de cristianización y chilenización. *Memoria Americana, 14*, 75–87.

Fyhn, A. B., Nutti, Y. J., Nystad, K., Eira, E. J. S., y Hætta, O. E. (2016). We had not dared to do that earlier, but now we see that it works: Creating a culturally responsive mathematics exam. *AlterNative: An International Journal of Indigenous Peoples, 12*(4), 411–424. https://doi.org/10.20507/AlterNative.2016.12.4.6

Hanisch, W. (1974). *Historia de la Compañía de Jesús en Chile (1593-1955)*. Editorial Francisco de Aguirre, S.A.

Huencho, A. (2015). Estudio de las orientaciones curriculares del Programa Intercultural Bilingüe: un análisis emergente en función de la matemática y la cultura mapuche. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 8*(2), 214–236.

Huencho, A., Rojas, F., y Webb, A. (2017). Educación Matemática Intercultural: Propuestas y proyecciones desde el pueblo mapuche. En E. Treviño, L. Morawietz, C. Villalobos y E. Villalobos (Eds.), *Educación intercultural en Chile. Experiencias, pueblos y territorios* (pp. 303–334), Ediciones Universidad Católica de Chile.

Ibañez, N. (2010). La atención pedagógica a la diversidad: Estudio en aulas de escuelas rurales de comunidades mapuche del sur de Chile. *Educación Superior y Sociedad, 15*(2), 83–109.

Kaiser, G., y Maaß, K. (2007). Modelling in lower secondary mathematics classroom - problems and opportunities. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applicatins in Mathematics Education* (pp. 99-108), New ICMI Study Series. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciencescognitives, 16*, 9-24.

Lesh, R., Sriraman, B., y English, L. (2013). Theories of learning mathematics. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education.* Springer. https://doi.org/ 10.1007/978-94-007-4978-8_157

Lesh, R., y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh, y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-33). Lawrence Erlbaum Associates Publishers. https://doi.org/10.4324/9781410607713

Lesh, R., y Lehrer, R. (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2-3), 109-129. https://doi.org/10.1080/10986065.2003.9679996

Luna, L., Telechea, C., y Caniguan, N. (2018). Mapuche education and situated learning in a community school in Chile. *Intercultural Education, 29*(2), 203-217. https://doi.org/10.1080/14675986.2018.1429574

Magidson, J., y Vermunt, J. K. (2004). Latent class models. En D. Kaplan (Ed.), *The Sage handbook of quantitative methodology for the social sciences* (pp. 175-198), Thousands Oakes, Sage.

Marshall, B., Cardon, P., Poddar, A., y Fontenot, R. (2013). Does sample size matter in qualitative research?: A review of qualitative interviews in is research. *Journal of Computer Information Systems, 54*(1), 11–22. https://doi.org/10.1080/08874417.2013.11645667

McDonald, M., Kazemi, E., Kelley-Petersen, M., Mikolasy, K., Thompson, J., Valencia, S. W., y Windschitl, M. (2014). Practice makes practice: Learning to teach in teacher education. *Peabody Journal of Education, 89*(4), 500-515. https://doi.org/10.1080/0161956X.2014.938997

Miles, M. B., Huberman, A. M., y Saldaña, J. (2014). *Qualitative Data Analysis. A Methods Sourcebook* (Third Edit). Sage.

Miller, D. R., Bandura, A., y Walters, R. H. (1966). Social learning and personality development. *American Sociological Review, 31*(1), 128-130. https://doi.org/10.2307/2091312

Noggler, A. (1982). *Cuatrocientos años de misión entre los araucanos*. San Francisco.

Ong, W. J. (1987). *Oralidad y escritura. Tecnologías de la palabra*. Fondo de Cultura Económica.

Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE) (2009). *La educación superior en Chile*. OCDE.

Ortiz-Velosa, E. M., y Arias-Ortega, K. (2019). Being Mapuche in the University: Entry Conditions to the Initial Teacher Training, La Araucanía. *Revista Electrónica Educare, 23*(1), 1-18.

Peña-Cortés, F., Huiliñir-Curío, V., Pincheira-Ulbrich, J., Quintriqueo, S., Quilaqueo, D., Gutiérrez, M., y Morales, S. (2019). Mapuche-Pewenche knowledge transmitted by teachers and parents: perception of schoolchildren in rural schools of the Araucanía region (Chile). *Journal of Multilingual and Multicultural Development, 40*(3), 244-256.

Peña-Rincón, P., y Hueitra-Santibañez, Y. (2016). Conocimientos [matemáticos] mapuche desde la perspectiva de los educadores tradicionales de la comuna de El Bosque. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 9*, 8–25.

Quilaqueo, D., Quintriqueo, S., y Torres, H. (2016). Características epistémicas de los métodos educativos mapuches. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 18*(1), 153–165.

Quilaqueo, D., y San Martín, D. (2008). Categorizacion de saberes educativos mapuche mediante la teoría fundamentada. *Estudios Pedagógicos XXXIV, 34*(2), 151–168. https://doi.org/10.4067/S0718-07052008000200009

Quintriqueo, S. (2010). *Implicancias de un modelo Curricular monocultural en contexto mapuche*. Universidad Católica de Temuco.

Quintriqueo, S., Quilaqueo, D., Peña-Cortes, F., y Muñoz, G. (2015). Conocimientos culturales como contenido de la educación familiar mapuche. *Alpha, 1*(40), 131–146. https://doi.org/10.4067/S0718-22012015000100010

Quintriqueo, S., y Torres, H. (2013). Construcción de conocimiento mapuche y su relación con el conocimiento escolar. *Estudios Pedagógicos XXXIX, 39*(1), 199–216. https://doi.org/10.4067/S0718-07052013000100012

Restrepo-Ochoa, D.A. (2013). La Teoría Fundamentada como metodología para la integración del análisis procesual y estructural en la investigación de las representaciones sociales. *Revista CES Psicología, 6*(1), 122-133.

Rogoff, B. (2003). *The Cultural Nature of Human Development*. Oxford University Press.

Rost, J. (2004). *Testtheorie–Testkonstruktion* [Test theory and test construction]. Verlog Hans Huber.

Salas, A. (1980). El sistema de numeración en el mapuche de Chile. *Revista La Matemática en el Colegio, 4*, 30–40.

Salas, S., Godino, J., y Oliveras, M. L. (2015). Números mapuches en el currículo de la lengua mapuzugun en la educación básica chilena. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 8*(2), 194–213.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-23.

Sierpinska, A., y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876), HL, Kluwer, A.P.

Strauss, A., y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Editorial Universidad de Antioquia.

Turner, F., y Rowland, T. (2011). The knowledge quartet as an organising framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge. En T. Rowland, y K. Ruthven (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (vol. 50, pp. 195-212). Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9766-8_12

Undurraga, E. (2014). *Unraveling development: Three essays on structural determinants of human capabilities* [Tesis de doctorado no publicada], Brandeis University.

Van Hiele, P. M. (1959). The child's thought and geometry. En D. Fuys, D. Geddes, y R. Welchman (Eds.). *English translations of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (pp. 243-252). National Science Foundation.

Verd, J. M., y Lozares, C. (2016). *Introducción a la investigación cualitativa*. Editorial Síntesis.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

Williamson, G. (2012). Institucionalización de la educación intercultural bilingüe en Chile: notas y observaciones críticas. *Perfiles Educativos, XXXIV*(138), 126-147.

Anahí Huencho

Dirección: Universidad Católica de Temuco
Campus Juan Pablo II
Rudecindo Ortega #3239, Temuco, Chile.
Edificio Waldo Marchant
Código Postal: 4780000

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN DOI: 10.24844/EM3302.02

Enfoque Ontosemiótico en el desarrollo de Capacidades Matemáticas: Escuela Intercultural Yarinacocha, Amazonia

Ontosemiotic approach in the development of Mathematical Capabilities: Intercultural School Yarinacocha, Amazonia

Ronald Gamarra Salinas[1]
Julia Cecilia Yon Delgado[2]
Mónica Rosario Yon Delgado[3]

Resumen: Los materiales educativos, sea cual sea su naturaleza, son parte de los programas de enseñanza y como tal, deben ser objeto de revisión constante por parte del sistema educativo y, a partir de allí, buscar las mejoras que requiere el proceso de enseñanza-aprendizaje en cualquier área del conocimiento. En este sentido, se llevó a cabo un estudio de caso en la Institución Educativa (IE) Aplicación Bilingüe Intercultural Yarinacocha, ubicada en el distrito de Yarinacocha, provincia Coronel Portillo, Departamento de Uyacaly, perteneciente a la población Yarinacocha situada en la Amazonia peruana. Investigación que tuvo por objetivo analizar las valoraciones de los módulos de uso de materiales didácticos orientados al desarrollo de capacidades matemáticas, en estudiantes del cuarto grado de Educación Básica. Investigación que permitió valorar la importancia de los seis componentes de la idoneidad didáctica y explicar la complejidad ontosemiótica implícita en los procesos

Fecha de recepción: 19 de diciembre de 2019. **Fecha de aceptación:** 28 de febrero de 2021.

[1] Universidad Nacional Intercultural de la Amazonía. Facultad de educación Jr Señor de los Milagros #151 – Ucayali. article.innova@gmail.com ORCID: 0000-0002-1235-6317

[2] Universidad Nacional Intercultural de la Amazonía. Facultad de educación. Av aviación N° 156 – Pucallpa. yondelgadojuly20@gmail.com ORCID 0000-0003-4119-2072

[3] Universidad Nacional Intercultural de la Amazonía. Facultad de educación. Jr Pachitea 741 – Ucayali. yondelgadomonica@gmail.com ORCID: 0000-0002-3865-1365

didácticos, a partir de la estructura objetiva y subjetiva de los módulos para el uso de materiales de enseñanza de la matemática.

Palabras Claves: *ontosemiótico, idoneidad, didáctica, matemática.*

Abstract: Educational materials, whatever their nature, are part of the teaching programs and as such, must be subject to constant review by the educational system and, from there, seek the improvements required by the teaching-learning process in any area of knowledge. In this sense, a case study was carried out at the Yarinacocha Intercultural Bilingual Application Educational Institution (IE), located in the district of Yarinacocha, Coronel Portillo province, Department of Uyacaly, belonging to the Yarinacocha population located in the Peruvian Amazon. Research that aimed to analyze the evaluations of the modules of use of didactic materials oriented to the development of mathematical capacities, in students of the fourth grade. Research that allowed assessing the importance of the six components of didactic suitability and explaining the implicit ontosemiotic complexity in the didactic processes, based on the objective and subjective structure of the modules for the use of mathematics teaching materials.

Keywords: *ontosemiotic, suitability, didactics, mathematics.*

INTRODUCCIÓN

Las dificultades que enfrenta el sistema educativo en Latinoamérica para que los estudiantes alcancen el logro de las competencias comprendidas dentro del currículo, motivó la iniciativa Proyecto Principal de Educación en América Latina y el Caribe (PPE, 1980-2000) de OREALC/UNESCO Santiago, con tres objetivos específicos: Educación básica universal, superación del analfabetismo y mejorar los sistemas educativos regionales (Unesco, 2019). Dentro de las iniciativas impulsadas en torno al PPE, fue conformado el Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE). Este proyecto fue impulsado por los Ministros de Educación de la región en el año 1994 y auspiciado por la Unesco (UNESCO, 2019a). Esta iniciativa nace bajo la teleología de la cooperación regional para alcanzar las metas de fomento de la política educativa, desarrollo de capacidades educativas y brindar un foro de debates que generen

propuestas innovadoras. Lo fundamental en el desempeño de LLECE es que posibilita el diseño de políticas educativas estructuradas en torno al diagnóstico regional del estado de la educación, mediante la aplicación de procesos evaluativos regionales aplicados en campo. El primer estudio diagnóstico del LLECE se desarrolló en 1997.

La tercera evaluación del LLECE fue aplicada en el año 2013, en esta ocasión el TERCE (Tercer Estudio Regional Comparativo Explicativo) se enfocó en la evaluación curricular con el objetivo de establecer comunidad conceptual dentro del esquema escolar de la región (UNESCO, 2019a). Los resultados del TERCE aplicado a los estudiantes de tercer grado de educación básica en el área de las matemáticas, ubican al 71% de los estudiantes dentro de los niveles Inicial y en Proceso, en relación con las competencias de identificación numérica, propiedades ordinales, geometría e interpretación de tablas y gráficas (UNESCO, 2015). La prueba aplicada al sexto grado identificó que 83% de los estudiantes se encontraban en los niveles Inicial y en Proceso. Las competencias esperadas corresponden al uso apropiado de los números naturales, decimales y fracciones en operaciones básicas simples (UNESCO, 2015).

En el caso específico del Perú el TERCE ubicó a los estudiantes evaluados por sobre la media regional en las áreas de lectoescritura de tercer grado y matemática de tercer y sexto grado. En las áreas de lectoescritura y ciencias naturales de sexto grado se encuentran dentro de la media regional (UNESCO, 2015). De forma concomitante Perú también participó en las evaluaciones realizadas por el Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA). El enfoque de PISA se orienta hacia la evaluación de estudiantes quienes se encuentran finalizando estudios secundarios comprendiendo las áreas de matemáticas, lectura y ciencias (OCDE, 2019). Perú ha participado de forma interrumpida en la aplicación de las pruebas PISA desde el año 2000, la última prueba de la que se conocen resultados corresponde al PISA 2015, en la que participaron 6,971 estudiantes distribuidos entre 71% de colegios públicos y 29% de colegios privados (Ministerio de Educación del Perú [MINEDU], 2017). La prueba PISA 2015 evidencia mejoras en la educación peruana, al ubicar al Perú en el puesto 64 en el total de 70 países participantes. En el área de las matemáticas los estudiantes peruanos lograron ascender en el puntaje de 368 en el año 2012 hasta los 387 en el 2015 (MINEDU, 2017).

A nivel nacional el Ministerio de Educación del Perú, a través de la Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes (UMC), aplica anualmente la Evaluación Censal a Estudiantes (ECE), para registrar qué y cuánto están

aprendiendo los estudiantes de escuelas públicas y privadas. Según la evaluación ECE en el año 2018 participaron 2° grado de Básica, 4° de Básica, 4° Básica EIB y 2° grado de Secundaria. Los resultados nacionales para el área de matemáticas indicaron que 9,3% de los estudiantes se ubicó en el nivel previo al inicio, 19,3% en el nivel inicio, 40,7% en el nivel en proceso y 30,7 en el nivel satisfactorio (MINEDU, 2018). Específicamente, en el caso del departamento y la provincia donde pertenece el distrito de Yarinacocha, los resultados del ECE 2018 indican que el departamento de Ucayali ocupa el penúltimo lugar dentro de los departamentos, indicando que los resultados en matemática del cuarto grado de básica corresponden a 25,5% ubicados en el nivel previo al inicio, 31,6% alcanzaron el nivel inicio, 32,1% en proceso y 10.8% en el nivel satisfactorio. En la provincia Coronel Portillo el ECE 2018 referido al área matemática indica que 22% de los estudiantes de cuarto grado se encuentran en el nivel previo al inicio, 31,8% se situó en nivel inicio, 34,1%, en el nivel proceso y 12,1% en el nivel satisfactorio (MINEDU, 2018).

La Institución Educativa (IE) Aplicación Bilingüe Intercultural Yarinacocha está ubicada en el distrito de Yarinacocha, provincia Coronel Portillo Departamento de Uyacaly, perteneciente a la población Yarinacocha situada en la Amazonia peruana. La institución constituye una escuela básica, pública, polidocente y mixta. En ese orden la institución donde se desarrolla este estudio responde a los criterios de una escuela intercultural bilingüe de matriz cultural amazónica. En materia curricular la EIB comparte con el currículo nacional los contenidos en materias básicas, distinguiéndose por la promoción del bilingüismo y la incorporación de la cosmovisión propia de los pueblos originarios, lo que posibilita el desenvolvimiento del estudiante en diversos escenarios socioculturales (MINEDU, 2016).

En el área de las ciencias básicas el enfoque didáctico fundamentado en el paradigma cognitivo progresivamente ha sido desplazado por paradigmas orientados hacia el redimensionamiento del rol del estudiante, como actor protagónico, dinámico y activo en el proceso enseñanza aprendizaje (Miranda y Gómez, 2018). En ese orden Mota *et al.* (2016), señalaron la necesidad de romper con los enfoques tradicionales abriendo paso a estrategias que induzcan hacia la resiliencia matemática de los estudiantes.

Godino (2017), señala que en los procesos de instrucción las configuraciones didácticas corresponden a las actividades secuenciales o no, que establecen la fase inicial de la problematización de una situación y su fase final. En ese orden, los módulos de uso de materiales didácticos para la enseñanza de la

matemática diseñados para estudiantes del cuarto grado de Educación Básica de la Institución Educativa Aplicación Bilingüe Intercultural Yarinacocha, comprenden instrumentos de planificación para el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje orientados hacia el establecimiento de las secuencias didácticas que comprenden los elementos objetivos y subjetivos del proceso. Entendiéndose por objetivos las tareas, instrumentos y medios, los subjetivos corresponden a estudiantes y docentes.

ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO: UNA MIRADA A LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

La revisión de la literatura posibilitó una aproximación sistémica a la didáctica de la matemática y, la multiplicidad de herramientas y recursos didácticos utilizados por los docentes. Revisión que consintió registrar los criterios de idoneidad didáctica propuesto por el marco teórico conocido como el enfoque Ontosemiótico (EOS) de conocimientos e instrucción matemática, que se conciben como herramientas poderosas para organizar la reflexión y la evaluación de los procesos de instrucción llevados a cabo por los profesores de matemáticas (Breda *et al.*, 2017). Considerando que, la idoneidad didáctica es una noción que reflexiona sistémicamente las dimensiones epistémica/ecológica, cognitiva/afectiva, interaccional/mediacional presentes en los procesos enseñanza-aprendizaje (Godino *et al.*, 2007a.; Godino, 2011) por lo que, la idoneidad didáctica se despliega en seis indicadores expresados en el proceso educativo:

- Idoneidad Epistémica: Representatividad de significados.
- Idoneidad Cognitiva: Grado de aproximación de los nuevos conocimientos a la zona de desarrollo próximo de los estudiantes.
- Idoneidad Interaccional: Identificación y solución de conflictos semióticos.
- Idoneidad Mediacional: Disponibilidad de recursos materiales y temporales.
- Idoneidad afectiva: Grado de motivación del estudiante.
- Idoneidad ecológica: Adaptación del proceso educativo a las normativas de los entes rectores y el entorno social.

La didáctica de las matemáticas, independientemente que se entienda como ciencia explicativa o integral, ha de responder a dos demandas. La primera, permite comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas,

por cuanto se espera que describa, interprete y/o explique los procesos de enseñanza-aprendizaje. Por tanto, requiere de herramientas propias de una didáctica descriptiva y explicativa, que le permita dar respuesta a lo que ha sucedido, ¿cómo y por qué? Mientras que la segunda, conduce a la evaluación y mejora de dichos procesos, considerando que, esta sirve para mejorarlos, por tanto, debe hacer uso de herramientas evaluativas que le permitan dar respuesta a la pregunta ¿qué se podría mejorar? (Breda *et al.*, 2018).

En este sentido, el objetivo de la presente investigación permitió analizar las valoraciones de los módulos de uso de materiales didácticos orientados al desarrollo de capacidades matemáticas, específicamente, en estudiantes del cuarto grado de Educación Básica de la Institución Educativa Aplicación Bilingüe Intercultural Yarinacocha. Considerando que, para que los criterios de idoneidad resulten eficaces se requiere establecer un conjunto de indicadores observables que permitan valorar el grado de idoneidad de cada uno de esos criterios (Breda *et al.*, 2018; Breda *et al.*, 2018a).

En el entendido que, los módulos de uso de materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas objeto de este estudio, fueron estructurados bajo la teleología que los estudiantes alcancen el nivel de logro en cuatro de las capacidades matemáticas comprendidas en el currículo de educación básica (MINEDU, 2016a):

- Matematizar.
- Comunicar y representar ideas matemáticas.
- Elaborar y usar estrategias.
- Razonar y argumentar generando ideas matemáticas.

Los módulos para el uso de materiales didácticos en la enseñanza de las matemáticas se fundamentan en la idea de que para los estudiantes de educación básica, el uso de materiales didácticos tangibles, novedosos y atractivos es un factor esencial a utilizar para el aprendizaje de las matemáticas, ya que los niños aprenden mientras reconocen, describen, manipulan, comparan y asocian estos materiales con sus experiencias (Miranda y Gómez, 2018; Vygotsky, 2007).

En consecuencia, el rol del docente contemporáneo trasciende lo estrictamente cognoscitivo, alcanzando los ámbitos emotivos y volitivos, donde el estudiante encuentre atractivos al interaccionar con objetos matemáticos físicos diseñados para tal fin (Zumaeta *et al.*, 2018; Zaragoza, *et al.*, 2016). Por lo que es fundamental que el docente conozca los materiales de enseñanza y los

utilice adecuadamente, dotándolos de vida y significado, de tal manera que, provea al estudiante de experiencias individuales y colaborativas, que le permitan promover la aplicación de su propio aprendizaje en la vida real (Godino *et al.*, 2017). Los módulos de uso de materiales didácticos para la enseñanza de la matemática implementados en este estudio comprendieron las siguientes áreas temáticas:

- Descomponer números de cuatro cifras.
- Situaciones aditivas.
- Números enteros (cuatro operaciones fundamentales).
- Regleta empleando operaciones básicas.
- Adición y sustracción en problemas.

En esta investigación se parte de la concepción que los objetos matemáticos se expresan como locuciones mediante signos, cuyos significados son contenidos en conceptos y proposiciones universales que problematizan situaciones y siguen procedimientos para el abordaje de interrogantes, cuya respuesta es potencialmente cognoscible mediante la argumentación matemática (Godino, *et al.*, 2017). Destacando que, en ese proceso suelen suceder interacciones entre estudiante y docente, donde lo epistémico devela los principios y fundamentos del objeto matemático, esbozados mediante signos, cuyo significado común posibilita el tránsito a lo largo del subsistema cognitivo-afectivo del objeto matemático, en el cual docente y estudiante reconocen el objeto y empatiza con las acciones conducentes al aprendizaje inherente al subsistema instruccional. Todo ello, a partir de estrategias didácticas de colaboración, pensadas para acompañar a los estudiantes durante la transformación de las preconcepciones en conceptos científicos (Vygotsky, 2007).

Materiales y métodos

La metodología empleada en la presente investigación, se corresponde con un estudio de caso que permitió analizar los criterios de idoneidad a partir de la valoración de los módulos orientados al desarrollo de capacidades matemáticas implementados en el cuarto grado de Educación Básica de la Institución Educativa (IE) Aplicación Bilingüe Intercultural Yarinacocha, mediante la evaluación

de los conocimientos alcanzados por los estudiantes y la observación de la enseñanza por parte de los docentes.

En un esfuerzo por buscar la evidencia en el uso implícito de los componentes de los criterios de idoneidad, objeto de análisis en este artículo, se siguieron los criterios de idoneidad didácticas del EOS descriptos en el apartado anterior.

Se utilizó la observación como técnica y la ficha de observación como instrumento para el acopio de la información, por cuanto, ambas permitieron registrar los procesos didácticos desarrollados durante las clases observadas, siguiendo el diseño propuesto por Godino (2011). Cabe destacar que para efecto de la presente investigación la escala de evaluación utilizada para valorar los logros alcanzados por los estudiantes, se acoge a la establecida por MINEDU (2016). Ver en la siguiente tabla.

Tabla 1. Categorización del nivel de logros

Escala literal	Valoración
AD	Logro destacado
A	Logro previsto
B	En proceso
C	En inicio

Fuente: Ministerio de Educación del Perú (2016)

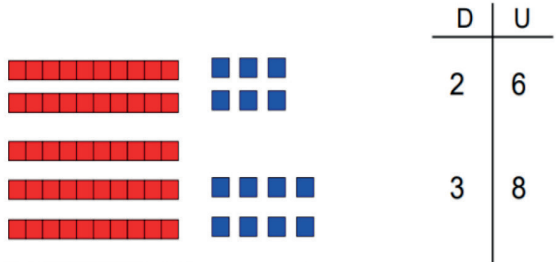
RESULTADOS

A continuación, se describen cómo fueron consideradas ciertas evidencias relacionadas con los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica, observados durante la aplicación de los módulos orientados al desarrollo de capacidades matemáticas implementados en el cuarto grado de Educación Básica de la Institución Educativa (IE) Aplicación Bilingüe Intercultural Yarinacocha y, que fueron objeto de análisis en el presente artículo atendiendo a los criterios de idoneidad a que se hace referencia en la introducción.

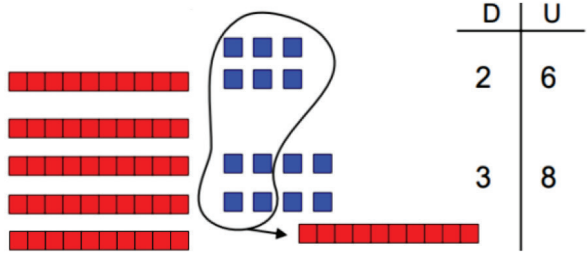
Observación del proceso llevado a cabo para el desarrollo de las capacidades matemáticas durante las sesiones modulares

Durante el desarrollo del tema "Componer y descomponer números de cuatro cifras, realizando agrupaciones y utilizando el tablero de valor posicional" el uso de materiales estructurado se demostró eficiente y de buena acogida por los estudiantes, quienes manifestaron interés por realizar operaciones matemáticas posterior a la manipulación de bloques aritméticos multibásicos de Dienes. Ejemplo:

Sumar 26 + 38
Solución:
Paso Nº 1 Como es en base diez o decimal, con la ayuda del material multibase hay que codificar cada uno de los sumandos (fase manipulativa) lo que significa que obtendríamos:

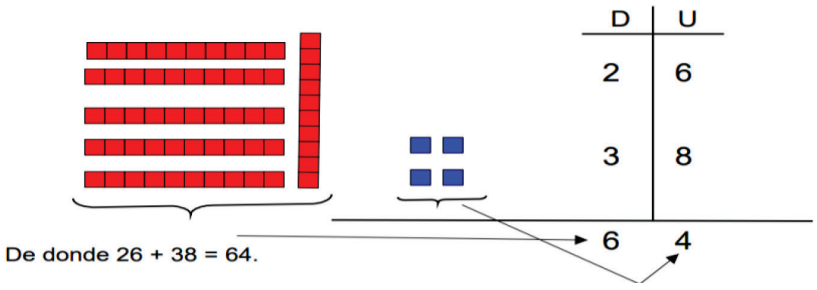


Paso Nº 2 Reunimos las barritas (decenas) y los cuadraditos (unidades), luego hacemos los canjes correspondientes:



Una vez hecho el canje de 10 cuadraditos por una barrita ¿Qué nos queda?

Paso Nº 3 Se codifica el producto obtenido y nos da como resultado:



En la sesión dedicada al tema "Adicionar" se observó que los estudiantes lograron o se encuentran en proceso de lograr la capacidad de comunicar y representar ideas matemáticas, mediante la manipulación de material estructurado y no estructurado. Estas acciones permiten desarrollar estrategias para contar y estimar cantidades, elaborar series numéricas crecientes y decrecientes, empleando diversos métodos de dos por dos, o de diez por diez; miden las longitudes de los objetos usando cubos y barras como referencias, hacen varias construcciones y las diferencian desde distintos ángulos. Esto permitió evidenciar que la mayoría de los estudiantes lograron o se encuentran en proceso de lograr la capacidad de matematizar situaciones, y que en su gran mayoría llegaron a lograr o se encuentran en proceso de lograr la capacidad de comunicar y representar ideas matemáticas.

En cuanto al tema "Equivalencia de longitudes", se observó que este se desarrolló utilizando regletas de Cuisenaire y material no estructurado. Los estudiantes establecieron equivalencias, generaron series numéricas, establecieron relaciones de orden "mayor que", "menor que", igual que, de los números, basándose en la comparación de longitudes, realizar seriaciones, comprobar empíricamente las propiedades conmutativa y asociativa de la suma de iniciación en los conceptos sobre propiedades de los números. Al finalizar la sesión, los estudiantes expresaron su capacidad para matematizar situaciones, pensar matemáticamente y elaborar estrategias para solucionar problemas matemáticos. Por lo que, se puede decir que en su mayoría lograron o se encuentran en proceso de lograr la capacidad de elaborar y usar estrategias. Ver figura 1.

Figura 1. Estudiantes manipulando reglas de Cuisenaire.
Fuente: Imagen fotografiada por los autores durante la sesión de enseñanza observada.

En cuanto al estudio del tema "Registro de temperaturas máximas y mínimas" se desarrolló en la sesión modular dedicada al Conjunto de los Números Enteros, utilizando baldosas aritméticas y material no estructurado. En esta actividad, se estimuló a los estudiantes al ejercicio del razonamiento lógico matemático y se despertó la curiosidad por descubrir estrategias para el aprendizaje de la matemática. Se pudo observar que la gran mayoría de los estudiantes lograron o se encuentran en proceso de lograr la capacidad de razonar y argumentar, generando ideas matemáticas.

Cabe destacar que, la capacidad de razonar y argumentar generando ideas matemáticas, fue abordada en las diversas sesiones modulares durante el desarrollo de los temas "Descomposición de números de cuatro cifras", "Regleta empleando operaciones básicas" y "Resuelve problemas sumando", los estudiantes participaron progresivamente en la solución y formulación de situaciones aditivas, sustractivas, multiplicativas y determinación de áreas, perímetros y medición aproximada de volúmenes de su entorno, materiales estructurados y no estructurados como unidades de medida. Observándose que una gran mayoría de los estudiantes lograron o se encuentran en proceso de lograr la capacidad de razonar y argumentar, generando ideas matemáticas.

SÍNTESIS DE LO OBSERVADO

En atención a la primera noción de idoneidad didáctica a la cual se hace referencia en la introducción, se presentan los resultados obtenidos en torno a los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica presentes en los módulos de uso de materiales didácticos para la enseñanza de la matemática, implementados en el cuarto grado de Educación Básica de la Institución Educativa (IE) Aplicación Bilingüe Intercultural Yarinacocha, a partir de la evaluación de los conocimientos alcanzados por los estudiantes y la observación de la enseñanza por parte de los docentes. Ver tabla 2.

Tabla 2. Componentes de la idoneidad didáctica de los módulos de uso de materiales didácticos para la enseñanza de la matemática

Idoneidad	Indicadores observados
Epistémica	Docente: – Problematiza situaciones utilizando expresiones matemáticas adecuadas al nivel de los estudiantes del cuarto grado. – Plantea eficientemente definiciones, procedimientos esenciales utilizando argumentaciones demostrativas adecuadas al nivel de los estudiantes del cuarto grado. – Establecen relaciones entre los objetos matemáticos. – Promueve la participación de los estudiantes durante toda la actividad. Estudiantes: – 30% participa en la problematización de situaciones en respuesta al estímulo del docente al inicio de clase. – -59,09% de los estudiantes utiliza definiciones, procedimientos esenciales y relaciones entre objetos matemáticos al final de la clase.
Cognitivo	Docente: – Considera las preconcepciones y los conocimientos previos durante el tránsito hacia el nuevo conocimiento. – Incorpora actividades de refuerzo motivación al logro. – Se evidencian diversos niveles de comprensión y aprendizaje. Estudiantes: – Expresan preconcepciones en respuesta la estimulo docente durante la problematización de situaciones aditivas, multiplicativas e interpretación de gráficas y cálculo mental. – Emplean un modelo de solución con fracciones usuales denominadores 5 y 6. – Participan solicitando repaso de conocimientos previos y respondiendo positivamente a la motivación al logro.

Interaccional	Docente: – Expresa claramente y en lenguaje adecuado al nivel de los estudiantes, resolviendo los conflictos semióticos que surgen durante la problematización. – Estimula la participación de los estudiantes mediante la disposición de equipos colaborativos para la resolución de situaciones problematizadas. – Abandona progresivamente el rol de andamio, permitiendo que los estudiantes asuman el rol protagónico en el proceso de aprendizaje. – Realiza seguimiento sistemático de los niveles alcanzados por los estudiantes en las capacidades previstas. Estudiantes: – Participan en el transcurso de la clase expresando dudas e intentando resolver incógnitas. – Manifiesta resistencia a la constitución de equipos colaborativos estructurados por el docente, prefieren elegir por sí mismo, los compañeros de equipo. – 59,09 % de los estudiantes asumen autonomía en la resolución de problemas de situaciones aditivas, multiplicativas y modelos de solución con fracciones, interpretación de gráficas y cálculo mental.
Mediacional	Docente: – El aula cuenta con espacio e iluminación adecuada para el número de estudiantes del curso. – Utiliza materiales didácticos estructurados y no estructurados, disponibles en el aula y en el entorno. – Las sesiones de clase disponen de tiempo suficiente para el desarrollo eficiente de los contenidos. – Prioriza el tiempo de clase acorde a la complejidad de los contenidos. Estudiante: – Reconocen, describen, manipulan, comparan y asocian con sus vivencias los materiales didácticos y las representaciones matemáticas que logran expresar a través de ellos.
Afectiva	Docente: – Promueve la empatía con las prácticas matemáticas enfatizando la precisión y las aplicaciones cotidianas. – Enfatiza la cualidad argumentativa de la matemática. – Las herramientas didácticas disponibles despiertan el interés de los estudiantes. Estudiantes: – Demuestran empatía por los ejercicios didácticos que comprenden juegos y material físico. – Ejercen con agrado argumentación en situaciones aditivas, multiplicativas e interpretación de gráficas. – Practican autoevaluación al finalizar las sesiones de clase.
Ecológica	– Los contenidos se adscriben al currículo nacional de educación de la matemática para el 4to grado de educación básica. – Los contenidos se adscriben a la modalidad de Educación Intercultural Bilingüe y desarrollan actividades didácticas etnomatemáticas. – Los contenidos se asocian con otras áreas de conocimiento. – Los contenidos promueven la conformación de valores.

Fuente: Elaboración propia.

DISCUSIÓN

La enseñanza observada durante las sesiones desarrolladas a través de la implantación de los módulos de uso de materiales didácticos para la enseñanza de la matemática en el cuarto grado de la Institución Educativa (IE) Aplicación Bilingüe Intercultural Yarinacocha, permitió la identificación disgregada de los componentes de la idoneidad didáctica, presentes en las acciones observadas durante el desempeño docente y el desempeño del estudiantado. Estimando que la idoneidad didáctica puede ser interpretada como un criterio sistémico de pertinencia (adaptación al proyecto de enseñanza) de cierto proceso de instrucción, cuyo mayor marcador de carácter puede ser la correspondencia entre los significados parciales logrados por los estudiantes y los significados institucionales previstos/ejecutados. (Godino *et al.*, 2005).

La enseñanza observada, consintió que en el ámbito de la *idoneidad epistémica* la problematización de situaciones utilizando expresiones matemáticas al inicio de las sesiones, estimulaba a los estudiantes a participar, a formular preconcepciones que a su vez han permitido al profesor identificar el nivel de conocimiento previo que los estudiantes poseían en relación con el tema a ser tratado en cada sesión de clase, hecho coincidente con los elementos de *idoneidad cognitiva* definidos previamente al comienzo de este artículo. Cabe señalar que, al inicio de las sesiones de clase que comprendían 15 minutos, se observó cierto nivel de participación por parte de los estudiantes.

En cuanto a la matematización manipulativa, se instó a los estudiantes a participar en la realización de los ejercicios de identificación de valor posicional de las cifras, operaciones de adición y sustracción en el sistema decimal, operaciones de multiplicación y división, evidenciándose *idoneidad interaccional, epistémica y cognitiva* durante cada una de las sesiones de enseñanza matemática desarrolladas mediante la implantación del método modular, tal como lo señala Godino (2017). Observación que confirma los resultados obtenidos por la mayoría de los estudiantes que alcanzaron el nivel de "Logro".

En cuanto al uso de materiales no estructurado como estímulo inicial, se demostró la existencia de *idoneidad mediacional* en el establecimiento de relaciones entre los objetos matemáticos utilizados por los estudiantes, quienes progresivamente, lograron utilizar definiciones, procedimientos esenciales y relaciones entre objetos matemáticos. Observación que es cónsona con el número de estudiantes que logró ubicarse sobre el nivel de "Inicio", de los cuales más de

la mitad demostró haber obtenido el "Logro" de las capacidades matemáticas correspondientes al cuarto grado de educación básica.

Respecto a la esfera de la *idoneidad afectiva*, la promoción de las actividades colaborativas durante la manipulación de materiales didácticos estructurados y no estructurados, permitió promover la empatía para con las prácticas matemáticas, enfatizando la precisión, las aplicaciones cotidianas y la capacidad de los estudiantes para utilizar lenguaje matemático con seguridad. Observándose que, en lo referente a la capacidad comunica y representa ideas matemáticas, la mayoría de los estudiantes superaron el nivel "Inicio", de los cuales un poco menos de la mitad obtuvo el nivel de "Logro". Resultados que muestran una doble dimensión, debido a que, en principio, durante la enseñanza se pudo observar la *idoneidad cognitiva, mediática y ecológica* de los módulos en la enseñanza de la matemática, pero luego, se observó una segunda dimensión, correspondiente a la *idoneidad interactiva-afectiva*.

Es así como las actividades didácticas implementadas durante el desarrollo de las sesiones modulares, se mostraron eficientes en cuanto al sentido inclusivo, al cerrar las brechas que pudiesen existir entre los estudiantes que se encontraban en el nivel "Logro" y los estudiantes que se encontraban en los niveles de "Inicio" y "Proceso". Por cuanto al inicio de las sesiones, se observó que cuando se les solicitaba a los estudiantes que debían conformar equipos de trabajo, con equipos colaborativos previamente estructurados por el docente, ellos manifestaban resistencia a tal constitución, argumentado que preferían elegir por si mismos a sus compañeros de equipo, no obstante, una vez conformados los equipos establecidos por el docente e, iniciadas las actividades colaborativas, tal resistencia cedía.

Por otra parte, la incorporación de los estudiantes que habían alcanzado el nivel de "Logro" como agentes motivadores de los estudiantes que se encontraban en el nivel "Inicio", demostró *idoneidad interactiva-afectiva* durante el ejercicio modular. Logrando observar que, en su mayoría, estos estudiantes lograron pasar al nivel "Proceso", y que casi la mitad de ellos, lograron alcanzar el nivel de "Logro". Aunado a ello, la capacidad razona y argumenta, es lograda o se encuentra en proceso por la mayoría de los estudiantes. Resultados que expresan *idoneidad epistémica, cognitiva, mediacional, e interactiva*, asociada a un alto componente de *idoneidad afectiva*, donde la interacción entre pares estimula la inclusión y la empatía colectiva hacia los objetos matemáticos.

El aumento de los estados de resiliencia matemática quedó expresado a través de las actividades que realizaron los estudiantes, quienes, solicitaron que

se examinaran aspectos especialmente complejos, como los números enteros y las operaciones con fracciones. Otra muestra de resiliencia matemática se expresó en la resolución de problemas de situaciones aditivas, multiplicativas y modelos de solución con fracciones, interpretación de gráficas y cálculo mental. Estos resultados concuerdan con la investigación de Mota, Henríquez, Oliveira (2016), quienes señalan que al proporcionar a los estudiantes estrategias alternativas para dominar la enseñanza, estos tienden a provocar una resiliencia matemática. Considerando que, esta expresa el efecto *interactivo-afectivo* producto de la distribución de responsabilidades entre los estudiantes durante el desarrollo de las actividades lúdicas.

Los estudiantes exhibieron altos niveles de empatía por los ejercicios didácticos que incluyen juegos y material físico, lo que coincide con los resultados de la investigación de Zumaeta *et al.,* (2018) quienes establecieron la relación directa entre empatía (idoneidad afectiva) y cognición. Ello se expresa en el ejercicio de la argumentación en situaciones aditivas, multiplicativas e interpretación de gráficas expresando satisfacción y agrado, al explicar usando apropiadamente expresiones matemáticas.

De manera similar, un estudio realizado por Zaragoza, *et al.* (2016), sobre los efectos positivos de la didáctica lúdica en la enseñanza de la Química, coincide con los resultados del presente estudio en la trascendencia de los elementos *afectivos-interactivos* que promueven la resiliencia del estudiantado, durante el abordaje de disciplinas tradicionalmente consideradas complejas.

Por su parte, la idoneidad ecológica quedó evidenciada cuando más de la mitad de estudiantes que se encontraban en el nivel "Inicio", solo una tercera parte de ellos, permanecían en ese nivel posterior a las sesiones modulares de uso de materiales didácticos para la enseñanza de la matemática. Además de esto, la enseñanza observada demostró la utilidad de los conceptos y argumentos matemáticos por parte de los estudiantes, quienes fueron capaces de describir el entorno utilizando definiciones matemáticas básicas e identificando objetos matemáticos presentes en el ambiente.

Durante el desarrollo de los módulos de uso de materiales didácticos para la enseñanza de la matemática en el cuarto grado de la Institución Educativa (IE) Aplicación Bilingüe Intercultural Yarinacocha fueron identificados los seis indicadores de la idoneidad didáctica definidos por Godino (2011):

1. Idoneidad epistémica: Los módulos están diseñados para que el estudiante logre identificar signos y significados referentes de contenidos específicos de la matemática mediante actividades didácticas de corta duración.
2. Idoneidad cognitiva: Los módulos están diseñados conforme al conocimiento que los estudiantes han adquirido previamente, posibilitando que el docente diagnostique tempranamente que los nuevos signos y significados se encuentran en la zona de desarrollo próximo de los alumnos.
3. Idoneidad interaccional: Los módulos están diseñados para identificar los signos y significados referentes de temas específicos de la matemática, sean comunes entre docentes y estudiantes resolviendo los conflictos semióticos tempranamente.
4. Idoneidad mediacional: Los módulos cuentan con recursos didácticos básicos dispensados por la institución y recursos didácticos provenientes del entorno comunitario. Los recursos institucionales disponibles comprenden material estructurado: Yupana o ábaco inca, ábaco cerrado, poliedros, regletas de Cuisenaire, geoplano, bloques aritméticos multibásicos de Dienes base 10 (cubos, planos y barras), bloques lógicos, dominós y baldosas aritméticas. El material no estructurado provenientes del entorno comunitario corresponde a todos los cuerpos que posibiliten la construcción física o imaginaria de los objetos matemáticos: Cestería, redes, tejidos, paletas, cerámica y entorno ambiental.
5. Idoneidad afectiva: Los módulos están diseñados bajo la teleología que los estudiantes desarrollen empatía por el conocimiento de contenidos específicos de la matemática.
6. Idoneidad ecológica: Los módulos están adscritos al currículo nacional para la enseñanza de la Matemática y desarrollan actividades didácticas etnomatemáticas.

Lo anteriormente descrito producto del análisis y valoración de las observaciones realizadas, permite reconocer que el hecho de adquirir competencias en cuanto a la idoneidad didáctica a través de los módulos orientados al desarrollo de las capacidades matemáticas implementados en el cuarto grado de la Educación Básica, brindan al docente la posibilidad de reflexionar sobre su práctica didáctica, con el fin de que esta sirva para orientar futuras intervenciones y, en consecuencia, mejorar su praxis.

CONCLUSIÓN

La observación del proceso llevado a cabo para el desarrollo de las capacidades matemáticas durante las sesiones modulares, permitió valorar la importancia de los seis componentes de la idoneidad didáctica y explicar la complejidad ontosemiótica implícita en los procesos didácticos, a partir de la estructura objetiva y subjetiva de los módulos para el uso de materiales de enseñanza de la matemática implementados en el cuarto grado de la Institución Educativa (IE) Aplicación Bilingüe Intercultural Yarinacocha.

En consecuencia, se pudo observar que, durante el desempeño de actividades participativas planificadas dentro de los módulos de uso de materiales didácticos implementados para la enseñanza de la matemática en el cuarto grado, se logró identificar la presencia de los indicadores: idoneidad epistémica, interactiva-afectiva, e idoneidad mediacional. Indicadores que bien expresan las potencialidades de la matematización manipulativa, desarrollada mediante la aplicación de estrategias modulares colaborativas, donde el estudiante adquiere conocimientos matemáticos a través de la experiencia con materiales didácticos estructurados y no estructurados, en interacción con el grupo y con el entorno.

Asimismo, la idoneidad mediacional, cognitiva y ecológica de los materiales didácticos implementados durante las sesiones de clase, quedó evidenciada a través del desplazamiento logrado por dos tercios de los estudiantes del nivel "Inicio" hacia el nivel "Proceso" y desde el nivel de "Proceso" al nivel de "Logro".

Por otro lado, la idoneidad afectiva de la estrategia modular para la enseñanza de la matemática quedó expresa en la resiliencia matemática. Por cuanto, los estudiantes manifestaron agrado y satisfacción al resolver situaciones aditivas, multiplicativas e interpretación de gráficas, usando apropiadamente expresiones matemáticas.

Finalmente, cabe destacar la importancia que tiene la noción de idoneidad didáctica y la diversidad de aplicaciones que se requiere para establecer un acercamiento entre la didáctica descriptiva-explicativa de la matemática a través de los módulos de uso de materiales didácticos orientados al desarrollo de capacidades matemáticas y, en consecuencia, su valoración en el diseño, ejecución y evaluación de las intervenciones educativas según el nivel escolar. A sabiendas que, las inquietudes e interrogantes sobre el diseño, aplicación y evaluación de las intervenciones didácticas, precisan de la implantación o el perfeccionamiento de teorías instruccionales, así como de herramientas para dar a conocer las distintas posibilidades de intervención en el aula que permitan orientar acciones de mejora, además de explicar por qué suceden determinados acontecimientos y fenómenos en el hecho educativo.

REFERENCIAS

Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32*(60), 255-278.

Breda, A., Font, V., do Rosário, V. M. y Villela, M. (2018a). Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. *Transformación, 14*(2), 162-176.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007a). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R, y Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean journal for research in mathematics education, 4*(2), 1–26.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME),* Recife (Brasil).

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 90-113**.**

Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE) (2016). Informe de Resultados del Tercer Estudio Regional Comparativo Explicativo (TERCE). *REICE. Revista Iberoamericana Sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 14*(4).

Ministerio de Educación del Perú. [MINEDU]. (2016). *Plan nacional de educación intercultural bilingüe.* Lima. MINEDU.

Ministerio de Educación del Perú [MINEDU] (2016a). *Diseño Curricular Nacional.* Lima: MINEDU.

Ministerio de Educación del Perú. (2018). *Resultados del ECE 2018.* Lima. MINEDU.

Ministerio de Educación el Perú [MINEDU]. (2017) Resultados evaluación PISA 2015.

Miranda, I. y Gómez A. L. (2018). La enseñanza de las matemáticas con el enfoque de la Teoría de Comunidades de Práctica. *Educación Matemática, 30*(3), 277-296.

Mota, A., Henríquez, A. y Oliveira, L.A. (2016). El desarrollo de la capacidad de resiliencia matemática: La voz de los estudiantes sobre el uso de las TIC en la aula. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 14*(1), 67-88.

OCDE. (2019). El programa PISA de la OCDE Qué es y para qué sirve. OCDE.

UNESCO. (2015). *TERCE: Los aprendizajes de los estudiantes de América Latina y el Caribe. Tercer reporte de los resultados del Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo.* Santiago de Chile: OREALC/UNESCO.

UNESCO. (2019). Proyecto Principal de Educación en América Latina y el Caribe (PPE, 1980-2000 Santiago de Chile: UNESCO.

UNESCO. (2019a). Proyecto Regional de Educación para América Latina y el Caribe (EPT/PRELAC). Santiago de Chile: UNESCO.

Vygotsky, L. S. (2007). *Pensamiento y habla.* Colihue SRL.

Zaragoza, E., Orozco, L. M., Macias, J. O., Núñez, M. E., Gutiérrez, R., Hernández, D., Navarro, C. L., de Alba, M., Villalobos, R. M., Gómez, N. A., Cerda, R.I., Gutiérrez, A. D. y Pérez, K. A. (2016). Estrategias didácticas en la enseñanza-aprendizaje: lúdica en el estudio de la nomenclatura química orgánica en alumnos de la Escuela Preparatoria Regional de Atotonilco. *Didáctica de la Química, 27*(1), 43-51.

Zumaeta, S., Fuster, D. y Ocaña, Y. (2018). El afecto pedagógico en la didáctica de la matemática - Región Amazonas desde la mirada fenomenológica. *Propósitos y Representaciones, 6*(1), 409-462.

Ronald Gamarra Salinas

Dirección: Carretera a San José 0.63 Km-
Universidad Nacional Intercultural de la Amazonia- Yarinacocha-Perú.
Teléfono: (061) 576479

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN DOI: 10.24844/EM3302.03

Exploración de estrategias de enseñanza orientadas a la inclusión de todos los alumnos en la clase de matemática. Resultados de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores

A search for teaching strategies aimed at the inclusion of all students within the mathematical class. Results from a collaborative work by teachers and researchers

María Emilia Quaranta,[1] María Mónica Becerril,[2]
Patricia García,[3] María Paula Pérez,[4] Patricia Sadovsky[5]

Resumen: Nuestra investigación se inscribe en una línea de trabajo en la que colaboramos con docentes de escuela primaria para analizar de manera conjunta problemas de enseñanza de la matemática. En una de las escuelas las maestras manifiestan preocupación porque en todos los grados existen niños que no logran participar del trabajo matemático con sus compañeros. Esta situación dio lugar a la realización de una pequeña indagación por parte de las mismas docentes para comprender mejor el posicionamiento de esos alumnos. El proceso de análisis que tuvo lugar a partir de la misma, así como la realización de una escritura conjunta permitieron en el grupo profundizar las relaciones entre enseñanza y aprendizaje, ajustar las interpretaciones que se hacían acerca de los conocimientos de los alumnos, subrayar el carácter institucional de los aprendizajes matemáticos de los niños y su inscripción en una trayectoria a lo largo del recorrido escolar.

Fecha de recepción: 21 de agosto de 2020. **Fecha de aceptación:** 03 de febrero de 2021.

[1] Universidad Pedagógica Nacional, Argentina, memiliaquaranta@gmail.com. orcid.org/0000-0002-3760-2369
[2] Universidad Pedagógica Nacional, Argentina, monicabece@gmail.com. orcid.org/0000-0002-3922-447X
[3] Universidad Pedagógica Nacional, Argentina, patgarcia41@speedy.com.ar. orcid.org/0000-0002-6247-0310
[4] Universidad Pedagógica Nacional, Argentina, mpaulaperez48@gmail.com. orcid.org/0000-0001-9190-132X
[5] Universidad Pedagógica Nacional, Argentina, patsadov@gmail.com. orcid.org/0000-0001-6703-3315

Palabras clave: *investigación colaborativa – análisis de las prácticas docentes – enseñanza de la matemática – estrategias de intervención docente – inclusión de los alumnos.*

Abstract: Our line of research involves collaborative work between researchers and primary school teachers in which we jointly analyze problems related to mathematics teaching. In one of the participating schools, the teachers express concern that in every grade there are children who are not able to engage in the mathematical work with their peers. This situation leads to an exploration by the teachers in order to better understand how these students are positioned. Both the analysis process as well as the collaborative writing process led the group develop a deeper understanding of the relationship between teaching and learning, an adjustment of the interpretations of students' knowledge, and an emphasis on the institutional nature of students' mathematical learning as part of their schooling trajectory.

Keywords: *collaborative research – analysis of teaching practices – mathematics teaching and learning – teaching intervention strategies – inclusion of students.*

1. INTRODUCCIÓN

Nuestro grupo de investigación[6] estudia, desde una aproximación colaborativa (Bednarz, 2013), el funcionamiento de espacios de trabajo con maestros y directores de escuela primaria. Se busca analizar conjuntamente los problemas de enseñanza de la matemática que enfrentan las y los docentes en sus escuelas y explorar estrategias de intervención en las aulas que atiendan a las elaboraciones realizadas en el espacio colaborativo.[7] La producción matemático-didáctica de los grupos en los que hemos participado y la problematicidad inherente al funcionamiento de la colaboración constituyen los ejes de la indagación (Sensevy, 2011).

[6] Se enmarca institucionalmente en el departamento de Ciencias y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional Unipe, Argentina.

[7] En cada una de las escuelas en las que fuimos trabajando, hemos constituido un grupo con maestras y maestros que se integraban de manera voluntaria y al que también asistían integrantes del equipo directivo y con los que nos reuníamos quincenalmente. Denominamos espacios colaborativos (EC) a estos ámbitos de trabajo.

Diversos artículos comunican resultados que fuimos obteniendo. Nos hemos referido a los modos en que los intercambios han dado lugar a la identificación de nuevos contenidos a enseñar (Sadovsky *et al.*, 2015) y al papel de la interpretación compartida de las estrategias de los alumnos para alcanzar una mayor comprensión de la enseñanza de la matemática (Sadovsky *et al.*, 2015). Nos hemos referido también a la identificación, en el marco de las discusiones con las maestras, de ejes de análisis para la clase (Sadovsky *et al.*, 2019) y a problemas metodológicos inherentes a la consolidación de un intercambio colaborativo, asumida una perspectiva en la que buscamos que las distintas posiciones se puedan expresar de manera fundamentada en un clima de confianza (Sadovsky *et al.*, 2016; Sadovsky *et al.*, 2019).

En la Escuela 30, una de las instituciones en las que veníamos trabajando desde el año 2016 con las maestras de 1° a 4° grado y su directora, la intervención docente con relación a los aprendizajes de los alumnos –su identificación, la diversidad entre los niños, los progresos individuales y colectivos, el grado de estabilidad alcanzada, los modos de ayudar– fue un eje organizador de las conversaciones del grupo a partir del cual se derivaron distintas dimensiones de análisis (Sadovsky *et al.*, 2019). Una de ellas, en particular, refiere a una tensión permanente por parte de las maestras entre *guiar* a los alumnos hacia la respuesta esperada y *promover el desarrollo* de sus ideas como estructurante de la interacción. Es decir, frente al desconcierto que generan ciertas producciones de los niños, se reconoce que muy frecuentemente se opta por ir comunicando el modo más convencional de resolución.

En el inicio de las reuniones de 2018, las docentes visualizan un panorama preocupante: por una parte, llegan varios chicos a primer grado sin haber asistido al nivel inicial y, en consecuencia, ajenos a algunas prácticas escolares que las maestras suelen considerar disponibles; por otra, alumnos de diferentes grados –no se sabe precisar cuántos– no llegan a involucrarse en las propuestas de trabajo matemático, fundamentalmente en la resolución de problemas aritméticos.

La directora de la escuela plantea con fuerza que, este problema es institucional y requiere encontrar un modo de abordarlo. Subraya la necesidad de interactuar con aquellos niños que parecen distantes frente a las tareas como condición para comprender cómo están pensando e intervenir para que vayan

cambiando de posición. Los registros de las reuniones[8] muestran que retoma en varias oportunidades la dualidad ya discutida entre *guiar a los alumnos* y *promover el desarrollo de* sus ideas para dar marco a la elaboración que propone. Al mismo tiempo, señala la complejidad que esto supone y valoriza el EC como una oportunidad para construir estrategias de manera conjunta. Asume una posición inclusiva que marca con contundencia una orientación pedagógica central y reconoce que para poder sostenerla se requieren prácticas específicas que es necesario producir. Releva, asimismo, que producir estrategias que contribuyan a que todos los alumnos se involucren en el trabajo matemático no se reduce a una cuestión de voluntad. Nos interesa resaltar el papel que cumple el EC en hacer visible para ella –y para todas– el componente de producción original que supone la gestión de las orientaciones pedagógicas desde el papel del directivo.

La problemática que presenta la directora es compartida, de distintas maneras, por el grupo de docentes. La maestra de tercer grado agrega dos cuestiones estrechamente relacionadas, referidas al progreso de los alumnos. Expone su preocupación por lograr que los niños avancen en las estrategias de cálculo ya que, según su visión, la mayoría apelaba a recursos de conteo. Esto la lleva a expresar el interés de realizar acuerdos en todo el equipo docente respecto de los procedimientos que se enseñarían en cada grado. Analiza también que, cuando intenta explicar para todos nuevos procedimientos más elaborados, algunos alumnos quedan sin comprender. Entendemos que en este planteo está implícita otra dualidad ya tratada en el EC: la relación entre las *interacciones personales y las grupales* en el aula (Sadovsky *et al.*, 2019). Notemos que esta docente amplía el problema originalmente planteado por la directora: es necesario mirar la inclusión de los niños en la tarea matemática –también– considerando los chicos que no comprenden las explicaciones grupales.

En este contexto, y como estrategia para abordar las cuestiones expuestas, la maestra de cuarto grado propone un proyecto colectivo: plantear a todos los alumnos –de primero a sexto– un problema que implicara una resta, un enunciado con la misma estructura para toda la escuela, adaptando los datos a cada grado. Más específicamente, proyecta un dispositivo en dos etapas: en la

[8] Como indicamos en otros trabajos en los que nos detuvimos en las estrategias metodológicas de la investigación, todas las reuniones son grabadas. Entre cada encuentro y el siguiente, se elaboran registros integrando la desgrabación y las notas de las investigadoras, se realiza un primer análisis para preparar una síntesis escrita de la reunión, con las principales cuestiones discutidas, así como también interpretaciones del equipo de investigación que proponemos como hipótesis a validar/confrontar con las docentes. Estas síntesis constituyen una referencia para el inicio de la reunión siguiente y el avance de las conversaciones.

primera, los alumnos resolverían sin ayuda –salvo las aclaraciones relativas a una primera comprensión de la tarea– y, en la segunda, que se realizaría en los días siguientes, cada docente interactuaría con los chicos que, por diferentes razones, no pudieron avanzar en una resolución. Del desarrollo de esta propuesta –de las discusiones a las que dio lugar, de las transformaciones con relación al sentido que el grupo le fue atribuyendo a este accionar, del papel que jugó la escritura colectiva de los propósitos– damos cuenta a continuación.

2. RELEVAR LAS PRODUCCIONES DE LOS ALUMNOS PARA REPENSAR LA INCLUSIÓN DE TODOS EN EL TRABAJO MATEMÁTICO ESCOLAR

La maestra de cuarto grado concibe el dispositivo que sugiere como respuesta a los problemas que se estaban discutiendo en el grupo colaborativo. En primer lugar, como una oportunidad para disponer de producciones de todos los alumnos para analizar en el EC. El análisis de trabajos escritos de los niños era una práctica ya instalada desde el primer año de funcionamiento. En esta ocasión se busca generar un conjunto de datos para explorar según las preocupaciones compartidas. Esta docente anticipa que las producciones pondrán de manifiesto distintos tipos de dificultades. Señala también que esta exploración va a constituir una oportunidad para vincular la interpretación de las producciones de los alumnos, sobre todo de algunos de ellos, en términos de ideas y dificultades respecto del trabajo matemático, con posibles intervenciones docentes que los ayudarían a progresar. Explicita su intención al diferenciar los dos momentos de la indagación que mencionamos: a) confrontar aquello que los niños pueden sin y con ayuda y hacer visible de esta manera el papel de la intervención; b) elaborar posibles mediaciones para esas situaciones. *Qué les pasa a aquellos alumnos que parecen tan distantes cuando enfrentan la tarea y cómo los ayudamos*, parecen ser preguntas que subyacen a la propuesta:

> **M 4°**[9]: Haríamos un primer trabajo para ver qué hacen y un trabajo posterior a partir de eso. No es solamente hacer un diagnóstico sino, después, volviendo, viendo las realidades ...

[9] Maestra de 4° grado.

D[10]: Claro, lo que decís, qué pasa sin ninguna intervención y después qué pasa con las intervenciones.
M 4°: Cómo intervenimos en esos casos.
D: Esas hojas en blanco, cómo se interviene.
M 4°: Y si aparece algo que vos decís "y esto no tiene nada que ver", ver si aparece en uno solo, si aparece en varios y tratar de entender por qué aparece eso.

Se va haciendo explícito el sentido de los dos momentos que concibe para la indagación y el tipo de análisis que se imagina, señala la complejidad que tiene la interpretación de algunas producciones, expresa la necesidad de pensar en las intervenciones en el largo plazo y de coordinar las trayectorias personales de los niños con el avance de cada grupo:

M 4°: En un segundo paso, qué hacemos con los resultados que tenemos. A partir de los resultados, vamos a tener que ver si un gran porcentaje no hace o un gran porcentaje hace cosas que... Supongamos que algunas nos cuesta entender pero después uno termina entendiendo por qué hacen lo que hacen... Chicas, todas tenemos nenes que quizás uno les da una situación y hacen cosas que realmente, ni ellos pueden explicarlas (...) donde uno tiene que intervenir un poco más, tiene que guiar un poco más. Digo, primero saber cuál es nuestra realidad y, entonces, una vez que sabemos la realidad, me parece que vamos a poder determinar qué hacer con nuestros alumnos y después acordarnos, cómo vamos a continuar con ellos el año que viene.

A medida que se van precisando y compartiendo en el EC las preocupaciones de algunas maestras relativas a la inclusión y al avance de todos los niños, cobra forma un dispositivo en el que se convoca al colectivo docente a embarcarse en la búsqueda de datos cuyo análisis permitiría avanzar en la elaboración de estrategias para la acción docente como respuestas a los problemas compartidos. Notemos la aproximación investigativa de esta propuesta, novedosa como iniciativa, que surge desde el interior de las prácticas docentes y, entendemos, fue favorecida por el desarrollo del grupo colaborativo.

[10] Directora

3. LOS INTERCAMBIOS A RAÍZ DE LAS PRODUCCIONES RECOLECTADAS: UN ESPACIO PARA TRANSFORMAR SENTIDOS, EVOCAR EXPERIENCIAS Y FORMULAR PROPUESTAS

Cuando las docentes traen al EC las producciones recolectadas en sus respectivas aulas y se comparte una primera ronda de relatos, se inicia un proceso de análisis que va enriqueciendo el sentido original de la indagación. A raíz de las resoluciones de los niños obtenidas en cada grado, se evocan en la conversación experiencias ya realizadas, se hacen interpretaciones posibles y se formulan nuevas propuestas que se entraman con la reflexión compartida sobre el material. Al disponer de un conjunto de datos recogidos con un propósito específico, se hace posible tomar distancia de las acciones de enseñanza más inmediatas que solían ocupar los intercambios del grupo y se favorece el tratamiento de cuestiones que atraviesan las prácticas de toda la institución, aun con las distintas interpretaciones de cada integrante. La consideración de las producciones de los niños habilita una reflexión que se refiere simultáneamente al alumno, a su grado y a la escuela. Asimismo, fue notorio, en el momento de presentación y análisis de los datos, que cada maestra orientó su mirada en función de las preocupaciones que había manifestado cuando se preparaba esta indagación.

En el proceso de análisis que tuvo lugar en el EC a raíz del dispositivo de indagación, los aportes de las maestras y de la directora, en algunos momentos, refieren al valor de la intervención docente y a posibles estrategias de acción de cara a los asuntos que preocupan y, en otros, se centran más en los recursos que necesitan para interpretar las ideas que pusieron en juego los alumnos, desde una posición en la que la intención de comprender posterga momentáneamente las urgencias de la acción. Es claro que estas dos perspectivas, cuyos aspectos principales desarrollaremos a continuación, se entraman permanentemente en la conversación y las separamos solo para organizar la comunicación.

3.1. Estrategias de acción

En un primer análisis, cada maestra va desplegando las estrategias puestas en juego por sus alumnos y sus compañeras van realizando aportes. La directora propone hacer foco en aquellos niños que entregan su *hoja en blanco*. ¿Cómo hacer un análisis sobre la base de una *hoja en blanco*? La convocatoria es intencional y llama a la necesidad de hacerse preguntas que remiten tanto a la

tarea propuesta como al recorrido de los niños en su relación con el trabajo matemático del aula, más allá de una producción puntual. En ese contexto, se analiza el caso de primer grado que, como dijimos, venía preocupando al grupo por el ingreso de muchos niños que no habían asistido al nivel inicial.

El problema propuesto a los niños, que se mostró desajustado solo para unos pocos, plantea la complejidad inherente a la necesidad de interactuar con todos los alumnos en un aula, siempre diversa. La maestra correspondiente pide ayuda a las integrantes del EC (*Por favor, chicas, díganme, qué hacer*), a raíz de lo cual se despliegan algunas ideas para explorar en las aulas. La maestra de cuarto grado, a través de algunas sugerencias, trae un tema nodal, sobre todo en el momento de entrada de los alumnos en el trabajo matemático: la relación entre prácticas sociales que pueden constituirse en referencias y su matematización. Efectivamente, a raíz del enunciado planteado por la maestra de primero –*Yamila compró 12 figuritas pero 4 eran repetidas, ¿cuántas pudo pegar en el álbum?*–, expresa:

> **M** 4°: Si vos traés las figuritas y hacés como un álbum, proponerle al chico que lo haga, y están las repetidas y, contamos cuántas se pudieron pegar... Como un primer paso, obviamente que uno después trata..., pero quizás llevarlo a instancias de ese estilo.
> **M** 1°: Eso está bueno, eso vamos a poder hacerlo.

Otras maestras sugieren: contar el material que se reparte en el aula, seleccionar una cierta cantidad de elementos para que cada niño tenga uno. Todas ellas apuntan tanto a ampliar el caudal de experiencias de los niños como a subrayar que muchas de las acciones que se realizan en la vida cotidiana de la clase admiten una interpretación en términos matemáticos. De esta manera, emerge una cuestión de interés en las discusiones con los maestros: la necesidad de tomar en cuenta una operación intelectual que ineludiblemente deben realizar los alumnos en un proceso de matematización, la de recortar los datos relevantes de la propuesta que se les hace, operar con ellos y responder las preguntas planteadas (Peltier-Barbier, 2004). Como sabemos, este proceso requiere comprender la situación más amplia desde la cual se abstrae el enunciado. Entendemos que la sugerencia de las maestras habilita a tematizar esta cuestión en el grupo y superar las interpretaciones frecuentes que reducen la ausencia de respuestas a una dificultad en la comprensión de la consigna. En esta conversación, se hace explícita también la diferencia entre apelar a una escenificación de la situación referida y a representaciones gráficas diversas que, si bien pueden

concebirse como mediadoras en algún momento en el proceso de aprendizaje, no portan la misma carga de significación cuando la experiencia y su función como referente están ausentes.

Inscribimos en la misma tematización otro aporte de la maestra de cuarto grado, esta vez orientado a los niños que operan con los datos del problema pero, una vez centrados en el trabajo numérico, parecen perder de vista la situación de partida, como si la realización de cálculos en sí misma fuera lo más relevante del trabajo matemático. Ella propone pedir a los alumnos que expliciten la respuesta como un modo de favorecer ese retorno (*Es esto de no perder a dónde íbamos*). La discusión generada a propósito de esta última cuestión permite resignificar una antigua práctica –la de escribir la respuesta de los problemas– que tenía históricamente un carácter formal y muchas veces desprovisto de sentido para los niños. Por el contrario, en este caso se trataría de enfatizar, a través de intervenciones específicas, los vínculos entre la situación cotidiana de referencia, el problema matemático que de ella se recorta, el tratamiento numérico que admite y la respuesta obtenida. Cabe señalar que esta maestra había traído en reiteradas oportunidades a la mesa de trabajo ejemplos de su aula que daban cuenta de la necesidad de trabajar diferentes aspectos de las relaciones recién mencionadas.

La hoja en blanco convoca también a detenerse en el recorrido matemático de los niños. Al respecto, la directora insiste en *ir a buscar las ideas de los alumnos, no las que esperamos,* como condición ineludible para entablar una genuina interacción. Ella subraya que muchas veces, frente a respuestas desconcertantes, los maestros tienden a pensar que los chicos no saben nada y, al no encontrar modos de interactuar con ellos, terminan excluyéndolos, aun cuando sean docentes con una intención inclusiva y que alientan la diversidad de producciones en el aula. Interpretamos que todo ocurre como si los docentes funcionaran en sus interacciones en la clase esperando un espectro de intervenciones posibles por parte de los niños, fuera del cual les resulta muy difícil retomar su pensamiento para contribuir a transformarlo. Justamente el EC –esta es una hipótesis que surge de nuestro estudio– cumpliría la función de ampliar ese espectro, cuya mayor o menor flexibilidad podríamos pensarla dependiente de una posición que se mueve entre dos polos en tensión: uno más abierto y centrado en la búsqueda de las ideas de los niños, otro más cerrado e inclinado hacia la búsqueda de concordancia con un conjunto de expectativas.

Entendemos que la posición que se asuma frente a esta dualidad entre *ir a buscar a los niños* o *esperar unas respuestas anticipadas* depende de la

convicción de que vale la pena atribuir –a título hipotético– estatuto de conocimiento a las ideas de los niños y de la confianza en la fertilidad de una interacción con ellas (Robert, 2003). Compartir los análisis acerca de los intercambios en la clase, elaborar hipótesis al respecto y explorarlas en la práctica son componentes de la construcción de ese posicionamiento.

En esta dirección interpretamos las intervenciones de la directora en el EC cuando insiste en la necesidad de entender lo que hacen los chicos y apelar a la colaboración en el equipo cuando se hace difícil esa comprensión:

> **D**: No siempre es fácil saber qué está pensando el chico porque a veces tampoco ellos lo pueden verbalizar, y eso me parece que es el trabajo más valioso que hacen ustedes, ese poder intervenir y buscar en cada uno cómo ayudarlos a ir avanzando. La intervención docente es difícil, por eso estos espacios son ideales para esto. Algunos chicos aprenden a pesar de todo y otros, si no hay intervención docente, no aprenden.

A lo largo de las reuniones, son numerosas las expresiones de este tipo por parte de la directora en las que subraya la necesidad y la complejidad de la intervención docente, el costo afectivo en términos de frustración que muchas veces tiene la dificultad para comprender lo que los niños hacen. Agrega que estas intervenciones requieren elaboraciones específicas en función del contenido tratado. En este contexto en el que se instala la idea de *ir a buscar a los niños*, apela a un ejemplo de la propia escuela, que refiere a un alumno de tercer grado de los que *dejaban la hoja en blanco* y que, a través de un proceso de interacciones sostenidas con él a lo largo de los años, logra avances significativos. Para ilustrarlos, trae a la mesa una resolución reciente del niño, a raíz de un problema parecido a los de la indagación (*En un salón hay 93 sillas y 18 personas sentadas. ¿Cuántas sillas vacías hay?*). [figura 1]

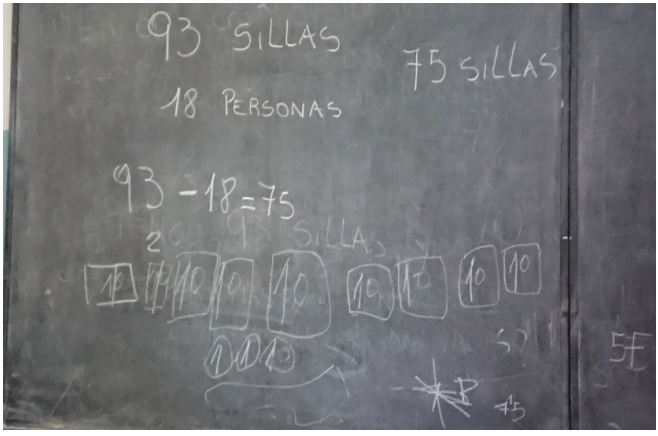


Figura 1. Producción de un alumno que logra avances significativos a partir de un proceso de interacciones sostenidas.

Este niño reconoce la resta como una operación que le permite encontrar la diferencia solicitada y apela a una descomposición de los números para operar. Pero, recién cuando explica que el 2 –que está arriba del 10 tachado– *es como dar el vuelto,* la directora puede interpretar que los cuadraditos dibujados representan para él billetes. Es decir, implícitamente apela a otro marco –el contexto del dinero– para representar y resolver la situación (Douady, 1984). Notable operación intelectual para un niño que, en el inicio de su escolaridad, como dijimos, dejaba *la hoja en blanco* y que, cuando se puso foco en él y las docentes se sentaban a su lado acompañándolo en sus resoluciones, podía poner de manifiesto su comprensión de los problemas.

En el marco de análisis generado en el EC a raíz de esta indagación, cobran nueva significación experiencias acumuladas en la institución de las cuales se extraen elementos para enriquecer las elaboraciones del grupo a raíz de los problemas que se están tratando. En este sentido, toda la construcción del grupo actúa como marco de análisis y los casos referidos exceden completamente el material recolectado para esta ocasión.

El problema de los niños que *quedan afuera* fue analizado hasta acá considerando la relación inicial de los alumnos con las tareas que se les proponen. Como ya hemos anunciado, la gestión colectiva del conocimiento en la clase también plantea interrogantes e incertidumbres con relación a la inclusión educativa. Al respecto, se discute sobre dos cuestiones estrechamente relacionadas:

una vinculada al progreso en el nivel de elaboración de los procedimientos que movilizan los niños y otra, a las decisiones a tomar cuando se comparten en el espacio público del aula las producciones que realizaron individualmente o en pequeños grupos.

Orientada por su preocupación de hacer avanzar los procedimientos de los niños para problemas aditivos, la maestra de tercero clasifica las producciones recogidas para la indagación diferenciando entre aquellas basadas en el conteo –que fueron mayoritarias– de las que se apoyan en cálculos con descomposiciones decimales de los términos:

> **M 3°**: O sea, mi desafío es ahora volver, decir "bueno, ¿cómo podemos hacerlo sin contar para atrás? ¿Cómo lo podríamos hacer sin usar la grilla?". Este es mi desafío en este momento.

La cuestión del progreso en los procedimientos de los alumnos, abierta en este contexto de indagación por el planteo de esta maestra, abarcó dos planos en las discusiones sostenidas: el de los avances dentro de un mismo grado y el que implica considerarlos a lo largo de los distintos años escolares.

Con relación al interrogante de la maestra que acabamos de citar –que se ubica en el primero de los planos mencionados-, algunas integrantes del EC van volcando diferentes propuestas: aumentar el rango de los números para obstaculizar el conteo, promover que la grilla sea soporte para contar de a 10 y no solo de a 1 y relacionar ambas estrategias, utilizar el recurso del dinero (billetes de $10) como nexo entre el conteo y la descomposición decimal y confrontar distintos procedimientos en instancias de trabajo colectivo de la clase. Todas estas ideas –si bien no se desarrollaron en ese momento– aportan potencialmente elementos para la elaboración de intervenciones y, sobre todo, de explicaciones por parte de las docentes para promover el abandono del conteo a favor del cálculo, toda vez que se expone ante los alumnos una red de relaciones que permite establecer puentes entre ambas estrategias. Sin embargo, la confrontación colectiva entre distintos procedimientos propuestos por los niños es problemática y había sido tematizada previamente: hay una tensión entre alentar la difusión de procedimientos más elaborados y cuidar que todos los alumnos los puedan comprender Sadovsky *et al.*, (2019).

La directora advierte, en reiteradas oportunidades, cerca de la necesidad de prestar mucha atención al modo de gestionar en el espacio colectivo de la clase la diversidad de producciones, en particular cuáles se seleccionan, cuidando

que no queden alumnos fuera de la discusión. Este señalamiento supone, para nuestro equipo de investigación, un llamado a revisar la hipótesis según la cual el análisis colectivo de estrategias avanzadas contribuye al progreso de toda la clase en tanto puede constituir un modo de conectar a los niños con otras posibilidades. Sabemos, sin embargo, que en la práctica este impacto es incierto –puede o no ocurrir según las relaciones que cada alumno establezca con su propia producción– y que las decisiones que al respecto tomen los docentes se realizan en el marco de esa incertidumbre. Al conversar sobre nuestra hipótesis con la directora, ella la considera válida como perspectiva de trabajo pero, advierte sobre la necesidad de examinar, cada vez, el contexto de la clase. Más específicamente, señala que es prioritario tomar en cuenta el posicionamiento de los niños que se muestran más alejados del trabajo matemático.

Se mencionó un segundo plano en el análisis de los progresos de las estrategias que ponen en juego los alumnos, el del avance de grado a grado. Cada docente explicita entonces las estrategias más utilizadas por los niños para los problemas de resta, así como el rango de números en el cual se plantean los problemas. A partir de esta "puesta en común" respecto de los focos que se hacen en cada año escolar, se plantea la necesidad de realizar acuerdos institucionales. Así lo expresa la maestra de tercer grado, cuya preocupación principal –recordemos– está ligada a lograr que los niños transformen sus procedimientos:

> **M 3°**: Entonces, llega un momento en que, bueno, quizás, podríamos hacer algo institucional que quede documentado para que podamos ir ahí a ver; porque es lo que me pasa a mí, (...) que propongo secuencias que me parece que funcionarán y es difícil a veces. Tener una trayectoria para los chicos.

Como consecuencia de las discusiones que surgen, se pone de manifiesto el carácter colectivo de la enseñanza –aquello que es posible con un grupo de alumnos está condicionado, en parte, por su experiencia anterior– y es a partir de esa evidencia que se propone documentar los acuerdos que se realicen. Estos acuerdos, que van surgiendo del análisis, no se limitan a listar una serie de estrategias que se distribuirían entre los grados, sino más bien se va formulando una trayectoria para los alumnos en términos de red de relaciones para ir desarrollando y retomando a través del tiempo.

Entendemos que toda esta propuesta de acuerdos es constitutiva de la construcción de un marco común, favorecida por la existencia del EC. Asimismo, la intención de documentarlo es un modo de fortalecer la memoria

institucional y retoma a cargo de las maestras una práctica de registro instalada en el EC, cuyo valor se fue haciendo explícito en tanto referencia para volver sobre las discusiones.

Nos resulta interesante destacar que, la idea de trayectoria mencionada por la maestra de tercer grado, va teniendo una doble acepción a lo largo de las conversaciones: como proyección de la enseñanza y como recorrido que hacen los alumnos.

La idea de trayectoria va alternando entre una referencia a la historia escolar de un niño, una mirada sobre todo un grupo y una perspectiva de los grupos a lo largo de todos los grados, entramando conceptualmente los procesos de enseñanza y aprendizaje. Ya sea que se aluda a la enseñanza o al aprendizaje, a todo un grupo, a toda la escuela o a un niño, las reflexiones sostenidas mantienen en este tramo de la discusión un carácter general, que pone en segundo plano la inmediatez de las acciones del aula.

3.2 Centración en los recursos para el análisis

La necesidad de analizar y organizar los datos, que fueron elaborados a partir de preguntas específicas del grupo de maestras, favorece la construcción de herramientas de análisis y fortalece una posición interpretativa que contribuye a subrayar el carácter hipotético de la enseñanza. Comentaremos a continuación el modo en que se fueron reconstruyendo las ideas de los alumnos y, luego, nos referiremos al valor de producción que tuvo en el EC la exigencia de organizar la información.

a) ¿Qué me dice la hoja de los chicos?

La pregunta parece orientar un proceso de reconstrucción de las ideas de los alumnos, cuando las maestras se internan en el conjunto de hojas que los niños han entregado. Al querer interpretar las ideas puestas en juego en cada procedimiento, se pone de manifiesto la insuficiencia de considerar solo la traza escrita para comprenderlas.

Una primera cuestión que surge en las conversaciones es la consideración de gestos y actitudes de los niños durante las resoluciones para poder desentrañar con mayor precisión su proceso. Es así como importa si un niño borró –qué, en qué momento-, si revisó y/o corrigió, si recurre a estrategias que oculta

–esconde las manos para contar con los dedos– o si, por el contrario, agrega anotaciones que no utilizó. Veamos algunos ejemplos:

> **M 1°**: Richard hizo todos circulitos y, en vez de tacharlos, borró los 18. Los borró y volvió a contar uno por uno, todos los que quedaban. No se confundió en ninguno.

Ejemplos como este contribuyen a que se tome conciencia del valor de observar a los alumnos en el desarrollo de su trabajo para reconstruir un procedimiento. Esto confronta con una práctica usual en la que después de proponer la tarea a los niños, los docentes se retiran para retomar la interacción recién después de que han finalizado. Si bien se suele explicitar que esta práctica apunta a la autonomía de los alumnos y que la observación es un control que la perjudicaría, el ejemplo ayuda a matizar estos supuestos, toda vez que la observación se orienta a entender cómo piensan y sostenerlos en su tarea.

Una de las maestras destaca que aquello que se plasma en la hoja no espeja necesariamente el proceso de resolución usado por el niño:

> **M 3°**: Ves, ahí tenés un caso. Francisco contó para atrás y después anotó la cuenta parada, como un agregado. O sea, no siempre la cuenta responde al procedimiento.

En este caso, la traza de la hoja muestra algo muy distinto de lo que el alumno hizo, lo cual da lugar a dos reflexiones en el EC: reconoce allí un problema de resta y puede resolverlo contando pero, a la vez, desestima su procedimiento tal vez porque considera que no es del todo legítimo y que la escritura de la cuenta tiene más valor.

Las revisiones sobre la propia producción que realizan los niños también se convierten en datos relevantes a considerar:

> **M 6°**: Algunos me dieron las hojas, al rato viene uno y me dice "¿me das la hoja? Porque me parece que en algo me confundí".

¿Qué agrega esta información a la interpretación que se va construyendo? Entendemos que "habla" de un posicionamiento de compromiso intelectual con la tarea por parte del alumno y, en estrecha relación, muestra un rasgo de autonomía en tanto vuelve reflexivamente sobre la acción realizada para modificarla. A partir del relato de la maestra y de la intervención de la investigadora, el grupo analiza la resolución inicial del alumno y su corrección tratando de

interpretar, en términos de conocimientos matemáticos, los cambios introducidos. Se produce en el EC un juego entre el hecho de saber que el niño se quedó pensando después de haber entregado su hoja y la necesidad de entender las relaciones aritméticas involucradas en su accionar.

En reiteradas oportunidades las maestras relatan que solicitan a los alumnos que no borren los intentos que van haciendo. Esta intervención se relaciona con el propósito de resguardar elementos relevantes para la reconstrucción del trabajo de los niños, a la vez que se les comunica el valor de los intentos, de las búsquedas, de los procesos, además de los resultados. En una dirección similar a que los niños y la clase en su conjunto legitimen –y confíen en– los recursos utilizados, se ubica el pedido de que no oculten los dedos cuando los usan para contar.

Las hojas de los niños las condujeron a considerar otros datos relativos al trabajo matemático que apoyaran las interpretaciones. Es así como traen a colación –además de lo relevado en el momento en que resuelven– informaciones más generales que las llevan, por ejemplo, a despreocuparse por un error que entienden como una distracción o también a tener cierta cautela cuando se habla de un alumno de otro grado que no conocen. Complementan además el análisis referencias al recorrido tanto del grupo como de cada niño.

b) La interacción entre maestras e investigadoras a propósito de la clasificación de los procedimientos de los niños

¿Cómo organizar los datos recogidos alejándose de las tradicionales categorías *correcto-incorrecto* (o cualquiera de sus variantes)? ¿Por qué habría que hacerlo? Esta cuestión llegó a la mesa del EC de la mano de una de las maestras que trajo los trabajos de su grado ya agrupados según una clasificación que a ella misma le resultaba insuficiente.

> **M 4°**: El criterio de clasificación fue difícil [...] Veintiuno aplicaron el algoritmo. De esos, ocho tienen errores menores, así que hay un porcentaje alto que hizo bien. Cinco hicieron una variedad de cosas que son muy difíciles de clasificar, difíciles de entender, esas serían las más interesantes de analizar...son historias distintas, yo las separé.

Al referirse a *historias diferentes* para las producciones *incorrectas,* la docente subraya la insuficiencia de su categorización para comprenderlas. Incluso duda de cuánto comprenden algunos niños cuyas resoluciones son *correctas*. Sostiene también que la variable tiempo juega un rol importante en las resoluciones

y no es capturada en ese modo de organizar los datos. La maestra se encuentra insatisfecha por cómo había organizado el material ya que –reconoce– no le permite comprender los conocimientos que acompañan las producciones de los alumnos. Las investigadoras recogen esta preocupación y la incluyen en la síntesis que abre la reunión siguiente:

> Como siempre, meternos en el análisis de las producciones de los chicos nos entusiasma y eso volvió a ocurrir en la reunión pasada. [...]. M 4° planteó que clasificó las estrategias de los chicos pero que no le resultó fácil. Nunca es fácil porque el criterio de clasificación es personal y está muy orientado por lo que queremos saber, por lo que nos parece que debería suceder y por el rumbo que pensamos que habría que tomar. De manera que una segunda tarea que proponemos es la discusión de criterios de clasificación y la sistematización de las producciones de cada grado. Por supuesto que la clasificación se entrelaza con el análisis, por eso proponemos una tarea que sea "un poco y un poco" en la que, a medida que analizamos, construyamos criterios de clasificación.

Al recuperar las preocupaciones de la maestra, las investigadoras aportan elementos relativos al proceso de clasificación, propios del campo de la investigación: los criterios, lejos de ser preexistentes a la actividad de organización de los datos, se construyen en función de los problemas que se busca estudiar en una dialéctica entre clasificación y análisis. Esta intervención resuena en las maestras que, tras su lectura se preguntan sobre el significado de los criterios de clasificación, habilitando la posibilidad de profundizar la comprensión de esta práctica.

> **M 4°**: Pero, ¿a qué llamamos criterios de clasificación?
> **I**[11]: Podemos referenciarnos en lo que vos hiciste cuando el otro día trajiste tu relevamiento ordenado de los datos. Vos hiciste una clasificación. Además, dijiste que te había resultado difícil, cosa que nosotros compartimos. Porque el criterio no es algo ajeno a uno, no está afuera y lo agarro... cuando uno clasifica lo hace en función de algo, en base a algo.

La investigadora hace referencia al trabajo de la maestra como punto de apoyo para seguir reflexionando sobre los modos de organizar los datos y, en ese movimiento, le atribuye la capacidad de producir ella misma criterios.

[11] Investigadora

Este proceso de estudio de los datos de las aulas, al favorecer la producción de estrategias para la acción docente así como enriquecer la capacidad de análisis de todas las participantes del EC, sobrepasa ampliamente la producción de un diagnóstico que parecía ser la propuesta inicial (*queremos saber dónde estamos parados, conocer la realidad*). La búsqueda de una foto estática que intentaba capturar un momento fue cobrando, al calor del análisis, un relieve y un dinamismo que fueron dando cuenta de la cantidad de vericuetos que enfrentan los docentes para sostener la intención de incluir a todos los alumnos en el proyecto educativo.

4. LA ESCRITURA COMO PROYECTO COMPARTIDO ENTRE DOCENTES E INVESTIGADORES: UN ESPACIO PARA PROFUNDIZAR EL SENTIDO DE LAS ACCIONES REALIZADAS

Una vez desarrollada una primera vuelta de análisis, el equipo de investigación evalúa la necesidad de focalizar y profundizar las ideas que se fueron abriendo. Venía siendo una preocupación nuestra, de cara a los objetivos de la investigación, atrapar los núcleos de las conversaciones que se sostenían en el EC, ya que muchas veces se dispersaban tocando una infinidad de temas y quedaba la impresión que era difícil saldar en términos conceptuales las elaboraciones que iban surgiendo. Tomando en cuenta que las docentes venían planteando la necesidad de documentar el trabajo realizado como base para reformular juntas el proyecto de enseñanza de la matemática en la escuela, las investigadoras proponen una escritura conjunta para sistematizar los resultados de la indagación. Esta escritura surge entonces de la confluencia entre la necesidad de la escuela de conservar lo realizado y proyectar líneas de acción a futuro y la del equipo de investigación, de profundizar las discusiones y dar tiempo a conceptualizarlas. Se reúnen de esta manera, tras un objetivo común, un interés más ligado al funcionamiento institucional, con uno que busca estrategias metodológicas para promover el avance en la producción de conocimiento matemático-didáctico en el EC (Bednarz, 2013).

Compartimos el tramo de la reunión en el que las investigadoras invitan a las maestras a escribir los propósitos de la indagación y en el que se expresa la convergencia de intereses en esta escritura:

> **I**: O sea, una primera cosa que nosotras proponemos a ustedes, si están de acuerdo, es recuperar juntas y escribir con más detalle, qué propósito teníamos. Para qué hicimos ese relevamiento de procedimientos. Pensábamos hacer un texto juntas, ponerlo ahí [proyectarlo con el cañón a medida que se va escribiendo] para que lo vayamos viendo, corrigiendo y que quede como referencia institucional para el futuro, ustedes decían eso. Entonces, vamos escribiendo y corrigiendo juntas.
> **M 4°**: Claro, no solo un registro hacia atrás de lo que uno va aplicando, sino para llegar a acuerdos a futuro, de cuáles deberíamos compartir, me parece, ¿no?

El planteo de escritura conjunta genera entusiasmo y da lugar a una escena compleja, con numerosas idas y vueltas en la que cada término o idea que se va a escribir genera una discusión que va mucho más allá del significado estricto de aquello que se quiere expresar. Al revisar la reunión, las investigadoras que la coordinaron dan cuenta de una gran tensión entre sostener el proyecto de escritura y habilitar los debates que suscitaba el hecho de volver sobre las motivaciones de la indagación. El desorden al que refieren las coordinadoras –y que reencontramos al leer el registro– parece ser un rasgo de la exigencia de producción que esta situación supone. Había una preocupación constante de las maestras por ser fiel a las intenciones que las comandaron, llevando a prolongar las discusiones en la búsqueda de mayor minuciosidad. Además, la tarea que se encara es novedosa para todas: por una parte, es la primera vez que en el EC se vuelve con cierta rigurosidad sobre un proyecto que abarcó un tiempo relativamente prolongado para precisar los propósitos que lo orientaron; por otra, la escritura conjunta, desarrollada en el ámbito escolar, con tiempos limitados para arribar a una cierta producción, acentúa la complejidad mencionada.

Compartimos a continuación un análisis de la producción que tuvo lugar en el marco de la complejidad que acabamos de describir, refiriendo a: los temas de discusión que estuvieron presentes y que se profundizaron a partir de nuestra convocatoria a escribir los propósitos de la indagación; las reflexiones que suscita la necesidad de elegir los términos para expresar una idea; y las consideraciones que se desarrollan en el EC sobre el alcance y los límites de la indagación.

4.1 Relaciones entre enseñanza y aprendizaje en un marco institucional

La pregunta de una de las investigadoras dirigida a comenzar el proceso de escritura lleva a ampliar las ideas que se habían expresado cuando se propuso el proyecto. Recordemos que, en un primer momento, las maestras habían pensado que disponer de producciones de todos los niños sobre un mismo problema permitiría tener un panorama sobre las estrategias de los alumnos, así como conocer cuántas se mostraban muy distantes respecto de sus expectativas. Esto se expresó en aquella oportunidad como *conocer la realidad, saber dónde estamos paradas*. La investigadora retoma estas expresiones y convoca a expandirlas:

> **I**: ¿Para qué hicimos eso? Una primera idea que apareció es ver dónde estamos parados, conocer la realidad. Pero, ¿le podemos poner un poco más de letra a esto? Decirnos a nosotras con un poco más de detalle cuál era el propósito, para qué hicimos este relevamiento de procedimientos. Eso nos ayudaría a entender más nuestras preocupaciones, nuestras preguntas, las satisfacciones, las insatisfacciones, y eso va a permitir armar conclusiones.
> **M 4°**: Porque hay que conocer la dificultad para poder abordarla, si no si uno no conoce dónde están nuestras dificultades, cuando digo "nuestras" hablo de la institución, pero hablo de nuestras dificultades como docentes y nuestras dificultades en el manejo de los contenidos en los alumnos.

De la intervención anterior, surgen tres ideas: se necesita conocer para poder actuar; los problemas son de la enseñanza, atañen tanto a docentes como a alumnos toda vez que los maestros buscan comprender las dificultades de los niños con los contenidos; y se asumen por parte del colectivo docente, ubicándose entonces en un contexto institucional.

Las relaciones entre las producciones de los alumnos y las estrategias docentes –que en la conversación exceden muchas veces la referencia a la indagación– son retomadas una y otra vez con diferentes matices. En un primer momento, pareciera considerarse el desempeño de los alumnos como reflejo estricto de la acción docente, apreciación que el desarrollo del análisis fue problematizando. Destaquemos que, en esa perspectiva, tal vez algo lineal, por una parte, las maestras asumen la responsabilidad sobre los aprendizajes de los niños en oposición a quienes justamente disocian enseñanza de aprendizaje pero, por otra, se podría correr el riesgo de leer en términos de culpabilización del docente la distancia de algunos niños frente a las tareas. Sabemos que

ambos componentes están presentes en esta relación (Terigi, 2009). En nuestro caso, en tanto la conversación no se desliga casi en ningún momento de la referencia al marco institucional, queda más atenuada la tendencia a cuestionar la acción individual de cada maestra. Como grupo coordinador, nos interesó problematizar las relaciones entre enseñanza y aprendizaje impulsando intencionalmente hacia una visión más dialéctica.

> **M 4°**: [leyendo lo que había quedado escrito en el texto] Conocer la realidad de nuestros alumnos como producto de nuestras estrategias.
> **I**: ¿Es un reflejo súper transparente?, ¿es tan absoluto? Pregunto. Lo que el pibe hace, ¿es el fiel reflejo del trabajo del maestro? Estoy problematizándolo. Porque pareciera que, si yo miro al pibe, directamente miro al maestro.
> **M 4°**: Lo que yo hice y lo que hicieron todas las anteriores. No miro a la maestra solamente en ese instante, miro toda la trayectoria. Es ahí donde nosotras podemos plantearnos los errores, los aciertos.

La pregunta de la investigadora abre a que se expliciten matices de la relación entre aprendizaje y enseñanza: la responsabilidad se atribuye al colectivo docente y, a través de él, alcanza a cada maestra. Asimismo, se sostiene que el trabajo de los alumnos siempre está enmarcado institucionalmente, aun en los casos en los que los procedimientos comportan una gran originalidad. En este sentido, se relativiza una idea bastante difundida según la cual existiría un accionar puramente espontáneo por parte de los niños: *Lo que hacen siempre está vinculado con lo que alguien les enseñó, aunque no seamos nosotras, no es espontáneo. Enseñamos descomposiciones y a partir de ahí ellos hacen.* A los argumentos que nutren las relaciones entre enseñanza y aprendizaje, se suma otro señalamiento: los niños hacen en función de lo que piensan que se espera de ellos y esto puede motorizar –cuando son capaces de usar de manera autónoma recursos que las maestras han alentado– u obstaculizar –cuando, en el afán de actuar *conforme a lo que suponen como expectativa hacia ellos*, se inhiben de poner en juego otras estrategias más propias, tal vez menos elaboradas– (Brousseau, 1980, 2007).

La mirada hacia los alumnos que no logran un desempeño autónomo en el trabajo matemático del aula hace visible la insuficiencia de estrategias de intervención únicas y, en consecuencia, la necesidad de transformarlas para provocar interacciones específicas que entren más en diálogo con el pensamiento de cada uno. Interesa, así lo explicita la maestra de cuarto grado, *entender*

cómo se manifiesta el conocimiento en acción, es decir, frente a las situaciones que enfrentan los niños. Se plantea entonces la necesidad de incluir estas búsquedas en las prácticas docentes y, a su vez, la de comprender por qué algunas interacciones con ciertos niños no han tenido los resultados esperados. Las maestras incluyen estas reflexiones como propósitos de la indagación, aun sabiendo que fueron elaborados en el contexto del análisis posterior a la realización.

En síntesis, las relaciones entre enseñanza y aprendizaje quedan enmarcadas en un proyecto institucional de largo plazo en el que van interviniendo las distintas maestras; la pregunta por los saberes de los alumnos es también la pregunta por las expectativas y valoraciones de las docentes y sus estrategias. Los esfuerzos de algunos niños por poner en juego ciertos procedimientos hablan de aquello que se quiso transmitir y a la vez la distancia que a veces presentan con relación a las tareas conduce a interrogantes e hipótesis específicas –sobre lo que "no funcionó", sobre lo que podría ser fructífero-.

4.2 La elección de los términos para la escritura, fuente de revisiones y de nuevas relaciones

Son numerosos los autores que han descripto el papel productor que pueden tener las situaciones de escritura cuando la reflexión sobre el lenguaje promueve transformaciones en las ideas que se quieren comunicar (Scardamalia y Bereiter, 1992). Al verse confrontadas a la necesidad de elaborar un texto sobre los propósitos de la indagación, las maestras revisan muchos términos que son usuales en las conversaciones entre docentes cuando refieren tanto a las posibilidades de sus alumnos como a las alternativas de su quehacer. Es así que expresiones como "los alumnos no podían resolver", "los chicos con dificultad", "procedimientos inadecuados" o "buenas estrategias", entre otras, son puestas en cuestión cuando quedan plasmadas en el texto que se está elaborando. Lejos de centrarse en una preocupación formal, se trata de objeciones que son el resultado de una incomodidad: la de cargar con significados casi únicos, muy instalados en las prácticas docentes, ciertos hechos relativos a los intercambios del aula que el análisis realizado en el EC llevó a considerar críticamente.

Al proyectar en la pantalla el texto que se iba elaborando, se facilitó una revisión casi inmediata de la escritura. Compartimos a continuación distintos tramos en los que las reflexiones sobre la escritura vuelven sobre los sentidos en juego.

No sé si "buenas" es la palabra

I: [Leyendo de la pantalla] Conocer la realidad de nuestros alumnos como producto de nuestras estrategias.
M 3°: Mantener las buenas y buscar otras que vamos a tener que descubrir, las que nos dieron resultado, mantenerlas.
M 4°: No sé si "buenas" es la palabra, la verdad.
M 3°: Mantener las que resultan...
M 4°: Las más eficientes, las más... cuando digo "eficiente" quiero decir "lo que esperamos".

Pareciera que el adjetivo "buenas" no expresa la relación entre las expectativas docentes y los procedimientos de los chicos. Entendemos que la objeción del término se vincula con la necesidad de explicitar que una estrategia no se considera en sí misma sino por la función que tiene –o no– de promover en los alumnos la movilización de conocimientos relativos a la intención docente. Este adjetivo tampoco se acepta para referirse a los trabajos de los alumnos. Efectivamente, cuando las maestras revisan críticamente la atracción que les provocaban ciertas estrategias muy elaboradas y la poca atención que les habían prestado a los niños que se mostraban más ajenos al trabajo del aula, vuelven sobre este término.

M 4°: Tuvimos hasta el momento la mirada de los lindos procedimientos..., ¿qué pusiste? ...Iba a decir alguna cualidad...
M 3°: Lo de enriquecer...
M 4°: No, los que nos llamaban la atención, eso queremos decir. Porque cuando D dijo que estábamos encandiladas con esos procedimientos sin prestar atención a las hojas en blanco, recién ahí me hizo un clic y me dije "es verdad".
M 4°: Bueno, sí. Que nos asombraban de alguna manera, la realidad es que nos quedábamos asombradas.
M 2°: Claro, decíamos "mirá cómo hizo esto, ¿cómo lo pensó?".
M 4°: Sobre aquellos procedimientos más elaborados y que nos asombraban, en todo caso.
M 2° y 4°: Y sacá "lindos procedimientos".

De manera similar al ejemplo anterior, "lindos" no resulta adecuado para precisar las razones por las que ciertos procedimientos habían ocupado un considerable tiempo de análisis en el EC. Las maestras evocan el interés que les

suscitaba comprender las relaciones involucradas en algunas producciones de los niños, al tiempo que señalan que ese asombro les opacó la mirada hacia los que parecían no poder.

"Lograban" es más esperanzador

> **I**: Acá están las ideas, ahora necesitaríamos darle forma y armar un texto para que nos quede documentado. ¿Quieren que vayamos leyendo? [Lee] La intención tuvo que ver con los que no podían resolver...
> **M 4°**: El "podían" lo podríamos cambiar por "lograban". "Poder" es medio terminante. "Lograban" es más esperanzador. De aquellos niños que no lograban resolver... aún, que no lograban aún resolver las situaciones presentadas.

La incomodidad alude en este tramo a un modo categórico de considerar a los alumnos y a sus posibilidades con relación al aprendizaje. La expresión "no lograban aún" subraya una posición provisoria del alumno que incorpora la modificación de esa situación en el futuro. La calificación de "esperanzador" releva una dimensión afectiva vinculada a la confianza tanto en el alumno (va a lograr resolver) como en la docente (vamos a lograr que resuelva).

No puedo saber si los chicos tienen una dificultad

Al referirse en el texto a los niños que motivaron la propuesta de la indagación, el término "dificultad" se pone en cuestión. Queremos subrayar que, en las conversaciones entre docentes, suele ser un modo de nombrarlos. Entendemos que algo del análisis realizado junto con la exigencia que impone la escritura lleva a buscar un modo más ajustado para describirlos.

> **M 4°**: Punto y aparte, como otra cosa, para qué lo hicimos. Para saber qué estrategias usan los chicos...
> **M 2°**: Con dificultades.
> **M 3°**: Yo pondría: para saber qué estrategias usan los chicos con dificultad...en realidad, yo no puedo saber si los chicos tienen una dificultad..., sería los chicos que no pudieron resolver en base a las estrategias que nosotros les enseñamos... No sabemos si tienen una dificultad... Pareciera que la dificultad la tiene el pibe, cuando por ahí, quizás la dificultad fue nuestra porque no le ofrecimos la estrategia...

La idea que se impugna es que la dificultad es una condición del alumno al tiempo que se asume el fenómeno como una posible manifestación de la relación didáctica. Se abren así interrogantes sobre las prácticas de enseñanza y se sugiere la necesidad de seguir explorando. Asimismo, se expresa un cuidado por evitar una clasificación de los alumnos que podría derivar en su estigmatización.

Una mirada de conjunto sobre estas revisiones permite apreciar que las maestras se hacen responsables del significado de las ideas que se quieren comunicar, asumiendo una posición de autoría en el contexto de sus prácticas, novedosa para ellas. Se posibilita así una desnaturalización de ciertos términos a los que se suele apelar en las conversaciones entre docentes sin detenerse a examinar el alcance de los significados que portan.

4.3 El alcance y los límites de la indagación desde la perspectiva de las maestras

Los análisis realizados, las idas y vueltas, cada una con nuevos matices y precisiones, en cierto momento, llevan al grupo a detenerse en sus reales alcances. Toda la conversación hizo visible que, para saber *qué le pasa a un pibe*, en el sentido de comprender qué ideas moviliza frente a las situaciones, cuáles son las razones por las que no llega a establecer relaciones pertinentes entre los datos del problema y la pregunta que se formula, entender por qué se muestra distante pero también acceder a las ideas que sí puede movilizar, es necesario sostener interacciones específicas que vayan a la búsqueda de estas respuestas. En ese marco, se cuestiona el alcance de aquello que puede conocerse a partir de interpretar una única producción que el alumno realizó en forma escrita y sin interacción con la maestra.

La indagación se plantea con el propósito explícito de entender mejor la posición de los niños distantes *que dejan la hoja en blanco*. Su puesta en marcha da lugar a un análisis que excede por mucho aquello que era posible interpretar solo a partir de las producciones puntuales. Se reconoce entonces la necesidad de realizar otras intervenciones para acceder a aquello que los alumnos saben. El recorrido realizado a raíz de la indagación permite identificar sus límites. Esto constituye desde nuestro punto de vista un avance en dos direcciones: una, en la afirmación de una posición investigativa que implica cuidar a lo largo del recorrido las relaciones entre los interrogantes que se buscan

responder y las acciones que se realizan para lograrlo y, otra, en una comprensión más profunda de los requerimientos que presenta la enseñanza cuando se propone la inclusión de todos los niños.

5. CONCLUSIONES

En este artículo hemos dado cuenta del proceso de producción desarrollado en el espacio de trabajo colaborativo de una escuela a partir de la realización de una indagación sobre las producciones de los alumnos de todos los grados, planteada por una de las maestras. Esta iniciativa surge como respuesta a la necesidad de disponer de estrategias para interactuar con aquellos niños que se mostraban más distantes del trabajo matemático en las aulas, explicitada inicialmente por la directora y reconocida por el conjunto de las docentes. La realización de una acción específica y colectiva, que se proponía la búsqueda de respuestas sobre aspectos que inquietaban al conjunto, otorgó al proyecto –así lo entendemos– un carácter investigativo e institucional que fue central para el involucramiento de todas las docentes.

A medida que se iban examinando las producciones de los alumnos en el espacio colaborativo, se iban elaborando posibles estrategias de intervención docente que, miradas globalmente, fueron constituyendo un repertorio más atento a las particularidades de cada niño y, en consecuencia, más fundamentado. En este sentido, el avance del análisis fue dando lugar a la construcción de respuestas parciales para el problema identificado. Asimismo, el trabajo de reconstrucción de las ideas de los niños a partir de sus producciones contribuyó a fortalecer una posición exploratoria y a tomar conciencia de la necesidad de observar todo el proceso de producción (y no solo su estado final) así como de recurrir a otros elementos de contexto para alcanzar una interpretación más ajustada. En ese marco, el proceso de clasificación de los procedimientos como herramienta interna a la indagación se pudo diferenciar de las acciones evaluativas y de sus categorías clásicas –*correcto e incorrecto*– que, en esta oportunidad, mostraron sus límites para dar respuesta a las preguntas que las maestras se hacían. También se hizo presente en los intercambios el requerimiento de hacer acuerdos entre las diferentes maestras que tomaran en cuenta una progresión entre los grados con relación a los procedimientos puestos en juego por los alumnos, sin que se perdieran de vista las trayectorias personales.

El proceso de análisis realizado a partir de las producciones obtenidas en el marco de la indagación profundiza y amplía los propósitos que inicialmente se habían planteado. Las primeras inquietudes, *conocer la realidad, saber dónde estamos paradas*, parecían referirse a los desempeños de los alumnos, determinados por la enseñanza. Sin embargo, tanto el avance del análisis como la situación de escritura habilitaron nuevas –y más dialécticas– relaciones entre enseñanza y aprendizaje.

Por una parte, se subraya que los alumnos actúan en un marco institucional que genera expectativas sobre ellos a las que tratan de responder, lo cual condiciona el abanico de posibilidades que se permiten desplegar. Aun cuando los niños desarrollan procedimientos originales en los que toman decisiones y eligen qué recursos poner en juego, estos están encuadrados en estrategias generales que se han enseñado. Asimismo, se señala que los alumnos construyen una representación de lo que se espera de ellos como resultado de todo su recorrido escolar y se valoriza así la necesidad de acuerdos institucionales. Estos se conciben en términos de trayectorias de enseñanza que se internan más minuciosamente en las relaciones implicadas en los conocimientos que los niños tienen que aprender, que no son usualmente capturadas en los típicos listados de contenidos en los que se distribuyen temas entre los diferentes grados.

El ámbito de discusión generado favorece la movilización de la experiencia acumulada en la escuela para dar cuenta de que los posicionamientos de los niños, sobre todo de aquellos que muestran distancia con relación a las tareas matemáticas, pueden ser transformados si existe una fuerte intencionalidad pedagógico-didáctica orientada a tal fin. *La hoja en blanco* requiere ser interpretada en la interacción sostenida con los niños que será insumo para la elaboración de estrategias de intervención.

Mirando retrospectivamente este proceso, surge una última reflexión de corte metodológico. Una maestra propuso este proyecto y el grupo se lanzó a su realización sin haberse detenido a examinar previamente de manera exhaustiva ni sus propósitos ni sus alcances. Como investigadoras, nos "encontramos" con esta propuesta en una reunión y decidimos habilitar su desarrollo en el marco del espacio colaborativo pensando que, cualquiera fuera su devenir, constituiría una situación de aprendizaje para todas. Entendemos que si la hubiéramos frenado para lograr que se precisaran sus propósitos de manera previa, hubiéramos entorpecido la iniciativa de las maestras que tal vez no tenían en el momento inicial todas las anticipaciones que requiere la formulación de un proyecto de carácter investigativo. Esas "anticipaciones" se fueron elaborando "a

posteriori" en el transcurso del trabajo en el que, con los papeles de los niños arriba de la mesa, se reconstruían una y otra vez los propósitos y los sentidos y se proyectaban acciones futuras. En el marco de confianza ya construido en este espacio y, basadas en los resultados obtenidos, entendemos que dar cabida a una propuesta en la que no estaba tan clara para nosotras la relación entre el problema que se estaba considerando y la estrategia que se proponía para esclarecerlo, contribuyó a que las docentes asumieran una posición productora, tal como se describe en este trabajo. Un pequeño paso en la comprensión de las condiciones para una genuina colaboración.

REFERENCIAS

Baquero, R. y Terigi, F. (1996). En búsqueda de una unidad de análisis del aprendizaje escolar. *Apuntes*. http://www.bibliopsi.org/docs/carreras/obligatorias/CFP/educacional/chardon/1%20primer%20cuatri%202020/P%201.3%20En%20Busqueda%20de%20una%20Unidad%20de%20Analisis%20-%20Baquero.pdf

Bednarz, N. (2013). Regarder ensemble autrement: ancrage et développement des recherches collaboratives en éducation au Québec. En N. Bednarz, *Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement* (pp. 13-29). L'Harmattan.

Bednarz, N. y Proulx, J. (2010). Développement professionelle des enseignants en mathématiques. En B. De Lièvre, A. Braun, V. Carelle, y W. Lahaye, *Éducation et formation. Travail en communautés, collaboration et partenairiats pour le dévéloppement professionelle des enseignants, e-293* (pp. 21-36). Université de Mons.

Brousseau, G. (1980). L´échec et le contrat. *Recherches, 41*, 177-182. https://hal.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/483149/filename/Brousseau_1980_echec_et_contrat.pdf

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans lénseoignement des mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire. Thèse de doctorat d´état.* Université Paris VII. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01250665/

Peltier-Barbier, M.-L. (2004). *Dur d'enseigner en ZEP. Analyse des pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques en réseaux d'éducation prioritaire*. La Pensée Sauvage.

Proulx, J. (2013). Réflexions épistémologiques sur la recherche collaborative en didactique: possibilités et excès. En N. Bednarz, *Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement* (pp. 327-349). L'Harmattan.

Robert, A. (2003). De l'idéal didactique aux déroulements réels en classe de mathématiques: le didactiquement correct, un enjeu de la formation des (futurs) enseignants (en collège et lycée). (I. N. Pédagogique, Ed. *Didaskalia* (22).

Robert, A., y Rogalski, J. (2002). Le système complexe et coherent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *La revue canadienne de l'enseignement des sciences des mathématiques et des technologies, 2*(4), 505-528.

Sadovsky, P., Itzcovich, H., Becerril, M., Quaranta, M., y García, P. (2019). Trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática: de la reflexión sobre las prácticas a la elaboración de ejes de análisis para la enseñanza. *Educación Matemática, 31*(2), 105-131.

Sadovsky, P., Itzcovich, H., Quaranta, M., Becerril, M., y García, P. (2016). Tensiones y desafíos en la construcción de un trabajo colaborativo entre docentes e investigadores en didáctica de la matemática. *Educación Matemática, 28*(3), 9-29.

Sadovsky, P., Quaranta, M. E., García, P., Becerril, M., y Itzcovich, H. (2019). Trabajo colaborativo entre docentes e ivnestigadores en didáctica de la matemática. Reflexiones metodológicas. *Revista digital Contextos de Educación*, (26), 41-49.

Sadovsky, Quaranta, Itzcovich, Becerril, y García. (2015). Producción matemático-didáctica: una experiencia de planificación colaborativa entre maestros e investigadores. En A. Pereyra, y D. Fridman, *Prácticas Pedagógicas y Políticas Educativas. Investigaciones en el territorio bonaerense* (pp. 221-250). Editorial Universitaria.

Scardamalia, M., y Bereiter, C. (1992). Dos modelos explicativos del proceso de composición escrita. *Infancia y Aprendizaje, 15*(58), 43-64.

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. De Boeck.

Terigi, F. (2009). El fracaso escolar desde una perspectiva psicoeducativa. Hacia una mirada situacional. *Revista iberoamericana de educación*, 23-39. https://doi.org/10.35362/rie500659

María Emilia Quaranta

Domicilio: Coronel Toscano 569. Villa Sarmiento.
Provincia de Buenos Aires, Argentina
C.P. 1706
Teléfono: 54 911 5058 5913

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN DOI: 10.24844/EM3302.04

Voces de estudiantes en clase de geometría y su potencial para desarrollar el discurso en el aula

Students voices in geometry classroom and its potential in the development of classroom discourse

Patricia Perry[1]
Leonor Camargo[2]
Óscar Molina[3]
Carmen Samper[4]

Resumen: Presentamos el análisis de expresiones verbales de estudiantes de Educación Básica secundaria, en interacción comunicativa en una clase de geometría sobre semejanza de triángulos, usando rasgos propios del discurso matemático. Adoptamos una estrategia investigativa "basada en prácticas usuales", con el objetivo de contrastar la hipótesis que teníamos, según la cual las verbalizaciones de los estudiantes en el aula de matemáticas suelen no ser útiles para el desarrollo del respectivo discurso, debido a rasgos intrínsecos de esas intervenciones. La hipótesis no se sostiene pues encontramos voces de estudiantes que tienen un potencial considerable para impulsar el discurso. Sin embargo, no siempre son aprovechadas por el profesor, quizá debido a

Fecha de recepción: 08 de noviembre de 2019. **Fecha de aceptación:** 16 de enero de 2021.

[1] CIUP, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia, pperryc@yahoo.com.mx, orcid.org/0000-0002-9162-071X

[2] Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia, lcamargo@pedagogica.edu.co, orcid.org/0000-0002-2237-7306

[3] Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia, ojmolina@pedagogica.edu.co, orcid.org/0000-0003-4797-1173

[4] Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia, csamper@pedagogica.edu.co, orcid.org/0000-0003-2342-8950

una gestión que tiene como prioridad lograr la intervención de los estudiantes a costa de ejercer su papel de líder del discurso.

Palabras clave: *voz matemática del estudiante, discurso matemático, enfoque comunicacional*

Abstract: We present, using features of mathematical discourse, an analysis of eighth grade, Middle School, students' verbal expressions, found in the communicative interaction that took place during a geometry class about similar triangles. We adopt a research strategy "based on usual practices", with the objective of contrasting the hypothesis we had: students' verbal utterances in a mathematics class are not usually useful for the development of the respective discourse, due to intrinsic features of those interventions. Our hypothesis does not hold because we found student voices that have considerable potential to boost mathematical discourse. However, these are not always taken advantage of by the teacher, perhaps due to a classroom management that prioritizes achieving student intervention at the cost of exercising the role of discourse leader.

Keywords: *student mathematical voice, mathematical discourse, communicational approach*

1. INTRODUCCIÓN

Las tendencias curriculares actuales promulgan que la enseñanza debe proporcionar oportunidades para dar sentido a las matemáticas a través del discurso (NCTM, 1989; MEN, 1998); aceptan que aprender matemáticas es una actividad sociocultural; y le apuestan a que el discurso en el aula mejora la comprensión compartida y el nuevo discernimiento. En ese marco, el desarrollo de la Educación en Colombia, en los últimos 25 años, ha influido para que la enseñanza tradicional en el aula (i.e., exposición del profesor y ejercitación del estudiante), descrita en la literatura (e.g., Gregg, 1995; Gates y Vistro-Yu, 2003), haya dado paso a una en la que, *grosso modo*, el desarrollo de los temas se hace mediado por tareas asignadas a los estudiantes, cuyas respuestas se exponen ante todo el grupo en intercambios principalmente orales. Así, en la actualidad no es raro encontrar aulas de matemáticas en las que los estudiantes hablan entre ellos y

con el profesor sobre asuntos matemáticos implicados en las tareas que realizan (e.g., Forero-Sáenz, 2008; Jiménez *et al.*, 2010; Sfard, 2015). Frente a esta realidad, cabe preguntarse si las contribuciones de los estudiantes desempeñan o pueden desempeñar un papel relevante en el aprendizaje de las matemáticas en el aula.

En calidad de hipótesis inicial, en un proyecto desarrollado en 2018[5], formulamos nuestro problema de investigación así: rara vez las intervenciones de los estudiantes en clase de matemáticas del nivel de educación básica y media son realmente útiles para avanzar en el desarrollo del tema matemático que se estudia pues suelen exponer ideas incompletas, confusas y no articuladas al intercambio verbal en el que se presentan. Nuestro objetivo investigativo fue contrastar tal hipótesis examinando dinámicas discursivas en diversas clases de geometría. Buscamos lo que denominamos voces de estudiantes, argumentamos por qué las consideramos voces, describimos algunos de sus rasgos a la luz del enfoque que propone Sfard (2008a) y examinamos su potencial para avanzar en el aprendizaje.

En este artículo presentamos ejemplos de expresiones verbales de estudiantes de 12-14 años, surgidas en un episodio de interacción comunicativa cuando el profesor les pidió determinar si dos polígonos particulares dados son semejantes. Estas voces son ejemplos de la evidencia que nos permite afirmar que nuestra hipótesis no se sostiene tal cual, pues son expresiones que sí tienen un potencial considerable para impulsar el discurso. Sugerimos que, quizá debido a que la gestión del profesor prioriza la amplia participación de los estudiantes sobre su papel como líder del discurso, no siempre las voces son aprovechadas por el profesor.

2. MARCO TEÓRICO

La fundamentación conceptual del estudio proviene del campo investigativo *Lenguaje en la Educación Matemática* y particularmente de la línea "matemáticas como discurso y discurso matemático" (Radford y Barwell, 2016), con foco en expresiones de los estudiantes surgidas en interacciones comunicativas en el aula. Diversos trabajos se enmarcan en la línea mencionada. Por ejemplo: Clarke *et al.* (2013) se interesan por las ocasiones que tienen los estudiantes de

[5] El proyecto de investigación, *Voces de los estudiantes en la clase de geometría,* fue desarrollado por el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia).

escuchar y decir términos matemáticos; Esmonde y Langer-Osuna (2013) y Jung y Shütte (2018) se centran en la búsqueda de estrategias de enseñanza para favorecer la participación discursiva de los estudiantes en condiciones de equidad; Kaur (2013) e Ingram *et al.* (2019) examinan la expresión pública de los estudiantes, buscando que ellos compartan sus pensamientos con sus compañeros con apoyo del profesor o autónomamente. En nuestro trabajo nos centramos en rasgos discursivos de la comunicación de contenidos matemáticos específicos, línea en la que se ubica la elaboración teórica seminal de la investigadora Anna Sfard.

2.1 Discurso matemático y aprender matemáticas

En el enfoque que propone Sfard, la comunicación está en el corazón de la educación dado que "la necesidad de comunicación es la primera fuerza conductora tras todos los procesos cognitivos humanos" (Sfard, 2008b, p. 71), y el pensamiento se conceptualiza como una forma de comunicación con uno mismo (Sfard, 2008b). Aquí "comunicación" refiere al uso y producción de recursos con la intención de que un interlocutor, que puede ser el mismo hablante, reaccione de una cierta manera (Sfard, 2008c).

Entendemos que los actos comunicativos son "intentos para comprometer a los miembros de una comunidad en actividades indispensables para satisfacer las necesidades humanas, desde las más primitivas y fundamentales para sobrevivir hasta las necesidades culturales más avanzadas y complejas" (Sfard, 2008b p. 77). Así, es natural que distintas comunidades tengan distintas maneras de comunicarse. Sfard denomina *discurso* a una forma diferenciada de comunicación que agrupa a algunos individuos y deja por fuera a otros. Cualquier sociedad humana se puede dividir en *comunidades de discurso* que se solapan parcialmente. La membrecía a una comunidad de discurso se gana participando en actividades de comunicación de cualquier colectivo que practique ese discurso, sin importar qué tan pequeño sea (Sfard, 2008d).

En nuestro estudio, la comunidad de discurso matemático está conformada por profesor, estudiantes del curso en cuestión y observadores externos no participantes que estuvieron presentes en las clases durante las que se desarrolló la temática *polígonos semejantes*; el discurso matemático de la clase está constituido por las actividades de comunicación en esta comunidad, en el espacio y tiempo de la observación.

Haciendo eco a Sfard (2014), vemos las matemáticas como una actividad de contar cierto tipo de relatos y, por tanto, como un discurso, distinguible de otros mediante cuatro rasgos externos: vocabulario, mediadores visuales, rutinas y narrativas aceptadas. Además, entendemos que *aprender matemáticas* es "el proceso de cambiar de cierta manera, bien definida, las formas discursivas propias" (Sfard, 2008e, p. 44). Esto implica, por una parte, ampliar el vocabulario, construir nuevas rutinas y producir nuevas narrativas aceptadas, y, por otra parte, hacer cambios en las reglas sobre el discurso. Significa que "algunas tareas familiares como, por ejemplo, definir una palabra o identificar figuras geométricas, se harán ahora de una manera diferente, no familiar" (Sfard, 2008d, p. 256).

Enseguida, unas palabras sobre los rasgos externos del discurso matemático escolar:

Vocabulario y su uso: refiere principalmente a las palabras clave –en geometría, por ejemplo, las relativas a formas de objetos geométricos y a relaciones entre estos– y al uso de ellas de acuerdo con las definiciones dadas o las reglas dictadas por la respectiva comunidad de discurso matemático, en este caso, la escolar. Algunas palabras clave del discurso matemático son exclusivas de este (e.g., "homotecia"), y otras hacen parte del repertorio de discursos coloquiales (e.g., "semejanza"); en el segundo caso, aprender requerirá pasar del uso cotidiano al uso especializado. Tal como lo señala Sfard (2008d), el uso del vocabulario es un asunto muy importante porque, siendo equivalente a lo que otros llaman 'significado del término', es responsable de lo que el usuario puede decir sobre (y ver en) el mundo.

Mediador visual y su uso: es un objeto visible sobre el que se opera y que hace parte integral del acto de comunicar y de los procesos de pensamiento; no es un mero recurso auxiliar para expresar el pensamiento preexistente (Sfard, 2007). Es un medio con el que quien participa en un discurso matemático identifica el objeto de su conversación y coordina su comunicación (e.g., las etiquetas literales asignadas a los vértices de un polígono son mediadores visuales para referirse a un ángulo o lado particular del polígono). Los mediadores visuales especializados tienen formas de uso especializadas (e.g., para referir, eliminando ambigüedad, a un determinado ángulo, la etiqueta del vértice debe nombrarse entre las otras dos letras que identifican un punto en cada lado).

Rutina: "una rutina realizada en una situación de tarea dada por una persona dada es la tarea, como la entiende el realizador, junto con el procedimiento que siguió para realizar la tarea" (Lavie, Stein y Sfard, 2019, p. 161). Una *situación de tarea* refiere a un escenario en el que una persona se siente obligada a hacer

algo; puede estar creada, intencionalmente o no, como invitación a una cierta clase de acción. Una *tarea como la entiende el realizador* es el conjunto de todos los rasgos característicos de eventos precedentes que la persona considera que requieren replicación. Un *procedimiento implementado por el realizador de una tarea en respuesta a una situación de tarea dada* es la prescripción para la acción que se ajusta a la realización actual y también a aquellas en las que está modelado, es decir, no es una réplica perfecta de la acción precedente sino una réplica selectiva –preserva unos aspectos de la realización anterior y cambia otros–.

Narrativa: es cualquier secuencia de verbalizaciones, escrita u oral, que describe un objeto, establece una relación entre objetos o narra un proceso relativo a objetos, y está sujeta a aceptación o rechazo con la ayuda de procedimientos de justificación específicos del discurso; una narrativa aceptada se etiqueta usualmente como verdadera (Sfard, 2008d). En el discurso matemático especializado, es habitual presentar las narrativas aceptadas como si se refirieran a entidades que existen en el mundo, de manera objetiva, e independiente de la acción humana; este proceso conocido como *objetificación* incluye dos movimientos discursivos estrechamente relacionados, que ocurren por separado: reificación y alienación (Sfard, 2008d). "La *reificación* es el acto de remplazar oraciones sobre procesos y acciones con proposiciones sobre estados y objetos" (Sfard, 2008d, p. 44); esto implica remplazar verbos por sustantivos. La *alienación* es el acto de "usar formas discursivas que presentan los fenómenos de una manera impersonal, como si ocurrieran por sí mismos, sin la participación del ser humano" (Sfard, 2008d, p. 295). Por ejemplo, un relato impersonal sobre el procedimiento seguido para determinar si se cumplen las condiciones de la definición de polígonos semejantes para un caso particular ejemplificaría una narrativa no objetificada por no ser reificada. En el mismo contexto, "La semejanza de esos dos polígonos es indecidible" es un ejemplo de narrativa objetificada (con el sustantivo "semejanza" se habla de una relación entre dos objetos) y alienada (es una oración atemporal en la que no hay asomo de la agencia humana).

2.2 Voz matemática del estudiante

Aquí nos enfocamos en las verbalizaciones de los estudiantes que consideramos voz matemática, debido al papel importante que desempeñan o pueden desempeñar en el desarrollo del discurso matemático del aula. Denominamos *voz matemática del estudiante* (en adelante, *voz del estudiante*) a la expresión oral,

escrita o gestual, auténtica e inteligible, emitida por el estudiante en interacción con el profesor u otros estudiantes, para comunicarse (con la intención[6] de exponer una idea, presentar una inquietud, preguntar, objetar, etc.) sobre un asunto matemático acerca del cual versa la clase. El adjetivo "auténtica" pretende destacar el carácter no impostado de la expresión, que permite reconocerla como "propia" de quien la emite y en la que se identifica un compromiso personal. El adjetivo "inteligible" quiere aclarar que la expresión es interpretable por quien la recibe.

2.3 Definición de polígonos semejantes y uno de sus usos

Un análisis de la definición dada[7] en la clase puede aportar elementos para el análisis de las voces que aquí se consideran. La definición enuncia que:

> "Dos polígonos convexos son semejantes si y solamente si existe una correspondencia biunívoca entre sus vértices, tal que:
> los ángulos correspondientes tienen igual medida,
> las razones entre las longitudes de los lados correspondientes son iguales."

La narrativa, expresada en calidad de definición, plantea un enunciado bicondicional mediante el uso del término lógico "si y solamente si".

Así, para alguna correspondencia biunívoca entre vértices de dos polígonos convexos, los dos enunciados condicionales refieren a relaciones recíprocas de dependencia entre la relación geométrica "ser semejantes" (en pares de polígonos convexos) y la conjunción de otras dos relaciones geométricas: "tener la misma medida" (en pares de ángulos correspondientes) y "ser iguales" (en pares de razones de medidas de longitud de lados correspondientes). Por tanto, los dos enunciados condicionales permiten respaldar dos procedimientos matemáticos, respectivamente: uno, dados dos polígonos convexos semejantes, determinar los atributos que tienen los ángulos y los lados correspondientes de los dos polígonos; dos, dados dos polígonos convexos, inferir si son semejantes

[6] Las intenciones comunicativas pocas veces se hacen explícitas, pero usualmente son rastreables mediante pistas comunicativas en el contexto de una interacción.

[7] Nos ceñimos a la definición dada por el profesor, dejando de lado la formulación que preferimos (e.g., la condición relativa a los ángulos, la formularíamos así: las medidas de amplitud de los ángulos correspondientes son iguales).

examinando si los atributos de sus ángulos y lados correspondientes tienen las condiciones suficientes para ello.

Esta narrativa objetificada mediante la cual comienza a precisarse el uso estándar del término *polígonos convexos semejantes*, para la comunidad de discurso de nuestra aula, incluye varios vocablos especializados para los que el profesor no hizo explícita mención de cómo deberían entenderse. Entre ellos destacamos tres. (i) "Polígono convexo", término que refiere a los polígonos para los cuales todos sus vértices, excepto los dos que determinan cualquiera de sus lados, pertenecen al mismo semiplano respecto a la recta que contiene el lado mencionado; (ii) "correspondencia biunívoca entre vértices de dos polígonos", término que refiere a un conjunto de pares ordenados de vértices de los polígonos, en los que cada vértice de uno de los polígonos (el primero que se considera) tiene asociado uno y solo un vértice del otro polígono; (iii) "razón entre longitudes", término que refiere al cociente de dos medidas de longitud.

Respecto al enunciado condicional que permite decidir si dos polígonos son semejantes, cabe esbozar dos asuntos que están implicados y, por tanto, hacen parte fundamental de "desempacar" (Selden y Selden, 1995) la narrativa: (i) la correspondencia debe ser biunívoca, por tanto los dos polígonos deben tener el mismo número de vértices; (ii) existen muchas correspondencias biunívocas posibles entre los vértices de los dos polígonos y se debe escoger una que parezca útil para lo que se quiere; en este caso, una que forme pares de lados y ángulos con el mismo atributo cualitativo relativo en los dos polígonos (e.g., el par de lados más largos, el par de lados más cortos, el par de ángulos con igual amplitud, etc.).

2.4 Rasgos discursivos de nuestra respuesta a la situación de tarea propuesta

2.4.1 Nuestra rutina y algo más

La situación de tarea propuesta por el profesor incluye dos cuadriláteros no convexos; pregunta si se podría decir que son semejantes atendiendo a las dos características que da la definición. La tarea, tal como la entendemos, nos pone dos requerimientos estrechamente relacionados pero distinguibles: (i) usar la definición como guía para establecer un plan de acción para abordar la pregunta y (ii) implementar el procedimiento puntual para responder la pregunta. En ese sentido y con el propósito de tener un referente amplio para analizar producciones

de los estudiantes, presentamos un plan de acción (columna izquierda, Cuadro 1) y los procedimientos genéricos asociados (columna derecha, Cuadro 1).

Cuadro 1. Plan de acción y procedimientos genéricos para resolver la situación de tarea

	Plan de acción genérico para abordar la pregunta	Procedimiento genérico para responder la pregunta
Paso 1	Decidir si el caso particular es un elemento del conjunto de objetos geométricos a los que alude la definición. Si no lo es, el uso de la definición no es pertinente; la respuesta es algo como: "No ha lugar", terminando así el plan. Pero si lo es, procedemos con el Paso 2.	Examinar si son polígonos convexos, usando la respectiva definición.
Paso 2	Decidir si hay alguna correspondencia biunívoca entre los vértices de los dos polígonos que sea una buena candidata para elegir. Si no se encuentra tal correspondencia, un argumento centrado en el objeto matemático "formas diferentes" es suficiente para concluir que los polígonos dados no son semejantes, y aquí terminaría el plan. Si se encuentra, procedemos con el Paso 3.	Determinar si los polígonos tienen el mismo número de vértices. Si es así, con base en recursos visuales, poner en relación lados y ángulos de las dos figuras de manera que se identifique (si la hay) una correspondencia útil para examinar la semejanza.
Paso 3	Decidir si uno de los dos atributos (i.e., relativo a los lados o a los ángulos), se cumple para el caso particular. Si no se cumple, es suficiente un argumento que atienda al esquema lógico "negación de una conjunción" (i.e., no se cumple la igualdad de las razones o no se cumple la igualdad de las medidas de los ángulos) para concluir que no son semejantes, terminando aquí el plan. De lo contrario, procedemos con el Paso 4.	Determinar, por ejemplo, si las medidas de amplitud de los ángulos correspondientes son iguales o no, con base en una comparación de cantidades numéricas.
Paso 4	Decidir si el otro atributo se cumple. Si no se cumple, la conclusión es la no semejanza de los dos polígonos en cuestión, y si se cumple, la conclusión es la semejanza de aquellos.	Determinar las razones de las medidas de longitud de los lados correspondientes y verificar si son o no iguales.

Nota: Si no se tiene información sobre las medidas de amplitud de los ángulos o de la longitud de los lados, la conclusión inmediata es que no se puede determinar si son o no semejantes.

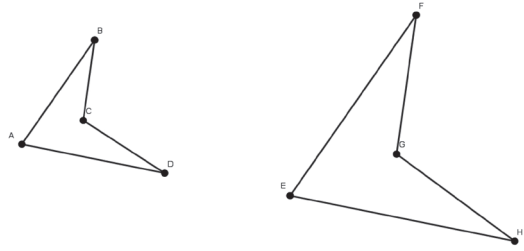
2.4.2 Vocabulario

Hay varios términos especializados involucrados al resolver la situación de tarea. En primer lugar, "ángulos correspondientes" y "lados correspondientes". En ambos casos, el uso pertinente de los términos se da con referencia a dos polígonos cuyos vértices se han puesto en correspondencia biunívoca. En el caso de la segunda condición, encontramos dos términos especializados: "longitudes de los lados correspondientes" y "razones entre las longitudes de los lados correspondientes", términos que describen gradualmente el sujeto gramatical del cual se predica en el enunciado. Haciendo eco a Duval (2017/2004, p. 139), vemos que el encadenamiento de complementos del sustantivo "lados" es un indicador del lenguaje matemático especializado, que contrasta con lo usual en la lengua natural donde la operación de descripción rara vez va más allá de usar un solo complemento del sustantivo (e.g., razones de los lados).

2.4.3 Mediadores visuales

La imagen icónica de los cuadriláteros (Imagen 1) que hace parte de la situación de tarea constituye el mediador visual obligado por cuanto expone el objeto al que refiere la pregunta y al que debe referir la respuesta. De este mediador visual cabe destacar dos rasgos que pueden influir considerablemente en el uso que le den los estudiantes. (i) Ambas figuras tienen la misma posición relativa con respecto al marco donde se presentan, situación que sugiere una cierta correspondencia entre los vértices de los dos cuadriláteros y, por tanto, induce a su uso con base en la mera percepción inmediata. Sin desconocer el papel imprescindible de la percepción en la elección de una correspondencia entre vértices, existe un procedimiento que no depende de la posición, que atiende al número de vértices de cada figura y a la determinación de pares de lados y de ángulos con el mismo atributo cualitativo relativo en los dos polígonos. (ii) Las letras con las que se designan los vértices de los polígonos tienen un tamaño muy reducido, condición que dificulta su uso por parte de los estudiantes cuando hablan desde sus puestos. Otros posibles mediadores visuales útiles son las marcas distintivas en ángulos de las figuras para señalar elementos asociados por la correspondencia que se identifica como la candidata más adecuada para examinar las condiciones de la definición.

Imagen 1. Cuadriláteros incluidos en la situación de tarea



2.4.4 Narrativa

Nuestra narrativa de respuesta a la situación de tarea es: "No es posible determinar si los polígonos dados son semejantes usando la definición, porque no son convexos y además sin las medidas de amplitud de ángulos y de longitud de lados no es posible establecer si las igualdades a las que alude la definición se cumplen o no". Es una narrativa objetificada en la que el objeto es el procedimiento para determinar si dos polígonos dados son semejantes, del cual se predica su no aplicabilidad para el caso particular dado; incluye además un argumento mediante el cual la narrativa se puede aceptar como verdadera, dado que obedece al manejo lógico de una proposición condicional como garantía: si la condición suficiente no se tiene, no es posible tener una conclusión respecto a la condición necesaria.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Acorde con el propósito de la investigación se adoptó una estrategia investigativa "basada en prácticas usuales" (Camargo, en prensa). La información analizada en este artículo proviene de una sesión de clase de geometría en un curso de grado séptimo de un colegio de Bogotá, conformado por 35 estudiantes, 20 hombres y 15 mujeres con edades entre 12 y 14 años.

Registramos en video la interacción comunicativa durante la sesión de clase del 11 de mayo de 2018. También hicimos grabaciones de audio. Hicimos la transcripción a partir de los archivos de audio y la complementamos con las grabaciones de video, logrando textos alimentados con fotografías y aclaraciones recogidas en notas de campo.

Obtuvimos los datos investigativos del estudio haciendo una adaptación de la ruta sugerida por Villalta (2009). Comenzamos por segmentar la transcripción correspondiente a la clase, en términos de los intercambios verbales públicos ocurridos durante la clase, sobre ideas tratadas como parte de la conversación. Teniendo esta información, construimos episodios investigativos, reuniendo todos los intercambios en los que la idea tratada hace parte de un tema de conversación. El Episodio 2, *Dos polígonos dados, ¿se podría decir que son semejantes, usando las dos características de la definición?*, del cual provienen las expresiones verbales que analizaremos, reúne 10 intercambios en los que los estudiantes responden o hacen comentarios relacionados con el tema de conversación. Por esta vía identificamos las expresiones susceptibles de ser voz matemática.

Teniendo en mente el propósito del estudio construimos dos conjuntos de rasgos: uno para decidir si las expresiones previamente seleccionadas podían ser declaradas voz matemática; otro para describir las voces atendiendo a rasgos distintivos del discurso matemático, para lo cual tuvimos en cuenta propuestas de Tang *et al.* (2012), Morgan y Sfard (2016), y Wang (2016). En el Cuadro 2 y el Cuadro 3 presentamos descripciones de los rasgos.

Cuadro 2: Rasgos de la expresión verbal que la caracterizan como voz matemática

Rasgo	Descripción
Inteligibilidad	Verbalización susceptible de ser interpretada de manera sustentable.
Autenticidad	Verbalización que manifiesta lo que el estudiante piensa, cree, opina, sabe, etc. Es una expresión genuina suya y no una mera repetición de una frase hecha por otro. (Circunstancias que indican autenticidad: ser el primero en manifestar una idea o un punto de vista respecto a lo dicho por otro, aclararlo, ampliarlo o corregirlo).

Cuadro 3: Rasgos para describir la voz matemática

Rasgo	Descripción
Vocabulario y uso	
Especialización	Incluye pertinentemente palabras y frases especializadas del discurso matemático. Usa léxico especializado acorde con el empleo que dicta la comunidad del discurso de referencia. Usa la respectiva sintaxis en la construcción de narrativas (i.e., orden y combinación de las palabras para expresar significados).
Complejidad lógica	Usa conectivos lógicos de manera acorde con las reglas de la lógica. Usa cuantificadores de manera acorde con las reglas de la lógica.
Mediadores visuales y su uso	
Especialización	Crea o usa recursos gráficos para: 1. Reconocer directamente o identificar propiedades visuales (e.g., formas geométricas bidimensionales, amplitud de ángulos, posiciones de las líneas, orientación física de una figura). 2. Identificar condiciones necesarias y suficientes de una definición: figuras, rectas auxiliares, ángulos. Usa notación simbólica o diagramas para indicar relaciones de dependencia entre propiedades.
Rutinas	
Manera de hacer	Lleva a cabo un procedimiento (conjunto de una o más acciones realizadas en un cierto orden) o algunas de sus acciones. Reconoce un propósito y/o una tarea asociados al procedimiento.
Narrativas	
De qué hablan	Habla de un objeto o de una relación entre objetos (emplea sustantivo). Habla de un proceso (emplea verbo).
Respaldo	Provee argumentos acordes con las reglas del discurso matemático (narrativa respaldada). Provee argumentos informales (inducción, abducción, analogía) para apoyar una aserción.
Hacia la reificación	Reformula enunciado sobre proceso (en términos de acciones) como enunciado sobre objeto o sus propiedades (en términos de sustantivos).
Alienación	Formula verbalización en la que la agencia humana está opacada (forma impersonal e intemporal).

4. CONTEXTO EN EL QUE SURGIERON LAS EXPRESIONES ANALIZADAS

La clase en la que surgieron las expresiones analizadas aquí fue la cuarta de una secuencia didáctica implementada a través de siete sesiones. Se desarrolló en torno al uso de la definición de polígonos semejantes para determinar si parejas de polígonos eran semejantes. Salvo en dos episodios, en los cuales el tema es una pregunta o un comentario hechos por un estudiante, fue el profesor quien planteó el asunto de conversación, mediante una pregunta, formulada oralmente y por escrito. Los estudiantes respondieron o reaccionaron oralmente, a veces apoyándose en el registro gráfico, en turnos asignados por el profesor, que no necesariamente alternaban la voz del profesor y la de un estudiante.

La reacción del profesor a lo expuesto frecuentemente se redujo a una palabra que indicaba haber escuchado lo dicho, seguida por la acción de dar la palabra a otro estudiante o emitir una verbalización que sugería o indicaba cambio del asunto de conversación. En algunos casos, después de escuchar a un estudiante, sugirió sutilmente un aspecto específico para seguir la conversación y lo hizo generalmente parafraseando o repitiendo algo de lo que se acababa de verbalizar. Tras escuchar varias respuestas, el profesor, con algún criterio que no siempre fue evidente para nosotros, dio por terminada una conversación para iniciar otra en torno a otra situación de tarea. La escasa realimentación ofrecida por el profesor llegó a exasperar a algunos estudiantes, quienes le pedían que precisara lo correcto o, por lo menos, que les dijera si lo expresado por un estudiante particular era correcto o no. Pero el profesor se mantuvo en su posición de no evaluar ni realimentar las intervenciones de los estudiantes.

Del que hemos llamado Episodio 2, presentamos el análisis de expresiones de cuatro estudiantes, elegidas por su riqueza para ilustrar los elementos considerados en el análisis, que se articulan en una conversación y permiten evidenciar por qué conducen a cuestionar nuestra hipótesis inicial, aunque no llegaran a jugar un papel evidente y relevante en el avance del discurso matemático del aula.

5. ANÁLISIS DE EXPRESIONES VERBALES DE ESTUDIANTES

En el tablero aparece proyectada la definición de polígonos semejantes dada por el profesor. Al final de un intercambio verbal entre el profesor y algunos

estudiantes, a petición del profesor, JJ[8] expresa "las dos" condiciones para que dos polígonos sean semejantes: "los ángulos siempre tienen que ser iguales" y "las razones entre sus lados también tienen que ser iguales". Enseguida el profesor plantea al curso la situación de tarea, constituida por la imagen gráfica de dos cuadriláteros no convexos (Imagen 1) y la pregunta "Si yo atiendo a esas dos características que dice JJ, ¿yo podría decir que estas dos figuras son semejantes?".

5.1 No, porque no se puede afirmar que los ángulos sean iguales

Voz de JN (interviene a solicitud del profesor)

> Sí. (En voz baja) [66] Creo que sí. [68] Porque... son iguales... (...) (Se sonríe) [70] La figura pequeña... pues... [72] [Las dos figuras son iguales] [p]ues, no en tamaño sino en forma. [74][9]

De esta expresión vamos a analizar la oración "[Las dos figuras son iguales] no en tamaño sino en forma". Las cuatro verbalizaciones anteriores –surgidas en interacción con el profesor, quien le formuló preguntas buscando precisión o ampliación de lo que acababa de decir (i.e., "¿Sí o no?", "¿Por qué?", "¿Qué son iguales?", "¿Son iguales las dos figuras?")– nos permiten contextualizar y dar sentido completo a la última oración. En consecuencia, la mencionada expresión nos resulta inteligible.

En su expresión, bien formada desde el punto de vista gramatical, JN, de manera dubitativa, responde afirmativamente la pregunta inicial del profesor y argumenta recurriendo a la forma de las figuras que observa en la proyección. Al ser la primera respuesta y una que no se ciñe completamente a la solicitud del profesor pero que es pertinente, además de estar formulada en un estilo cercano al lenguaje coloquial, consideramos que es **voz**.

En cuanto al **vocabulario y su uso**, todos los términos presentes en la oración son palabras clave del discurso geométrico. Es notorio que en lugar de "polígono" usa el término "figura" y que no articula la expresión "figuras semejantes".

---

[8] Remplazamos los nombres de los estudiantes por dos letras: JJ, JN, JH DG, SF, SG.

[9] En la transcripción usamos: ( ) para incluir descripción de acciones o detalles del contexto; (...), (... ...) o (... ... ...) para indicar silencio más o menos largo en la verbalización; "palabra"... para indicar un pare en lo que se estaba diciendo; [numeral] para indicar el puesto de la verbalización de la que fue tomada o parafraseada la cita; [ ] para incluir comentario que ayude a la claridad de la verbalización.

Emplea los términos "tamaño" y "forma" para referir a dos atributos propios de las figuras. El uso que da a la frase "son iguales en forma" es el que se da en el lenguaje coloquial para significar un parecido notable. En suma, no podemos decir que el uso de todos los términos especializados que incluye se ajuste bien a lo que dictan las matemáticas escolares.

Aunque tácito, es claro que el sujeto de la oración refiere a las figuras dadas en la situación de tarea; así, la **narrativa** de JN habla de objetos y predica sobre dos rasgos de aquellos. Es decir, reconocemos una narrativa objetificada que se puede someter a consideración para determinar si se acepta o rechaza. Para justificar por qué cree que las figuras son semejantes, JN presenta una descripción, resultado de una comparación holística, no detallada, de las dos figuras que, de hecho, son los **mediadores visuales** en la comunicación; esa manera de reconocer que "son iguales en forma" está basada exclusivamente en su percepción visual inmediata. Es una **rutina** usual en la cotidianidad para reconocer, por ejemplo, caras en fotografías a diferentes escalas, que se distancia de la solicitud del profesor de considerar las dos condiciones de la definición de semejanza de polígonos.

En reacción a la voz de JN, el profesor destacó el uso de la palabra "forma". Reconocemos en la voz de JN una contribución potencialmente productiva para el desarrollo del discurso matemático del aula, en dos sentidos. Por una parte, si se abordaran preguntas tendientes a precisar qué es la "forma de un polígono" y qué debe cumplirse para que dos polígonos sean iguales en forma, se podría abrir una vía para reificar el *proceso de comparar formas de polígonos* en el *objeto polígonos semejantes*. Por otra parte, si se abordara la pregunta "¿tienen la misma forma?" en diversos casos de pares de polígonos para los que no se dan sus medidas se podría generar una oportunidad para comenzar a ver la necesidad y utilidad de contar con un criterio común (que podría ser sugerido por la definición) para responder esa pregunta de manera informada.

Voz de JH

> (Desde su puesto) Es que los ángulos son iguales en las dos figuras. [84] El que está en la prime, en la figura pequeña eee... hay uno abierto y tres cerrados [86] (Pasa al tablero) Este ángulo... (hace una marca en torno al vértice del ángulo que parece recto en el polígono pequeño) es igual a este (hace una marca en torno al vértice del ángulo que parece recto en el otro polígono), solo que el tamaño de la figura pues cambia. [88]

Imagen 2. Usa mediador visual para indicar los objetos a los que se refiere

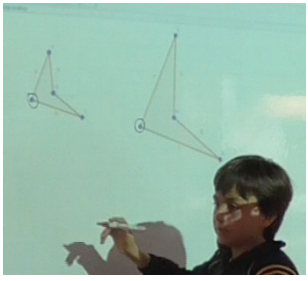
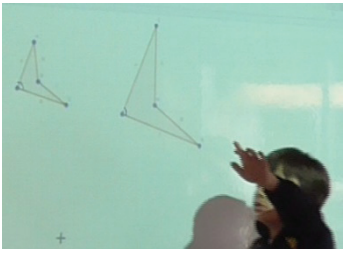


Imagen 3. Modifica el mediador visual usado



Esta expresión de JH es **voz**. Surge, de manera voluntaria y en respuesta a la situación de tarea planteada. Para su análisis, tomamos las tres intervenciones hechas en turnos distintos como un todo –sabiendo que entre ellas media una solicitud del profesor buscando precisión (i.e., "¿Cuáles ángulos?", "Pase al tablero a mostrar los ángulos iguales")– con el propósito de tener una respuesta lo más completa posible.

En su expresión, bien formada desde el punto de vista gramatical, JH particulariza la condición relativa a los ángulos de los polígonos a los polígonos expuestos en el tablero. Primero, afirma que los ángulos son iguales, luego se refiriere a los ángulos de una de las figuras mediante atributos y, finalmente, afirma que dos ángulos específicos, uno de cada figura, son iguales. Aunque reconocemos imprecisiones en esta expresión, la interpretación que acabamos de darle nos la hace inteligible. También la consideramos auténtica pues es la primera en la que se intenta atender una de las dos condiciones de la definición y, sobre todo, es la primera en la que de manera explícita se alude a rasgos de los ángulos que podrían servir para elegir una correspondencia entre vértices de los dos polígonos, asunto este que no se ha mencionado en manera alguna hasta el momento.[10]

Acerca del **vocabulario y su uso,** todos los términos presentes en la expresión de JH son palabras del discurso geométrico. De nuevo, es notorio que en lugar de "polígono" usa el término "figura" y que no articula la expresión "figuras

[10] Podría pensarse que la oración inicial de JH es mera repetición de lo dicho previamente por JJ (i.e., "los ángulos siempre tienen que ser iguales"). La diferencia en la forma verbal de las dos oraciones (i.e., "tienen que ser" y "son") nos lleva a ver diferencias: en el primer caso, es una prescripción, en el segundo es una descripción.

semejantes". Emplea el término "tamaño" para referir a un atributo de las figuras y manifiesta que "el tamaño de la figura cambia" en lugar de decir, por ejemplo, "las figuras no tienen el mismo tamaño", probablemente influido por la experiencia del uso de la opción Homotecia en GeoGebra. Usa también el término "ángulo", pero no, "ángulos correspondientes"; en cambio, acuña dos términos relacionados, "ángulo abierto" y "ángulo cerrado", que, al parecer, pretende emplear para insinuar un criterio para determinar la correspondencia de ángulos de "la figura pequeña" con ángulos de la otra figura. Los adjetivos "abierto" y "cerrado" parecen referirse al atributo amplitud de los ángulos. Finalmente, con el término "igual" predica una relación entre objetos –i.e., ángulos– para significar, como es usual en las matemáticas escolares y en la lengua natural– una relación relativa a un determinado atributo (i.e., amplitud de ángulo) o una relación relativa a la medida de ese atributo (i.e., medida de amplitud de ángulo); claramente, no pretende decir que los ángulos son el mismo como debería entenderse desde un punto de vista rigurosamente matemático. En suma, no podemos decir que el uso de todos los términos especializados que incluye se ajuste bien a lo que dictan las matemáticas escolares, pero no es tan desajustado como para no poder entender lo que pretende decir.

Aunque JH no usa el término "ángulos correspondientes", cuando puede actuar directamente sobre las figuras expuestas en el tablero, se vale de **mediadores visuales** –trazos curvos– (Imagen 2 e Imagen 3) para indicar, a la vez que usa el deíctico "este", los dos ángulos de los que habla, que efectivamente parecen estar en una correspondencia conveniente para lo que interesa.

Enfocándonos en la segunda oración de JH, cuando hace una descripción de los ángulos de la figura pequeña, vemos que comienza a esbozar un criterio (i.e., que el ángulo sea abierto o cerrado) para determinar una correspondencia que le permita identificar los ángulos de los cuales afirma que son iguales. Así, parece ser que JH está comenzando a generar una **rutina** de búsqueda de ángulos correspondientes de interés para la semejanza, que no se limita a la percepción visual inmediata.

En la tercera oración de JH, "Este ángulo... es igual a este, solo que el tamaño de la figura pues cambia", reconocemos una **narrativa** sobre dos ángulos, cada uno de los cuales hace parte de una de las figuras expuestas en el tablero, de los que se predica su igualdad. Es decir, reconocemos una narrativa objetificada que se puede someter a consideración para determinar si se acepta o rechaza.

El profesor aprovechó la voz de JH para preguntar a otro estudiante si estaba de acuerdo en la "igualdad de esos ángulos" y, por esa vía, el estudiante llegó a afirmar

que no se podría asegurar, sin una herramienta para medir, que los ángulos "son iguales", y que por ello no se podría asegurar que las figuras son semejantes.

Reconocemos en la voz de JH una contribución potencialmente productiva para el desarrollo del discurso matemático del aula en lo concerniente a la identificación de una correspondencia entre vértices de los polígonos, a la luz de la cual se examinan las dos condiciones que menciona la definición.

5.2 Si se cumpliera la segunda condición, ¿se podría decir que son semejantes?

Aunque podía parecer que la situación de tarea estaba resuelta, la intervención de DG muestra que no para todos era así.

Voz de DG

> Haciendo lo que dice aquí... (señala su cuaderno) queeee... midiendo las longitudes [107] y viendo la razón de ellas, entonces eeeee... el que está acá... (ademán con los brazos) de la figura pequeña... [109] No, no alcanzo a ver. Bueno, ese con este (ademán que indica pasar a la otra figura) y dividirlos, y si..., y así con todos los demás (ademán para aludir a las dos figuras), y si da lo mismo, ¿significaría que... sí es semejante? [111]

La expresión espontánea de DG es **voz.** Nos resulta inteligible: el estudiante pregunta si bajo el supuesto de que la segunda condición se cumpliera para el caso de las figuras expuestas, eso significaría que una de ellas es semejante a la otra. También, la consideramos auténtica: DG es el primero en considerar la condición relativa a los lados, pero no para examinarla en el caso que tienen entre manos pues él propone una situación hipotética al respecto, sino para cuestionar la suficiencia de la segunda condición para concluir que los dos polígonos son semejantes. Ello enfoca la manera de usar la definición de polígonos semejantes en el caso en cuestión.

DG usa un **vocabulario** que incluye varios términos propios del discurso de la semejanza de polígonos, concernientes, específicamente a la condición relativa a los lados. Usa "razón" para referirse a la división de medidas de longitud; no usa término alguno para indicar las parejas de medidas que conforman la razón; para ello se vale de deícticos y señalamientos sobre la figura que actúan como **mediador visual**. Usa "figura" en lugar de "polígono". Usa el cuantificador

universal (i.e., "y así con todos los demás") para incluir los cocientes entre medidas de todas las parejas de lados correspondientes. El uso de los términos especializados que incluye parece estar en concordancia con el sugerido por las matemáticas escolares.

Enfocando la atención en la situación hipotética que DG plantea, reconocemos una **narrativa** no objetificada en la que el estudiante describe el procedimiento que podría convertirse en **rutina** para examinar si la segunda condición de la definición se cumple (i.e., medir longitudes, determinar medidas que va a dividir, dividir medidas, comparar resultados) y su pregunta va encaminada a especificar el criterio de decisión respecto a la semejanza o no de los polígonos.

En reacción a la voz de DG, el profesor emitió un "ok". Reconocemos en la pregunta de DG una contribución potencialmente productiva para el desarrollo del discurso matemático del aula. Abordarla, recurriendo a considerar casos particulares en los que sea posible contrastar las condiciones suficientes para asegurar la semejanza de los polígonos con las que permiten afirmar la no semejanza, podría contribuir no solo a profundizar en la significación de la definición de polígonos semejantes, sino también a avanzar en el uso de los conectivos lógicos "y" y "o" y la negación de estos, según lo dictan las reglas de la lógica.

5.3 ¿Cómo proceder para examinar lo relativo a la primera condición?

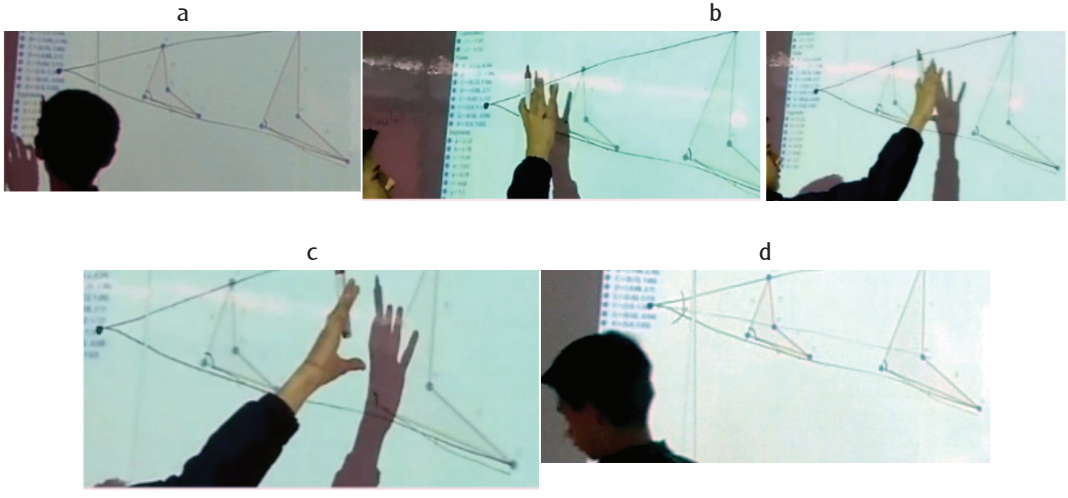
Después de la intervención de DG, hay dos intercambios en los que, de manera difusa, JH insinúa una relación entre homotecia y lados proporcionales con una relación multiplicativa y JJ, una relación entre homotecia y ángulos congruentes. El profesor aclara que no saben si se utilizó homotecia y que lo único que tienen son las figuras dadas; luego, repite que para asegurar que dos figuras sean semejantes se requiere asegurar que "los ángulos son iguales y que las razones entre los lados son iguales". Enseguida SF dice: "Pero si uno no tiene un transportador a la mano, ¿cómo hace?". El profesor repite textualmente las palabras de SF y SG reacciona esbozando una idea incompleta en la que sugiere el uso de la homotecia.

Voz de SG

> Me parece que, leyendo la guía, por ahí, me pareció ver que... digamos, si tú trazas una línea desde la parte superior de la figura ya agrandada (desde su puesto señala hacia el tablero) hasta la misma de la chiquita [130] (pasa al tablero a petición

del profesor) No sé si me acuerdo bien, pero en la guía, él [el autor] hacía una línea como desde acá (comienza a trazar una línea recta desde uno de los vértices del polígono más grande hasta uno del otro polígono y la extiende un poco) y otra desde acá, algo así (acción similar a la anterior para otro par de vértices), y luego cuando se juntaban aquí (marca el punto de intersección, Imagen 4a) entonces la figura como que se... (desde muy cerca del vértice del ángulo, desplaza hacia la derecha la mano abierta como barriendo la región angular determinada por las líneas trazadas, y cambia ligeramente su orientación con respecto al tablero, Imagen 4b) se agrandaba de acá a acá (desde la posición de la figura pequeña, desplaza hacia la derecha la mano extendida perpendicular al tablero y paralela a uno de los lados de la figura pequeña, Imagen 4c) [134].

Imagen 4. Gestos con los que SG acompañó su relato usando como mediador visual el dibujo realizado en el tablero

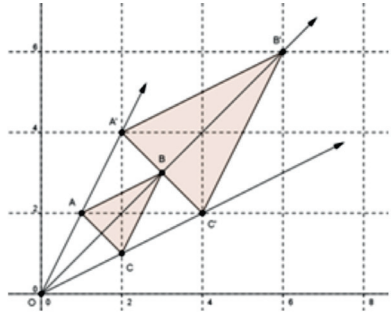


(Por sugerencia del profesor, SG tiene en cuenta otro de los vértices del cuadrilátero pequeño) ¡Ah! Creo que ahí, esta sería como que así (traza la línea a la que pertenecen la intersección de las otras dos, y otro par de vértices que podrían ser correspondientes), y digamos este ángulo (hace dos marcas, que trazadas parecen una sola, para referirse al ángulo determinado por las primeras dos líneas trazadas, ver Imagen 4d), tal vez, algo tendría que ver. (... ...) No me acuerdo de más. (Vuelve a su puesto) [141].

Para el análisis, reunimos en una sola expresión las intervenciones de SG, teniendo en cuenta que la última es reacción a una sugerencia que le hizo el profesor.

La expresión de SG, surgida por iniciativa propia, como reacción a la pregunta de SF que fue avalada por el profesor, es **voz**. Nos resulta inteligible. El estudiante presenta un relato que no había terminado de elaborar y del que no tenía suficiente certeza ("no sé si me acuerdo bien"), que fue influido por una lectura rápida de la guía ("me pareció ver") y, quizá, en particular, por la evocación de la imagen correspondiente a un ejemplo en el que se ilustra la aplicación de una homotecia de razón 2 a una región triangular (Imagen 5). SG habla de construir –a la vez que hace lo expresado– dos rectas determinadas, cada una, por lo que podríamos considerar un par de vértices correspondientes de las dos figuras; de marcar el punto de intersección de las dos rectas; luego sugiere que al deslizar de una cierta manera la figura pequeña, esta va aumentando su tamaño hasta alcanzar el de la figura grande. Enseguida, como reacción a una sugerencia del profesor respecto a considerar un tercer vértice de la figura pequeña, el estudiante traza la recta determinada por la intersección marcada antes y un tercer vértice de la figura pequeña y la extiende de manera que el tercer vértice de la figura grande también pertenezca a la recta. Termina su relato, sugiriendo que el ángulo formado por las dos rectas trazadas inicialmente es un elemento importante de un asunto que no explicita. Sin duda, también consideramos auténtica la expresión de SG. Desde el comienzo de la sesión de clase varios estudiantes han insinuado de manera vaga una relación entre homotecia y polígonos semejantes. Pero SG es el primero en sugerir, en lugar del uso de las condiciones de la definición de polígonos semejantes, una construcción relacionada con una homotecia –así no haya mencionado siquiera el término "homotecia"–; además de que lo hace en sus propias palabras (ver párrafo siguiente) independientemente de las debilidades que tiene su relato. Entrevemos como intención comunicativa de esta **voz** poner a consideración la idea esbozada para su elaboración como parte del discurso de la clase.

Imagen 5. Gráfica de un ejemplo dado en la guía de lectura, cuya evocación influyó el relato de SG



El **vocabulario** usado por SG no incluye términos propios del discurso geométrico, con excepción de "figura" y "línea" –usadas, respectivamente, en lugar de "polígono" y "recta"– y "ángulo". Usa "juntar" para referirse a "intersecar". Además, se vale de descripciones cuando no puede indicar aquello a lo que se refiere (e.g., "donde se juntan", "parte superior de la figura agrandada", "la misma parte de la chiquita"). Es de destacar el uso de la forma "el mismo punto en la otra figura" en vez de "puntos correspondientes", lo que pone en evidencia una confusión entre una figura que se transforma (e.g., "la figura como que se... se agrandaba de acá a acá") o dos figuras que se pueden poner en correspondencia (e.g., "la figura ya agrandada", "de la chiquita"). En suma, su lenguaje no es especializado.

Cuando el profesor le dice que pase al tablero y, así, SG dispone de las dos figuras expuestas como su **mediador visual** de base, los vértices que señala, las rectas que traza, la intersección que marca y señala, el arco que traza para indicar el ángulo al que se refiere y, los gestos que hace para indicar que la figura grande es transformada de la figura pequeña, todos ellos son mediadores visuales para la exposición que SG hace frente al grupo.

En la voz de SG reconocemos un relato asociado a las dos figuras del tablero, en el que menciona acciones que podrían hacer parte de un cuasi procedimiento o **rutina** geométrica, cuyo propósito, al parecer, sería determinar si la figura de mayor tamaño pudo ser obtenida por homotecia sobre la otra figura y, por esa vía determinar si los ángulos correspondientes tienen o no medidas iguales. No consideramos que ese relato sea una **narrativa** susceptible de aceptación o rechazo por no tener información suficiente.

Como reacción a la voz de SG, el profesor presenta al grupo su interpretación de la idea expuesta e inicia y sostiene un diálogo con algunos estudiantes

tratando de obtener la respuesta a la pregunta "¿Qué debe pasar cuando yo trazo esas líneas?" que, probablemente, abriría la vía para completar colectivamente el procedimiento esbozado por SG. No tiene éxito. Vuelve a presentar su interpretación, explicitando lo que sería el criterio en términos de si se intersecan o no las tres rectas en un mismo punto, y termina afirmando que no es posible concluir necesariamente la semejanza de las dos figuras. Reconocemos en la voz de SG una contribución potencialmente productiva para el desarrollo del discurso matemático del aula, en dos sentidos. Por un lado, abordando preguntas relacionadas con las acciones mencionadas en el relato (e.g., en qué situaciones se pueden realizar, con qué propósito se realizan, cómo se usan los resultados que se van obteniendo, etc.) se podría llegar a establecer una secuencia detallada de acciones realizadas respecto a dos polígonos, que permita llegar a una narrativa relativa a los ángulos correspondientes de los polígonos en cuestión. Por otro lado, reflexionando sobre la experiencia de producir la mencionada secuencia y la secuencia misma, se puede iniciar la objetificación de tal actividad en el respectivo procedimiento geométrico.

6. PARA TERMINAR

En el análisis expuesto identificamos y describimos, aprovechando las herramientas del enfoque comunicacional de Sfard (2008a), voces matemáticas de cuatro estudiantes, surgidas en un intercambio verbal breve en una clase de geometría. Sintetizamos a continuación la descripción hecha.

Tres de las cuatro expresiones consideradas –la excepción es la de DG– llegan a ser inteligibles a través de un breve intercambio con el profesor, en el que este pide de manera verbal o gestual precisión de lo dicho y el estudiante responde pertinentemente. En los cuatro casos, se identifican expresiones auténticas surgidas y elaboradas en el curso de la conversación, lo cual se evidencia en el carácter idiosincrásico de las verbalizaciones, propio de jóvenes que están comenzando su incursión en el discurso matemático sobre polígonos semejantes.

Enfocando el vocabulario incluido en las voces y el uso de este que podemos inferir, cabe resaltar que solo en una voz aparece el término "semejante" y está empleado para preguntar sobre una propiedad de una figura con respecto a otra y no para aludir a una relación entre dos figuras. En ese sentido, el término "semejante" aún no se ha incorporado al discurso de los estudiantes explícita y cómodamente, y la relación de semejanza no se ha objetificado.

Encontramos algunos términos especializados propios del discurso sobre polígonos semejantes: tamaño, forma, ángulo, longitud, medir longitud, razón y división cuyo uso fue analizado detenidamente. Los términos "tamaño" y "forma" se usan como atributos de una figura; sin embargo, no hay información directa sobre la significación dada a "forma"; probablemente, los estudiantes aluden con este a la apariencia captada perceptualmente de manera global, lo que puede explicar la tendencia a afirmar que dos figuras son iguales en forma, sin que medie un procedimiento distinto al escaneo visual. El término "longitud" se usa como atributo medible (posiblemente de un lado de un polígono); "razón entre dos medidas", como la división de estas; "ángulo" se usa como un objeto caracterizado por su amplitud, de manera que con frecuencia se confunde el objeto (i.e., unión de rayos con punto inicial común) con su atributo principal (i.e., amplitud). Para aludir al objeto central del tema de conversación es notorio, en todas las voces, el remplazo del término "polígono" por "figura", en lo que incurrió también el profesor.

También notamos el recurso a la descripción y al uso de deícticos para subsanar la carencia de términos especializados, hecho que, a pesar de favorecer la expresión, dificulta la inteligibilidad y genera sobreentendidos no siempre correctos; así, encontramos, por ejemplo, el uso de "parte superior de la figura ya agrandada" en lugar de "vértice *X*", "la misma parte superior de la chiquita" en lugar de "vértice correspondiente a *X*"; "se juntaban" por "se intersecaban"; "una recta puede tocar este punto" por "una recta a la que pertenece este punto", "ese con este" para indicar un lado de una de las figuras y su correspondiente en la otra.

En tres de las cuatro voces (la excepción es la de SG) reconocemos narrativas; dos de ellas objetificadas (una refiere a las figuras expuestas en el tablero, otra refiere a un par de ángulos correspondientes en las dos figuras expuestas en el tablero) y susceptibles de ser aceptadas o rechazadas; una en la que se describe un procedimiento; otra en la que se presenta una refutación sobre un procedimiento. En la voz de SG se presenta un relato de un cuasi procedimiento geométrico que incluso, nos permitimos especular, no estaba previsto en la planeación del profesor, pues no hace uso de la definición de polígonos convexos semejantes.

Las voces analizadas en este estudio nos impulsan a notar asuntos importantes para el desarrollo del discurso del aula, y también para la individualización del mismo. Sin pretensión de generalidad, mencionamos dos.

El uso apropiado de la respectiva definición para determinar si dos polígonos dados son semejantes no solo requiere tener en cuenta las condiciones que aquella impone, sino también qué se puede concluir al examinar cada una de tales condiciones. De esto nos advierte la voz de DG cuando, habiéndose concluido la

imposibilidad de asegurar la semejanza de los cuadriláteros en cuestión por no tener la información requerida en la primera condición de la definición, enfoca la atención en lo que se podría concluir si se supiera que la segunda condición se cumple. Subyacente al uso apropiado de esta definición está el uso canónico de los conectivos lógicos y de la negación de una proposición. Esta consideración es útil para impulsar una reflexión en torno a la secuenciación de tareas para apoyar la construcción de significado de la definición de polígonos semejantes.

El uso de deícticos apoyado por el señalamiento sobre una representación gráfica es un recurso que puede ayudar considerablemente a esbozar ideas en proceso de elaboración cuando no se tiene el vocabulario especializado; y, no tener acceso a dicho recurso puede constituirse en desventaja que afecta la claridad de lo que se pretende comunicar. De esto nos advierte la expresión inicial de JH que se clarifica cuando puede señalar los ángulos de los que predica igualdad, y la de SG al proponer un cuasi procedimiento. Sin embargo, con la consideración anterior no pretendemos insinuar que el uso de deícticos sea lo deseable para participar adecuadamente en el discurso matemático del aula; sí queremos llamar la atención sobre su posible efecto para promover la participación de los estudiantes y sobre el andamiaje que se hace necesario de parte del profesor para que los estudiantes cada vez necesiten menos del recurso para poder intervenir en el discurso de la clase.

Respecto a la hipótesis inicial, voces analizadas, entre las cuales están las que presentamos aquí, nos impulsan a modificarla: en un ambiente comunicativo en el que la intervención de los estudiantes en el discurso sea sentida por ellos como segura, surgen expresiones inteligibles y auténticas, que muy probablemente son aprovechables para extender y profundizar el discurso en el aula, si el profesor además de propiciar e impulsar la intervención de los estudiantes, asume su papel de experto en el discurso para ayudarlos a que su participación sea cada vez más especializada.

REFERENCIAS

Camargo, L. (en prensa). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática.*

Clarke, D., Xu, L.H. y Wan, M. E. V. (2013). Spoken mathematics as an instructional strategy: The public discourse of mathematics classrooms in different countries. En B. Kaur, G. Anthony, M. Ohtani y D. Clarke (Eds.), *Student voice in mathematics classroom around the world* (pp. 13-32). Sense Publishers.

Duval, R. (2017/2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (2a ed.) (M. Vega, Ed.). Universidad del Valle.

Esmonde, I. y Langer-Osuna, J. (2013). Power in numbers: Student participation in mathematical discussions in heterogeneous spaces. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(1), 288-315.

Forero-Sáenz, A. (2008). Interacción y discurso en la clase de matemáticas. *Universitas Psychologica, 7*(3), 787-805.

Gates, P. y Vistro-Yu, C. (2003). *Is* mathematics for all? En A. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.). *Second international handbook of mathematics education* (pp. 31-73). Springer.

Gregg, J. (1995). The tensions and contradictions of the school mathematics tradition. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(5), 442-466.

Ingram, J., Andrew, N. y Pitt, A. (2019). When students offer explanations without the teacher explicitly asking them to. *Educational Studies in Mathematics, 101*(1), 51-66.

Jiménez, A. Suárez, N. y Galindo, S. (2010). *La comunicación: eje en la clase de matemáticas. Praxis & Saber, 1*(2), 173-202.

Jung, J. y Shütte, M. (2018). An interactionist perspective on mathematics learning: Conditions of learning opportunities in mixed-ability groups within linguistic negotiation processes. *ZDM, Mathematics Education, 50*(6), 1089-1099.

Kaur, B. (2013). Participation of students in content-learning classroom discourse: A study of two grade 8 mathematics classes in Singapore. En B. Kaur, G. Anthony, M. Ohtani y D. Clarke (Eds.), *Student voice in mathematics classrooms around the world* (pp. 65-88). Sense Publishers.

Lavie, I., Steiner, A. y Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics, 101*(2), 153-176.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Autor.

Morgan, C. y Sfard, A. (2016). Investigating changes in high-stakes mathematics examinations: A discursive approach. *Research in Mathematics Education, 18*(2), 92-119.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Autor.

Radford, L. y Barwell, R. (2016). Language in mathematics education research. En Á. Gutiérrez, G. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education. The journey continues* (pp. 275-314). Sense Publishers.

Selden, J. y Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics, 29*(2), 123-151.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences, 16*(4), 567-615.

Sfard, A. (2008a). *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional* (P. Perry y L. Andrade, eds. y trads.). Universidad del Valle.

Sfard, A. (2008b). Conducción del discurso por entre la metáfora y el rigor: el análisis focal para investigar el surgimiento de los objetos matemáticos. En *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional* (pp. 71-110). Universidad del Valle.

Sfard, A. (2008c). La cognición como comunicación: reconsiderar el aprendizaje mediado por la conversación, a través del análisis multifacético de las interacciones matemáticas de los estudiantes. En *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional* (pp. 111-161). Universidad del Valle.

Sfard, A. (2008d). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Sfard, A. (2008e). Aprender matemáticas como la acción de desarrollar un discurso. En *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional* (pp. 39-63). Universidad del Valle.

Sfard, A. (2014). Why Mathematics? What Mathematics? En M. Pitici (Ed.), *The best writing on mathematics 2013* (pp. 130-142). Princeton University Press.

Sfard, A. (2015). Why all this talk about talking classrooms? En L. Resnick, C. Asterhan y S. Clarke (Eds.), *Socializing intelligence through academic talk and dialogue* (pp. 235-243). American Educational Research Association.

Tang, S., Morgan, C. y Sfard, A. (2012). Investigating the evolution of school mathematics through the lens of examinations: Developing an analytic framework. En *ICME-12 Pre-proceedings. The 12th International Congress on Mathematical Education. Topic Study Group* (pp. 5977-5986). Coex-Seoul, Korea.

Villalta, M. A. (2009). Análisis de la conversación. Una propuesta para el estudio de la interacción didáctica en sala de clase. *Estudios Pedagógicos, XXXV*(1), 221-238.

Wang, S. (2016). *Discourse perspective of geometric thoughts*. Springer Spektrum.

Patricia Perry

Dirección: Kr 45A 123 64, Bogotá-Colombia

Teléfono: (57) 1 6470358

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN DOI: 10.24844/EM3302.05

"Los saltos de las ranas". Estudio de una secuencia didáctica de proporcionalidad, con problemas de comparación de razones, en quinto grado de primaria

"The jumps of the frogs." Study of a didactic sequence on proportionality, with ratio comparison tasks, in fifth grade of primary school

David Block Sevilla[1]

Resumen: Se presenta un estudio de didáctica de la proporcionalidad, centrado en la comparación de razones en quinto grado de primaria. Se diseñó y aplicó una secuencia de situaciones en el contexto de unas ranas que, al dar cierto número de saltos, avanzan cierto número de metros; se trata de averiguar qué rana da los saltos más grandes. La medida de un salto no es un número entero, pero no es necesario explicitarlo, las comparaciones se hacen en el nivel de las razones entre números naturales "tantos metros en tantos saltos". Un programa de computadora realimentó las anticipaciones de los alumnos, permitiéndoles detectar sus errores. La secuencia buscó favorecer el aprendizaje de la noción de razón y, de manera más general, el desarrollo del pensamiento proporcional. Los resultados confirman que los problemas fueron adecuados para dicho propósito y también para favorecer el desarrollo de la capacidad de argumentación, al formular y debatir reglas generales.

Fecha de recepción: 08 de noviembre de 2019. **Fecha de aceptación:** 16 de enero de 2021.

[1] Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, dblock@cinvestav.mx, orcid.org/0000-0002-3914-5544

Agradezco a Gabriela González, Pilar González, Patricia Martínez, Marina Kriscautzky y Laura Reséndiz su participación en las observaciones y registros de clase de la secuencia. El programa en LOGO fue elaborado por Marina Kriscautzky y Patricia Martínez en el año de 1999. Finalmente, agradezco a Laura Reséndiz su colaboración en la elaboración del presente manuscrito.

Palabras claves: *Enseñanza de las Matemáticas, Educación Básica, Proporcionalidad, Razón, Números racionales.*

Abstract: This paper is about a didactical study on comparison of ratios in fifth grade of primary school. A sequence of situations was designed and applied in the context of frogs that, with a certain number of jumps, advance a certain number of meters; it's about figuring out which jumps are bigger. The measure of a jump is not a whole number, but it is not necessary to make this number explicit, the comparisons are made at the level of ratios between natural numbers. A computer program was used to allow students to detect errors in their anticipations. The sequence seeks to favor the learning of the notion of ratio and, more generally, the development of proportional thinking. The results confirm the adequacy of the problems to move in that direction and reveal an unforeseen achievement: the development of the capacity for argumentation, to formulate and debate general rules.

Keywords: *Teaching of Mathematics, Basic Education, Proportionality, Ratios, Rational Numbers.*

INTRODUCCIÓN

Dos ranas avanzan cada una cierta distancia en cierto número de saltos. ¿Cuál da los saltos más grandes? En torno a esta sencilla trama, se diseñó una secuencia de situaciones con dos tipos de problemas de proporcionalidad –de comparación de razones y de cuarta proporcional–,[2] mediante los cuales se buscó propiciar que los alumnos de quinto grado de primaria adquirieran conocimientos específicos sobre:

- Procedimientos de resolución de dichos problemas, y las propiedades de la proporcionalidad que lo sustentan;
- La inadecuación de las estrategias aditivas;

[2] El término pertenece a la vieja Teoría de las Razones y las Proporciones. Se trata de problemas en los que, a partir de tres datos se debe hallar el cuarto con el que se forman dos razones iguales (una proporción). También se llaman problemas de valor faltante, aunque esta denominación es mucho más general.

- El comportamiento de una magnitud cociente (tamaño de un salto), la cual varía de manera directamente proporcional a la distancia avanzada y de manera inversamente proporcional al número de saltos.
- Algunas propiedades de la operación de división.

A través de los aspectos específicos señalados, se buscó propiciar el desarrollo de una capacidad más general, conocida en la literatura sobre el tema como *pensamiento proporcional,* esto es, la capacidad de establecer relaciones entre cantidades en un contexto "que implica a la vez co variación de las cantidades e invariancia de razones o productos" (Lamon, 2007, p. 638).

Por otra parte, el uso de las razones de números naturales permite incursionar en el territorio de los números racionales, sin tener que expresarlos todavía de manera explícita, lo cual crea un antecedente para su estudio (Block, 2008).

Razones, fracciones, proporcionalidad, multiplicación y división, constituyen nociones del campo conceptual de las estructuras multiplicativas, que se aprenden de manera integrada mediante situaciones que las implican a todas (Vergnaud, 1983). Con el presente estudio queremos contribuir al conocimiento de situaciones fértiles para la enseñanza escolar que respondan a esta hipótesis y, recíprocamente, al fortalecimiento de esta.

En lo que sigue, precisaremos el estatuto de las cantidades y de las razones en juego. Después haremos un análisis de las tareas y de los procedimientos a priori posibles, el cual servirá como guía para ver los resultados de una aplicación de la secuencia en un grupo de quinto grado. Al final, elaboramos algunas conclusiones.

En el análisis de la aplicación de las situaciones, nos centramos únicamente en las situaciones de comparación.

¿Razones, cocientes o fracciones?

¿Qué se puede hacer con una división como 3 entre 4 cuando aún no se conocen las fracciones, ni los decimales, y por lo tanto no se puede expresar el resultado como $\frac{3}{4}$ ni como 0.75? Se puede saber, por ejemplo, que el resultado de 3 entre 4 es más grande que el de 3 entre 5 y más chico que el de 3 entre 2, aunque no se sepa expresar con un número ninguno de los tres resultados. Se puede saber también que el resultado de 3 entre 4 es igual al de 6 entre 8, y al de muchas otras divisiones. ¿A qué noción corresponden los conocimientos

que se usan para saber esas cosas? Se trata de conocimientos implícitos acerca de ciertas propiedades de la operación división, por ejemplo, "el cociente de una división no se altera si se multiplican sus términos por el mismo número"; también hay una relación con la noción de equivalencia de fracciones $(\frac{3}{4} = \frac{6}{8})$. Sin embargo, no efectuamos la división, ni expresamos el resultado con fracciones. Hay otra noción que puede dar cuenta de los conocimientos que se ponen en juego: la de "razón". Retomando una de las definiciones clásicas de razón (y evitando aquellas que la definen como sinónimo de cociente y de fracción), esta es una relación de tipo multiplicativo entre dos números naturales (o, también, una "comparación multiplicativa"). Cuando decimos que 3 entre 4 es igual a 6 entre 8, podemos estarnos basando en que, por ejemplo, la razón entre 3 y 6 (que podemos expresar sin fracciones con la palabra "doble") es la misma que entre 4 y 8, y eso nos lleva a concluir que la razón entre 3 y 4 es la misma que entre 6 y 8.

El presente estudio se inscribe en una línea de investigación[3] en la que exploramos la hipótesis siguiente: un trabajo con razones, previo a su expresión con fracciones, puede contribuir al conocimiento de la proporcionalidad, y a sentar bases para el estudio posterior de las fracciones.

Coincidimos con la apreciación de Freundenthal (2002) con respecto a que las fracciones son maneras de simplificar la operatoria con razones, pero a costa de su lucidez:

> El significado de la razón aparece cuando se habla de la igualdad (y la desigualdad) de razones, sin conocer su tamaño, cuando se dice, con sentido, "a es a b como c es a d" sin anticipar que "a es a b" puede reducirse a un número o a un valor de magnitud a/b (...) La razón es una relación de equivalencia en el conjunto de parejas ordenadas (o de valores de magnitud) ... Los cocientes y las fracciones constituyen formas de reducir esta complejidad, de bajar su estatuto lógico, a costa de la lucidez (p. 180 y 181).

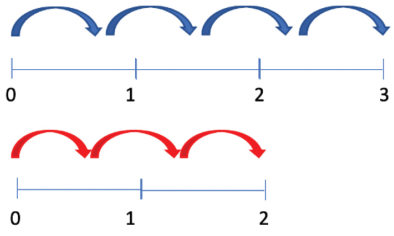
En el Anexo 1 se presenta el conjunto de trabajos publicados en el marco de la línea de investigación sobre la temática de las razones y las fracciones, y se ubica el presente texto en ese conjunto.

[3] *Las razones: precursoras de las fracciones en los procesos de aprendizaje.* Línea de investigación desarrollada en el DIE CINVESTAV.

2. LA SECUENCIA "LOS SALTOS DE LAS RANAS", LOS TIPOS DE TAREAS

El contexto es el de unas ranas que dan, cada una, saltos del mismo tamaño en una recta numérica.[4] Los problemas de comparación de razones consisten en comparar el tamaño de los saltos de dos ranas, conociendo –de cada una– dos datos: el número de saltos que dan y la distancia total que avanzan. También se incluyen problemas de cuarta proporcional, en los que se desconoce uno de los cuatro datos de dos ranas que dan saltos del mismo tamaño. Las magnitudes (número de saltos, distancia recorrida, tamaño del salto) son muy accesibles.

La situación ofrece la posibilidad de verificar empíricamente las respuestas mediante un programa de computadora diseñado *exprofeso*:[5] una vez introducidos los dos datos de cada rana, el programa las muestra saltando sobre rectas numéricas, lo que permite comparar los saltos visualmente (Block y Martínez, 1999).



Rana Azul: 3 unidades en 4 saltos
Rana Roja: 2 unidades en 3 saltos

Figura 1. Visualización de los saltos de dos ranas en la computadora

Las razones en juego en esta experiencia son heterogéneas, esto es, se establecen entre magnitudes de distinta naturaleza (número de saltos y metros).

Revisaremos aquí los principales procedimientos para la comparación del tamaño de los saltos. Veremos primero los procedimientos que se basan en relaciones cualitativas entre las cantidades y en cálculos aproximados. En la tabla 1 enlistamos los procedimientos organizados en función de los términos que se relacionan, ya sea homogéneos: dos cantidades de saltos (s y s') por un

[4] Este recurso fue introducido en los libros de texto mexicanos de los años setentas, para el estudio del orden y de la suma (Secretaría de Educación Pública [SEP], 1972).

[5] El programa fue diseñado con Logo, por miembros del equipo de Cómputo Infantil de la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico de la Universidad Nacional Autónoma de México (DGSCA-UNAM).

lado, y dos cantidades de metros por otro (m y m'), o bien heterogéneos: una cantidad de saltos y la correspondiente cantidad de metros (m y s) de una rana, y otra similar de otra rana (m' y s').

En la tabla 1 se indican los principales casos de comparaciones cualitativas entre los tamaños de los saltos de dos ranas:[6]

Tabla 1. Procedimientos cualitativos en problemas de comparación de razones

Relaciones entre términos homogéneos.	• Si s > s' y m = m' entonces S < S' Es decir, si la rana A da más saltos que la B, y avanza la misma distancia, los saltos de la rana A son más pequeños. • Si s = s', y m > m' entonces S > S' • Si s > s' y m < m' entonces S < S' • Si s 2s' y m < 2m' entonces S< S' Es decir, si la rana A da el doble o más saltos que la rana B, pero avanza menos del doble de distancia, entonces sus saltos son más chicos.
Relaciones entre términos heterogéneos	• Si s > m y s' < m', entonces S < S' • Si s > 2m y s' < 2m' entonces S < S' Es decir, si en la Rana A la cantidad de saltos es más del doble que la de metros, y en la B es menos del doble, los saltos de A son más chicos. • Si s > 1/2m y s'< 1/2m, entonces S > S'

Poner en juego las relaciones anteriores lleva a una primera exploración de la noción de razón. Se espera que, en cierto momento, se institucionalice la existencia de *razones equivalentes* –que en este contexto significa razones a las que les corresponde el mismo tamaño de salto– y la manera de obtenerlas: multiplicando o dividiendo ambos términos por un mismo número.[7]

Para comparar las razones en los casos en que no proceden los métodos cualitativos, se prevén dos procedimientos: el cálculo del valor unitario (cuántos metros avanzan por salto) o la obtención de otras razones equivalentes con un término común, por ejemplo, para comparar *3 metros en 4 saltos* contra *2 metros en 3 saltos* se pueden obtener las razones equivalentes *6 metros en 8 saltos* vs

[6] Las abreviaturas que se utilizarán en este texto son: *m* y *s* representan respectivamente las cantidades de metros y de saltos de una rana, y *m'*, *s'* las de otra rana; *S* y S' remiten al tamaño de un salto de cada rana.

[7] Esta definición de la equivalencia de razones corresponde, en el marco de la relación de proporcionalidad, a la propiedad de la conservación de las razones internas y, en el marco de las funciones, a la propiedad del isomorfismo multiplicativo f(kx) = k (f(x). En los términos propuestos por Vergnaud (1983), el factor k se llama "operador escalar".

6 metros en 9 saltos. Este segundo procedimiento es el que ofrece una alternativa que evita el uso de números no enteros (en este caso, $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{3}$ de metro por 1 salto).

Finalmente, entre los procedimientos erróneos que se pueden esperar, interesan especialmente dos: el centramiento en una variable dejando de lado la otra ("Son más grandes los saltos de la rana x, porque avanzó más metros"); y los que ponen en juego comparaciones aditivas, en lugar de multiplicativas, por ejemplo, la rana *x* dio un salto más y avanzó 1 metro más que la rana *y*, entonces sus saltos son del mismo tamaño. Se espera que la retroalimentación empírica (se explica más adelante) y los debates ayuden a visibilizar y cuestionar estos errores.

Las situaciones de la secuencia "Los saltos de las ranas", se diseñaron buscando satisfacer las características de una situación adidáctica de la noción de razón (Brousseau, 1998). Las principales características de este tipo de situaciones son: 1) el concepto en cuestión –en este caso, la noción de razón– subyace a la estrategia óptima de resolución; 2) el problema que plantea la situación debe poder ser abordado –más no necesariamente resuelto, o no resuelto de manera óptima– a partir de los conocimientos previos del sujeto; 3) la situación debe permitir generar, mediante el manejo de ciertas variables, dificultades que favorezcan la evolución de los conocimientos; y finalmente, 4) la situación debe permitir a los alumnos validar por sí mismos el éxito o fracaso de sus acciones. Respecto de esta última característica, se previeron dos modalidades: la verificación empírica de respuestas utilizando una recta numérica en la computadora, mediante un programa hecho ex profeso y, por otra parte, la organización de puestas en común en las que se comparan resultados y procedimientos, y eventualmente se organizan debates y más pruebas, si se consideran necesarias.

3. APORTES AL ESTUDIO DE LA NOCIÓN DE RAZÓN DESDE OTRAS PERSPECTIVAS

Los procedimientos para resolver problemas de cuarta proporcional y de comparación, como los anteriores, han sido estudiados en investigaciones sobre el desarrollo de la noción de proporcionalidad. Se han caracterizado las estrategias más importantes, por ejemplo, las estrategias que implican el uso del operador escalar o el uso del operador función (Vergnaud, 1983), las estrategias inter e

intra (*within, between*) (Noelthing, 1980 a y b).[8] Se han destacado variables que complejizan los problemas o que propician un tipo de estrategia en lugar de otro (Hart, 1988; Karplus *et al.*, 1983; Lamon, 2007; Noelthing, 1980 a y b; Vergnaud, 1983; entre otros).

Noelthing (1980 a y b), mediante su estudio ya clásico de la naranjada –en el que niños y adolecentes de distintas edades y escolaridad comparan la intensidad de sabor a naranja de dos mezclas preparadas con distintas cantidades de vasos de agua y de jugo–, estableció niveles de desarrollo relativos a esta noción y los vinculó a las etapas piagetanas de desarrollo del pensamiento lógico.

La situación de la naranjada que utilizó Noelthing, resultó muy adecuada para la exploración del desarrollo de ciertos aspectos del razonamiento proporcional de los niños y jóvenes, pero, no lo fue en cambio, para el aprendizaje, en la medida en que la situación no retroalimentaba a los alumnos, ellos no tenían manera de saber si su respuesta fue incorrecta y, por lo tanto, no tenían ocasión de cuestionar y regresar. Una pregunta que queremos contribuir a contestar entonces es si, en una situación como la de los saltos de las ranas que sí ofrece retroalimentación –en la que intervienen magnitudes más accesibles que las de una mezcla, y que permite hacer visible el carácter erróneo de las estrategias aditivas– puede propiciarse cierta evolución de los procedimientos de los alumnos del último ciclo de la primaria.

Finalmente, cabe destacar el estudio de Brousseau (1981) sobre los decimales, el cual constituye el primero, y casi el único, en el que se explora de manera sistemática el uso de razones en una génesis artificial de las fracciones. La secuencia construida es muy amplia, compleja y distinta de lo usual, por lo que puede ser difícil de implementar, pero sin duda abre un camino para explorar opciones, como la que estudiamos aquí.

[8] De acuerdo con Lamon (2007), las categorías de Vergnaud (1983) apelan a la relación entre dos espacios de medidas. Las de Noelthing (1980a y b) se refieren al interior/exterior de un sistema (la naranjada).

4. HIPÓTESIS DE TRABAJO Y METODOLOGÍA

a) Hipótesis

En las líneas anteriores hemos ido precisando las hipótesis que nos ha interesado estudiar. Sintetizamos aquí una hipótesis de investigación que orienta este estudio:

- Las situaciones de la secuencia "Los saltos de las ranas" funcionan como situaciones adidácticas de la noción de razón en un grupo escolar de quinto grado de primaria.

Y, las hipótesis más específicas son:

- Las situaciones favorecen que los alumnos pongan en juego procedimientos de resolución relacionados con la noción de razón;
- La retroalimentación que se ofrece a los alumnos a través del programa de cómputo, les permite reconocer sus errores.
- Lo anterior favorecerá una evolución de los procedimientos en cada tipo de tarea;
- Además, los alumnos lograrán manipular las medidas no enteras de los saltos a través de razones de números naturales, apoyándose en propiedades de la proporcionalidad.

b) Tipo de estudio y condiciones de la experimentación

Se trata de una experiencia de ingeniería didáctica (Artigue, 1995). A partir de un estudio preliminar sobre las nociones de fracción y razón en la escuela primaria (Block, 2006), en un proyecto de largo plazo se han ido diseñando secuencias didácticas para el aprendizaje de estas nociones en la primaria. En el presente artículo se expone una de estas secuencias.

La secuencia fue aplicada en un grupo de quinto grado de primaria de una escuela de la Ciudad de México. La conducción estuvo a cargo de la maestra titular del grupo, con experiencia en la gestión de situaciones bajo el mismo enfoque didáctico que la presente.

Los datos recabados fueron de dos tipos: las notas, con apoyo de audio, de seis observadores (lo que permitió que fueran observados entre cuatro y cinco equipos de alumnos) y las hojas de trabajo de los alumnos.

c) Distribución de actividades

A lo largo de seis sesiones, se alternaron situaciones de comparación de razones (comparar razones, redactar y evaluar reglas) y situaciones de cuarta proporcional (hallar uno o varios valores faltantes). Casi siempre, en una sesión de una hora, o un poco más, se propusieron dos o más actividades. La distribución se muestra en el Anexo 2.

5. RESULTADOS

5.1 Comparar de manera cualitativa

En la sesión 1 se planteó a los alumnos la siguiente actividad:

> La rana verde y la rana morada hicieron cuatro competencias. En cada competencia cambiaron el tamaño de sus saltos. Escribe el color de la rana a la que le apuestas en cada competencia y explica por qué. Recuerda: NO gana la que dé más saltos, ni la que recorra más distancia, sino la que dé saltos más grandes.

En la figura 2 se muestra la parte de la ficha que corresponde a la primera competencia y en la tabla 2 los datos de las cuatro competencias. En todos los casos la comparación se puede hacer sin transformar los pares (y por lo tanto sin hacer cálculos).

Figura 2. Ficha 1

Primera competencia

Rana Verde		Rana Morada	
Recorrido	Nº de saltos	Recorrido	Nº de saltos
12 metros	12 saltos	7 metros	5 saltos

La rana que da saltos más grandes es: _____
Porque:_____

Tabla 2. Datos que involucraron las cuatro competencias

Competencia	1ª	2ª	3ª	4ª
Verde	12, 12*	28, 5	30, 8	24, 5
Morada	7, 5	36, 5	30, 11	15, 8

*El primer número de cada par indica el recorrido y, el segundo, el número de saltos

Los alumnos resolvieron en parejas. La mayor parte del grupo logró poner en juego procedimientos pertinentes para realizar las comparaciones, lo que supuso identificar las tres variables (número de saltos, distancia recorrida, tamaño de cada salto), y algunas relaciones entre ellas. En la tabla 3 puede observarse que no hay un procedimiento dominante para todas las competencias, los procedimientos son sensibles a las características de los datos numéricos de las razones. Al día siguiente se les pidió que compararan sus respuestas con las de otra pareja y que acordaran una respuesta de equipo. A continuación, se muestran algunos procedimientos.

Tabla 3. Frecuencias de procedimientos en Ficha 1 (sesión 1)[9]

Procedimiento	Primera Competencia 12, 12 7, 5	Segunda Competencia 28, 5 36, 5	Tercera Competencia 30, 30, 8 30, 11	Cuarta Competencia 24, 5 15, 8
A. Número de saltos constante y mayor recorrido implica mayor tamaño del salto		8 + 2 s/j*		
B. Recorrido constante y mayor número de saltos implica menor tamaño del salto			4 + 7 s/j	
C. Mayor recorrido y menos saltos, implica mayor tamaño de salto				10 + 1 s/j
D. Estimación o cálculo de uno o los dos valores unitarios	7	2	3	3
E. Respuesta correcta, pero justificación errónea	9	3	1	
F. Respuesta errónea		2		

* s/j = falta la justificación del resultado, o está incompleta.

a. Los procedimientos más frecuentes: cualitativos

Los argumentos que los alumnos dieron para justificar su respuesta, por escrito o verbalmente, dejan ver que la mayoría identificó las relaciones que permiten comparar con pocos cálculos numéricos, o sin cálculos.

En la primera competencia (*12m, 12s*, vs *7m, 5s*) si bien se registraron más dificultades que en las demás, probablemente por ser la primera, identificaron que el tamaño de un salto de una de las ranas es de una unidad, mientras que el de la otra es de más, por ejemplo:

> Julio: Porque con 12 metros y 12 saltos da un metro por salto, en cambio aquí (rana morada) 5 saltos en 7 metros da un metro y un poco más.

[9] El total de resoluciones varía de una competencia a otra (entre 14 y 16 parejas) debido a que una pareja solamente hizo la primera competencia, y otra más no hizo la última.

En la segunda competencia (*28m, 5s* vs *36m, 5s*) la mayoría comparó los dos recorridos aprovechando que los números de saltos son iguales:

> Carlos y Juan Eduardo: (Gana la morada porque) salta más metros en iguales saltos.
> Itzel e Ingrid: 36 metros recorre más que 28 metros y los saltos son iguales.

En la tercera competencia (*30m, 8s* vs *30m, 11s*), consideran que siendo los recorridos iguales, a mayor número de saltos, menor tamaño de cada salto:

> Arih: (Gana la verde porque) el recorrido de los dos es igual pero los saltos de la verde son menos.
> Julio y Andrés: 30 entre ocho es mas grande la cantidad que 30 entre once.

En la cuarta competencia (*24m, 5s* vs *15m, 8s*) algunos observan que una rana avanza más distancia en menos saltos que la otra:

> Arith: (verde) ...Es más grande su recorrido y sus saltos son menos.
> Itzel: ¡Ah! Entonces la verde, porque la morada tiene el espacio más chico, pero da 8 saltos y la verde tiene el espacio más grande y da menos saltos.

b. Otros procedimientos: el valor unitario, estimado o exacto

Algunos alumnos estimaron uno o los dos valores unitarios en lugar de utilizar las relaciones disponibles para comparar de manera cualitativa. En la mayoría de los casos la parte entera del cociente permitía comparar.

> Tania y Lidia (para 28, 5 *vs* 36, 5): La rana verde le toca más de 4 y a la rana morada más de 7.
> Tania y Lidia (para 30, 8 *vs* 30, 11): (La rana verde) porque la rana morada sus saltos son más de 2 m. Pero la rana verde da más de 3.

Pocos alumnos calcularon, en este momento, de manera exacta los valores unitarios.

> Eduardo y Ricardo (para 12, 12, *vs* 7, 5): (...) La rana morada salta 7 metros y los dividimos entre 5 que de a 1 y sobran 2 metros pero lo convertimos en decimales y

queda 1.4 y en la rana verde cada metro es un salto y queda de que la rana verde salta nada más un metro.
Arturo y Gabriel (para 28, 5 vs 36, 5): (La morada salta más porque) la verde da saltos de 5.6 y la morada de 7.2.

En esta experiencia, a diferencia de otras, no apareció el recurso a la igualación de dos términos homólogos: para poder comparar 2 metros en 3 saltos contra 3 metros en 4 saltos, se puede ver cuánto avanzan las dos ranas en 12 saltos. Esto se debió probablemente a que los números en juego, por su tamaño, no facilitaron dicho procedimiento (por ejemplo, no es fácil para los niños hallar un número de saltos múltiplo de 8 y 11).

c. Las dificultades: explicitar, representar, argumentar

La explicitación clara de una idea, con palabras, implica también una construcción. Este es otro proceso que los alumnos viven durante la experiencia, propiciado por la demanda de comunicar –oralmente sobre todo pero también por escrito– lo que tuvieron en cuenta para hacer la comparación. En el proceso, ocurre con cierta frecuencia que dejan alguna condición implícita, como en los siguientes ejemplos.

En la segunda competencia (*28, 5* vs *36, 5*), dejan implícito que los números de saltos son iguales:

Arith: Porque la verde su recorrido es más chico que el de la morada, por eso gana.

En la tercera competencia (*30, 8* vs *30, 11*), varios tuvieron dificultad para explicitar claramente la relación en juego y a veces dejaron implícita una condición:

Eduardo y Ricardo: (Gana la verde porque) entre menos sean los saltos más brincan.

Hubo varias manifestaciones de la dificultad para explicitar las relaciones en juego, y varias alternativas para superarla, por ejemplo, en un caso, unos alumnos trasladaron el problema al contexto de reparto de pasteles en el que la relación "entre más niños, les toca menos pastel" es más clara.

No se identificaron respuestas erróneas pero si algunas cuya argumentación era incorrecta. Esto ocurrió más en la situación 1 (*12, 12* vs 7, 5) en la que varios

siguieron aplicando el criterio que resultó exitoso en la situación anterior, según el cual, entre menos saltos, mayor es el tamaño de salto, por ejemplo:

> Efrén: Porque entre menor sean los saltos serán más grandes.
> Arith: Porque la rana morada recorre 7 metros y el número de saltos es más chico.

En la puesta en común del día siguiente, los argumentos fueron leídos y comentados. Después, los alumnos pudieron comprobar en la computadora qué saltos resultaban más grandes.

5.2 Formular y evaluar reglas generales

Las situaciones que se analizan a continuación van un poco más allá de la comparación de dos razones del tipo "número de metros, número de saltos". Se trata de explicitar las condiciones que deben cumplir esas razones para que el tamaño de salto que se desprende de una sea mayor que el que se desprende de la otra. La situación se planteó a los alumnos en dos ocasiones: una en la última parte de la sesión 2, y otra en la última parte de la sesión 3. Entre las dos, se plantearon situaciones de cuarta proporcional.

a) Primera experiencia de formulación de reglas

En la segunda sesión, se planteó un primer ejercicio de formulación de criterios generales: se les pidió que expresaran la condición que debían cumplir los datos de las ranas verde y morada para que los saltos de la morada resultaran más grandes que los de la verde. La consigna que se dio no fue muy clara de entrada, pero fue reexplicada y, aparentemente, terminó siendo comprendida por todos.

> (Expliquen) la condición que deben cumplir los números para que a fuerza gane la morada. No sólo damos el ejemplo de que con estos números gana la morada, sino (explicamos) cómo le hice, cómo escogí los números, qué condición cumplieron los números para asegurarme que ganará la morada.

Hubo dos propuestas y opiniones divididas, pero todavía pocos argumentos.

> Ehecatl: Es que cuando pones menos saltos y más recorrido en la morada, gana la morada.

La maestra los invitó a encontrar un caso con el que no se cumpliera la regla, para "echarla abajo". Pese a que no todos estaban convencidos, nadie intentó un contraejemplo y entre varios propusieron el siguiente ejemplo.

R. Verde	
Recorrido	No. saltos
13	9

R. Morada	
Recorrido	No. saltos
18	4

Después, Miguel propuso:

> No importa el número de metros que recorra la rana sino los saltos que va a dar.

Nuevamente las opiniones se dividieron. Pocas voces, mostraron escepticismo, por ejemplo, Julio dijo: "Es que habría veces que gana y otra que perdería". Otras, más numerosas, o más audibles, apoyaron la regla. Los argumentos fueron escasos. La primera prueba empírica que se planteó, con datos propuestos por el autor de la regla, permitió validarla: ganó la morada, con menos saltos.

R. Verde	
Recorrido	No. saltos
18	5

R. Morada	
Recorrido	No. saltos
13	3

La maestra, naturalmente, propuso hacer una segunda prueba, extremando los datos, pero respetando la condición de que la morada tenga menos saltos.

Con la participación de varios alumnos se llegó a los siguientes datos:

R. Verde	
Recorrido	No. saltos
50	13

R. Morada	
Recorrido	No. saltos
2	3

Nuevamente la maestra invitó a los alumnos a que anticiparan cuál creían que iba a ganar. Las preferencias se dividieron, pero la mayoría siguió siendo a favor de la morada. Entre el murmullo se escuchó a un alumno decir "es menos de un entero" (el salto). Enseguida, el autor de la propuesta dijo, no muy convencido:

Miguel: Tiene que ser mayor el recorrido que el salto.

Con ello, Miguel mostró que establece dos relaciones correctas: 1) cuando el número de metros es menor que el de saltos, el salto es menor que una unidad, y, 2) con esos datos, no va a ganar la morada aunque tenga menos saltos. Él intentó perfeccionar su regla[10] pero sus intervenciones ya no fueron retomadas y se metieron los datos a la computadora. Varios niños muestran sorpresa.

Cuando la maestra pidió explicaciones de por qué perdió la morada, Miguel, con más convicción, agregó una condición a su regla: "Porque en la morada (el salto) fue menor que un entero". Se probó nuevamente, haciendo que el salto de la morada sea mayor a un metro:

R. Verde	
Recorrido	No. saltos
50	13

R. Morada	
Recorrido	No. saltos
3	2

Las opiniones se dividieron, pero siguieron siendo más los que le van a la morada. La maestra volvió a pedir argumentos. Únicamente el autor de la regla habló, limitándose a estimar el tamaño del salto de la morada:

Miguel: (...) Como son 3 metros, va a dar un metro, la morada por un tercio de metro.

La verificación empírica mostró que los saltos de la verde eran considerablemente más grandes.

[10] Esta forma de intentar acotar el conjunto al que se aplicará una implicación, para eliminar una contradicción cuando esta se hace evidente, está documentada en el repertorio de respuestas de alumnos frente a contradicciones, presentado en Balacheff (1991).

Desde esta primera sesión, una buena parte del grupo pudo poner en juego las relaciones entre los datos "distancia recorrida, número de saltos", para anticipar el orden de los tamaños de los saltos, esto es, el orden de los cocientes no enteros, sin calcularlos. Con más dificultad, empezaron a formular los criterios utilizados. No obstante, en la segunda parte que acabamos de ver, al proponer y evaluar reglas "para que gane la morada", fue notorio que los criterios todavía no están bien establecidos para los alumnos. Pueden usarlos implícitamente, y están aprendiendo a evaluarlos explícitamente en tanto criterios generales. Al final de la sesión 3, que veremos a continuación, se propuso nuevamente una actividad con las reglas, frente a la cual el grupo manifiesta avances.

b) Segunda experiencia de formulación de reglas

Al final de la tercera sesión, después de abordar la tarea de calcular valores faltantes, cuando los alumnos tenían ya mayor familiaridad con las relaciones involucradas (número de saltos, tamaño del salto y distancia recorrida),[11] se les plantearon nuevamente problemas de comparación (ver la figura 3). En un primer momento, se les pidió que generaran "reglas para que gane la rana morada" (o sea, para que sus saltos sean más grandes que los de la verde), y también para que empaten.[12] Al día siguiente, se les dieron dos de las reglas elaboradas por ellos, para que las evaluaran –una correcta y la otra no– y, finalmente, sus opiniones se discutieron en una puesta en común.

La actividad duró 20 min. Se formaron 17 parejas de trabajo. Se dio una consigna similar a la de la primera sesión y se entregó la siguiente ficha.

[11] Se favoreció la búsqueda del valor unitario y se puso en evidencia que el procedimiento aditivo es incorrecto, aunque esto no se destacó lo suficiente para todo el grupo.

[12] Estas últimas se omitirán por falta de espacio.

Figura 3. Ficha 4. "Para que gane la rana morada"

Rana Verde		Rana Morada	
Recorrido	Nº de saltos	Recorrido	Nº de saltos
36	4		

Para que los saltos de la rana Morada sean <u>más grandes</u> que los saltos de la rana Verde basta con que se cumpla con la siguiente condición:
1) _____
o bien: 2) _____

En la tabla 4 se presenta una síntesis cuantitativa de los recursos a los que acudieron los alumnos para producir las reglas. Puede apreciarse que, en conjunto, en el grupo se movilizaron varias propiedades. Enseguida se muestran algunos ejemplos.

Tabla 4. "Que gane la morada". Frecuencia de procedimientos

Para que gane la rana morada se necesita:	Frecuencia
A. Más recorrido y mismo nº de saltos que la verde	3
B. Mismo recorrido y menos saltos que la verde	10
C. Más recorrido y menos saltos que la verde	12
D. Más metros que saltos en la morada (tamaño >1), y menos en la verde (tamaño < 1)	1?
E. Otros (erróneos)	5

Mantener fija una de las dos variables, y mover la otra (A y B). Trece alumnos usan este recurso. Fue más frecuente que mantuvieran fijo el recorrido y variaran el número de saltos, que a la inversa.

> Alan y Jesica: Poner el número igual de recorrido y el número de saltos menor.

Más recorrido y menos número de saltos (C). Este tipo de mensaje también fue frecuente.

> Tania y Lidia: Debe de ser el recorrido más grande y sus saltos sean menos; Verde (25, 8) *vs* Morada (35, 3)

Otro ejemplo, con dificultad para explicitar:

> Paulina y Mercedes: Entre más chicos sean los saltos más largos son y entre más largos sean los saltos más cortos son. (27, 5 de la verde *vs* 27, 4 de la morada).

Se observa cierta confusión entre tamaño del salto y número de saltos. Cuando dicen "entre más chicos sean los saltos más largos son" el "más chicos" se refiere al número de saltos. Luego Paulina agrega:

> (...) Se debe poner menos saltos, para que sean más grandes.

La omisión del recorrido parece no ser accidental pues un poco más adelante dijeron explícitamente que el recorrido no importa.

Más metros que saltos (tamaño >1) en la morada, y menos en la verde (tamaño < 1) (D)

> Ehecatl: Que el número de recorrido sea mayor al número de saltos –de la rana morada– y la rana verde tiene que ser menor el recorrido y mayor el número de saltos.

Este tipo de regla se identificó una sola vez. Puede estar influido por las experiencias previas en las que calcularon el valor unitario.

Errores: no importa el recorrido (E). Varios alumnos escribieron reglas ambiguas, o poco claras. Algunos generaron reglas erróneas. Nuevamente, como en la primera sesión de la experiencia, aparece la idea de que el recorrido no importa.

> Mercedes y Paulina: No importa el recorrido sino los saltos de la rana aunque sea más grandes o chicos.

No obstante, en general, la mayoría demostró una mejoría –en comparación con lo que hicieron en la segunda sesión– en su manera de expresar reglas que aseguran un tamaño mayor de salto, a partir de manipular las dos variables que lo determinan: recorrido y número de saltos. En el siguiente apartado veremos un

segundo encuentro de los alumnos con las reglas, ya no como productores de estas, sino como evaluadores de las reglas producidas por otros. Al final, analizaremos la dificultad que se manifestó para argumentar si una implicación lógica del tipo "si a entonces b", es verdadera o no.

5.3 Evaluar reglas, desarrollar la argumentación

Al día siguiente (sesión 4) de las resoluciones anteriores, se entregó a los alumnos la ficha 5 (ver la figura 4) con dos de las reglas que ellos escribieron en la sesión pasada –una correcta y otra no–, y se les pidió que las evaluaran en parejas.

Figura 4. Ficha 5

> Para que los saltos de la rana morada sean más grandes que los saltos de la rana verde, basta con que se cumpla la siguiente condición:
>
> 1. No importa el recorrido de la rana morada, lo que importa es que su número de saltos sea menor.
> 2. Poner la misma cantidad de saltos, pero más recorrido en la morada.

Se les dio la siguiente consigna:

> M: Analicen las reglas y vean si es verdad lo que dicen, y si no comprueben que no sirven, ¿listos? A trabajar.

Veamos los resultados.

a. Dificultad para interpretar la expresión de "No importa el recorrido de la morada..."

Muy pocos alumnos se dieron cuenta de que la regla 1: "No importa el recorrido de la rana morada, lo que importa es que su número de saltos sea menor", es incorrecta y pudieron dar un contra ejemplo. Iván propuso *V 8m, 4s vs M 20m, 3s*, pero no logró explicar su sospecha: "Es que no sé por qué, pero estoy seguro [de] que esta sí está mal".

Ehécatl, por su parte, propuso ejemplos V *60m, 9s vs* M *3m, 1s* y luego V *60m, 9s vs* M *1m, 1s*, con los que claramente cuestionó la regla, pues la morada, a pesar de dar menos saltos, no tiene un salto mayor, y concluyó que: "Está mal porque si fuera mayor el recorrido de la rana contraria, sería mayor el salto". Suponemos que lo que quiere decir es que aún con menos saltos en la morada, esta podría perder si la verde tiene un recorrido mayor. Su argumentación es todavía incompleta pues no con cualquier recorrido "mayor" de la rana verde, el salto de esta quedaría mayor que el de la morada, pero se puede decir que representa un avance importante.

Algunos alumnos encontraron *un* caso que sí "cumple" con la condición de la regla: la morada tiene menos saltos que la verde y a la vez arroja un salto mayor, con lo cual dan por buena la regla, por ejemplo, Julio y Paris proponen el caso V *1m, 50s* y M *50m, 1s,* y exclaman: "Mira, sí se cumple, aquí sólo da un salto y es mayor, ¿ya ves? Las dos reglas están bien... ¡Ya terminamos, ya terminamos!" Como ellos, varios alumnos interpretaron la expresión: "no importa el recorrido de la morada" como si se tratara de encontrar *un caso* en el que se cumpliera la condición (en lugar de valorar si se cumplía para *cualquier* caso), por ejemplo, Eduardo y Ricardo, proponen V *40m, 8s vs* M *40m, 4s*.

Algunos alumnos encontraron ejemplos y también contra ejemplos y no supieron qué concluir, o bien concluyeron algo como: "a veces es correcta y a veces es incorrecta". Es el caso de Beatriz y Patricia.

> Beatriz: Puede ser 50, por ejemplo, la rana verde puede dar 50 metros y menor salto y da 5 ino! 6 saltos, y la rana morada da, por ejemplo, recorre 5 metros en 2 saltos y entonces ahí no se cumpliría. (Queda: verde 50m, 6s y morada 5m, 2s).

Pero más adelante ellas mismas encuentran un ejemplo que satisface las condiciones de la regla 1 (menos saltos a la morada) y con el que sí se logra que los saltos salgan mayores, entonces concluyen: "Sí, pero en algunas veces No", y proponen dos ejemplos, uno para cuando sí, uno para cuando no.

Frente a respuestas como esta, la docente y los observadores intentaron explicitar uno de los principios (implícitos) de la argumentación matemática, a saber, que una regla no puede ser a la vez cierta y falsa. Este análisis se retomará más adelante, en la confrontación.

b. Papel de la búsqueda de ejemplos en el análisis de una regla

La segunda regla (poner la misma cantidad de saltos, pero más recorrido en la morada) fue hallada correcta por la mayoría de los alumnos, quienes proporcionaron ejemplos sin dificultad. Fue interesante observar a algunos alumnos que al principio pensaron que la regla era incorrecta, y no fue sino después de intentar en vano poner ejemplos que lo probaran, que sospecharon que era correcta. Así, Juan Carlos y Pablo dijeron que la regla 2 era incorrecta, pero después de elaborar un ejemplo –V *9m, 2s,* M *12m, 2s*– concluyeron que era correcta. Jessica y Arlen intentaron encontrar un ejemplo con el que se incumpliera la regla y parece que se dan cuenta de que eso no es posible. Concluyen que la regla es correcta.

c. Papel de la retroalimentación mediante el programa informático

Los alumnos acudieron con frecuencia a la computadora para verificar si sus datos correspondían a saltos de la morada mayores que los de la verde. La validación que recibían los ayudó a desechar una comparación equivocada o a afirmar una correcta, como en el siguiente ejemplo ocurrido en la evaluación de la regla "Poner la misma cantidad de saltos, pero más recorrido en la Morada".

> Pablo: (Hace las dos tablas y pone primero la misma cantidad de saltos) Por ejemplo, pones dos aquí ...(en la rana verde)... y dos aquí ...(en la rana morada)... Luego podemos poner por ejemplo aquí 9 ...(en la verde)... y aquí mmm, a ver, 12.

Rana verde

Recorrido	Número de saltos
9	2

Rana morada

Recorrido	Número de saltos
12	2

> Observadora: ¿Cuál va a dar saltos más grandes?
> Aos: Esta (la morada, no logran explicar por qué decían antes que estaba mal la regla. Ahora dicen que está bien; regresan contentos porque sí funcionó lo que ellos dijeron).

En cambio, la verificación en computadora no los ayudó –no podía hacerlo– a identificar un razonamiento incorrecto, cuando la usaron para buscar un ejemplo en lugar de un contraejemplo.

d. La confrontación grupal: malentendidos sobre el sentido de una implicación

En la confrontación grupal emergió la problemática que subyace a la regla: *No importa el recorrido de la rana morada, lo que importa es que su número de saltos sea menor.* Esta regla se puede formular como una implicación, con un antecedente: "Si el número de saltos de una rana es menor que el de otra", y un consecuente: "Entonces sus saltos son mayores", quedando fuera la distancia recorrida.

Miguel, quien en una sesión anterior había propuesto una regla muy parecida, cuestionó con un buen contra ejemplo: V *14m, 7s* y M *2m, 3s*. Los datos que propone cumplen en efecto con el antecedente de la implicación –que la morada dé menos saltos que la verde–, y, sin embargo, no cumplen con el consecuente –que los saltos de la morada sean mayores que los de la verde–. Es decir, la regla no se cumple. Algunos alumnos se sorprenden con el contra ejemplo, pues al parecer ellos pensaban que la regla era buena. "Hace brujerías" comenta uno, con lo que podría pensarse que cuestiona la lógica subyacente.

Un poco más adelante, otro alumno, Paris, da un ejemplo en el que los datos también cumplen con el antecedente de la regla (morada con menos saltos), pero sí dan lugar a saltos de la morada mayores que los de la verde: V *42m, 8s,* M *42m, 3s*. En este punto, la maestra interviene para cuestionar el ejemplo, el cual vino a complicar las cosas. Se armó entonces una discusión que analizamos a continuación.

> M: Ahí (en la regla) no dice que el recorrido sea igual, ahí dice que no importa el recorrido y aquí (RM) pusimos, puede ser aquí 2 y 14[13] y se cumple la regla. Tenemos que revisar si se cumple la regla con todo.
> Paris: Pero sí se cumple la regla.

[13] Son los números de saltos de la morada (2) y de la verde (14) respectivamente, del contra ejemplo de Miguel, que la maestra valoró, pues permitió cuestionar una regla falsa.

El primer cuestionamiento que hace la docente al calor de la discusión ("ahí no dice el recorrido igual"), es incorrecto pues si bien la regla no dice que los recorridos deban ser iguales, tampoco dice que no puedan serlo, de hecho, lo hace posible puesto que los recorridos "no importan".

El segundo cuestionamiento realizado por la maestra, "tenemos que revisar si cumple con todo" es probablemente una expresión de la necesidad de que la regla sea válida *para todos los casos* que cumplen el antecedente de la implicación ("si el número de saltos es menor..."), y no solo para algunos. Se trata de una característica de la implicación lógica sobre la cual los alumnos seguramente no han reflexionado. Las distintas interpretaciones de "cumplir con la regla" que se entrecruzaron, y la dificultad para sacar a la superficie con claridad lo que está detrás, causó que la discusión se alargara todavía unos minutos más.

Maestra: (escribe en el pizarrón a lado de la propuesta de Miguel)

R. M.	
42	3

R. V.	
42	8

Oreal: Las dos reglas son casi iguales. Puedes poner el mismo recorrido.
Miguel: Pero no cumple la regla.
M: En esta (la de Miguel) sí se cumple, pero en esta (señala la propuesta de Paris) ¿sí se cumple?, ¿qué es lo importante?
Pablo: No lo sé.

Por sugerencia de uno de los observadores, la docente propuso a los alumnos verificar en la computadora, pero esta acción no era lo que se precisaba en este momento para desenredar el nudo. Se verificó que la rana morada de Paris (*42m, 3s)* en efecto da saltos mayores que los de la verde (*42m, 8s*) y que la de Miguel no. Ciertamente, algunos alumnos se sorprendieron. Pero el problema no era solamente ese, sino la necesidad de que todos los pares cumplieran la regla, sin excepción, para poder afirmar que la regla era cierta.

Al final, la maestra logró identificar el problema.

M: (...) Con un ejemplo (señala el ejemplo de Miguel) que encontremos que la regla no funciona, entonces está mal, aunque haya ejemplos donde sí nos funcione, pero de todos modos está mal si con un ejemplo no sale cierta. ¿Sí Julio?

Al final, algunos alumnos dejaron ver que no quedaron conformes con la conclusión.

Cuando se presenta la segunda regla ("poner la misma cantidad de saltos, pero más recorrido en la morada"), el tiempo está encima y casi no hay discusión: varios se pronuncian a favor de que "se cumple la regla", y se revisan dos ejemplos en la computadora. En este caso, tampoco se hace explícito que la razón por la cual se considera que la regla funciona no es porque funcionó con dos ejemplos sino porque, analizándola, puede inferirse que no se encontrarán contra ejemplos. Estos son pendientes para otras ocasiones.

6. CONCLUSIONES

Las situaciones de comparación de razones del contexto de "Saltos de las ranas" –en este caso son también cocientes indicados–, pudieron ser abordadas por alumnos que, aun sin saber de antemano cómo hacer las comparaciones solicitadas, comprendieron la trama de relaciones en juego; propusieron y argumentaron respuestas; pudieron reconocer propuestas erróneas gracias a la retroalimentación ofrecida por la situación. Gracias a la socialización de procedimientos, cada vez más alumnos pusieron en juego razonamientos correctos para comparar razones, lo cual confirma que la situación implica al conocimiento que interesa. Puede decirse entonces que las situaciones, con una gestión adecuada, funcionaron bien como situaciones adidácticas de la noción de razón para alumnos de quinto grado de primara.

La explicitación de los criterios para hacer las comparaciones fue otro aspecto que mejoró notablemente en los alumnos. La formulación de reglas "para que gane la rana morada", permitió, poner en evidencia hipótesis falsas, y también, dio lugar para discutir interpretaciones incorrectas de la noción misma de "regla válida".

La verificación mediante el programa de computadora cumplió bien su papel de medio que retroalimenta las respuestas de los alumnos, y a la vez, mostró sus límites: se puede constatar que algo está mal (incluso, qué tan mal, qué tan alejado), pero no *por qué* está mal; se pueden verificar casos particulares, pero un caso particular "no hace a una regla" (excepto si es un contraejemplo).

En las situaciones de comparación, los números que corresponden a las medidas de los diferentes saltos no son enteros. Se confirma el hecho, ya reportado en otros trabajos, de que los alumnos pueden desarrollar razonamientos

que involucran a dichas medidas sin hacerlas explícitas, mediante las razones entre números naturales –o cocientes indicados– "tantos metros en tantos saltos".

En lo que respecta a la situación final de valoración de una regla producida en el grupo ("no importa el recorrido..."), pese a las dificultades debidas a cierta confusión momentánea de parte de la docente, las discusiones dejaron ver que, cuando se presentan situaciones que favorecen la elaboración de conjeturas y la posibilidad de verificarlas, y cuando se dan condiciones para que los alumnos expresen sus opiniones, es posible seguir propiciando el desarrollo del razonamiento lógico matemático. Se abona así a la tesis de que no hace falta separar el trabajo para favorecer el pensamiento lógico del estudio de los contenidos específicos de matemáticas, como se pensó en la reforma llamada "de las matemáticas modernas" de los años 60-70 del siglo pasado.

En esta experiencia, como en otras que hicimos entre 1990 y 2010, pusimos poco énfasis en los momentos de institucionalización, en los que correspondía al docente destacar procedimientos y errores, así como nombrar y definir algunas nociones. Los análisis que hemos ido realizando dejan ver la necesidad de estos momentos.

Por lo anterior, consideramos que, pese a los tropiezos ya identificados, los alumnos tuvieron condiciones favorables para avanzar en su capacidad de establecer relaciones entre cantidades en un contexto "que implica a la vez co variación de las cantidades e invariancia de razones o productos" (Lamon, *op.cit*).

¿Qué sigue? En el estudio del largo recorrido que inicia con la comparación intuitiva de razones usando únicamente números naturales, y que culmina con el uso bien fundamentado de fracciones y decimales en su papel de expresar razones, si bien hay ya avances importantes –como lo hemos esbozado en la introducción–, queda todavía mucho por hacer, incluyendo un trabajo de diseño y experimentación de situaciones, y de articulación entre ellas en proyectos de largo plazo. Por supuesto, otros ámbitos como el del desarrollo curricular y el de la formación docente, requieren también lo suyo en el tratamiento de este tema.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica. http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf

Balacheff, N. (1991). Treatment of Refutations: Aspects of the Complexity of a Constructivist Approach to Mathematics Learning. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 89-110). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47201-5_5

Block, D. (2003). De la expresión "2 de cada 4" a la expresión "1/2 de". La noción de razón, precursora de la noción de fracción. En: *Memoria Electrónico del VII Congreso Nacional de Investigación Educativa* (8p). COMIE, Sede CUCEA. UDG.

Block, D. (2006a). *La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico* [Tesis de doctorado no publicada]. Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV.

Block, D. (2006b). Se cambian fichas por estampas. Un estudio didáctico sobre la noción de razón 'múltiplo' y su vinculación con la multiplicación de números naturales. *Educación Matemática, 18*(2), 5-36.

Block, D. (2008). El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 495-512). Ediciones Díaz de Santos S.A. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. http://www.die.cinvestav.mx/Portals/die/SiteDocs/Investigadores/DBlock/EstudiosDidNRFD/2-3-2008elPapeldela.pdf

Block, D. y Martínez, P. (1999). Frogs' Jumps: An Example of Using Computers as a Means of Empirical Validation. En R. Nikilov, E. Sendova, I. Nikolova, e I. Derzhanski (Eds.), *Proceedings of the seventh European logo conference. Eurologo 99* (pp. 150-159). Virtech Ltd.

Block, D. y Reséndiz, L. (2006). Experiencia didáctica "los saltos de las ranas". La noción de razón como precursora de medidas fraccionarias. En: *Resúmenes de la Vigésima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (p. 63). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. y CASIO.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques 2*(3), 37-127.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.

Freudenthal, H. (2002). Ratio and Proportionality. En *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, (original publicado en 1983), (pp. 178-209). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47235-X_6

Hart, K. (1988). Ratio and Proportion. En J. Hiebert y M. Beher (Eds), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 198-219). National Council of Teachers of Mathematics y Lawrence Erlbaum.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. K. (1983). Proportional Reasoning of Early Adolescents'. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 45-90). Academic Press.

Lamon, S. J. (2007). Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework for Research. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 629-667). National Council of Teachers of Mathematics e Information Age Publishing.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I. Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*(2), 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem structure at successive stages. Problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 11*(3), 331-363.

Ramírez, M. y Block, D. (2009). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. *Educación Matemática, 21*(1), 63-90.

Ramos, D. y Block, D. (2016). "Por cada tres naranjas que recojas, te doy dos". Una propuesta didáctica para trabajar con razones y expresarlas con fracciones. *Revista para maestr@s de educación básica. Digital "Entre Maestr@s", 16*(57), 54-63. http://editorial.upnvirtual.edu.mx/index.php/entre-maestr-s/10-revista-entre-maestr-s/367-numero-57

Reséndiz, L. y Block, D. (2011). "Los collares" secuencia didáctica sobre problemas de proporcionalidad de valor faltante. En M. Isoda y R. Olfos (Coords.), *Enseñanza de la multiplicación: Desde el estudio de clases japonés a las propuestas iberoamericanas* (pp. 275-301). Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Secretaría de Educación Pública [SEP] (1972). *Matemáticas. Primer Grado.* SEP, Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuito.

Sosa, J. J. y Block, D. (2019). Variantes de un tipo de tarea para favorecer la expresión de razones con fracciones. En *XV Congreso Nacional de Investigación Educativa*. COMIE, 13p. http://app.core-apps.com/cnie2019/abstracts/list/0.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp.127-174). Academic Press.

David Block Sevilla

Dirección: Av. Tenorios 235, colonia Granjas Coapa
Alcaldía Tlalpan, CP 04330
Teléfono: (52) 55 54 83 28 00

ANEXO 1

Conjunto de trabajos publicados sobre la razón y la fracción

Aspecto	Contextos, tipos de problemas	Publicación
Razones en N (múltiplo) 4º grado	*Los intercambios* (fichas por estampas) Problemas de comparación y de cuarta Transición de "por cada a, b" a "n veces" (n = ba) (c/retroalimentación empírica); razones heterogéneas	Block, 2006b
	Los collares Problemas de cuarta (c/retroalimentación empírica); razones heterogéneas	Reséndiz y Block, 2011
Razones en N y en Q, sin explicitar fracciones 5º grado	*Saltos de las ranas* (saltos-metros). Problemas de cuarta y de comparación. (c/retroalimentación empírica); razones heterogéneas	Block y Martínez, 1999 Block y Reséndiz, 2006 **Artículo actual**.
Razones en Q, hacia las fracciones explícitas 6º y 7º grados	*Tratos* (Por cada 3 naranjas les doy 2) (c/retroalimentación empírica); razones homogéneas	Block, 2003 Block, 2006a Ramos y Block, 2016
	El mejor jugador, la mejor escuela Razones homogéneas	Sosa y Block, 2019
Fracciones, sin razones (en clases comunes) 6º grado	Seguimiento de 11 clases comunes en sexto de primaria	Ramírez y Block, 2009

ANEXO 2

Distribución de actividades

			a	b	C	d	Opcional	
1	A	>	20, 4 x, 4	20, 4 20, x	20, 4 20, 5		10, 2 x, y	Grupal (40 min)
	B	>	12, 12 7, 5	28, 5 36, 5	30, 8 30, 11	24, 5 15, 8		**Ficha 1**, parejas (20 min)
2	A	>	Confrontación **Ficha 1** (20 min). Explicitar razonamientos, ej., "recorre más y da menos saltos, entonces..." y Proponer parejas de datos de manera que gane la rana morada.					
	B	=	12, 3 x, 6	12, 3 x, 9	12, 3 24, x	12, 3 x, 5	12, 3 x, y	1º grupal (10 min) y **Ficha 2** parejas. Dos verificaciones. (30 min)
3	A	=	Confrontación 1. **Ficha 2** (30 min) Estrategia: conocer el recorrido en un salto: 1, 4 En a, b y c se pueden aplicar razones internas. Confrontación. 2: ranas adicionales					
	B1	=	36, 4 x, 3				36, 4 x, y	**Ficha 3**, parejas. Una verificación (15 min)
	B2	=	Confrontación **Ficha 3** (20 min)· Estrategia: conocer el recorrido en un salto					
	C	= >	**Ficha 4**: redactar reglas para comparar y para igualar					
4	A	= >	**Ficha 5**: Evaluar, probar reglas propuestas					
5	A	=	6, 4 x, 12	6, 4 36, x	6, 4 x, 6		6, 4 x, y	**Ficha 6**, parejas. Una verificación (40 min)
	B	=	Confrontación. **Ficha 6** (30 min) La estrategia de "conocer el tamaño de un salto" se vuelve difícil: decimales o fracciones Hay otra estrategia (para a y b): razón interna; Para c) es más difícil: es necesario calcular 4, 6 = 2, 3 ó 4, 6 = 24, 36 ¿Cuál es la diferencia entre estos casos y los anteriores?: La medida de un paso no es natural.					
	C	=	28, 4 x, 6	48, 8 x, 5	40, 5 x, 6	42, 6 x, 6		**Ficha 3-B**: se reparten los 4 ejercicios en el grupo. Cada pareja hace sólo uno (no se confronta).

6	A	>	16, 2 36, 4	8, 5 20,15	12, 3 15, 5	4, 5 3, 4		**Ficha 7**, parejas (40 min)
	B	>	Confrontación **Ficha 7** (30 min) Estrategia 1: calcular el tamaño de un salto para cada pareja y comparar Para a y c: Estrategia: repetir uno de los pares para igualar un término. Para a y b Estrategia 3: es necesario repetir ambos pares para encontrar dos con un término común. Para c y **d** Tip ¿Podremos encontrar datos para otros recorridos con los que sea más fácil hacer la comparación?					

El símbolo "<" indica situaciones de comparación; el símbolo "**=**" indica situaciones de cuarta proporcional. Las letras A, B; C indican las distintas actividades de una misma sesión. Las letras minúsculas (a, b, c, d) indican los datos específicos de la actividad. La leyenda "Opcional" indica una actividad que se planteó para los que terminan muy rápido la tarea.

En el presente artículo únicamente se analizan las situaciones de comparación.

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN DOI: 10.24844/EM3302.06

Un enfoque cognitivo en la comprensión de la comparación entre los cardinales del conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros en estudiantes de secundaria

A cognitive approach for understanding the comparison between the cardinals of the set of natural numbers and the set of integers in secondary student

Tamara Lasnibat Godoy[1]
Mónica Flores Sepúlveda[2]
Eduardo Puraivan[3]

Resumen: Esta investigación estudia las estructuras y mecanismos mentales de 164 estudiantes chilenos de tercero y cuarto medio (17 y 18 años), cuando comparan el cardinal del conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) y el cardinal de los números enteros ($\mathbb{Z}$). A partir de una descomposición genética provisoria del infinito en el marco de la teoría APOE, la investigación muestra que los estudiantes establecen solo una función inyectiva de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ para coordinar los procesos iterativos infinitos y, además, se señala que en general los estudiantes no alcanzan a presentar la estructura de un único proceso iterativo infinito que les permita concluir que tienen el mismo cardinal.

Palabras claves: *Infinito, cardinalidad, números naturales, números enteros, Teoría APOE.*

Fecha de recepción: 21 de agosto de 2020. **Fecha de aceptación:** 03 de febrero de 2021.

[1] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Instituto de Matemáticas, tamara.lasnibat.g@mail.pucv.cl. orcid.org/0000-0003-3496-8944

[2] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Instituto de Matemáticas, monica.flores.s@mail.pucv.cl, orcid.org/0000-0002-6419-6001

[3] Universidad de Viña del Mar, epuraivan@uvm.cl, orcid.org/0000-0003-2134-8922

Abstract: This research studies the mental structures and mechanisms of 164 Chilean students of third and fourth half (17 and 18 years old), when comparing the cardinal of the set of natural numbers ($\mathbb{N}$) and the cardinal of integers ($\mathbb{Z}$). It is based on a provisional genetic decomposition of infinity within the framework of APOS theory, and shows that students establish only an injective function from $\mathbb{N}$ to $\mathbb{Z}$ to coordinate the infinite iterative processes and, furthermore, they do not manage to present the structure of a single infinite iterative process that would allow them to conclude that they have the same cardinal number.

Keywords: *Infinity, cardinality, natural numbers, integers, APOS theory*

1. INTRODUCCIÓN

A lo largo de la enseñanza escolar, los estudiantes trabajan desde el sistema de los números naturales hasta el de los números complejos, ambos sistemas numéricos infinitos. Sin embargo, es poco probable concluir que la formación esperada para un estudiante permita alcanzar una noción coherente sobre el infinito. La comprensión profunda del infinito actual es difícil porque toma el estatus de obstáculo epistemológico y genera cierta resistencia en los aprendices (Mena-Lorca *et al.*, 2015). Esta noción es fundamental en el conocimiento matemático y transversal para alcanzar la comprensión de otros conceptos vinculados al dominio del análisis, el álgebra, de la teoría de conjuntos, entre otros.

Es por ello que es interés de esta investigación indagar, desde el enfoque cognitivo de la teoría APOE, cómo realizan estudiantes de secundaria la comparación entre conjuntos numerables, en particular, el conjunto de los números naturales y el de los enteros. Esto provee aspectos a considerar en el diseño de una enseñanza que permita que los aprendices puedan alcanzar nociones del infinito actual.

2. ANTECEDENTES

Existen diversos estudios sobre el concepto de infinito, esta investigación considera aquellos que se enfocan en la epistemología, así como también, aquellos relacionadas a las concepciones que tienen los estudiantes y profesores de matemática. En general, los estudios suelen tener un mismo punto de encuentro: la complejidad que tiene alcanzar la comprensión del objeto infinito actual. Es así, como Mena-Lorca *et al.* (2015) afirman que "el tránsito del infinito potencial al actual es difícil de lograr y parece claro que, si se desea conseguir que los estudiantes secundarios y otros logren tener un concepto apropiado del infinito, se necesita modificar las estrategias utilizadas" (p. 353).

El concepto de infinito ha estado concebido desde la percepción y basado en la experiencia con el mundo físico, lo que conlleva a paradojas, pues se abordan desde un mundo finito, generando una serie de confusiones en su comprensión (Ortiz, 1994). Por otra parte, D'Amore *et al.* (2006), proponen varias situaciones que permiten confrontar el infinito actual y el infinito potencial en estudiantes de Europa y América Central, cuyos resultados muestran que cierto sentido de infinito puede existir, y que casos extremadamente específicos pueden comprenderlo a cabalidad.

Igualmente, la formalización matemática del concepto de infinito actual data de una larga historia y complejidad, y además siempre estará ligado a un problema educativo, en el sentido que se suele vincular únicamente a un proceso ilimitado (Fedriani y Tenorio, 2010).

Por su parte, Montoro *et al.* (2016), analizan las concepciones sobre la cardinalidad infinita de conjuntos numéricos en estudiantes con formación matemática secundaria y universitaria. Dentro de sus hallazgos, se encuentra que los estudiantes tienen visiones finitas muy arraigadas. Las justificaciones que ellos realizan al comparar el conjunto de los naturales, enteros y racionales, hacen referencia a que un conjunto está incluido en el otro o que abarca más tipos de números que el otro, lo cual es válido desde un punto de vista finitista que contiene el principio: *el todo es mayor que las partes.* Además, emanan fuertes argumentos del tipo *ambos son infinitos*, haciendo alusión a la unicidad de infinito al momento de comparar un infinito numerable con uno continuo. También, el infinito cardinal está muy lejos de ser una noción que los estudiantes adquieren por el solo hecho de estar trabajando con conjuntos numéricos infinitos (Montoro *et al.*, 2016).

Además, desde una mirada cognitiva, Garbin y Azcárate (2002) plantean una categorización en relación al grado de construcción que presentan los estudiantes del infinito actual: *individuo coherente y consistente, individuo coherente pero inconsistente e individuo incoherente*. Por añadidura, destacan que la *tarea de conexión* debe ser una práctica constante cuando el docente trabaja con el infinito actual.

Respecto a los estudios desde la teoría APOE, Dubinsky *et al.* (2005) plantea que el infinito actual es el objeto mental que se obtiene de un determinado proceso. Este objeto mental se denomina como *objeto trascendente* y se obtiene de un *proceso iterativo infinito* (Brown *et al.*, 2010). Además, Brown *et al.* (2010) mencionan que una *concepción dinámica* del infinito será definida como un proceso iterativo infinito (entre el conjunto de los números naturales y otro conjunto cualquiera) y, los objetos trascendentes serán aquellos objetos que se abstraen de dicho proceso. Si el individuo tiene una construcción de objeto del infinito actual, entonces lo concibe desde una *concepción estática*.

Asimismo, hay evidencias sólidas de la importancia del conjunto de los números naturales en la construcción del infinito matemático, en el sentido de que la concepción dinámica o estática que un individuo pueda lograr de este conjunto influye en su capacidad para alcanzar un estado de construcción mental de objeto, trascendiendo un proceso iterativo infinito (Villabona y Roa-Fuentes, 2016), por lo cual la comprensión es compleja pues el objeto puede ser resultado de la abstracción de dicho proceso.

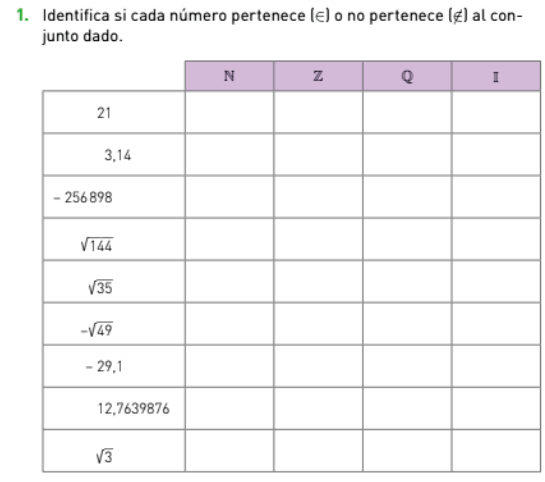
3. EL PROBLEMA DIDÁCTICO

Las bases curriculares en Chile (MINEDUC, 2018, 2016) consideran propiedades algebraicas de los diferentes sistemas numéricos, y luego su trabajo operativo.

No obstante, existen otras nociones de los sistemas numéricos que aportan al razonamiento matemático, cuyos tratamientos son débiles, escasos o simplemente obviados en la enseñanza escolar. Tales como, la teoría de conjuntos y de la topología, que conjugan elementos constitutivos de los sistemas numéricos, tales como el concepto de cardinalidad de conjuntos, los cuantificadores, conjuntos numerables, densidad, y otros.

Del mismo modo, se evidencia la escasa e inconsistente existencia del concepto de infinito en el currículo chileno. Si bien la enseñanza de los sistemas numéricos comienza desde los primeros años preescolares, en que se enfoca

en el "emplear cuantificadores (más/menos, mucho/poco), en situaciones cotidianas" (MINEDUC, 2019, p. 99), es en primero y segundo año de educación media donde el currículo establece que los estudiantes deben identificar el tipo de número, racional, entero y natural, y las operaciones involucradas, para luego reconocer números cuyo desarrollo decimal es infinito y no tiene periodo (MINEDUC, 2016). Más aún, estos objetivos de aprendizaje buscan que los estudiantes conozcan y utilicen las propiedades de los sistemas numéricos, presentando un enfoque basado solo en la clasificación e identificación de los sistemas numéricos, como se ejemplifica en la figura 1:



1. Identifica si cada número pertenece (∈) o no pertenece (∉) al conjunto dado.

	N	Z	Q	I
21				
3,14				
− 256898				
$\sqrt{144}$				
$\sqrt{35}$				
$-\sqrt{49}$				
− 29,1				
12,7639876				
$\sqrt{3}$				

Figura 1. Ejemplo *Texto de Matemática del estudiante de II° Medio* (MINEDUC, 2019, p. 20).

Casi en su totalidad, las actividades del *Texto de Matemática del estudiante de I° Medio* (Editorial Santillana, 2018) y *II° Medio* (Ediciones SM, 2019), se abordan contenidos relacionados con los sistemas numéricos de los racionales y de los reales, invisibilizado un tratamiento explícito o implícito de los conceptos de cardinalidad, continuidad e infinito.

Este enfoque, también está en los textos del docente que entrega el MINEDUC. Ejemplo de ello es el tomo I de la guía didáctica para el docente para segundo año medio, donde existen consideraciones del concepto infinito:

> Cuando se les pregunta a los y las estudiantes sobre cuáles son los números reales, generalmente ellos contestan los números enteros o los números naturales. A pesar

> de estar en parte en lo correcto, detrás de esa respuesta está la noción de lo conmensurable. Por lo tanto, es la misión del docente durante esta lección lograr ampliar esta noción a la inconmensurabilidad y a la idea de infinito (MINEDUC, 2019, p. 27).

La orientación anterior, es para iniciar la lección de los números reales, la cual supone que los docentes manejan conceptos claros del infinito o la noción de inconmensurabilidad, lo cual, repercutiría directamente en la enseñanza si no fuese así.

En la medida que se progresa en el currículo escolar en educación media, se empieza a abordar la función matemática y sus variantes, la cual es importante para vincular la igualdad de la cardinalidad entre conjuntos, y el concepto de conjuntos infinitos.

Esta investigación es de carácter exploratorio y se enmarca en el estudio de los estados de construcción y mecanismos mentales. Para esto, se analiza el trabajo matemático de estudiantes (17 a 18 años de edad) a partir de algunas tareas que promueven la comparación de las cardinalidades de los sistemas numéricos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. En relación a lo anterior, el objetivo de investigación es: *Conocer las estructuras y mecanismos mentales que presentan los estudiantes de III° y IV° años medio al momento de comparar los cardinales de los conjuntos* $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$.

4. APROXIMACIÓN EPISTEMOLÓGICA DEL INFINITO

Uno de los principales indicios de la noción de infinito data del siglo IV-III a. C en Grecia, con las paradojas de Zenón. Posteriormente, Aristóteles, marcó un avance importante en la clasificación del infinito, al asegurar la existencia del *infinito potencial* y en cambio negar la existencia del *infinito actual* (Aristóteles, trad. 1985). Con la característica potencial se apunta a un proceso ilimitado, que se repite sin fin. Agustín de Hipona (426/1965) se opuso a los pensamientos de Aristóteles, y le atribuye solo a Dios el conocimiento del infinito actual. Sin embargo, las ideas de Aristóteles generaron tanta influencia que aun después de mil años luego de su muerte, todavía se consideraban verdaderas.

Es recién en el Renacimiento que, Galileo (1638/2010) da un primer paso para tratar cardinales de conjuntos infinitos al mostrar que se puede establecer lo que hoy llamamos una función biyectiva, entre los números naturales y sus cuadrados, cuestionando el axioma *el todo es mayor que la parte* de Euclides. Pese a esto, una de sus conclusiones es la imposibilidad de comparar si es que de infinitos se trata.

Más adelante, con Newton y Leibniz emana la rama del cálculo infinitesimal, la cual retoma la discusión del infinito, fundamentada en la idea de cantidades infinitamente pequeñas no nulas, germinando la idea del concepto de límite (Kline, 1980) que permite determinar el valor exacto de una magnitud, en un proceso para lo cual se obtiene un valor aproximado, se sigue con aproximaciones más precisas, para dar con una cadena de aproximaciones, cada una más precisa que la anterior para concluir que converge a un valor determinado.

Un estudio formal y crucial del infinito matemático lo realiza Bernhard Bolzano, el primero en aceptar y fundamentar la noción de infinito actual, en su obra póstuma *Paradojas del infinito,* publicada en el año 1851. Además, enfatizó que el concepto de equivalencia entre dos conjuntos era aplicable tanto a conjuntos finitos como infinitos, y aceptó que los conjuntos infinitos tuvieran el mismo cardinal que una parte de ellos mismos. Los trabajos de Bolzano cimentan la base para la teoría de conjuntos.

Recién a finales del siglo XIX se termina un trabajo de formalización de los sistemas numéricos y el fundamento de sus cualidades que posteriormente da paso a la teoría de conjuntos. En este contexto, Cantor (1932) se dedica a trabajar de manera rigurosa con el infinito actual; reconoce que hay distintos infinitos, menciona que tanto el conjunto de los enteros, como el de los racionales son conjuntos numerables, esto es, tienen el mismo cardinal que el conjunto de los números naturales. Para denominar el cardinal de los conjuntos numerables Cantor utiliza la primera letra del alfabeto hebreo $\aleph_0$ (Aleph cero).

5. EL MARCO TEÓRICO

5.1 Teoría APOE

La Teoría APOE permite examinar cómo un individuo eventualmente construye un concepto matemático determinado en sus diversos estados y mecanismos de construcción mental (Dubinsky, 1996), inspirado en la abstracción reflexiva de Piaget (1970).

En efecto, la teoría APOE del acrónimo de *acción, proceso, objeto, esquema*, que rotulan los estados de construcción mental de un concepto de la matemática es un constructo que permite describir cognitivamente las construcciones mentales y los mecanismos por los cuales un concepto matemático es aprendido por un sujeto.

> Un estado de construcción *mental* es cualquier estructura relativamente estable capaz de desarrollarse en un individuo para dar sentido y respuesta por adaptación a una situación matemática, mientras que, un mecanismo mental es el medio por el cual este estado puede desarrollarse en la mente de uno o más individuos para pasar de un estado a otro (Stenger *et al.*, 2008, p. 98).

Es así como la construcción mental del conocimiento matemático puede ser comprendida en relación a los estados de: acción, proceso, objeto y esquema, las cuales no necesariamente son secuenciales. El estado de construcción mental del tipo *acción* consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir. Si el sujeto solo es capaz de trabajar sobre un objeto con base en estímulos externos, decimos que está operando la concepción acción. "Las acciones son más limitadas que otras construcciones mentales, pero son el principio crucial en la construcción del conocimiento" (Dubinsky, 1996, p. 34). Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un *proceso*. Es decir, se realiza una construcción interna, en donde se ejecuta la misma acción, pero en la mente del individuo, y no necesariamente dirigida por un estímulo externo.

Un individuo que tiene una concepción proceso, puede realizar una transformación, reflexionar sobre esta, describirla, o incluso invertir los pasos. Se habla de una concepción *objeto* cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. "Un individuo tiene una concepción objeto de un concepto si él puede desencapsular el concepto de vuelta al proceso subyacente y construir transformaciones que pueden ser aplicadas al objeto" (Dubinsky *et al.*, 2005, p. 5).

Es así como las estructuras y mecanismos se organizan en esquemas, que son "un nivel de mayor elaboración en la comprensión de un concepto matemático y está relacionado de manera coherente en la mente del estudiante" (Asiala *et al.*, 1996, p. 12). Es decir, los esquemas son las construcciones más amplias que se pueden determinar de un concepto matemático, ya que forman una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas. La coherencia alude a la capacidad del individuo para establecer si un esquema le permite solucionar un problema particular. Del mismo modo, Dubinsky (1994)

señala que un esquema puede ocuparse para resolver una situación matemática y ser tematizado en un objeto para realizarle nuevas transformaciones (acciones y procesos), o para que sea asimilado por otro esquema.

Ya se mencionaron los mecanismos de interiorización y encapsulación, sumados a ellos están los mecanismos de coordinación, generalización y reversión. Para profundizar, la interiorización se resume como la transferencia de una actividad específica del mundo externo al mundo interno. Así, mediante este mecanismo es posible que una acción sea transformada en un proceso. La coordinación fue descrita por Piaget como la organización general de acciones, para construir nuevos objetos o acciones, o dos ó más procesos pueden coordinarse para generar nuevos procesos.

La encapsulación consiste básicamente en la conversión de un proceso (una estructura dinámica) en un objeto (una construcción estática). Finalmente, el mecanismo de reversión consiste básicamente en pensar un proceso a la inversa.

Es así que la coordinación toma gran importancia en el estudio del infinito, ya que se requiere coordinar dos procesos. En algunos casos inclusive es necesario coordinar dos procesos de diferente naturaleza: uno divergente y uno convergente (Villabona y Roa-Fuentes, 2016).

En Arnon *et al.* (2014) se presenta un esquema que muestra las estructuras y mecanismos mentales presentes en la Teoría APOE (ver figura 2):

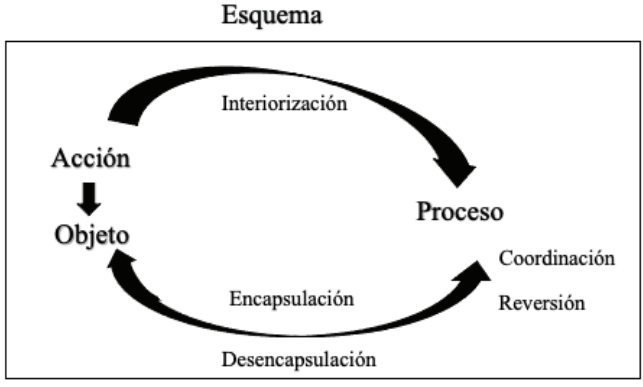


Figura 2. Estructuras y mecanismo mentales de la Teoría APOE (Arnon *et al.*, 2014, p. 18)

Por otro lado, la teoría también aborda el término *coherencia*, el cual está relacionado con la capacidad del individuo para aplicar un determinado esquema en un contexto distinto.

5.2 Descomposición genética genérica del infinito

En la Teoría APOE, la *Descomposición Genética* (DG) es un modelo de construcción de un concepto o noción matemática. La DG muestra las estructuras y los mecanismos mentales mediante los cuales un individuo puede construir un concepto de manera exitosa. Es decir, la DG es un modelo cognitivo (hipotético) que se entiende, metafóricamente, como una ruta topográfica que se levanta con base en las estructuras y mecanismos mentales que están inmersos en la comprensión de un concepto matemático.

Dubinsky *et al.* (2008), en relación con el trabajo de iteraciones infinitas, mencionan que se debe dar la coordinación de uno o más procesos de iteración infinita, y que el éxito se dará cuando al menos uno de los procesos se visualice como un objeto. Por ende, lo que permitiría a un individuo pensar en un proceso iterativo infinito como un todo es aceptar la idea de que el proceso ha alcanzado a todos los números naturales, es decir, el proceso de iteración *termina.* Evidentemente esta no es una tarea fácil.

Asimismo, cuando hablamos de infinito debemos considerar que "las estructuras y mecanismos tradicionales no han sido suficientes para explicar la manera como los individuos intentan comprender situaciones matemáticas que involucran el infinito" (Roa-Fuentes y Oktaç, 2014, p. 74). Es así como el estudio infinito matemático en la Teoría APOE es de suma importancia, ya que han emanado nuevas estructuras y mecanismos mentales para poder explicar el proceso constructivo que implica este concepto. Específicamente, Dubinsky *et al.* (2013) plantearon una nueva estructura independiente, la cual se encuentra entre las estructuras de proceso y objeto; esta estructura permite que el estudiante pueda ver el proceso iterativo infinito como un todo terminado; a esta nueva estructura la denominaron *Totality,* que aquí se llamará *totalidad.*

Además, Villabona y Roa-Fuentes (2016), mencionan que el mecanismo para alcanzar la estructura de totalidad tiene una particularidad, la de descentralizar la mirada de los elementos del proceso y enfocarla en ver el proceso como un todo terminado; es decir, este mecanismo tiene una característica distintiva, de abstracción del proceso para poder visualizarlo como una estructura estática. Es

por esto que no denominan a este mecanismo como encapsulación, sino que recibe un nuevo nombre: *completez*. El mecanismo completez está asociado con la construcción por parte de un individuo de "elementos fundamentales relacionados con la teoría de conjuntos de Cantor; por ejemplo, la relación entre un conjunto infinito y sus partes, los conceptos de cardinal y ordinal y, la construcción de conjuntos infinitos con diferentes cardinalidades" (Villabona y Roa-Fuentes, 2016, p. 132). La siguiente figura ilustra lo anteriormente expuesto (ver figura 3):

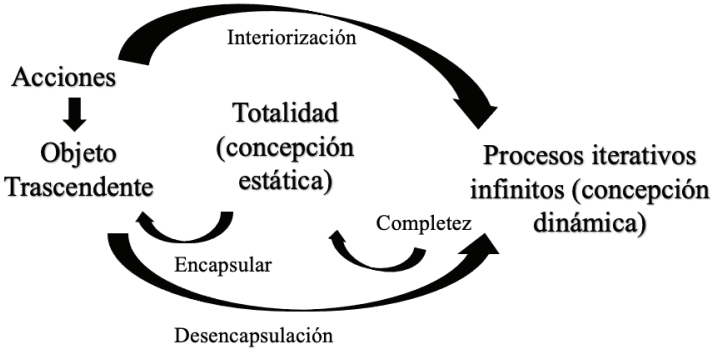


Figura 3. Estructuras y mecanismos mentales en la construcción del infinito actual. Basado en Villabona y Roa-Fuentes (2016).

Los constructos teóricos presentados permiten hacer un análisis cognitivo detallado de la construcción del infinito. Además, a continuación se presenta parte de la descomposición genética preliminar y teórica particular para la comparación del cardinal del conjunto de los números naturales y enteros.

5.3 Descomposición genética preliminar particular: comparando $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$

Para poder concluir que el cardinal del conjunto de los números naturales es equivalente al cardinal del conjunto de los números enteros, el estudiante debería identificar alguna transformación que itere los elementos del conjunto de los números naturales con el de los números enteros. En este sentido, debe pensar en trasformaciones f_i, para $i = 1,2,3,..., n$, las cuales transformen a cada elemento de los números naturales en un único elemento del conjunto de los

números enteros y, a su vez, a cada elemento del conjunto de los números enteros relacionado con un único elemento de los números naturales.

En la comparación de los cardinales $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ las iteraciones que podrían estar en juego son las siguientes:

Tabla 1. I Procesos iterativos infinitos entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$

Número de la iteración (I_i)	Número natural (I_N)	Número entero (I_Z)
1	0	0
2	1	–1
3	2	1
n	n – 1: *par*	$\frac{n-1}{2}$
	n – 1: *impar*	$-\frac{n}{2}$

Tabla 2. II Procesos iterativos infinitos entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$

Número de la iteración (I_i)	Número natural (I_N)	Número entero (I_Z)
1	0	0
2	1	1
3	2	–1
n	n – 1: *par*	$-\frac{(n-1)}{2}$
	n – 1: *impar*	$\frac{n}{2}$

Destacar que se espera que los estudiantes aludan a esta idea y no que necesariamente planteen de manera explícita la generalidad de las iteraciones.

Las iteraciones presentadas muestran que el conjunto de los números enteros es un conjunto numerable, es decir, que los números enteros son contables por medio de los números naturales. A continuación, se muestra cómo es el conteo de la primera iteración y luego el de la segunda (ver figuras 4 y 5):

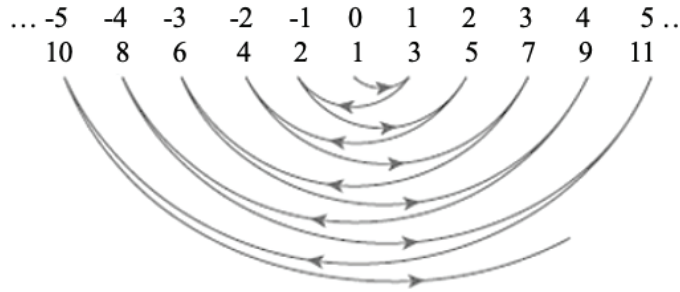


Figura 4. Conteo de las iteraciones I entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. Elaboración propia.

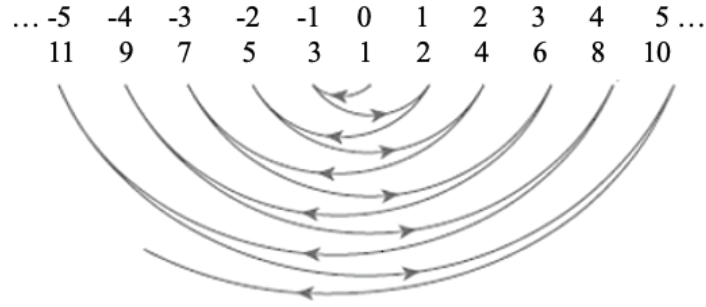


Figura 5. Conteo de las iteraciones II entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. Elaboración propia.

En relación a las estructuras y mecanismos mentales, el estudiante se encontrará en una estructura acción si es capaz de establecer una iteración para *una cantidad pequeña de elementos*, asociando a cada número natural un único número entero. Si se toman como base las acciones, y se coordinan, entonces el individuo ha interiorizado las acciones en un único proceso iterativo infinito I, desde una concepción dinámica. La coordinación será posible mediante una relación biyectiva. Cabe mencionar que cada uno de los procesos iterativos infinitos I_I, I_N, I_Z, son a su vez iteraciones. El mecanismo que permitirá al individuo ver al proceso como un todo terminado, es decir, como una estructura totalidad, será el mecanismo completez. Alcanzar la estructura totalidad dependerá de ver al menos a uno de los procesos iterativos infinitos I_I, I_N, I_Z, como un todo terminado. Posteriormente, mediante el mecanismo de encapsulación, los estudiantes podrían alcanzar el objeto trascendente $\aleph_0$ (Aleph cero), correspondiente al cardinal de los conjuntos numerables.

A continuación, se muestra parte de la DG preliminar particular de nuestro cuestionario (ver figura 6):

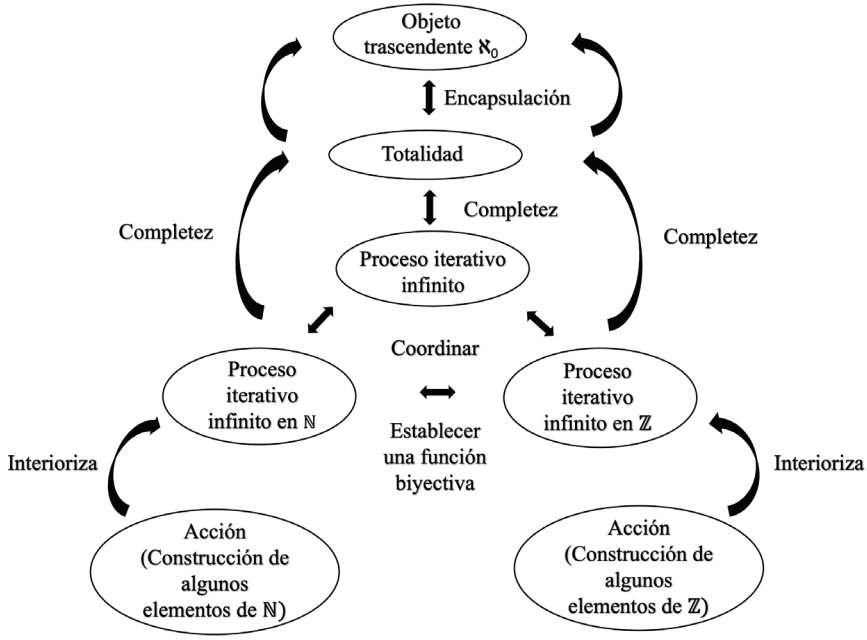


Figura 6. Parte de la descomposición genética preliminar y teórica particular para la comparación del cardinal del conjunto de los números naturales y enteros. Elaboración propia.

Se espera que los estudiantes puedan coordinar los procesos iterativos infinitos entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ mediante una relación biyectiva que no necesariamente se traduzca en una expresión matemática, sino que expresen la idea de relacionar a cada elemento de los naturales con un único elemento de los números enteros y viceversa. Luego, que la relación se pueda, mediante el mecanismo completez, visualizar como una totalidad. Esperamos, gracias a la estructura de totalidad, que los estudiantes puedan concluir que los conjuntos en cuestión tienen la misma cantidad de elementos.

6. Método de investigación

6.1 Enfoque, paradigma y tipo de investigación

Esta investigación tiene un enfoque cualitativo y se sitúa en el paradigma interpretativo. Además, esta investigación utiliza el estudio de casos para abarcar "la particularidad y complejidad de un caso singular" (Stake, 2010).

El método utilizado es una adaptación del ciclo de investigación propuesto por la Teoría APOE, donde se busca describir e interpretar cómo un estudiante logra ciertos estados de construcción mental sobre el concepto de infinito actual. Este ciclo propone el desarrollo de tres componentes, (I) un análisis teórico, del cual se desprende una descomposición genética preliminar; (II) un diseño e implementación de un modelo de enseñanza; (III) observación, análisis y verificación de datos a partir de los cuales se reestructura y valida el análisis teórico inicial (Asiala *et al.*, 1996). La aplicación de este ciclo permite obtener una descripción detallada y cercana a la construcción cognitiva de los conceptos matemáticos. Cada vez que es aplicado con base en la descomposición genética de un concepto, esta se refina como resultado del análisis sobre los datos empíricos que se obtuvieron en el desarrollo de la tercera componente.

El análisis teórico, como ya se mencionó, es la primera componente del método de investigación. Aquí realizamos un estudio profundo sobre el infinito potencial y actual, en las bases curriculares en Chile, su evolución histórica-epistemológica y cómo ha sido abordado en estudios previos (estado del arte), que contribuyeron a levantar una descomposición genética preliminar para el problema planteado en la comparación de los dos conjuntos numéricos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. Uno de los análisis teóricos más importantes fue la descomposición genética genérica que se plantea en Roa-Fuentes y Oktaç (2014), esta DG nos permitió retomar ciertas características para nuestro contexto particular.

Luego, a partir de la descomposición genética preliminar, se diseñó el instrumento, el cual fue enfocado en la coordinación del proceso iterativo infinito en el conjunto de los números naturales y del proceso iterativo infinito en el conjunto de los números enteros. Finalmente, con base en los análisis anteriores y teniendo en cuenta la población que nos interesa, se realizó la recolección, observación y análisis de los datos obtenidos en la implementación del instrumento (la población se describe a continuación). El análisis de los datos obtenidos nos ha permitido plantear una nueva descomposición genética, acorde a los diferentes acercamientos que los estudiantes manifestaron. Cabe destacar

que no se implementó un modelo de enseñanza o ciclo de enseñanza. A continuación, se presenta el ciclo de investigación para nuestra investigación (ver figura 7).

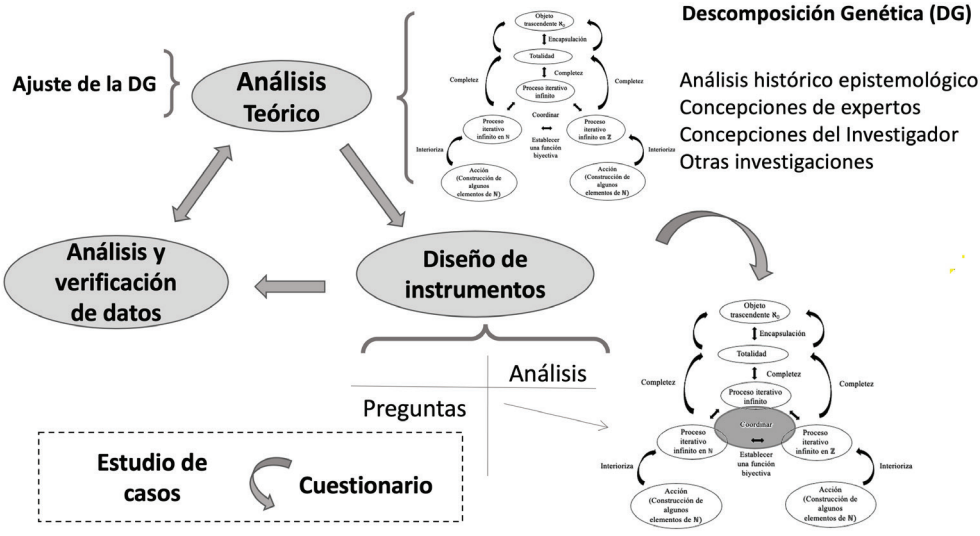


Figura 7. Ciclo de investigación considerando a Asiala *et al.* (1996). Elaboración propia.

6.2 Participantes

Para la implementación y aplicación del instrumento diseñado, nos centramos en dos establecimientos educacionales secundarios chilenos de la región metropolitana con el objetivo de evidenciar las concepciones presentes en estudiantes de tercero y cuarto año medio, al momento de comparar la cardinalidad de los sistemas numéricos y así precisar las concepciones que poseen los estudiantes en torno al infinito. A continuación se detallan los dos casos para esta etapa, que temporalmente corresponde al primer semestre del año 2019 (ver tabla 3).

Caso A: Compuesto por 72 estudiantes de tercero y cuarto año medio de un colegio de dependencia particular subvencionado de la región metropolitana, ubicado en la comuna de La Granja. Es un grupo mixto entre mujeres y hombres, cuyas edades fluctúan entre 15 y 18 años.

Caso B: Compuesto por 92 estudiantes de tercero año medio de un colegio de dependencia particular subvencionado de la región metropolitana, ubicado en la comuna de Maipú. Es un grupo mixto entre mujeres y hombres, cuyas edades fluctúan entre los 15 y 16 años.

Se escogen estos niveles puesto que los estudiantes deben tener ciertos conocimientos previos para la comparación entre las cardinalidades de sistemas numéricos y noción de infinito, descritos a continuación:

- Noción e identificación de los sistemas numéricos y sus respectivas propiedades.
- Noción del concepto de función y función biyectiva.

Tabla 3. Caracterización de la muestra

Tipo de establecimiento	Cantidad de estudiantes	Nivel
Establecimiento particular subvencionado con financiamiento compartido	36	III° Medio
Establecimiento particular subvencionado con financiamiento compartido	36	IV° Medio
Establecimiento particular subvencionado con financiamiento compartido	92	III° Medio
TOTAL	**164**	

Los establecimientos cuentan con estudiantes de similares características económicas y sociales.

Para fines prácticos, los estudiantes serán identificados por la letra del Caso y un subíndice de un número, así por ejemplo, el quinto estudiante del Caso A, será identificado con A_5.

6.3 Instrumento

Hemos escogido un cuestionario con respuestas abiertas. El diseño está conformado por un cuestionario de una pregunta (ver tabla 4), la cual busca determinar y constatar las estructuras y mecanismos mentales en la que se encuentran

los estudiantes a través de la comparación de la cardinalidad de los conjuntos de los números naturales y números enteros. El cuestionario fue implementado al finalizar el primer semestre del año 2019. Además se realizó un análisis *a priori* y uno *a posteriori* del cuestionario.

Tabla 4. Pregunta del Cuestionario

Se detalla por extensión los conjuntos mencionados, para luego preguntar:	
Preguntas	**Considera los siguientes conjuntos:** Números naturales ($\mathbb{N}$) ={ 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... } Números enteros ($\mathbb{Z}$) = {... − 5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... } **¿Alguno de ellos tiene más elementos que el otro? Argumenta en al menos 5 líneas.** **¿Es posible establecer una relación biyectiva entre ellos? ¿Qué piensas ahora?**

Se optó por una definición por extensión de los conjuntos naturales y enteros ya que al aplicar un instrumento de recogida inicial pudimos notar que los estudiantes no se familiarizan con las notaciones $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. Los estudiantes solían confundir $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ con el conjunto de los números racionales o reales.

Por otro lado, las respuestas al instrumento, dadas por los participantes, serán analizadas considerando la DG preliminar particular teórica presentada en el apartado 5.3. Reconoceremos en las respuestas las estructuras mentales presentes al momento de responder.

7. RESULTADOS

En este análisis se presentan las evidencias más relevantes del Caso A y Caso B. Entre las diversas respuestas al cuestionario, 80 de los estudiantes respondieron, a las preguntas: *¿Alguno de ellos tiene más elementos que el otro? ¿Podrías establecer una relación biyectiva? ¿Qué piensas ahora?,* respuestas como las que proporciona el estudiante B_{45} (ver figura 8), en la cual se percibe una noción de que el conjunto de los números enteros tiene mayor cardinal que el conjunto de los números naturales haciendo alusión a argumentos que conllevan a la idea de que los naturales están contenidos en los enteros, por contención. Es decir, los estudiantes dan respuestas a esta situación sin llegar a utilizar un razonamiento matemático sino más bien a través de argumentos respaldados por su intuición.

Los estudiantes utilizan el argumento *todo es mayor que las partes,* el cual es válido en conjuntos finitos, pero que no es válido necesariamente en los conjuntos infinitos. Estos estudiantes coordinan procesos iterativos infinitos mediante una transformación inyectiva, con esto desprenden que el cardinal del conjunto de los números naturales es menor que el del conjunto de los números enteros.

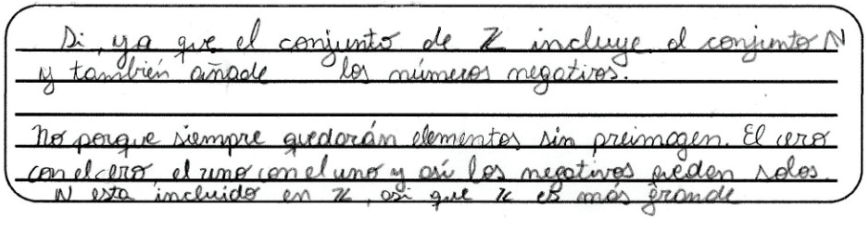


Figura 8. Respuesta del estudiante B_{45}.

Asimismo, 38 de los estudiantes, aluden a la *unicidad de infinito.* En este sentido, el estudiante podría estar en la estructura proceso, entendiendo el proceso iterado para generar el conjunto de los números naturales y el proceso para generar los números enteros, o inclusive, podría estar en la estructura de totalidad, entendiendo la existencia del conjunto de los números naturales o de los números enteros como un todo, pero no existe una coordinación que le permita dar argumentos válidos para mostrar que los cardinales de los conjuntos son

iguales, es decir, no se establecen las iteraciones respectivas para realizar la coordinación.

En este aspecto, es posible analizar en la figura 9, que el estudiante intenta razonar los procesos iterativos por separado, lo que impide comprender la naturaleza del proceso único que da cuenta de la igual de cardinalidad de los conjuntos. Además se aprecia una concepción acción y proceso iterativo infinito.

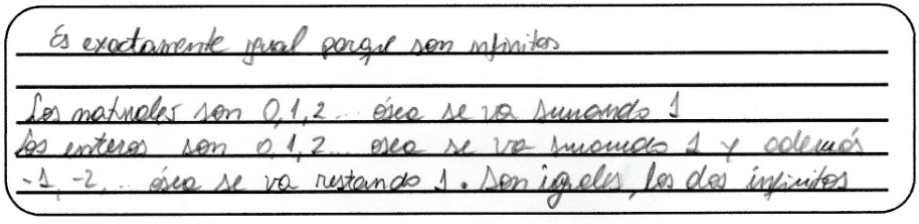


Figura 9. Respuesta del estudiante A_{21}.

Una tercera mayoría, 35 estudiantes responden *que el conjunto de los números enteros equivale al doble del conjunto de los números naturales* (ver figura 10). Esta conclusión la obtienen al realizar acciones, los estudiantes iteran en un intervalo finito. Por ejemplo, un estudiante realiza la transformación del primer millón de números naturales, concluyendo que siempre quedarán elementos sin preimagen, en este caso exactamente 1 millón de elementos quedará sin preimagen, esta idea impide dar el paso al mecanismo de interiorización, y por tanto tampoco a alcanzar el proceso iterativo infinito.

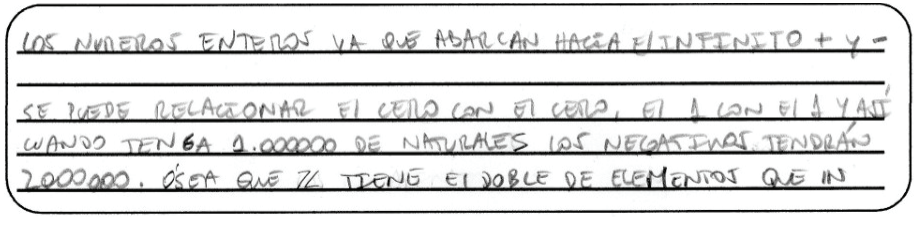


Figura 10. Respuesta del estudiante B_3.

También, 11 respuestas de los estudiantes se conectan históricamente con los griegos ya que ellos niegan la utilidad del infinito matemático e inclusive de su

existencia, esto puede interpretarse como *con el infinito no se puede; con infinitos no comparo o no puedo comparar.* Es decir, realizan la estructura de acción, pero se queda en el proceso iterativo infinito, de cada uno de los conjuntos y no logra verlo como un proceso terminado, para luego coordinar esos procesos y realizar la comparación (ver figura 11).

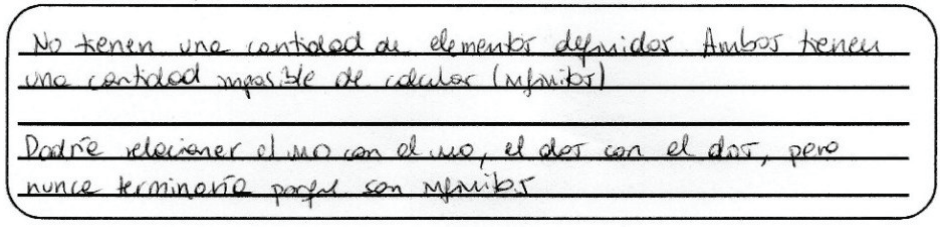


Figura 11. Respuesta del estudiante B_{50}

Solo dos estudiantes logran coordinar procesos iterativos infinitos entre el conjunto de los naturales y en el conjunto de los números enteros, esto, mediante una transformación biunívoca declarada de manera explícita. Además, pueden concluir que tienen la misma cantidad de elementos gracias a la estructura de totalidad.

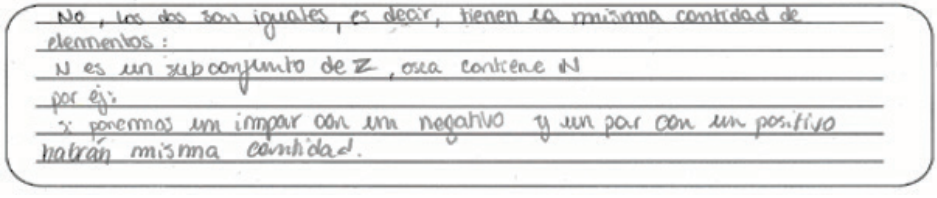


Figura 12. Respuesta del estudiante B_{30}

La figura 12 es un ejemplo de respuesta que alcanza la estructura mental totalidad. El estudiante asume que el conjunto $\mathbb{N}$ está contenido en el conjunto $\mathbb{Z}$ y suma a esto, sin generar una contradicción, que ambos tienen igual cardinal, es decir, es capaz de superar el axioma de Euclides que *el todo es mayor que las partes* y se acerca a idea de infinito como objeto. Dado que el estudiante realiza la biyección podemos concluir que está presente la coordinación entre

dos procesos iterativos, para dar con un único proceso iterativo infinito. Este caso deja ver las concepciones dinámicas y estáticas de los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ ya que hace referencia a los conjuntos como entidades terminadas con el mismo número de elementos y también hace referencia al proceso que debe seguir para relacionar cada elemento de $\mathbb{N}$ con un único elemento de $\mathbb{Z}$ y viceversa. Por lo tanto, se observa la estructura proceso iterativo infinito y la estructura totalidad.

Los resultados refuerzan la problemática evidenciada en los antecedentes respecto a la complejidad de comprender el infinito actual. Se corrobora la idea de D'Amore *et al.* (2006) de que el objeto trascendental puede ser comprendido a cabalidad solo en casos extremadamente específicos, así como también la idea de Montoro (2016), que plantea que la manipulación de conjuntos infinitos a lo largo de la enseñanza escolar no es suficiente para que los estudiantes puedan construir concepciones correctas acerca de las cardinalidades de conjuntos infinitos.

8. CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

Aunque la construcción del infinito matemático se ve supeditada al contexto, la determinación de un modelo genérico de construcción de esta noción es de vital importancia para su estudio (Villabona y Roa-Fuentes, 2016). Nuestro estudio, basado en un modelo provisorio, evidencia que las dificultades de los estudiantes para comprender que el conjunto de los números naturales y el de los números enteros tienen el mismo cardinal están determinadas por el mecanismo de coordinación y la capacidad de ver el proceso iterativo infinito como un todo terminado. Esto se refleja en sus argumentos ya que están supeditados a una coordinación basada en una función inyectiva. Es por esto que, al considerar una planificación de un ciclo de enseñanza, esta debería estar basada en el trabajo de funciones biyectivas entre diversos conjuntos numerables, para establecer luego una coordinación y, además, el desarrollo de la capacidad para ver el proceso como un todo terminado. Todo esto, podrá dar pie a la estructura mental de objeto trascendente.

Igualmente, el lector podrá encontrar en este artículo la construcción mental que debe llevar a cabo un estudiante para poder concluir que el cardinal de los números naturales es equivalente al cardinal de los números enteros, es decir, se evidencia parte de la descomposición genética preliminar y teórica particular para la comparación del cardinal del conjunto de los números naturales y

enteros. Asimismo, el análisis de los datos presentados concuerda con los aspectos tomados en cuenta en ella.

Además, dado que nuestro instrumento no buscaba visualizar la estructura objeto trascendente, no fue posible visualizarla. Nos parece importante trabajar en contextos que permitan encontrar evidencias de esta estructura. Para esto, será necesario, una vez que emerjan, realizar acciones sobre ellas. En nuestro caso, analizar el cardinal de la unión de conjuntos numerables, por ejemplo.

Puesto que profundizamos solamente los mecanismos y estructuras mentales de los estudiantes al momento de hacer una comparación de cardinales entre el conjuntos de los números naturales y enteros, el estudio queda limitado únicamente a conjuntos numerables, sería interesante profundizar esta investigación en las estructuras y mecanismos que tienen los estudiantes respecto a los cardinales de conjuntos no numerables, por ejemplo en la comparativa del cardinal del conjunto de los números irracionales con el de los números reales. Indagar en comparativas de otros conjuntos infinitos podría ampliar la mirada del estudio.

En efecto, los estudiantes suelen trabajar a lo largo de toda la enseñanza escolar con sistemas numéricos, nuestro trabajo intenta ser una guía para el docente, en el sentido que puede dar luces de las estructuras mentales y mecanismos presentes en los estudiantes para luego, desde ese punto de inicio, guiarlos en la construcción del objeto trascendente. Además, en la escolaridad chilena, el Ministerio de Educación plantea la incorporación de nuevos tópicos para el área de matemáticas, como límites y derivadas, por ejemplo. Los cuales se deben incorporar a cabalidad para el año 2020. Es por esto que el desafío para el docente de matemática es impregnarse de conocimiento que le permita llevar a cabo una enseñanza que fomente la construcción del objeto infinito, pues es un objeto indispensable para comprender los nuevos tópicos. Por esto, se requiere profesionales de la educación que profundicen en su estudio. Tanto para la generación de propuestas innovadoras, como también, para poder capacitar a los docentes que tendrán que asumir estos nuevos desafíos de la educación chilena.

A modo de proyección, se propone diseñar un ciclo de enseñanza que aborde el cardinal de conjuntos numerables, basado en las estructuras mentales y los mecanismos presentes en la descomposición genética presentada y trabajar, desde este lugar, la estructura de objeto del infinito. Para esto será necesario "analizar situaciones relacionadas con el infinito a partir de la construcción de procesos iterativos infinitos y sus objetos trascendentes, pues esto puede darle

a un estudiante una herramienta formal que le permita confrontar sus propias creencias sobre el infinito" (Roa-Fuentes y Oktaç, 2014, p. 147), lo cual es bastante complejo pues, según Roa-Fuentes y Oktaç (2014) es poco lo que se ha podido indagar sobre cómo se lleva a cabo la coordinación de procesos, sobre todo si son de naturaleza diferente.

Las conclusiones expuestas clarifican las complejidades inmersas en el objeto mismo de infinito actual y en la enseñanza de este. Por esto, los docentes debemos asumir el desafío de indagar en marcos teóricos explícitos que permitan profundizar en la manera en que un estudiante aprende las nociones matemáticas ligadas al infinito. Con este estudio se propone a la comunidad de profesores e investigadores en didáctica de la matemática una respuesta a la pregunta de investigación planteada, acerca de las estructuras y mecanismos mentales presentes al momento de comparar los cardinales del conjunto de los números naturales y enteros, así como también la descomposición genética involucrada que se puede extrapolar a cualquier comparación de cardinales entre conjuntos numerables. Esto representa una herramienta para el diseño de la enseñanza del cardinal de conjuntos numerables.

REFERENCIAS

Aristóteles. (trans. 1985). *The complete works of Aristotle. The revised Oxford translation*. En J. Barnes (Ed.). Princeton University Press.

Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *Apos theory-a framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, II. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (Ed.) *CBMS Issues in Mathematics Education, 6*, 1-32.

Bolzano, B. (1991). *Las paradojas del infinito*. Universidad Nacional Autónoma de México.

Brown, A., McDonald, M. y Weller, K. (2010). Step by step: Infinite iterative processes and actual infinity. *CBMS Issues in Mathematics Education, 16*, 115–141.

Cantor, G. (1932). *Gesammelte Abhandlungen*. En A. Fraenkel y E. Zermelo (Ed.). Springer-Verlag.

D'Amore, B., Arrigo, G., Bonilla, M., Fandiño, M., Piatti, A., Rodríguez, J., Rojas P., Romero, J., y Sbaragli, S. (2006). El sentido del infinito. *Epsilon, 22*(2), 187-216.

Dubinsky, E. (1994). A Theory and Practice of Learning College Mathematics. En A. Schoen-feld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (pp. 22-247). Erslbaum.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática, 8*(3), 25-41.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M., y Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part I. *Educational Studies in Mathematics, 58*(3), 335-359.

Dubinsky, E., Weller, K., Stenger, K., y Vidakovic, D. (2008), Infinite iterative pro- cesses: The tennis Ball Problem. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, *1*(1), 99-121.

Dubinsky, E., Weller, K., y Arnon, I. (2013). Preservice Teachers Understanding of the Relation Between a Fraction or Integer and its Decimal Expansion: The Case of 0.999... and 1. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, *13*(3), 232-258.

Fedriani, E., y Tenorio, A. (2010). Matemáticas del más allá: el infinito. *Unión*, 21, 37-58.

Galileo. (1638/2010). *Dialogues concerning two new sciences*. Cosimo.

Garbin, S., y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñaza de las ciencias, 20*(1), 87-113.

Hipona, Agustín de. (426/1965). La Ciudad de Dios. En J. Morán (Ed.), *Obras de San Agustín* (Vol. XVI-XVII). La Editorial Católica.

Kline, M. (1980). Mathematics, the loss of certainty. Oxford University Press.

Mena-Lorca, A., Mena Lorca, J., Montoya-Delgadillo, E., Morales A., y Parraguez, M. (2015). El obstáculo epistemológico del infiito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(3), 329-358.

Ministerio de Educación de Chile (2019). Matemática. En Autor (Ed.), *Nuevas Bases Curriculares de Educación Parvularia* (pp. 97-99). MINEDUC.

Ministerio de Educación de Chile (2018). Matemática. En Autor (Ed.), *Bases Curriculares 1° a 6° Básico* (pp. 214-255). MINEDUC.

Ministerio de Educación de Chile (2016). Matemática. En Autor (Ed.), *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio* (pp. 93-126). MINEDUC.

Ministerio de Educación. (2018). Unidad 1: Números. En Autor (Ed.), *Texto de Matemática del Estudiante de I Medio* (pp. 10-67). Editorial Santillana.

Ministerio de Educación. (2019). Unidad 1: Números. En Autor (Ed.), *Texto de Matemática del Estudiante de II Medio* (pp. 12-75). Editorial SM.

Ministerio de Educación. (2019). Unidad 1: Números. En Autor (Ed.), *Guía didáctica del docente tomo 1 de Matemática 2° medio* (pp. 18-40). Editorial SM.

Montoro, V., Scheuer, N., y Pérez, M. (2016). ¿Cuán abundantes son los conjuntos de números? Estudiantes comparando infinitos. *Educación Matemática, 28*(3), 145-174.

Ortiz, J. (1994). El concepto de infinito. *Asociación Matemática Venezolana, 1*(2), 59-81

Roa-Fuentes, S., y Oktaç, A. (2014). El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas. *Educación Matemática, 26*(1), 73-101.

Piaget, J. (1970). *Genetic Epistemology.* Columbia University Press.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos.* Labor.

Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E., y Vidakovic, D. (2008). A Search for a Constructivist Approach for Understanding the Uncountable Set. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(1), 93-125.

Villabona, D., y Roa-Fuentes, S. (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE. *Educación Matemática, 28*(2), 119-150.

Tamara Lasnibat Godoy
Dirección: Paula Jaraquemada 580, dpto. 1601, Valparaíso, Chile.
Código Postal: 234
Teléfono: +56985322928

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN DOI: 10.24844/EM3302.07

Ordenamiento de los registros semióticos en la didáctica del álgebra en la escuela secundaria. Correspondencia con la enseñanza de expresiones algebraicas racionales[1]

Ordination of semiotic records in the algebra didactics at the secondary school. Correspondence with the teaching of rational algebraic expressions

Eugenio Valiero[2]
Melissa Barrionuevo[3]
Flavia Villenas[4]

Resumen: La presente investigación fue realizada en el contexto de Formación Docente Inicial (de un Instituto Superior Estatal de la Provincia de Entre Ríos, Argentina), para conocer la utilización de *registros semióticos* en experiencias reales de enseñanza, en la observación de los ordenamientos representacionales que realiza un profesor en sus propuestas didácticas. Se tomó como base conceptual la *Teoría de Registros de Representación Semiótica*, de Raymond Duval.[5] La caracterización cualitativa comprendió un estudio de casos mediante entrevistas y observaciones de clases, en una escuela urbana de la ciudad de Gualeguay. Se analizó el modo en que se ordenan los registros en la enseñanza de expresiones algebraicas racionales en 4° año de la Educación Secundaria y sus posibles errores didácticos, desde una concepción social,

Fecha de recepción: 27 de agosto de 2017. **Fecha de aceptación:** 08 de febrero de 2021.

[1] Una Expresión Algebraica Racional es la razón, cociente o fracción entre polinomios.

[2] Instituto de Enseñanza Superior Dr. Luis Federico Leloir, Profesorado de Educación Secundaria en Matemática, , eugeniovaliero@gmail.com, orcid.org/0000-0001-9392-0882

[3] Instituto de Enseñanza Superior "Dr. Luis Federico Leloir", melissabarriouevo@hotmail.es, orcid.org/0000-0001-7428-688X

[4] Instituto de Enseñanza Superior "Dr. Luis Federico Leloir", flaviavictoriavillenas@hotmail.com.ar, orcid.org/0000-0003-2013-5140

[5] Profesor francés de la Universidad del Litoral dedicado a estudios acerca de los procesos cognitivos en enseñanza y en aprendizaje de la Matemática.

educativa, y didáctica. Se consideró que lo representacional podría constituirse en una condición secuencial cuyo impacto se liga a los procesos de abordaje de la Didáctica Específica de la Matemática Escolar. Se partió del supuesto de que toda situación de enseñanza conlleva formatos necesarios de comunicación, y formulación de dispositivos representacionales visuales, auditivos, verbales, escritos.

Palabras clave: *Teoría de los Registros Semióticos, matemática, enseñanza del álgebra, expresiones algebraicas racionales, didáctica de la matemática.*

Abstract: The present investigation was carried out in the context of a Teacher Training College (State Superior Institution in the Province of Entre Ríos, Argentina) to know the use of semiotic registers in real teaching experiences. The study is based on the observation of the representative arrangements that a teacher makes in his proposal didactics. Raymond Duval's Theory of Records of Semiotic Representation was taken as a conceptual base and the characterization included a qualitative cases study through interviews and direct observations of classes in an urban school at the city of Gualeguay. In this research the way in which the different registers are ordered in the teaching of rational algebraic expressions in the 4th year at Secondary Education was analyzed to identify programming aspects of the practical proposals formulated by teachers that could lead to didactic error. The research question was approached from a social educational and didactic conception. It was considered that it could constitute an important sequential condition whose impact is linked to the processes of approaching Specific Didactics of School Mathematics content since it was assumed that every teaching situation involves necessary formats for communication and formulation of visual, auditory, verbal, written devices with representative attributes.

Keywords: *Theory of Semiotic Records, math, algebra teaching, rational algebraic expressions, mathematics teaching.*

1. INTRODUCCIÓN

Desde principios de 1970, las investigaciones en Enseñanza de la Matemática pretenden conocer básicamente tres aspectos: dificultades de comprensión, modos de resolver situaciones problemáticas, y funcionamiento cognitivo en la actividad matemática escolar. Existen, en ese sentido, diferentes enfoques de la problemática didáctica como lo es el aspecto representacional.

A efectos del presente estudio, se toma como referencia la llamada *Teoría de los Registros de Representación Semiótica* (TRRS), de Raymond Duval, según la cual la construcción conceptual y de comunicación, en Matemática, dependen de: la actividad de formación de representaciones (tablas, gráficos, notaciones, lenguaje verbal), y de procesos de transformación denominados *tratamiento*, y *conversión,* de los sistemas de signos (registros), que constituyen dichas representaciones (Duval, 1999).

La actividad de sustitución de objetos matemáticos escolares por representaciones semióticas depende de las transformaciones y de las relaciones entre signos asociados de manera compleja mediante reglas. Esta interviene en la comunicación, y en nuevos conocimientos. Aceptando la existencia de diferentes sistemas de representación (mental, icónica, material, semiótica, etc.), se considera *registro*[6] solo a los sistemas semióticos que permiten las transformaciones de representaciones antes mencionadas (Duval y Sáenz-Ludlow, 2016). El lenguaje verbal natural, las representaciones gráficas y tabulares, las expresiones numéricas, las notaciones algebraicas, y los sistemas icónicos, conforman registros semióticos (RS).

Los errores o dificultades de aprendizaje en matemática se asocian principalmente a inconvenientes de conversión, es decir, a transformaciones representacionales desde un tipo de registro dado, a otro, por ejemplo, una ecuación de lenguaje algebraico a gráfico cartesiana (Duval y Sáenz-Ludlow, 2016). Sara *et al.* (2006), presentaron un análisis de los errores de representación semiótica cometidos por los estudiantes en los exámenes parciales de Álgebra Lineal y Geometría Analítica, en carreras tecnológicas de ingeniería. Observaron las dificultades para resolver tres tipos de problemas:

[6] Verbal o lingüístico (RRVL), numérico (RRN), algebraico (RRA), simbólico (RRS), geométrico (RRGe), gráfico (RRGr), computacional (RRC), tabular (RRT).

> (...) 1º) dadas las ecuaciones paramétricas de una recta L, hallar la proyección de un punto A de coordenadas conocidas (registro tabular), sobre L; (...) 2º) dada la ecuación vectorial paramétrica de una recta, definir L como intersección de dos planos; (...) 3º) analizar la validez de la expresión que afirma que si dos vectores conforman un conjunto linealmente independiente en un espacio vectorial de dimensión mayor que dos, entonces el conjunto de dos combinaciones lineales de esos vectores con coeficientes determinados, salvo uno, también es linealmente independiente cualquiera sea el coeficiente indeterminado (Sara *et al.*, 2006, pp. 321-322).

Encontraron que los errores, se debían a dificultades de aplicación, a confusión entre representación y objeto matemático, a errores de tratamiento, a fallas lógicas, y a déficit de definición y construcción conceptual; y atribuyeron los mismos a un insuficiente trabajo con diferentes registros de representación (Sara *et al.*, 2006). Otros autores han tratado el tema de los RS tomando como objeto de análisis la intervención de un número significativo de ellos tanto en la tarea docente como en la propia actividad de aprendizaje. Sugirieron fomentar instancias de creación de nuevos signos y formatos de representación como actividad de acrecentamiento cognitivo (Oviedo *et al.*, 2011).

Otra investigación analizó, mediante el método de entrevista, la relación entre la coordinación de representaciones en la acción de resolver situaciones diversas de transformaciones lineales con estudiantes de Licenciatura en Matemática, teniendo como referencia la TRRS (Ramírez Sandoval, *et al.*, 2013).

Se partió de la premisa de que es posible producir un fracaso en el aprendizaje, en caso de no producirse una adecuada coordinación, y concluyó que, si bien estos procesos favorecen la obtención satisfactoria de soluciones, no la garantizan (Ramírez Sandoval *et al.*, 2013).

La temática de la coordinación de los RS acerca de la intencionalidad estructural de los autores de diferentes libros universitarios en la propuesta de formación trigonométrica, y los modos de representación semiótica en la secuenciación de contenidos matemáticos, reconoció en su estudio, la existencia de propuestas bibliográficas a las que se denominó *monorregistro de las funciones trigonométricas,* debido a que:

> (...) aunque la conversión de unidades, la definiciones de las funciones trigonométricas y las propiedades de acotamiento y periodicidad se presentan en tres registros de representación diferentes (lengua natural, algebraico y gráfico), no hay conversión de unidades entre al menos dos de estos registros; antes bien, todo el

> tratamiento se da solo en la lengua natural y los otros dos registros sirven de apoyo: el algebraico para dotar de una ecuación y gráfico de auxiliar a lo dicho en lengua natural (Aponte Rodríguez, 2016, p. 82).

Trabajos vinculados a enseñanza de funciones racionales en 5º año de Educación Secundaria (desde la perspectiva de las denominadas *Teoría Antropológica de lo Didáctico, Teoría de Juego*, y *Teoría de Campos Conceptuales*), pusieron en discusión alcances y limitaciones en actividad de estudio e investigación (AEI) a partir de la pregunta ¿cómo operar con curvas cualesquiera si solo se dispone de la *representación gráfica de la misma y de la unidad en los ejes?* Utilizando una metodología cualitativa, etnográfica y exploratoria, se propuso describir y justificar si la AEI permitiría construir las propiedades fundamentales de funciones racionales de manera significativa. Se observaron clases en dos cursos de una misma escuela donde la actividad propuesta consistió en buscar la gráfica más razonable de una función racional conociendo la gráfica del polinomio resultado de la división de los polinomios de la función en cuestión. Obtuvieron que es posible la construcción de propuestas didácticas mediante AEI, y la recuperación del sentido conceptual, aunque ello se lograra de manera imperfecta (Gazzola *et al.*, 2011).

La presente investigación abordó la forma en que el ordenamiento de distintas representaciones semiótico-didácticas, se establece en jerarquías de secuenciación de los registros en la enseñanza de *expresiones algebraicas racionales*. El objetivo de estudio se centró en conocer aspectos cualitativos del orden en que son presentados por los profesores de educación secundaria, y el modo en que se podrían generar errores didácticos. La investigación descriptiva se encuadró dentro del área de Educación; y consistió en la realización de observaciones de clases, mediante una metodología del tipo cualitativa, y entrevistas a dos docentes de Matemática, de una escuela secundaria urbana, de la ciudad de Gualeguay (Argentina).

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Errores en Enseñanza y en Aprendizaje

Los errores del aprendizaje "constituyen la manifestación exterior de un proceso complejo donde se ponen en juego muchas variables: docente, estudiante, currículo, contexto sociocultural, entre otros" (Engler *et al.*, 2015, p. 26). Por ello no es adecuado pensarlos únicamente como fracasos del aprendizaje, y deben detectarse de inmediato para ser superados. Rico (1997), admite que los errores pueden ser de origen ontogénico, didáctico, semiótico, cultural y epistemológico, entre otras clasificaciones.

Si bien interesa centrar la mirada en los ordenamientos registrales, se consideraron solamente los denominados errores didácticos, y se los distingue, en su análisis, de los de origen epistemológico debido a que, habitualmente, son pensados indistintamente en las prácticas de enseñanza y, además, porque la TRRS hace referencia directa a aspectos de adquisición conceptual, lo cual se vincula más a estos últimos.

Popper, Lakatos y Bachelard (s.f.), citados por Rico (1997, p. 6), realizan aportes al esclarecimiento de este último tipo. Así, desde la perspectiva epistemológica,[7] se consideran a los errores como conocimientos deficientes e incompletos según el contexto cognitivo, que imposibilitan la permanente adquisición y consolidación de nuevos conocimientos; forman parte de la construcción del mismo, y surgen en un marco conceptual consistente, basado en conocimientos adquiridos previamente, es decir, cuyas limitaciones están relacionadas con el propio significado de los conceptos matemáticos.

Es posible diferenciar dos tipos de profesores los cuales tienen visiones distintas acerca de los errores del aprendizaje: el profesor *convencional–tradicionalista*, y el profesor *moderno–avanzado* (Rico, 1997). Los primeros, consideran a los errores como un dato objetivo de desconocimiento de un estudiante que debe ser corregido, penalizado. Sostienen que este tratamiento del error prepara a los estudiantes para la vida y para la inserción social; cometer un error representa una conducta inadecuada que hay que superar. Los segundos, en cambio, ven en los errores una muestra de un conocimiento construido

[7] Conjunto de convicciones, de conocimientos y de saberes científicos, que tienden a decir cuáles son los conocimientos de los individuos o grupos de personas, funcionamiento, formas de establecer su validez, de adquirirlas y por tanto enseñarlas y de aprenderlas. (D'Amore, 2004)

parcialmente, resultado de un proceso en curso a cuyo progreso el educador debe contribuir, procurar una revisión para mejorar el significado erróneo. Así, se debería partir de una reorganización de los conocimientos anteriores en nuevas situaciones con el objetivo de obtener resultados positivos y conseguir que los estudiantes logren un aprendizaje significativo (Rico, 1997).

2.2 Error, representación semiótica, y aprendizaje

Respecto de la dependencia del pensamiento matemático, del lenguaje, y de otros sistemas de representación, algunos autores afirman la autonomía de la conceptualización con relación a toda actividad semiótica.[8] Sin embargo, estas cuestiones están en el centro de las *dificultades*[9] que los alumnos encuentran en su aprendizaje (Duval, 2006).

En Matemática tales dificultades con frecuencia se interpretan como errores, y afectan a la construcción del conocimiento matemático, su tratamiento, comprensión y valoración. Para Duval (2004), esas construcciones se dan por representaciones semióticas, es decir las que se constituyen por uso de signos ya sea en lenguaje formal, fórmulas algebraicas o figuras geométricas, por ejemplo, y serían el medio por el cual se exteriorizan las representaciones mentales y mediante las cuales se hacen visibles o accesibles.

Las investigaciones referidas a coordinación dan cuenta de cierta dificultad de los estudiantes en adquirir la habilidad para cambiar de *registro de representación*. Duval (2006) señala que:

- Los contextos de representación utilizados en matemática son semióticos.
- El procesamiento matemático implica siempre una transformación de representaciones.
- Se requiere una coordinación interna para elegir una representación según el propósito de la actividad.

[8] Adquisición de una representación realizada por signos.

[9] Cuando se mencionan las dificultades, en el contexto en que aquí se las concibe, se hace referencia al aprendizaje (actividad práctica y cognitiva del alumno), conocidas como *obstáculos epistemológicos*; en el sentido amplio Bachelard (2000) los asocia al de contrapensamientos (Bacherlard, 2000). No se harán en adelante distinciones con la idea de error.

Para comprender los obstáculos de aprendizaje con lo que ello se vincula se deben distinguir dos clases de transformaciones: la *conversión* en la que se cambia el sistema semiótico sin cambiar los objetos indicados; por ejemplo, se puede adoptar una representación del objeto matemático[10] "la mitad de un entero" (lengua natural del registro verbal o lingüístico), y convertir mediante la fracción ½ (registro numérico); y el *tratamiento,* en donde se opera manteniendo el mismo registro, por ejemplo, continuando con la expresión numérica anterior, transformar en el mismo registro a la expresión decimal 0,5. (figura 1).

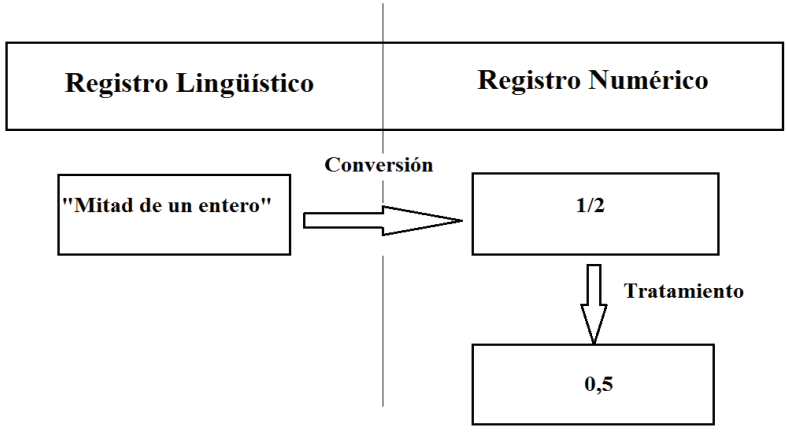


Figura 1. Ejemplo de transformaciones semióticas en Matemática.

Muchas veces estas transformaciones se pueden identificar claramente, o se dan en etapas de un proceso, o en un contexto, por ejemplo, en un registro, en resolución de problemas; también, hay situaciones en las que se requiere movilizar dos o más registros. En este sentido la *conversión* y el *tratamiento* podrían ser considerados como un todo, un entorno metodológico y estratégico en la actividad matemática de resolver problemas, o en el trabajo algebraico; sin embargo, la conversión es un proceso cognitivo más complejo que el tratamiento, y puede considerarse como el origen de la comprensión.

[10] Se concibe a los objetos matemáticos en su constitución abstracta la cual haya adquirido identidad operativa o conceptual: un objeto, como entidad, es una cosa a la cual nos referimos, o de la que podemos hablar, sea en condición real, imaginaria o de otro tipo, y su existencia depende de los significados que le asignan ciertos grupos sociales (Blumer, 1982).

2.3 Representación semiótica, didáctica, y error

La Enseñanza de la Matemática debe satisfacer dos requisitos que en un punto entran en conflicto: por un lado, todo concepto matemático se sirve de representaciones, dado que no se dispone de objetos para exhibir en su lugar por lo que la conceptualización[11] debe necesariamente pasar a través de registros representativos. Y, por otro lado, los objetos matemáticos representados nunca deben confundirse con el contenido de las representaciones utilizadas (Duval, 2006).

Un objeto matemático, según Godino (2002), también se concibe como "todo lo que es indicado, señalado, nombrado cuando se construye, se comunica, o se aprende matemáticas" (Godino, 2002, como se citó en D'Amore y Godino, 2007, p. 208).

Duval (1996) citado por D'Amore (2009), sostiene que no existe concepto sin sistema de signos:

> Todas las funciones psíquicas superiores se hallan unidas por una característica común superior, la de ser procesos mediados, es decir el incluir en su estructura, como parte central y esencial del proceso en su conjunto, el empleo del signo como medio fundamental de orientación y de dominio de los procesos psíquicos... La lista central del proceso de formación de los conceptos es el uso funcional del signo, o de la palabra, como medio que permite al adolescente de someter a su poder las propias operaciones psíquicas, de dominar el curso de sus propios procesos psíquicos (...) (Duval 1996, como se citó en D'Amore, 2009, párr. 11).

En Matemática, los *sistemas semióticos* son principalmente utilizados para operar (*tratamiento*), por eso es importante reconocer que el contenido de cada representación depende de los conceptos u objetos representados y del registro utilizado. Cambiar de un sistema a otro significa cambiar el contenido de la representación sin cambiar las propiedades matemáticas representadas. Por ello muchos estudiantes se ven atrapados en esta función semiótica, que conlleva a la falta de comprensión.

El primer paso para el entendimiento es la posibilidad de transferir lo que se ha aprendido a nuevos y diferentes contextos semióticos, por lo que una de las condiciones es que haya una coordinación interna entre los diversos *sistemas*

[11] La conceptualización es el pasaje de los conceptos-como-instrumento a los conceptos-como-objeto y una operación lingüística esencial en esta transformación es la nominalización, es una apropiación consciente.

de representación disponibles para usar. Se dice entonces que se establece una función semiótica entre dos objetos matemáticos cuando entre dichos objetos se establece una dependencia representacional o instrumental, "esto es, uno de ellos se pone en el lugar del otro o uno es usado por otro" (D'Amore y Godino, 2007, p. 210).

Los profesores deben ser capaces de relacionar de muchas maneras representativas los contenidos, en distintas situaciones, para que así los alumnos puedan desempeñar un rol activo, como describen las teorías constructivistas; tienen un papel central; proporcionar estas situaciones, mediante resolución de problemas, debates para involucrar a los estudiantes en la resolución, aclaración de ideas, conceptos y terminologías. Debe ser activo y creativo y debe respetar las individualidades de los alumnos y no perder de vista que un concepto matemático tiene diferentes niveles de abstracción y generalidad.

Si se abordara un concepto con un significado no apropiado para un problema dado, o que no sea semióticamente diseñado, o representado en forma adecuada, la propuesta didáctica funcionaría como un obstáculo. Al respecto, debe considerarse que los errores didácticos introducen formas de pensar y conceptualizar limitadas por maneras de enseñar. Sierpinska (1992), al referirse a los obstáculos señala: "No obstante, se debe prestar especial atención, a aquellos que no son simples resultados de formas particulares de su enseñanza, ni idiosincrásicos, ni algo que ocurre a una persona o dos, sino que está más extendido... (...)" (Sierpinska 1992, como se citó en Bohorquez *et al.*, 2009, p. 480).

Brousseau (1983), caracteriza al *obstáculo didáctico* como resultado de una opción o de un proyecto del sistema educativo, de las elecciones que se hacen para establecer la situación de enseñanza. Destaca, además, que es siempre el fruto de la interacción del alumno con un medio, y, en efecto, el error (epistemológico) es una manifestación de dicho obstáculo, es decir la consecuencia causal cuando los errores son persistentes y reproducibles:

> Los trabajos conformes a las concepciones de Bachelard y de Piaget muestran también que el error y el fracaso no tienen el rol simplificado que en ocasiones uno quiere hacerles jugar. El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar que uno cree en las teorías empiristas-conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, se han constituido en obstáculos. Tanto en el

> funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido (Brousseau, 1983, p. 67).

También puede vincularse el error de origen epistemológico, al error didáctico que aquí se intenta describir.

2.4 Transposición didáctica y contexto semiótico

Un contenido, para ser enseñado, sufre transformaciones cuya finalidad es la de hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. También adquiere diferentes formatos semióticos. Chevallard denomina al saber científico, al ser transformado en saber posible de ser enseñado, con el nombre *Transposición Didáctica* (Chevallard, 1993).

Es preciso que exista dicha transposición, ya que en innumerables casos la distancia didáctico-pedagógica o epistémica entre el objeto de saber y el objeto de enseñanza, es inmensa. Sin embargo, no se debe confundir *conversión* de un *registro semiótico* a otro con la efectiva *transposición didáctica* que se realiza a todo objeto de saber escolar: "Un objeto de saber solo llega a la existencia como tal, en el campo de conciencia de los agentes del sistema de enseñanza, cuando su inserción en el sistema de los objetos a enseñar se presenta como útil para la economía del sistema didáctico" (Chevallard, 1993, p. 57).

Los profesionales de la educación deben tener en cuenta distintas estrategias didácticas para prevenir (o superar) errores de origen didáctico en función de dicha economía, mediante las transposiciones didácticas más adecuadas, sin confundirlas con los posibles errores epistemológicos o con conversiones semióticas deficientes. Al respecto Duval (2017), destaca la importancia de los procesos cognitivos y de su estrecha relación con los RS. La actividad matemática requiere un trabajo docente que enfatice en la enseñanza de las conversiones registrales, las cuales no resultan en los aprendizajes, ni intuitivas ni espontáneas: "la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos" (Duval, 2004, p. 49).

Por ello se sostiene que los sistemas de representación semiótica tanto en su tratamiento como en su conversión, están estrechamente vinculados con los sistemas didácticos, y principalmente en la intervención necesaria del registro lingüístico como nexo de los demás registros.

3. DESARROLLO DEL TRABAJO

La presente investigación fue llevada a cabo en el contexto de formación de profesores de Matemática, tomando como campo de observación el ámbito de la enseñanza secundaria, en una escuela de la ciudad de Gualeguay, Provincia de Entre Ríos, Argentina. Se propuso analizar un caso de implementación de una propuesta de enseñanza real en aula. La misma se realizó simultáneamente en dos cursos de igual nivel formativo, correspondiente al 4° año, de entre 15 y 16 años de edad, cuyos grupos de estudiantes compartían similitudes en las condiciones contextuales y académicas. La propuesta fue diseñada por las docentes de los respectivos cursos en acuerdos didácticos y curriculares también compartidos (ambas informantes fueron entrevistadas).

El plan tuvo como propósito el de responder dos preguntas de investigación que fueron ordenadas según la prioridad de los objetivos de análisis en:

- Pregunta primaria: ¿De qué manera se ordenan los registros de representación semiótica en la enseñanza de expresiones algebraicas racionales en una clase de Matemática de 4° año de educación secundaria en una escuela de la ciudad de Gualeguay?
- Pregunta secundaria: ¿Cómo se vinculan esos ordenamientos representacionales en el diseño de propuestas didácticas con la posibilidad de inducir a errores didácticos?

Se trató de una investigación de caso, de tipo cualitativa donde se consideró no relevante el número de clases a observar puesto que no se procuró obtener resultados generalizables y se optó por una metodología comparativa entre no más de dos situaciones de enseñanza del contenido curricular de interés que permitieran caracterizar y describir el caso didáctico (enseñanza de expresiones algebraicas racionales).

3.1 Entrevista a docentes de Matemática

Se entrevistó a dos docentes, de dos cursos de idéntica graduación escolar (4° año de Educación Secundaria), en la misma época del año académico, previamente a la observación de sus clases. Para conocer la utilización de RS, su postura frente a los *errores didácticos,* y la manera de afrontar las dificultades

de la enseñanza y del aprendizaje, se les formularon preguntas semi-estructuradas de carácter abierto (apartados 3.3 y 3.4).

3.2 Observaciones de clase de Matemática en 4to año

Luego de la entrevista, se realizó una observación de clase por cada docente, en los grupos de clases donde se desarrollarían los contenidos referidos a Expresiones Algebraicas Racionales, a fin de describir los RS utilizados. Se tomaron datos del proceso de enseñanza, las anotaciones de los estudiantes, sus preguntas e intervenciones en clase, las conceptualizaciones que ellos hacían, los obstáculos en las operaciones que realizaban para resolver las expresiones algebraicas racionales, y la modalidad de resolución de actividades y ejercicios del tema.

3.3 Entrevista número 1

De la primera entrevista surge que la docente utiliza como estrategia didáctica, la vinculación de los conceptos a enseñar con temas anteriormente vistos, es decir, la tarea de referir un nuevo contexto semiótico-representacional, a conocimientos registrales previos.

- ¿Qué estrategias didácticas consideras que colaboran al mejor entendimiento de las Expresiones Algebraicas Fraccionarias?
- (...) Yo lo voy relacionando siempre, más que nada, con las operaciones con fracciones comunes (RRN y transformación de tratamiento), simples digamos, para que ellos se vayan ubicando, comparando siempre y les resulta un poco más fácil de entender, porque si no es como que son temas totalmente desconectado (...).

Este tipo de estrategia, utilizada por la profesora, se ajusta al tipo de didáctica sugerida por Brousseau (1983), aludida anteriormente, ya que permite que el alumno emplee sus conocimientos previos frente a situaciones novedosas, a la vez que incluye a sus estructuras las nuevas explicaciones y los nuevos contextos de aplicación. Lo observado en la clase indica que no resultó eficaz ya que los alumnos no lograron vincular los conceptos nuevos con los anteriormente vistos.

Cuando se le preguntó sobre los recursos y actividades propuestas para el tema, la profesora contestó que comienza con ejemplos en el pizarrón y luego ejercitación, para reforzar la utilización del registro algebraico principalmente, tanto por parte del docente como por parte de los alumnos.

- Hoy vamos a observar una clase sobre Expresiones Algebraicas Fraccionarias ¿De qué manera piensa desarrollar el tema? ¿Cómo iniciaría la clase?
- (...) Hay poca didáctica para este tema, comienzo dando un ejercicio de ejemplo (transformación de tratamiento), y después les propongo varios a ellos para que se familiaricen con el tema (...).
- ¿Qué actividades realizan los alumnos?
- (...) Fundamentalmente ejercicios de aplicación (...).

Se observó así, que la docente propone tratamientos dentro del mismo registro y no conversiones, como por ejemplo si se plantearan situaciones problemáticas en las que los estudiantes debieran transformar en otras formas semióticas las consignas dadas en RRVL.

Al preguntar sobre los errores habituales de los alumnos, respondió que los mismos no podían aplicar temas vistos anteriormente a nuevos contextos (por ejemplo, los casos de factoreo, simplificación de expresiones, o propiedad distributiva).

- ¿Cuáles son las dificultades más usuales que presentan los estudiantes en el momento de comprender las Expresiones Algebraicas Fraccionarias?
- Simplificar, aplicar los casos de factoreo, aplicar la propiedad distributiva.
- ¿Crees que estas se deban a la falta de conocimientos previos, o conocimientos incompletos del alumno? ¿Por qué crees que sucede?
- (...) No sé si no lo tienen, porque ellos me demuestran lo contrario en la evaluación, pero es como que ellos terminan el tema y cierran la cortina, es como que después van a ver algo totalmente distinto. No entienden que en Matemática está todo relacionado (...) Es tan difícil saberlo, ellos viven el día a día, los adolescentes viven el día a día, por eso yo les digo que vayan haciendo anotaciones, que se hagan su propia carpeta, entonces tienen que hacer las anotaciones que consideren importantes, pero para que ellos entiendan, no para que entienda yo y para que no se olviden, porque yo puedo asegurar que la próxima clase vengo a repasar y ya se olvidaron cómo es que se hacía (...).

Se puede interpretar que la perspectiva de enseñanza prevé los errores o dificultades que se presentan en la clase sin potencialidad de producir, a partir de ellos, nuevas formas de enseñar, es decir de construcción de una secuencia registral de representación diferente, pues se vincularía al tipo denominado error *convencional*.

Por último, al preguntar cómo trabaja sobre esas dificultades, señaló que aplica distintas técnicas, por ejemplo, repasar lo dado antes de la evaluación, dar ejercicios de aplicación más sencillos (transformación de tratamiento), o explicar el tema nuevamente ya que no se puede avanzar si los alumnos no han comprendido.

- ¿Cómo hace usted para afrontar esas dificultades?
- (...) generalmente hago un repaso rápido, por ejemplo, antes de la evaluación, doy un módulo de repaso y en los otros cuarenta minutos siguientes les tomo la evaluación, generalmente hago eso para que no fracasen. El que no estudió, al que no le importa, fracasa igual, pero al menos así puedo salvar un alto porcentaje (...).
- ¿Haces modificaciones en la planificación?
- Siempre surgen cosas que te obligan a modificar lo que planificaste, o porque no entendieron o porque faltan, por ahí te salen unas clases perfectas.
- ¿Trabajas sobre las correcciones?
- Lamentablemente hay que volver a empezar, repasar, no puedo dar algo por sabido porque así no es posible avanzar (...).

Lo observado se correspondería con un docente del tipo moderno, es decir, aquel que procura una revisión para mejorar el significado del conocimiento erróneo. Pero, no así, al utilizar las mismas técnicas, el mismo procedimiento de resolución, sin presentar situaciones registrales novedosas que permitan la utilización de otros registros que ayuden a ampliar los conceptos o vincularlos con otros conocimientos.

Los elementos de análisis pueden llevar a pensar que los errores de los alumnos se producirían por obstáculos de tipo didáctico, donde no se amplían las posibilidades representacionales propuestas por la docente.

Entrevista número 2

De la entrevista a la segunda docente, surgió que utilizaba similares opciones didácticas que la anterior para explicar el tema, y vincular los conceptos con otros vistos con anterioridad, y aludió a que "no hay demasiadas estrategias para el tema".

- Hoy vamos a observar una clase sobre Expresiones Algebraicas Fraccionarias ¿De qué manera piensa desarrollar el tema? ¿Cómo iniciaría la clase?
- (...) No es un tema muy didáctico digamos, yo siempre hago la comparación con fracciones comunes y a partir de la suma de fracciones comunes doy la suma de expresiones algebraicas fraccionarias, a partir de la multiplicación, la simplificación de fracciones comunes hago una especie de comparación (RRN y transformación de conversión a RRA), pero no encuentro otra manera de enseñar este tema particularmente. Arranco dándoles un ejercicio de ejemplo y después les doy ejercicios de aplicación (RRA y transformación de tratamiento).
- ¿Qué estrategias didácticas consideras que colaboran al mejor entendimiento de las Expresiones Algebraicas Fraccionarias?
- No sé si hay estrategias didácticas para este tema, yo no las encuentro (...).

El tipo de estrategia mencionado por la docente permite que el alumno emplee sus conocimientos previos frente a situaciones novedosas a la vez que incluye a sus estructuras cognitivas las nuevas explicaciones (RRVL), y los nuevos contextos de aplicación. En la observación de clase se reconoció que la estrategia aplicada fue aceptada por los alumnos y llegó a interesarlos.

Cuando se preguntó sobre los recursos y actividades propuestas, contestó que comenzaba con explicación con ejemplos en el pizarrón y luego ejercitación, lo cual da cuenta de la utilización de RRVL y RRA, con operaciones de conversión entre ambos, y posterior tratamiento.

- ¿Qué actividades realizan los alumnos?
- (...) Ejercicios de aplicación, problemas cero, con este, cero.
- ¿Con el tema, o con este cuarto?
- (...) Con este tema, es como una continuación de polinomio, y es un tema que lo damos rapidito, no los engancha a ellos, yo particularmente no tengo muchas estrategias, acá siempre se da así el tema y se sigue con otra cosa (...).

Se puede inferir que la docente realizaba tratamientos dentro del mismo registro, pero no diversificaba las conversiones, hizo constantemente aclaraciones y explicaciones orales que reforzaron el concepto algebraico, por lo cual se observó que otorga gran importancia al registro RRVL oral.

Al preguntar sobre los errores comunes de los alumnos, las respuestas también fueron similares al docente número 1, los alumnos no podrían aplicar temas vistos anteriormente, según respondió. Como posibles causas indicó que los alumnos no logran relacionar los temas, que repiten siempre los mismos errores y que son intrínsecos al Álgebra.

Por último, al preguntarle cómo trabaja sobre esas dificultades, al igual que en la entrevista número 1, la docente reconoció que aplica múltiples técnicas, por ejemplo, repasar lo dado antes de la evaluación (RRVL y RRA), dar ejercicios de aplicación más sencillos (transformación de tratamiento), o explicar el tema nuevamente (RRVL y RRA).

Esta diversidad en la revisión de lo erróneo podría conducir a caracterizar a ambos docentes consultados como del tipo *moderno,* y denotar con ello cierta disposición a fomentar ampliación de la actividad registral de representación semiótica (ver apartado 2.2).

3.5 Observación de clase número 1

La profesora comenzó la clase corrigiendo ejercicios de la clase anterior realizando transformación de tratamiento. Esta actividad permitió recordar el tema y revisar posibles errores de resolución.

> La profesora corrige el tercer ejercicio, pregunta al alumno cómo lo hizo, explica que si saca el -2 debe cambiar el signo. Corrige el ejercicio cuatro preguntando:
> – ¿Qué podemos hacer? ¿Qué podemos hacer cuando se multiplican dos expresiones?
> – Distributiva (contesta una alumna).

Utilizó los RRA al representar las ecuaciones, RRA, y RRVL (verbal conceptual), en el caso de las correcciones y explicaciones. La profesora involucró a los alumnos en la corrección de las actividades. No se aclararon o ampliaron conceptos matemáticos en la interacción.

Un alumno preguntó sobre la propiedad distributiva, la profesora explicó paso a paso; en ese momento se trabajó dentro del RRVL y RRA, con utilización de algunos esquemas gráficos (flechas), vinculando el lenguaje con el procedimiento.

> La profesora explica la propiedad distributiva escribiendo en el pizarrón la expresión factorial:
>
> $$(x+1)\,(x+3) = x^2 + 3x + x + 3$$
>
> Rápidamente borró lo que había escrito y los estudiantes se quejan debido a que no lograron copiar en sus carpetas.

Se pudo ver la operación de tratamiento dentro del RRA utilizada por la docente para pasar de los factores algebraicos, a la equivalencia con las sumas. No se diversificó la explicación en diferentes registros, ni se dio el tiempo suficiente para que los alumnos incorporasen a sus estructuras de pensamiento; al respecto, Duval destaca que la integración de los sistemas de representación a la estructura cognoscitiva es fundamental para comprender Matemática. Por otra parte, la conversión de un registro a otro es lo que le da significado a un objeto matemático. El RRVL en tal caso no participó en la explicación con supremacía respecto de otros registros.

Cuando la profesora comenzó a explicar el tema lo hizo como continuación del anterior, considerando que la *suma y resta son operaciones que le suceden a la multiplicación y división*. Escribió un ejemplo en el pizarrón donde se utilizó el RRA y RRVL para la explicación. Se realizó una comparación con fracciones numéricas mediante RRN. Se pudo observar conversión entre registros en la comparación, la cual implica aplicación de conocimientos previos de los alumnos, no siendo así en los casos de factoreo donde se observaron dificultades.

La profesora explicó que operar con expresiones fraccionarias requiere buscar común denominador, colocó el título en el pizarrón y escribió un ejemplo.

$$\frac{x}{x-2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{x+x+2}{x-2} = \frac{2x+2}{x-2}$$ (RRVL y RRA)

> (Pide que se fijen en el denominador: ¿Cómo son? Iguales, por lo tanto ¿Cuál sería el común denominador?) (RRVL)
>
> Alumnos: X-2.
>
> Profesora: (Desarrolla el ejercicio paso a paso en el pizarrón, indica que se puede aplicar el primer caso de factoreo, pero la expresión no se modifica, no se

puede simplificar, por ese motivo lo dejan así (RRA y RRVL). Pide que copien mientras escribe otro ejercicio de un cuadernillo).

$$\frac{x}{x-2}+\frac{3x-1}{x^2-2x}=\frac{x}{x-2}+\frac{3x-1}{x(x-2)}=$$ (RRA)

Profesora: (escribe y pregunta), ¿Cómo son los denominadores? Distintos. En este caso se debe factorizar primero y luego encontrar el factor común. (RRVL y RRN)
Profesora: (Explica cómo obtenerlo con un ejemplo de números fraccionarios 3/2 + 2/3= /6, recuerda que es el mayor de los números y pregunta cuál es en el ejemplo). (RRVL y RRN)
Alumnos: (no responden).
Profesora: (vuelve a preguntar) ¿Cuál se repite?
Alumnos: X-2, contestan.
Profesora: ¿Y qué más?

Resuelven y pregunta a la clase:

Profesora: ¿Qué más pueden aplicar? ¿El primer caso, el segundo, el tercero...?
Alumnos: Ruffini (contestan los alumnos).
Profesora: No me había enterado que Ruffini tenía un caso de factoreo...

Otro alumno contesta: "El tercer caso", la profesora trata de resolverlo, inmediatamente los alumnos se dan cuenta que no es posible, luego otro estudiante contesta: "Gauss".

Profesora: ¿Eso puede ser lo que pensaste como Ruffini?, le pregunta.
Pasa una alumna a resolverlo. En el pizarrón escribe $q=x^2$, la profesora aclara que es solo el coeficiente, la alumna lo corrige y aplica Regla de Ruffini correctamente, comprueba que no se puede factorizar. (RRA y RRVL)

La docente pretendió un tipo de interacción y de respuestas específicas no habiendo explicitado de manera verbal algunos requerimientos, lo cual puede interpretarse como error didáctico con origen en la formulación de las preguntas que la docente realizó a los alumnos (RRVL), por falta de transformaciones de registros. Las preguntas fueron poco específicas y carecían de conceptos distinguibles en un cierto tipo de RS transformable.

Luego, pasó una alumna al pizarrón, la profesora indicó que lo que la estudiante escribía contenía un error en la diferenciación entre coeficiente y término, sin aclarar cuál era esa diferencia, por lo que podría persistir el mismo. Se pudo observar que la intervención del RRVL, utilizado para aclarar o ampliar conceptos fue lo que condujo al error. La profesora explicó un ejercicio de expresiones con distintos denominadores, pero no se ampliaron conceptos, ni se utilizaron otras estrategias para explicar. Continuó trabajando con RRA y RRVL no conceptual, lo cual se podría caracterizar como obstáculo didáctico donde no se amplían las opciones registrales.

La docente escribe otro ejercicio en el pizarrón y pregunta (RRA):
Profesora: ¿Cómo son los denominadores? ¿Cuál será el común denominador? ¿Qué dijimos que se hacía con los denominadores?
Alumnos: Se multiplican...

$$\frac{x}{x+1}-\frac{2}{x-1}=\frac{x(x-1)-2(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-x-2x-2}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{x^2-3x-2}{(x+1)(x-1)}$$

(Resuelve el ejercicio con la participación de los alumnos).
Profesora: ¿Qué podemos hacer?
Alumnos: Simplificar.
Profesora: ¿Qué cosa?
Alumnos: Los paréntesis.
Profesora: No porque hay un signo menos (-), primero debe expresarse como producto. ¿Qué se puede hacer entonces?
Alumnos: Distributiva.

La docente comenzó interactuando con los alumnos para construir un nuevo concepto (suma algebraica) pero se vio interrumpida y no se logró el objetivo; se realizó mediante RRA sin explicaciones. Se observa tratamiento dentro de un registro desvinculado del contexto, como aplicación mecánica de las operaciones lo cual refuerza lo planteado por la profesora en la entrevista acerca de que los chicos no relacionan los temas.

Continuando con la clase la profesora escribe una suma algebraica en el pizarrón y pregunta (RRA):

Profesora: ¿Cómo se llama cuando combinamos sumas y restas?
Alumno: Operaciones combinadas (contesta un alumno)
Alumno: Resma (contesta otro).
La profesora dice que están muy chistosos, que para la próxima clase deben averiguar cómo se dice.

$$\frac{1}{2x-2}+\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{x+1}=$$
$$\frac{1}{2(x-1)}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}-\frac{x}{x+1}=\frac{1(x+1)+2.2-2x(x-1)}{2(x+1)(x-1)}$$

Comienza a resolver el ejercicio en el pizarrón sin explicar (RRA y transformación de tratamiento), los alumnos averiguaron el común denominador correctamente. Un alumno pregunta cómo sacó ese 2 multiplicado por 2 (expresado como 2.2 en el numerador de la expresión racional última). La profesora explica que es como fracciones, se divide y multiplica. (RRVL)

Se tomaron decisiones didácticas del tipo tradicional, y poca implementación de RRVL sin desglose del contenido a través, por ejemplo, del diálogo y la participación activa de los alumnos.

3.6 Observación de clase número 2

La docente comenzó la clase recordando lo dado en la clase anterior, con un ejemplo que explicó en el pizarrón. Utilizó RRVL, a medida que escribió, para señalar el tipo de expresión que representaría, sus características, y las operaciones que se incluían; y RRA, para simbolizar la tarea matemática, y el objeto expresión racional.

La profesora entra al aula y pide a un alumno que borre el pizarrón. Les recuerda que la clase anterior vieron suma y resta de expresiones algebraicas. Escribe un ejercicio en el pizarrón con expresiones algebraicas racionales de igual denominador y lo desarrolla a medida que va preguntando el procedimiento a los alumnos.

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x}-\frac{5}{x}=\frac{1+2-5}{x}=\frac{-2}{x}$$

Las intervenciones docentes fueron destinadas a propiciar el aprendizaje de nuevos conceptos. La aplicación reiterada de los conocimientos previos articulados a través de RRVL, recordándolos, otorgándoles nuevos significados o aplicaciones, permitió estructurar el nuevo conocimiento-objetivo de la clase y a la vez consolidar nociones anteriormente aprendidas.

El inicio de clase permitió interrelacionar los temas y organizar una serie de conceptos dentro de un mismo campo. Cuando se introdujo el tema *Suma y Resta de Expresiones Algebraicas Racionales con distinto denominador* se utilizó RRVL y RRA simultáneamente, haciendo aclaraciones mediante lenguaje matemático y cotidiano.

> Realiza otro ejemplo con fracciones de distinto denominador y pregunta qué es lo común y lo no común en ellas:
>
> $$\frac{x}{2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{1}=\frac{x^2+2+2x}{2x}$$
>
> A medida que escribe en la pizarra, comenta los pasos que realiza, y luego pregunta si se puede simplificar, recuerda que en la suma y en la resta solo es posible en forma vertical, es decir numerador y denominador de la misma fracción.
>
> $$\frac{3}{x}+\frac{2x}{x^2}=\frac{3}{x}+\frac{2}{x}=\frac{5}{x}$$
>
> $$\frac{x}{2x-6}-\frac{3}{x-3}=\frac{x}{2(x-3)}-\frac{3}{x-3}=\frac{x-6}{2(x-3)}$$

En el momento en que los alumnos resolvían los ejercicios de manera autónoma, la profesora recordó en forma oral pasos procedimentales, involucró a los estudiantes en la resolución, aclaró ideas, conceptos y terminología.

> Mientras los alumnos trabajan, la profesora recuerda los pasos: "Repetimos el denominador y sumamos los numeradores".
> Una alumna pregunta si terminó ahí el ejercicio, la profesora explica:
> Profesora: No se puede seguir resolviendo porque no son términos semejantes, si fueran todas x^2 o todas x sí podrían sumar, por ejemplo, en este caso $(x-6)$ no queda $(-5x)$ porque a las x solo les puedo restar x. (RRVL y RRA)

$$c)\ \frac{2x-x^3}{x^2}-\frac{x(x+2)}{x^2}=\quad\frac{2x-x^3-x(x+2)}{x^2}=\quad\frac{2x-x^3-x^2-2x}{x^2}=\frac{-x^3-x^2}{x^2}$$

$$d)\ \frac{3x^3+1}{12x^2}+\frac{5x^3-1}{12x^2}=\frac{3x^3+1+5x^3-1}{12x^2}=\frac{8x^3}{12x^2}=\frac{2x}{3}$$

(La profesora indicó que $x^3 = x.x.x.$, y que $x^2 = x.x$, y que por tanto se podía simplificar). Anteriormente había aclarado que en el ejercicio c) se repitió el denominador *por ser iguales (señala)* $2x$ *y* $-2x$ *se cancelan por ser positivo y negativo.* (RRVL y RRA)

Los alumnos trabajaron con una fotocopia que contenía sintetizados los desarrollos de los casos de factoreo (registro algebraico); se observó que este recurso resultó útil ya que los estudiantes aplicaban los conocimientos con facilidad al nuevo tema y los vincularon de forma natural. El texto, un cuadro impreso distribuido en la clase, constaba de RRA, RRN, RRVL y RRGr, y símbolos aclaratorios y flechas.

Conformado por distintos registros sobre el mismo objeto matemático, implícitamente realizaba conversiones, lo que ayudó a los estudiantes a comparar las diferentes formas de expresar lo mismo y a conceptualizar, y permitió diversificar los modos de representación.

En el siguiente ejercicio los alumnos tenían dificultades para agrupar términos semejantes y diferenciar la *suma* de la *multiplicación* de expresiones algebraicas. La profesora utilizó tanto el RRA como RRVL para explicar, sin ampliar los conceptos.

Al dar el siguiente ejercicio, la docente explica con un ejemplo de fracciones numéricas, lo compara con el ejercicio anterior y pide a un alumno que lo resuelva, agrupa los términos semejantes, tres veces x y dos veces x, lo resalta con color para simplificar. *(RRN, RRVL, RRA, y transformaciones de conversión y tratamiento)*

Algunos alumnos se paran a preguntar si hicieron bien el ejercicio, la profesora los corrige.

Profesora: Una x más una x son $2x$ no x^2

(Los alumnos que están al frente se ayudan entre sí).

Profesora: Hay que buscar los que son parecidos, si tiene esto arriba (x^2) no son. (RRVL y RRA)

Se amplió la explicación y se dio mayor intervención RRVL para afianzar el aprendizaje. Algunas condiciones se explicitaron verbalmente a fin de lograr una mayor comprensión, no se realizó. Por ejemplo, lo referente a suma de términos con expresiones potenciales semejantes, o las propiedades de la suma y la potenciación.

> La profesora vuelve a repetir la corrección para el resto de la clase
> Profesora: Si hago x por x es x^2, si sumo x más x son $2x$. (RRA y RRVL)
> Resalta los términos semejantes en el ejercicio y resuelve (RRA):
>
> $$\frac{1+x}{x^2-1}+\frac{5x^2+x}{x^2-1}-\frac{4x^2}{x^2-1}=\frac{1+x+5x^2+x-4x^2}{x^2-1}=\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$$
>
> Recuerda que en la suma y en la resta no se puede simplificar, en el ejercicio anterior sí porque el 8 multiplicaba a la x^3 y el 12 a la x^2 (RRVL y RRA).

Al explicar un nuevo ejercicio se utilizó el RRVL oral y el RRA para referenciar los procedimientos a seguir. La profesora interactuó con los alumnos preguntando específicamente aspectos del contenido matemático, realizó transposición didáctica introduciendo terminología matemática, y reafirmó los conceptos en el lenguaje cotidiano.

> Continúa con ejercicios de distinto denominador, explica que primero deben factorizar (RRVL y RRA con transformaciones de tratamiento):
> Profesora: Como primer paso traten de factorizar lo que puedan, en la primera expresión ¿Qué caso puedo aplicar?
> Alumno: En el numerador imposible porque tengo 1, ¿en el denominador?
> Profesora: Factor común.
> Alumno: ¿Cuál?
> Profesora: Dos.
> Explica como extraer el factor común y señala con una llave lo realizado; de la misma manera lo hace para el segundo término (RRVL, RRA, y RGr):
>
> $$\underbrace{\frac{1}{2x-2}}+\underbrace{\frac{2}{x^2-1}}-\frac{x}{x+1}=$$
>
> Indica que en el primer denominador se aplica factor común, que en el segundo corresponde diferencia de cuadrados, y que en el tercer denominador no se puede

porque es suma. Mediante las expresiones "F.C" y, "D.C" deja escrito debajo de cada llave dibujada el tipo de factoreo. (RRVL)
Seguidamente aplica factoreo y lo anota en el pizarrón. (RRA)

$$(2x-2) = 2(x-1) \quad x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

Para el segundo denominador explica la equivalencia de las bases cuadráticas a las expresiones que a continuación escribió, y vinculó a la aplicación de la diferencia de cuadrados. (RRVL y RRA)

$$\sqrt{x^2} = x \quad \sqrt{1} = 1$$

La profesora asoció cada base al término correspondiente de la diferencia de cuadrados mediante flechas. (RRVL y RGr)
Profesora: ¿Qué puedo aplicar en la segunda expresión fraccionaria algebraica?, en el 2 obviamente que no, ¿Y en el (x^2-1)? (RRVL y RRA)
Alumnos: Diferencia de cuadrados
Profesora: Si son dos términos cuadráticos y es una resta aplico diferencia de cuadrados, tomo las dos raíces extraídas y lo escribo como la suma por la diferencia. (RRVL)

Se observó nuevamente que la docente introdujo terminología matemática, y reafirmó los conceptos en el lenguaje verbal natural.

Continúa con el tercer término preguntando a los alumnos:
Profesora: ¿Puedo simplificar algo?
Alumnos: Sí, la x.
Profesora: No, porque está sumando con el uno.
Escribe y nombra los términos factorizados, luego resuelve el ejercicio recordando los pasos (RRA y RRVL):

$$\frac{1}{2(x-1)} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x}{x+1} = \frac{1(x+1)+4-2x(x-1)}{2(x+1)(x-1)}$$

Profesora: Cuando tienen distinto denominador, factorizo y escribo cada polinomio por el polinomio obtenido al factorizar. Sacamos común denominador, ¿cuál va a ser el común denominador? Lo común y lo no común... (RRVL).
Alumnos: $2(x\text{-}1)$

Profesora: El 2 es no común por $(x\text{-}1)$, acá tengo $(x\text{-}1)$ por $(x+1)$, $(x\text{-}1)$ ya lo puse entonces pongo $(x+1)$ y el $(x+1)$ también se repite así que ese va a ser el común denominador. Lo común y lo no común. (RRA y RRVL)
Comienza a dividir con la participación de los alumnos:
Profesora: Todo esto dividido, me queda lo no común, por uno queda igual, más todo esto dividido, esto me queda... (RRA y RRVL (lengua natural)).

Cuando los estudiantes dudaron de la explicación, la profesora revisó sintéticamente los pasos y explicó la dificultad utilizando RRVL y RRA.

Una alumna interrumpe diciendo que no entiende como hace la división, la profesora explica la división como una fracción, la escribe por separado (RRVL, RRA, RRN):

$$\frac{2(x-1)(x+1)}{2(x-1)} = x+1$$

Profesora: Vamos a escribir la división como una fracción porque la raya de fracción indica división. ¿Puedo simplificar algo? (RRVL)
Alumnos: Sí, el $2(x\text{-}1)$.
Profesora: Me quedaría el $(x+1)$, entonces siempre que divido algo con otra cosa el resultado de esa división es lo que no es común, porque 2 dividido 2 es 1, $(x\text{-}1)$ dividido $(x\text{-}1)$ también es uno y $(x+1)$ es lo que me sobra. (RRA, RRVL)
Continúa con la explicación del ejercicio y termina de resolverlo.

$$\frac{1}{2(x-1)} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x}{x+1} =$$

$$\frac{1(x+1)+4-2x(x-1)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{x+1+4-2x^2+2x}{2(x+1)(x-1)} = \frac{-2x^2+3x+5}{2(x+1)(x-1)}$$

En ese paso, que no fue representado algebraicamente, pudo conducir a un error al no realizar la conversión de registros. Luego, las decisiones didácticas se destinaron a proporcionar una técnica diferente y se intentó explicar de nuevo el procedimiento, lo cual facilitó la comprensión.

4. DISCUSIÓN

La TRRS, permite afirmar que, en Enseñanza de la Matemática, la actividad utilizada para el tratamiento y la conversión entre diferentes sistemas representacionales tiene gran importancia. Las transformaciones incorporan las bases de la conceptualización y la comprensión matemática, con el valor adicional de que los contextos de representación utilizados son semióticos; así el procesamiento matemático implica siempre una transformación de representaciones.

El contenido de cada representación no depende únicamente de los objetos representados, sino también del tipo de *RS* utilizado con intenciones didácticas. Se observó, en ambos grupos, que utilizaron básicamente RRA y RRVL de manera prevalente, y otras modalidades en la representación semiótica como lo es la gráfica, con flechas, y llaves, pero, al igual que la numérica, se presentan con menor frecuencia. En el primero de ellos, el RRVL adoptó formas verbales cotidianas con escasos elementos de contenidos terminológicos específicos, y conceptuales. En el segundo, se combinaron ambos *registros,* con una mayor presencia de elementos lingüísticos matemáticos, lo que permitió tanto conversiones como tratamiento de los mismos de manera eficiente.

Se observó que en el primer grupo hubo poca interacción por parte de los alumnos, estos tenían dificultades en la resolución de los ejercicios, no podían vincularlos con otros temas y las intervenciones de la docente eran correctivas, pero no se ampliaban conceptos matemáticos. En el segundo grupo, se observó participación de los alumnos espontáneamente, guiada por la profesora mediante preguntas y explicaciones que se formularon frecuentemente durante el desarrollo de la clase. En el caso de errores cometidos por los estudiantes, estos eran aclarados en vinculación con otros conceptos matemáticos, por lo que se permitió una retroalimentación de articulación entre el RRA y RRVL. La presencia de más formatos representacionales (verbal, algebraico, y gráfico, como es el caso del apunte de ayuda memoria escrito que entregó la docente), y los modos de relacionar las diferentes maneras de representar los mismos objetos, contribuyó a la conceptualización y comprensión por parte de los estudiantes.

Se puede afirmar, en coincidencia con la descripción de la TRRS, que la enseñanza de un determinado objeto matemático debe producirse apelando a distintos sistemas de RS, puesto que el primer paso para la comprensión es que se produzca una coordinación interna entre los diferentes sistemas de representación disponibles, como se ha señalado en el marco teórico.

Cabría la posibilidad de plantear la idea que indicaría que, si el alumno es conducido a conocer solamente un tipo de registro, difícilmente lo comprendería y aplicaría a otros contextos o registros. La vinculación con conocimientos previos y su correcta aplicación deberían llevarnos a la pregunta respecto de si ello requiere de la guía docente, con constantes intervenciones aclaratorias, recordatorias o ampliatorias del concepto o campo de aplicación, lo cual equivaldría a una expansión máxima del RRVL en su función semiótica articular de otros registros.

Para la Enseñanza de las Expresiones Algebraicas Racionales, sería indispensable que los docentes trabajen con aclaraciones en los pasos de procedimientos, escritura algebraica específica, tanto en RRVL (orales o escritos), como RRA. Lo antes dicho se infiere del análisis de las prácticas de las profesoras entrevistadas. De esta manera se posibilita que objetos del sistema antiguo de signos de los estudiantes, es decir, conocimientos constituidos en prerrequisitos de aprendizaje, no representen dificultades, sino que, por el contrario, posibiliten adquisición de nuevos contenidos de aprendizaje. No se debería apresurar el aprendizaje de un nuevo objeto matemático ya que los tiempos de aplicación de los registros, su tratamiento y conversión, en expansión lingüística, servirían para incorporar el nuevo concepto o conocimiento a estructuras cognitivas.

En ambos grupos de investigación, de acuerdo a los datos presentados, se observaron pocas transformaciones, del tipo *conversión*; sí hubo *tratamientos*, en el caso del RRA, tanto por parte de los alumnos como de las docentes. Los profesores no deben olvidar las restricciones de los RS acorde a la abstracción y generalidad de los conceptos didácticos y matemáticos. En particular, ante el tema Expresiones Algebraicas Racionales fue conveniente comenzar con ejemplos sencillos, para luego aplicar procedimientos y técnicas vistas con anterioridad como, por ejemplo, los casos de factoreo. Este aspecto fue planteado por la segunda docente con mayor detalle, quien además vinculó conceptos con un cuadro que contenía el mismo objeto matemático expresado en diferentes RS.

El error didáctico y las dificultades de aprendizaje significarían, a la luz de los elementos considerados de la TRRS, deficiencias en las elecciones de registros que los docentes efectúan y en las actividades matemáticas registrales que los estudiantes desarrollan para acrecentar la potencialidad representacional en la construcción de los objetos y conceptos matemáticos. De tal manera, un profesor convencional, para subsanar el error, no admitiría, contrariamente al posicionamiento de un profesor moderno, la necesidad de introducir mejoras en las secuencias y acciones registrales mediante las cuales ellos enseñan y los alumnos aprenden.

5. CONCLUSIÓN

De lo analizado resultaría particularmente importante fundamentar la enseñanza de expresiones algebraicas racionales teniendo en cuenta el ordenamiento de los distintos RS de la clase. Se ha visto que es preciso propiciar la expansión del RRVL, es decir realizar el máximo posible de intervenciones orales o escritas considerando que la utilización del mismo podría ser, en el enfoque conceptual de la TRRS, el medio no solo de comunicación y ampliación de conocimientos sino también de incorporación cognitiva de conocimientos matemáticos.

Presentar en una jerarquía registral adecuada en un ordenamiento didáctico particular de diferentes RS implicaría expresar por ejemplo de forma oral ese contenido matemático escolar a enseñar (RRVL disciplinar), para traducir lo dicho en términos coloquiales luego en lenguaje matemático (RRA). De acuerdo a lo observado, esta secuencia de registros admitiría una organización más eficaz del conocimiento matemático (lo cual pudo verse en el segundo caso analizado), facilitando la representación de situaciones complejas de modo preciso, formal y comprensible en esa articulación registral.

Resultaría, de acuerdo a deducciones obtenidas en la investigación realizada (aceptando que los resultados de la misma no son generalizables), recomendable que, por ejemplo, mientras un docente enseña tales contenidos, expanda coloquialmente mediante palabras claves o aclaratorias aquello que escribe en forma algebraica en el pizarrón, o en el soporte compartido por la clase, y genere así un entorno lingüístico extendido para definir y verificar los sentidos que se asignan a tales definiciones. Ampliar dicho registro serviría no solo de ayuda memoria a los estudiantes sino también de recuperación de significados y antecedentes cognitivos para continuar aprendiendo.

En ambos grupos de observaciones se propuso desarrollar el mismo tema con idénticas técnicas e idénticos registros. En la primera clase observada se presentó la actividad matemática con predominio de RRA, mediante un ejemplo; después una breve explicación empleando el registro lingüístico y, por último, se resolvió el ejercicio propuesto con nuevo predominio de RRA. En un primer momento los estudiantes no comprendieron la situación y luego no comprendieron los procedimientos aplicados para la resolución. También se evidenció que faltaron elementos discursivos al representar los objetos matemáticos y las operaciones con ellos. En la segunda clase observada, la docente comenzó recordando la clase anterior de forma oral, explicó ejemplos sencillos de manera algebraica, asistiendo permanentemente la enseñanza mediante RRVL, plasmó los pasos realizados tanto en

RRA como en RRVL en el pizarrón y luego volvió a recordar todos los procedimientos de forma oral, lo que llevó a un mejor entendimiento por parte de los alumnos y a una interacción en la construcción del conocimiento.

Se concluye que es posible que, el ordenamiento en que se presentaron distintos RS en la enseñanza de expresiones algebraicas racionales, influiría en la mejora de los aprendizajes de tales contenidos (aun trabajando solamente con dos sistemas de representación y su combinación), comenzando siempre por el RRVL conceptual, seguidamente del RRA, con una constante coordinación entre RRVL y RRA, mientras se procura aumentar al máximo el número de explicaciones (RRVL) al implementar diferentes registros. Tal articulación favoreció la *conversión* y el proceso de construcción didáctica del objeto matemático enseñado.

No fue posible localizar una gran diversidad de registros, y ello quizás responda especialmente al tipo de contenido. Por tanto, tampoco fue posible poner en evidencia de qué manera se desarrollaría la enseñanza del contenido si se utilizara una mayor diversidad de RS.

Se sugiere investigar la enseñanza de expresiones algebraicas racionales, su tratamiento dentro de un mismo registro, y conversiones de RS, donde se otorgue mayor importancia a la producción de diferentes formatos de representación fortalecidos por la presencia representacional de RRVL en su calidad semiótico-articular en acciones de docentes al enseñar y de estudiantes al aprender.

En tales análisis el RRVL, debería estar presente a lo largo de todo el desarrollo del contenido para trabajar a partir de la hipótesis de que el RRVL posibilita ampliar, completar y articular conocimientos como nexo vinculante de los demás *registros,* puesto que, como se dijo, el trabajo con objetos abstractos del pensamiento matemático depende del lenguaje y de otros *sistemas de representación semiótica*, cuya principal dificultad sería la de adquirir la habilidad para cambiar de un RS a otro.

Desde este trabajo se obtuvo información acerca de la vinculación entre RS y errores didácticos. Sería posible vincular estos últimos a vacancias de RRVL en la brecha entre los diferentes sistemas de representación utilizados para la enseñanza de la matemática escolar. Ello requeriría ser enfatizado en los objetivos de investigaciones posteriores que mejor lo confirmen.

Se puede concluir parcialmente que, los errores didácticos (decisiones y opciones didácticas), tendrían una base causal en la disminución de la presencia de RRVL como vínculo inter-representacional, lo cual acordaría también, en que la expansión de las posibilidades registrales previstas por las docentes aumentaría el potencial de las propuestas didácticas para su comprensión.

Se recomienda continuar en dichas líneas de investigación para colaborar con el desarrollo de una didáctica específica sobre determinados contenidos curriculares matemáticos, en general, y en particular de la Didáctica del Álgebra, en los cuales se puedan incorporar diferentes RS y secuenciar un orden que favorezca el aprendizaje, por ejemplo, en programación lineal, ecuaciones, y funciones, donde se podría proponer una actividad con otros tipos de RS además del RRA y RRVL, como lo serían el RRGr y el RRT.

REFERENCIAS

Aponte Rodríguez, H. (2016). *Coordinación de Registros Semióticos en la Presentación de la Periodicidad, el Acotamiento y la Conversión de Unidades de las Funciones Trigonométricas Seno y Coseno. Análisis de Texto.* (Trabajo de Grado. Universidad del Valle). http://funes.uniandes.edu.co/11036/

Blumer, H. (1982). *El Interaccionismo Simbólico: perspectiva y método.* Hora S. A.

Bohorquez, H., Franchi Boscán, L., Hernández, A. I., Salcedo, S., y Morán, R. (2009). La concepción de la simetría en estudiantes como un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la geometría. *Revista Educere, 13*(45), 165-198.

Brousseau, G. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathematics.*

Brousseau, G. (1983). Obstacles épistémologiques et les problémes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198

D'Amore, B. (2004). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. *Revista de la ASOVEMAT, 17*(1), 1-20.

D'Amore, B., y Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10*(2), 191-218. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362007000200002&lng=es&tlng=es.

D'Amore, B., y Godino, J. (2007). El Enfoque Ontosemiótico como un Desarrollo de la Teoría Antropológica en Didáctica de la Matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10*(2), 191-218. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362007000200002&lng=es&tlng=es.

D'Amore, B. (2009). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noéticas: Interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Científica.* (11), 150–164. https://doi.org/10.14483/23448350.419

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Grupo de Educación Matemática. Universidad del Valle.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Instituto de Educación Pedagógica. Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matematica Española, 9*(1), 143-168.

Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Traducción al español por Myriam Vega Restrepo, de *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. 2ª Edición. Programa Editorial Universidad del Valle.

Duval, R., y Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas*. Énfasis. Universidad del Valle. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Universidad Pedagógica Nacional. Doctorado Interinstitucional en Educación.

Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S., y Hecklein, M. (2015). *Los errores en el aprendizaje de matemática*. Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral.

Gazzola, M. P., Llanos, V., y Otero, M. (2011). *Funciones racionales en la Secundaria. Primeros resultados de una actividad de estudio e investigación*. Tandil. Actas del I CIECyM, II ENEM.

Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., y Gorrochategui, M. (2011). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria, 1*(13), 29-36. https://doi.org/10.14409/au.v1i13.4112

Rico, L. (1997). Reivindicación del error en el aprendizaje de las matemática. *Revista Épsilon*, 38, 185-198.

Ramírez Sandoval, O., Romero Félix, C. F., y Oktaç, A. (2013). *Coordinación de registros semióticos y las transformaciones en el plano*. I OCEMACYC.

Sara, A., Scardigli, M., Pustilnik, I., Cittadini, G., y Pano, C. O. (2006). *Errores recurrentes en el aprendizaje del álgebra lineal y registros de representación semiótica*. XIII Jornadas de Investigación y Segundo Encuentro de Investigadores en Psicología del Mercosur. Facultad de Psicología - Universidad de Buenos Aires. https://www.aacademica.org/000-039/319

Eugenio Ariel Valiero

Dirección: Colón N.° 326, CP 2840 (Gualeguya, Entre Ríos, Argentina)

Teléfono: +54 9 3444 57-1226.

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN DOI: 10.24844/EM3302.08

Los gestos, una manera de comunicar matemática: el caso particular de las funciones

Gestures as a way to communicate mathematics: The particular case of functions

Luis Sandoval-Troncoso[1]
Carlos Ledezma[2]

Resumen: En este artículo se presenta un estudio del abordaje de las funciones, cuyo foco se centró en la actividad gestual, y que se llevó a cabo con estudiantes de una universidad chilena que cursaban la asignatura de Cálculo I. Como referentes teóricos, se consideraron la Teoría de la Objetivación y la Teoría Comognitiva. Los resultados obtenidos, mostraron la relevancia del *discurso* que se produce mediante los gestos en la actividad colectiva, aportando a la generación y aparición de elementos matemáticos claves del objeto función de variable real, constituyéndose el gesto como motor impulsor del *discurso matemático* del sistema semiótico de significación cultural. Además, el estudio evidenció como factor importante la ruptura del *discurso* tradicional de la enseñanza de la matemática a nivel universitario.

Palabras clave: *actividad gestual, discurso matemático, función de variable real, Teoría Comognitiva, Teoría de la Objetivación.*

Fecha de recepción: 09 de enero de 2020. **Fecha de aceptación:** 02 de marzo de 2021.

[1] Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera, Chile, luis.sandoval@ufrontera.cl, orcid.org/0000-0003-2844-5661

[2] Departamento de Educación Lingüística y Literaria y de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática, Universitat de Barcelona, España, cledezar25@alumnes.ub.edu, orcid.org/0000-0001-9274-7619

Abstract: This paper presents a study on the approach to functions, whose focus was on gestural activity, and which was carried out with students from a Chilean university who were studying Calculus I. Theory of Objectivation and Comognitive Theory were considered as theoretical referents. The results obtained showed the relevance of the *discourse* that is produced through gestures in the collective activity, contributing to the generation and emergence of key mathematical elements of the object function of real variable. In this context, gesture was the driving force behind the *mathematical discourse* of the semiotic system of cultural significance. In addition, this study made evident the breakdown of the traditional *discourse* of mathematics teaching at the university level as an important factor.

Keywords: *gestural activity, mathematical discourse, function of real variable, Comognitive Theory, Theory of Objectivation.*

1. INTRODUCCIÓN

Hoy en día, existen variadas herramientas tecnológicas en la matemática que permiten a los estudiantes obtener información en torno a una gráfica y deducir otras, producto de la visualización de estas por medio de un software. Investigaciones al respecto, como las de Artigue (2011), explican la importancia que tiene la tecnología en el aprendizaje matemático de los estudiantes, quienes dan significado y valor a la matemática a través de la interacción con la tecnología. Según Gómez-Chacón (2010), la tecnología permite la generación de ejemplos y representa una ayuda en la elaboración de demostraciones, conectando lo geométrico con lo algebraico. Otros, como Gamboa (2007), indican que su aporte en la matemática va en dirección a que el estudiante justifique sus respuestas de una manera más formal.

Sin embargo, además de la tecnología, existen otros factores que también generarían oportunidades de aprendizaje de la matemática, especialmente a nivel universitario, cuya enseñanza se centra principalmente en el álgebra. Es por ello que esta propuesta permite romper este esquema con las oportunidades que podría dar el uso de la corporalidad como un nuevo ambiente de trabajo matemático en el aula, lo que estaría relacionado con lo propuesto por Radford (2006a, 2010), y que contempla acciones como los gestos, el lenguaje y los

símbolos. Ejemplo de ello se encuentra en Arzarello *et al.*, (2009), quienes amplían los *enfoques semióticos clásicos* a través de lo que denominan *paquete semiótico* y *haz semiótico* que, junto a la *multimodalidad*, permiten a los estudiantes lograr comprender conceptos matemáticos de manera más efectiva. Dicha comprensión es alcanzada por los sujetos bajo este enfoque multimodal referido a gestos, concluyendo así que dichos factores "ayudan a cerrar la brecha entre la experiencia mundana y la matemática más formal" (Arzarello *et al.*, 2009, p. 98). Los autores también indican que los gestos tienen una función comunicativa, permitiendo formas alternativas de incorporar y organizar información que el estudiante no puede manifestar de manera verbal o formal.

1.1. Antecedentes

Es destacable que, esta forma de enfocar el conocimiento, ha sido abordada desde otros contextos: en lo lingüístico, lo psicológico e, inclusive, en la comunicación cotidiana (e.g. Goldin-Meadow, 2003; Kita, 2000; McNeill, 1992; 2005), y que de a poco ha sido introducida en el ambiente del aprendizaje de la matemática, donde ha evidenciado resultados positivos. Al respecto, estudios como el de Radford *et al.*, (2009), indican que, en los actos de conocimiento de los individuos, las *modalidades sensoriales* –es decir, lo táctil, lo perceptivo, lo kinestésico–, se convierten en partes integrales de los procesos cognitivos que estos desarrollan, lo que implica que la matemática es un producto poderoso y estable del ser humano.

Continuando en esta línea, existen trabajos que enfatizan las acciones corporales como una actividad clave en el aprendizaje de la matemática. Soto-Andrade (2018), por ejemplo, se refiere a que "la metáfora y la ejecución (en el sentido de actuar físicamente) desempeñan un papel clave en el aprendizaje de las matemáticas" (p. 634), cuestión que pudo concluir en una actividad realizada con matemáticos, estudiantes y profesores de matemática en una universidad chilena. En cuanto a lo *enactivo*, Varela, Thompson y Rosch (1991) indican que, en esta concepción, las duplas *conocedor* y *conocido*, y *organismo* y *medio ambiente*, coevolucionan en un proceso constante de llegar a ser. En esta perspectiva, los aportes de lo *enactivo* permitirían un aprendizaje de la matemática de modo más dinámico, haciendo de la corporalidad una herramienta potente para comunicar propiedades y/o atributos de un objeto matemático. Este hecho, hace una diferencia con la matemática tradicional de lápiz y papel,

demostrando así esa *coevolución* a la que aluden Varela *et al.* (1991). Una posibilidad que traería consigo esta concepción *enactivista* del aprendizaje, es la perdurabilidad del conocimiento en el estudiante a través del tiempo. Las acciones corporales pretenden ser un impulsor natural de un *discurso* que trasciende de lo visual o lo simbólico-algebraico, para construir un nuevo *discurso matemático*.

En concordancia a lo planteado anteriormente, se encuentran estudios que señalan que, el gesto en matemáticas y en otras formas de conocimiento, son "inseparables de las herramientas simbólicas [y esa cognición es] un fenómeno de forma cultural" (Sfard y McClain, 2002, p. 156), afirmación que abre el camino hacia lo que Radford (2006b) menciona como *sistema semiótico de significación cultural* (el cual será abordado más adelante), señalando que el gesto, como un *signo*, juega un rol protagónico en la formación de patrones en el álgebra. Así lo demuestran los trabajos de Radford (2010) llevados a cabo con estudiantes de primaria en 2009, en que la actividad con las manos, en especial de los dedos, son de gran ayuda en el aprendizaje del álgebra temprana. En cuanto a esta última cuestión, estudios como el de McNeill (1992) clasifican los gestos, dependiendo de la funcionalidad que estos cumplen, en *icónicos*, *rítmicos*, *metafóricos* o *deícticos*. En esta misma línea, Alibali *et al.*, 2019) sostienen que los maestros usan sus propios gestos para resaltar y dejar sin ambigüedades las declaraciones de los estudiantes mientras discuten una tarea, asegurando que la actividad gestual conecta el *discurso* de los sujetos con el contexto, permitiendo que dicho *discurso* sea adoptado con precisión.

Por otra parte, existen trabajos (Mancilla y Puentes, 2015; Suárez y Pietrosemolli, 2007) que, basándose en la clasificación de McNeill (1992), han abordado el tema de los gestos en contextos lingüísticos, concluyendo que, una de las cuestiones relevantes de la clasificación de gestos dentro de la acción comunicativa, es la de "distinguir las funciones que estos tienen cuando están acompañando la producción oral" (Suárez y Pietrosemolli, 2007, p. 80). Esta afirmación es una base para conseguir los objetivos de este estudio, pues se pretende evidenciar esta conexión entre gestos y habla, lo que, en consecuencia, permitirá un análisis detallado del *discurso* en esta interacción. Para precisar ideas, cuando se hace mención a las interacciones de los sujetos, se está aludiendo, básicamente, al *sistema semiótico de significación cultural* (Radford, 2006b) que se vive en el aula.

Esta investigación se centra en los gestos de un colectivo en interacción, considerando el objeto matemático función de variable real. El interés en este

contenido se justifica en su carácter de basal para los cursos de cálculo a nivel universitario, tanto dentro de los planes de estudio de las carreras de pedagogía y licenciatura en matemática, como de los de ingeniería. Amparado en ello, se pretende abordar el objeto declarado en un estudio desde el punto de vista gestual, enfatizando en su comportamiento gráfico, y enmarcado en el contexto universitario chileno.

Diversos estudios, en cuanto a la gesticulación, han sido realizados por Radford (2006b) sobre el álgebra en primaria. Sin embargo, no se han reportado muchos estudios de este tipo en la educación superior, a excepción de Arzarello *et al.* (2009), quienes dan un sentido multimodal en el trabajo de los estudiantes con derivadas y antiderivadas, donde el gesto es parte de dicha multimodalidad. Es por ello que este estudio se considera relevante y novedoso, ya que aborda una temática poco común en el aprendizaje de los estudiantes universitarios, la cual es a través de la interacción con el colectivo por medio de la actividad gestual, cuyos insumos se considerarían un avance importante en la comprensión del objeto función. Por tanto, se espera que, de acuerdo a este enfoque, tales conocimientos sean perdurables en el tiempo.

Los antecedentes mencionados, permiten modificar una clase tradicional de cálculo al momento de tratar las gráficas de funciones de variable real, razón por la cual se parte del supuesto que, por medio de las interacciones señaladas, ello posibilitaría la emergencia de propiedades y/o conceptos a través de la acción, en una actividad que busca evidenciar un cambio de *discurso*, por medio de *realizaciones* principalmente gestuales, cuando los estudiantes trabajan en forma colectiva. Con esto se pretende que el estudiante tenga un conocimiento al cual pueda acceder en los cursos posteriores, evocando situaciones que le fueron significativas a través de la acción corporal.

1.2. Preguntas y objetivos de investigación

De acuerdo a los antecedentes y a los intereses de este estudio, se han generado las siguientes preguntas de investigación: ¿cuál es el rol del gesto en el *discurso matemático* de los estudiantes en una actividad con gráficas de funciones en la educación superior?, ¿cómo se evidencia el cambio de *discurso matemático* en los estudiantes a través de una actividad gestual con gráficas de funciones? Para su concreción, se han planteado los siguientes objetivos: a)

identificar el rol del gesto en el *discurso matemático* de los estudiantes de educación superior; b) identificar los elementos del *discurso matemático* que promueven su cambio en los estudiantes.

2. MARCO CONCEPTUAL

Para llevar a cabo esta investigación, se ha recurrido a dos referentes teóricos que se complementan por tener un enfoque no-cognitivista: la Teoría de la Objetivación (Radford, 2006b) y la Teoría Comognitiva (Sfard, 2008). Ambas se centran, por una parte, en el lenguaje y en la interacción del colectivo (como se ha abordado en los trabajos de Vygotsky, 1934/1986); y por otra, en los significados de las palabras (reportado en la obra de Wittgenstein, 1921/2001).

2.1. Teoría de la Objetivación

La forma en que se analiza la interacción de los estudiantes en torno al objeto matemático función de variable real, es a través de lo que Radford (2006b) denomina Teoría de la Objetivación, cuyo foco se encuentra en el aprendizaje, y sobre el cual este autor señala que:

> No consiste en construir o reconstruir un conocimiento. Se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura. De este modo, la adquisición del saber es un proceso de elaboración activa de significados. (Radford, 2006b, p. 113)

El hecho de dar sentido a los objetos conceptuales, va también de la mano con lo que el mismo autor plantea con respecto al medio, indicando que el pensamiento es una *re-flexión* mediatizada del mundo, acorde a la forma de la actividad de los sujetos, ligada a lo histórico y a lo cultural (Radford, 2006b). Esta mediación está asociada a lo que Radford (2007) llama una *superestructura simbólica*, que es lo que conforma el *sistema semiótico de significación cultural*, y está dada, tanto por *signos* y *artefactos*, como por una reflexión en torno a ellos. Dicha reflexión, para Radford (2006b), es considerada como pensamiento, e indica que es una movilización dialéctica entre una realidad constituida histórica y culturalmente, y que es modificada por las subjetividades del individuo.

En síntesis, este primer referente del marco conceptual permitirá analizar la interacción entre los sujetos que están inmersos en la tarea mediante el *signo* gestual, evocando nociones que, probablemente, tienen de las gráficas de las funciones que han sido construidas por la cultura. Es de interés en este estudio identificar el rol del gesto en el *discurso matemático* de los estudiantes de educación superior, es decir, entender cómo es que el gesto le permite al estudiante comprender el comportamiento de una gráfica, o lo que caracteriza a una de ellas, y, por consiguiente, el efecto que produce en él abordar un objeto matemático de una manera distinta al trabajo tradicional con lápiz y papel. De este modo, el *sistema semiótico de significación cultural* será uno de los elementos importantes en el análisis de los datos recopilados en este estudio.

2.2. Teoría Comognitiva

El segundo referente considerado para este estudio es la Teoría Comognitiva (Sfard, 2008), cuyo foco se encuentra en el aprendizaje basado en las producciones de los estudiantes, las cuales son llamadas por su autora como *realizaciones*. Con este referente teórico, se pretenden identificar los elementos del *discurso matemático* que promueven su cambio en los estudiantes, a través de la caracterización del *discurso* que se da mediante esa gesticulación. Tal *discurso*, considerado como la unidad de análisis dentro de esta teoría, está caracterizado por una serie de elementos que son reconocidos como *recursos* y *productos* para el *discurso*, los cuales están basados en la *comunicación*, entendida como:

> La actividad que cuenta con una forma regular o inteligible de ser realizada colectivamente, en donde la acción *A* de un individuo es seguida por la acción *B* de otro individuo, tal que: (1) *A* pertenece a un cierto repertorio bien definido de acciones conocidas como comunicacionales, y (2) la acción *B* pertenece a un repertorio de reacciones que coinciden con *A*, esto es, acciones recurrentemente observadas en conjunción con *A*. (Sfard, 2008, p. 296)

Teniendo como base la *comunicación*, es posible definir un *discurso* en términos de lo planteado por esta teoría, como "los diferentes tipos de comunicación, o bien de comognición, que reúna a algunos individuos y excluya a otros" (Sfard, 2008, p. 91). El término *comognición* proviene de la conjunción de dos

procesos: el de comunicación y el de cognición, y es lo que da nombre a esta teoría (Sfard, 2008).

Las *realizaciones* a las que se hizo mención anteriormente, se clasifican de acuerdo a la forma en que se presentan en el *discurso matemático*, tal como se aprecia en la figura 1.

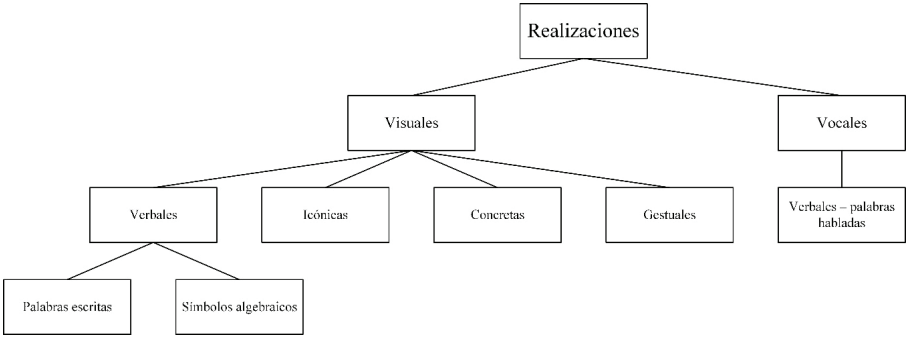


Figura 1. Diferentes tipos (modalidades) de *realizaciones* en el *discurso matemático*. Adaptado y traducido desde Sfard (2008, p. 155).

Se destaca el hecho que, lo concreto y lo gestual, trasciende de lo puramente visual-semiótico, pues es también *enactivo-kinestésico*. Esta idea se basa tanto en los estudios de Varela *et al.* (1991) como de Soto-Andrade (2018) y, en términos de este estudio, el factor *enactivo-kinestésico* se considera como un complemento a las *realizaciones* señaladas por Sfard (2008), quien sólo hace énfasis en lo netamente visual-semiótico.

En cuanto a los elementos que conforman al *discurso matemático*, se encuentran los *recursos* (*palabras claves* y *mediadores*) y los *productos* (*rutinas* y *narrativas validadas*), los que se describen a continuación, en términos de Sfard (2008):

- *Palabras claves*: una de las características distintivas del *discurso matemático* son las *palabras claves* que éste usa, y que dicen relación con lo que el sujeto ve en el mundo.
- *Mediadores visuales*: corresponden a objetos visibles que son operados como parte del proceso de comunicación. Los *discursos* científicos y matemáticos involucran a menudo artefactos simbólicos, creados

especialmente para un tipo de comunicación particular, como las notaciones matemáticas.

- *Narrativas*: son cualquier secuencia de expresiones que describe objetos, relaciones entre ellos, o de procesos con o por objetos, sujetos a aprobación o rechazo a través de fundamentos específicos del *discurso*. Las *narrativas validadas*, generalmente, se etiquetan de verdaderas. Los criterios de validación pueden variar de un *discurso* a otro. En matemática, las *narrativas validadas* por consenso, son aquellas que se conocen por construcciones discursivas, como definiciones, demostraciones y teoremas.
- *Rutinas*: son patrones característicos del *discurso* dado, que corresponden a regularidades matemáticas, las cuales son observadas a través de las *palabras claves* o de los *mediadores*, para crear y corroborar *narrativas* numéricas o formas geométricas.

Sfard (2008) establece que no existen fronteras entre los elementos recién mencionados, por lo que, la aparición de cualquiera de éstos, ya es condición para hablar de *discurso*, tanto del tipo *inter-* como *intrapersonal*. No obstante, dependiendo de la comunidad, es que se hacen presentes una o más de estas características del *discurso*. A modo de ejemplo, en una comunidad de físicos se pueden evidenciar ciertas características, que no estarán presentes en una de matemáticos o de músicos, pues cada colectivo tiene *recursos* y *productos* que les son propios como comunidad. En matemática es posible, por ejemplo, que uno de los *productos* del *discurso* sea una demostración para validar cierta aseveración dada por una comunidad de matemáticos; en otras disciplinas, por el contrario, bastará con una experimentación concreta, lo que podría ser una validación suficiente para dicha comunidad.

Para efectos de este estudio, el análisis comognitivo entregará pistas para acceder tanto a los *recursos* como a los *productos* de los *discursos* y, de esta forma, se pretende evidenciar que la gesticulación es el motor del desarrollo del *discurso matemático* del estudiante. El hecho de abordar la Teoría Comognitiva (Sfard, 2008) y la Teoría de la Objetivación (Radford 2006b) en este trabajo, radica en que tienen como elemento en común las *realizaciones* a las que alude Sfard (2008) y que, en palabras de Radford (2006b, 2007), se refieren a un *signo*, el que, para este caso, es una acción corporal llamada *gesto*. Ahora bien, la diferencia entre ambos referentes es, primeramente, la especificidad que la Teoría Comognitiva entrega en cuanto a los *signos*, entendidos como *realizaciones* para Sfard (2008), lo que hace más detallado el análisis didáctico,

permitiendo describir de forma amplia el *sistema semiótico de significación cultural*, del cual habla Radford (2006b), en que conviven e interpretan los individuos en el mundo. En este sentido, se habla del mundo en el cual los estudiantes conviven con la matemática en la práctica habitual, pero ahora, a través de los gestos. Siendo así, la Teoría Comognitiva da un sustento a aquel *sistema semiótico de significación cultural* de manera más sólida, dejando en evidencia los elementos del *discurso* como *signo* específico, lo que a su vez permite un análisis mucho más detallado de la actividad realizada por los individuos.

3. METODOLOGÍA

Este estudio se inscribe bajo un paradigma cualitativo, y se ha empleado la metodología del Estudio de Casos (Stake, 1995), pues interesa, en primer lugar, identificar el rol del gesto en el *discurso matemático* de los estudiantes de educación superior, para así poder identificar los elementos de este *discurso* que promueven su cambio en los estudiantes. Desde la perspectiva matemática, el comportamiento de las funciones y sus propiedades son analizados bajo la mirada del cálculo diferencial, mientras que el cálculo de áreas entre curvas, es abordado por el cálculo integral. Para este último, se requiere de un conocimiento adecuado, tanto de las gráficas de las funciones, indicando cortes con los ejes e intersecciones de las curvas involucradas, como de sus propiedades, las que son imprescindibles para el estudio de las series. Por ello es que, para esta propuesta, se utilizan funciones habituales dentro de los cursos de cálculo diferencial e integral de una variable, así como en los de precálculo o de fundamentos de la matemática, a saber, funciones polinómicas, trigonométricas, entre otras.

3.1. Participantes

Los sujetos a los cuales se aplicó esta propuesta son estudiantes (entre 18 y 21 años de edad) que pertenecen a las carreras de Ingeniería Química Industrial e Ingeniería Bioquímica en una universidad chilena. Los sujetos se encontraban cursando la asignatura de Cálculo I, en un curso conformado por 30 alumnos, de los cuales, 8 participaron voluntariamente de la actividad (rotulados desde E1 hasta E8), organizándose en parejas para desarrollarla.

3.2. La propuesta

La actividad propuesta consistió en que los estudiantes representaran diversas funciones a través de gestos. El registro en video de la actividad fue realizado por los mismos estudiantes, ello para propiciar una mayor confianza, fluidez y naturalidad en sus acciones. La elección de estas funciones era decisión de cada grupo, aunque se les indicó que fuera lo más variada posible.

La implementación de la actividad se llevó a cabo durante dos sesiones del curso, con una duración de 90 minutos cada una, pero sin la presencia del docente en la sala de clases, ello para contribuir a la espontaneidad de la actividad durante la ejecución de la misma. Además, se les indicó a los estudiantes que podían usar cualquier tipo de objeto concreto si lo consideraban pertinente. Al término de la semana de clases, se pidió a los participantes que entregaran al docente su edición de video.

3.3. Técnicas y categorías de análisis

Como el interés de este estudio se centra en las interpretaciones que realizan los estudiantes en torno a la actividad gestual, se registraron en video sus intervenciones para analizar tanto las gesticulaciones que los sujetos realizan como el diálogo que se genera entre ellos. Por tanto, las unidades de análisis de esta investigación son: el *sistema semiótico de significación cultural* y el *discurso matemático*. El primero es entendido, en términos de esta investigación, como la cultura en el aula de matemática bajo la visión del *signo* gesto, es decir, vivir la matemática con la corporalidad a disposición del individuo que quiere comunicar alguna propiedad y/o conceptualización del objeto matemático en cuestión. El segundo, por su parte, es entendido en este estudio como la comunicación en el colectivo a través de diversas *realizaciones* que permiten develar la interacción de los individuos (estudiantes) con la matemática (funciones de variable real) a través de lo *visual* y lo *gestual*, permitiendo conocer –por parte del investigador– aquellas *realizaciones* que priman en este interactuar.

Para analizar los resultados, se han propuesto las siguientes categorías de análisis:

- Una primera categoría centrada en el *sistema semiótico de significación cultural*, en que se evalúa el trabajo en el colectivo bajo la interpretación

de los investigadores, analizando si estas parejas de estudiantes dan sentido a los objetos abstractos, más en concreto, cómo las parejas son capaces de mostrar una propiedad, concepto o comportamiento de una gráfica.
- Una segunda categoría centrada en el *discurso matemático*, específicamente, en el tipo de *realizaciones* (ver figura 1) que privilegian los estudiantes para dar significado matemático y comunicar dicho significado al otro, permitiendo así discriminar entre una *realización* y otra.

4. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

En este apartado se analiza la actividad didáctica implementada, presentando, además, algunas capturas de video que se consideran como relevantes, pues evidencian el trabajo colectivo y la comunicación que se establece entre los estudiantes. De estas producciones se caracterizan las *realizaciones* de los sujetos, las que son posibles evidenciar tanto en forma *visual* como *vocal*. Sobre esto último, es posible evidenciar las *realizaciones vocales* a través de la transcripción de algunos diálogos relevantes, donde se indican entre corchetes [...] las acciones corporales de los sujetos, y en cursivas lo que enuncian verbalmente.

En el caso de las estudiantes E1 y E2, la forma de dar información sobre la gráfica de funciones, fue a través de una *realización visual* y *vocal*, caracterizada por gestos y palabras habladas. Dentro de las *realizaciones visuales*, se destacan las *realizaciones verbales escritas* por medio de los símbolos algebraicos, los que fueron escritos como una lista en la pizarra con anterioridad, que incluye funciones polinomiales, trigonométricas y exponenciales. La estudiante E1 es quien gesticula, y procede con una *realización icónica* para mostrar a E2 la gráfica a la que se está refiriendo. En esta lista –considerada como una *realización simbólica algebraica*– se encuentra la función a la que E1 se refiere con el movimiento de sus brazos (ver figura 2). El siguiente diálogo se desarrolló entre las estudiantes:

E1: [alza los brazos, cada uno formando una especie de recta inclinada].
E2: ¡Ah!, la función valor absoluto.
E1: [marca en el listado de la pizarra, la función que indicó E2, $y = |x|$].

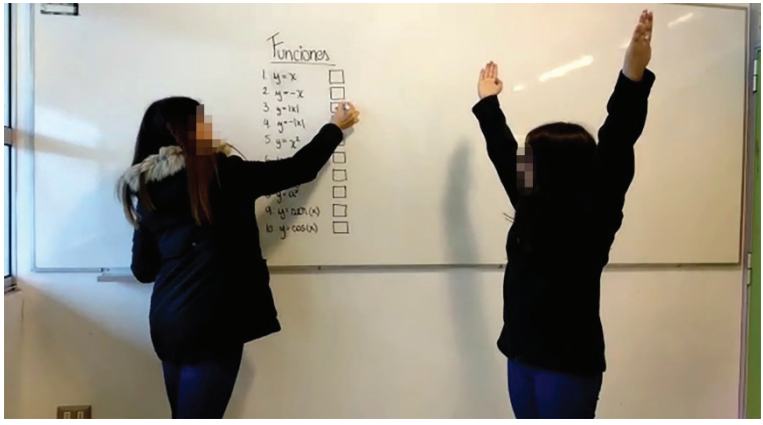


Figura 2. Realización de E1 y E2.

En el caso de los estudiantes E3 y E4, el registro en video evidencia *realizaciones visuales* y también *vocales*. E3 es quien gesticula y E4 dice oralmente a qué función corresponde. Las *realizaciones visuales* se inclinan hacia la evocación de lo *icónico* por medio de E3, quien muestra de forma corporizada la gráfica de la función que desea que identifique E4. En un momento dado, E3 describe una función que no es visualizada de forma clara por E4. A pesar de que E4 no hace declaraciones con respecto a alguna función, su silencio ante las gesticulaciones de E3 hace que este último detalle en ella, dando más información para que sus gestos sean comprendidos por E4. La información adicional está relacionada con datos que involucran un sistema de referencia, como se detalla a continuación:

> E3: [muestra el sistema de ejes XY, de manera corporizada, indicando con los dedos dichos ejes, y mostrando que parte desde el origen].
> E3: [procede con sus brazos a gestualizar el movimiento que describe la curva de la función, indicando que esta se mueve desde el origen hacia la derecha del sistema de coordenadas XY].
> E4: ¡Ya sé!, la función raíz cuadrada.

A diferencia del grupo formado por E1 y E2, los gestos realizados por E3 y E4, son llevados a cabo de manera más activa, pues estos estudiantes evidenciaron un *discurso matemático* más evolucionado, el cual muestra más elementos de la matemática que son corporizados, como los ejes X e Y, y el origen (o punto

de referencia) a partir de dichos ejes, por lo que, de esta forma, se promueve aún más el movimiento del cuerpo para describir el objeto. Es así como se puede evidenciar que E3 se indica a sí mismo (ver figura 3, izquierda) para señalar desde dónde parte la gráfica de la función, y qué movimiento describe (ver figura 3, derecha), a saber, su brazo extendido indica el eje X, lo cual se hace evidente para E4 quien, de acuerdo a lo que muestra el video, se encuentra sentado observando los gestos que produce E3, e indica oralmente que es la función raíz.

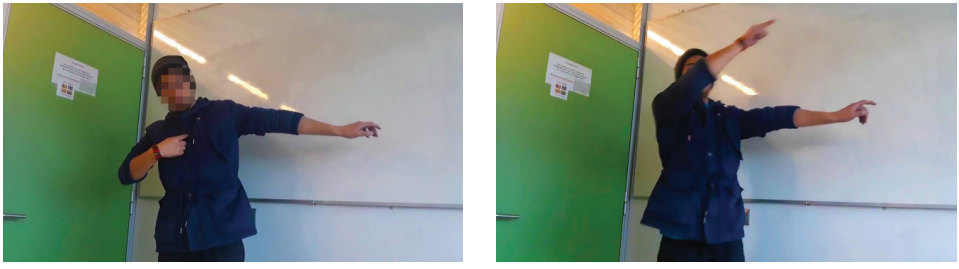


Figura 3. *Realización* de E3.

En el caso de los estudiantes E5 y E6, se evidencian *realizaciones visuales* y *vocales* de funciones trigonométricas. En una primera instancia, el estudiante E5 realiza la gesticulación, mientras que E6 responde oralmente a qué función se refiere E5:

E5: [gesticula con sus brazos una función en forma de onda].
E6: Es la función coseno.
E5: [indica con la cabeza que no].
E6: Es el seno.

Se debe destacar la importancia del cuerpo de E5 (véase figura 4) para que E6 diga que es la función seno, pues la cabeza de E5 toma el rol de ser el eje Y, mientras que los brazos corresponden a las ramas de la función en cuestión. Tal vez, esa situación confundió a E6 entre las funciones coseno y seno, para decir finalmente que esta última correspondía a la gesticulada por E5, lo cual nos sugiere que el sistema de ejes cartesianos se torna relevante en la representación de la función en cuestión.

Figura 4. Realización de E5.

En una segunda instancia, se invierten los roles y es el turno de la estudiante E6 en mostrar su gesticulación (véase figura 5):

E5: Es el seno... ino, perdón!, es el coseno.

Nuevamente, el eje Y es el elemento que dirige la respuesta a la gesticulación realizada. Es destacable el hecho de que, tanto en las *realizaciones* de E3 y E4 como de E5 y E6, los ejes coordenados toman gran importancia para quien visualiza la gesticulación.

Figura 5. Realización de E6.

En el siguiente caso, se destaca una *realización visual* y *vocal*, con palabras que van describiendo la gesticulación de una función. La estudiante E7 está atenta a las descripciones que hace E8, quien también indica el orden de las palabras que se necesitan para la descripción de la función. La siguiente transcripción de diálogo describe la situación entre ambos estudiantes:

E8: [mueve sus brazos y manos en forma de ondas, repitiendo la acción hacia los lados].
E7: Eh, función trigonométrica.
E8: [continúa moviendo los brazos hacia los lados, espera algo más de E7].
E7: Se repite... periódica.
E8: [levanta sus dedos pulgares, indicando que es correcto].
E8: [levanta el dedo índice].
E7: Ah, primera palabra.
E8: [desliza su mano indicando una inclinación, de arriba hacia abajo] (véase figura 6, izquierda).
E7: Ya... intersección.
E8: [levanta el dedo índice, apuntando al eje Y] (véase figura 6, centro) [indica con sus dedos índice y medio, tanto la segunda palabra como el corte en forma Y] (véase figura 6, derecha).
E7: Ah, corta al eje Y en 1.
E8: [levanta sus dedos pulgares, indicando que es correcto].
E7: ¡Seno!
E8: [mueve sus dedos índices negativamente].
E7: Entonces, es coseno.
E8: [levanta sus dedos pulgares, indicando que es correcto].

Figura 6. Realización de E7 y E8.

Se observa en la secuencia de gestos y en el diálogo de los estudiantes E7 y E8, que la relevancia, además de los gestos, está en la palabra, cuya significación es propia del mundo de la matemática. Es decir, se genera un *discurso matemático* entre E7 y E8, que trae consigo *palabras claves*, como el término 'intersección con los ejes', acompañado del movimiento que describe la función en forma repetida, y que permite la emergencia de la *palabra clave* 'periódica'. Esta mezcla adecuada entre palabras y gestos, permitió también rescatar propiedades de las funciones trigonométricas, como lo es en el caso de $\mathbf{sen}(x)$, en la que es posible identificar una intersección con el eje Y en el punto (0,1), cuestión que es evidenciable cuando E8 indica que hubo un error por parte de E7, al declarar inicialmente que la función era $\mathbf{cos}(x)$.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados, se observa que las parejas en su mayoría responden de acuerdo a la necesidad de comunicación a través del signo *gesto*, conformando de este modo un espacio común de interacción en el aula y con la matemática, dando significado de forma colectiva y aplicando la matemática en el acto. Sobre el *discurso*, en las *realizaciones* de los grupos conformados por E3-E4, E5-E6 y E7-E8, no se privilegia la simbología algebraica escrita, lo que evidencia que las *realizaciones* de los estudiantes fueron principalmente *visuales*, del tipo *gestuales*. Ello sugiere que lo *simbólico algebraico* puede ser un factor prescindible para describir un objeto matemático. En cambio, para el grupo de las estudiantes E1-E2, la lista de funciones cobró un carácter más relevante para el desarrollo de la actividad.

Teniendo en consideración la investigación de McNeill (1992) sobre las gesticulaciones, se destaca el rol de los dedos en la actividad desarrollada por los estudiantes E7 y E8, cuando indican la cantidad de intersecciones de una función con los ejes, y la de los estudiantes E3 y E4, para indicar el punto de referencia u origen de la función raíz.

El análisis de la implementación de este estudio, mostró las diversas maneras de llevar a cabo la actividad dada a los estudiantes. Por una parte, grupos como E1-E2, se apoyaron en *realizaciones simbólicas algebraicas*, las cuales hacen notar la dependencia del recurso algebraico para reafirmar sus conocimientos asociados con la actividad gestual. Por el contrario, los demás grupos no consideran el apoyo de la simbología algebraica, centrándose en los

movimientos corporales y acentuando aún más sus gesticulaciones para la evolución del *discurso* en su par, lo cual evidencia un cambio de *discurso in situ*.

La obtención de *palabras claves* fue uno de los recursos que permitieron continuar con el *discurso* de E7 y E8, las que responden a los fenómenos gesticulados. Es así que se pone de relieve el *significado de la palabra* del cual habla Wittgenstein (1921/2001), quien alude a aspectos que trascienden la matemática formal y que tienen, por una parte, relación con una actividad contextualizada en torno a este tipo de fenómenos y, por otra, aún más significado matemático para el colectivo en su necesidad de comunicar propiedades de acuerdo al contexto en el cual viven la matemática. Ejemplo de ello es cuando E8 gesticulaba una acción repetidamente para dar a entender un concepto en la función , lo que induce la aparición de la *palabra clave* 'periodicidad', como una particularidad de esta función. Sin embargo, en las *realizaciones* de los otros grupos de estudiantes, no se evidenció un gesto que involucrara esta *palabra clave*, situación que pone de manifiesto un interés y una preocupación de la dupla E7-E8 por hacer emerger otras propiedades de la función en cuestión como una característica particular. Además de ello, este grupo demostró, a través de lo gestual, que la función $\mathbf{sen}(x)$ es entendida como un objeto matemático que presenta otras características relevantes además de su forma, como lo es la intersección con el eje Y en el punto (0,1).

En cuanto a los objetivos de esta investigación, es posible decir que el rol del gesto, en términos de lo que declara Sfard (2008), constituye un *mediador ad hoc* que incentiva la comunicación matemática de manera más natural en el colectivo de los estudiantes. Así lo demostró la actividad implementada, en la que los individuos se sintieron motivados a comunicarse entre ellos a través de diversas *realizaciones*, y si bien la naturaleza de la propuesta permitió que se llevara a cabo de manera grata, ello no significó perder de vista el objeto matemático en estudio: las funciones de variable real. De este modo, los gestos conforman un *mediador* que permite el enunciado de propiedades y/o características de las funciones. Esto refleja la acción del gesto como un motor desarrollador de un *discurso* en el individuo que visualiza y escucha lo que realiza el otro.

Una de las observaciones interesantes con respecto a los gestos es que, si bien en los comienzos no son de carácter matemático, con el avance de la actividad empieza a tomar un tono más formal. Esto se genera debido a que, conforme se entrega nueva información, las gesticulaciones se tornan más complejas, y deben ser interpretadas por otro sujeto, lo que le obliga –en cierto

modo– a recurrir a parte de su conocimiento que le evoque un lenguaje adecuado, acorde a lo gesticulación que observa.

Debido a que en esta investigación se pretendió identificar los elementos del *discurso matemático* que promueven su cambio en los estudiantes, es decir, su evolución, se constató que esto fue posible gracias a las *realizaciones*, tanto *visuales* como *vocales*, que fueron evidenciadas a medida que avanzaba el gesticulante en su tarea de comunicar, para que con los gestos se develaran en otro individuo las propiedades y características del objeto matemático de interés en esta investigación, permitiendo evidenciar un *discurso* predominante en *palabras claves* y *narrativas validadas* mediante los gestos.

Un elemento de relevancia en esta investigación fue el *sistema semiótico de significación cultural* en la actividad de los sujetos que, de acuerdo a los resultados de las experiencias realizadas, reafirman la idea de Radford (2006b) sobre los efectos en el pensamiento del sujeto, ya que dicho sistema, a través del medio y sus herramientas, implica una realidad que se constituye de manera histórica y cultural, la que el individuo refracta y modifica según sus subjetividades. Así, la realidad presentada a través de los gestos, es una señal que el individuo interpreta y modifica de acuerdo a su experiencia escolar, la cual es ampliada a través de este enfoque de carácter gestual, que hemos denominado como el *motor del desarrollo del discurso*.

Este motor del desarrollo del *discurso*, a saber, los gestos, se plantea como una manera de transitar desde lo que alude Sfard (2008) como las ritualidades, a las exploraciones, ello para dar sentido al quehacer matemático en el aula. En otros términos, se plantea la idea de pasar de un espacio basado en actividades dadas por reglas matemáticas, sólo por pertenecer a un grupo que realiza tales prácticas, tal vez sin entender en profundidad, a un espacio basado en experiencias ricas con el colectivo, las cuales darían sentido y vida al objeto matemático en cuestión. Siguiendo esta idea, compartimos también la nueva visión de la *rutina* a la que se refieren Lavie, Stein y Sfard (2019), ya que ha sido posible constatar que estas evolucionan en cada grupo de estudiantes, permitiendo así pasar a la exploración, y dejando de lado esta visión de *rutina* meramente como un patrón invariante.

La concepción del 'ser con el otro', que plantea Radford (2006b), es una visión que entendemos como la mejora en el aprendizaje de los alumnos en su búsqueda de dar explicación a aquellos objetos tan abstractos como los matemáticos, pero en este caso, con un enfoque centrado en lo *enactivo-kinestésico*, lo que permite generar otro tipo de explicaciones para el objeto matemático

funciones. Así, la gestualidad promovería conocimiento matemático de manera más dinámica, y con ello una reflexión profunda del estudiante con el objeto en cuestión, generando palabras más especializadas en el ámbito matemático y, junto a ello, propiedades que emergen a raíz de esta actividad. Entonces, ¿cuál sería el beneficio de este tipo de actividades en el aula? Uno de los beneficios que traerían consigo las actividades gestuales, es la perdurabilidad en el tiempo del conocimiento adquirido en estas, para así, establecer una base de conocimientos disponible para cursos posteriores al cálculo fundamental o cursos equivalentes. En esta misma línea, se propone realizar estas actividades incluso desde los niveles iniciales en la formación de los estudiantes, más allá que la línea del álgebra temprana, como se ha mencionado anteriormente. En este sentido, el *discurso matemático*, por parte de los estudiantes, se vuelve más rico y accesible en un determinado momento.

Una proyección de este estudio sería la instauración de diversos sistemas de signos que enriquecerían el *discurso matemático* de los estudiantes en el aula. De acuerdo a esto último, se pretenden explorar las propiedades de objetos matemáticos más complejos como, por ejemplo, las derivadas de funciones, indicando con los dedos los máximos y los mínimos, cómo varían las pendientes de las rectas tangentes a ciertas curvas, etcétera.

6. AGRADECIMIENTOS

Este estudio fue realizado en el marco del Proyecto ANID/PFCHA nro. 21180980 (Chile)

REFERENCIAS

Alibali, M. W., Nathan, M. J., Boncoddo, R. y Pier, E. (2019). Managing common ground in the classroom: teachers use gestures to support students' contributions to classroom discourse. *ZDM Mathematics Education, 51*(2), 347-360. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01043-x

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 6*(8), 13-33.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. y Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 97-109. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9163-z

Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 2*(3), 11-44.

Goldin-Meadow, S. (2003). *Hearing gesture: How our hands help us think*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gómez-Chacón, I. M. (2010). Actitudes de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática con tecnología. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(2), 227-244. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v28n2.197

Kita, S. (2000). How representational gestures help speaking. En D. McNeill (Ed.), *Language and Gesture* (pp. 162-185). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511620850.011

Lavie, I., Steiner, A. y Sfard, A. (2019). Routines we live by: from ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics, 101*(2), 153-176. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4

Mancilla, M. y Puentes, C. (2015). La gestualidad y los segmentos narrativos propuestos por Labov: análisis de una narración. *Lengua y Habla, 19*, 216-230.

McNeill, D. (1992). *Hand and Mind: What gestures reveal about thought*. University of Chicago Press.

McNeill, D. (2005). *Gesture and Thought*. University of Chicago Press.

Radford, L. (2006a). Introducción: Semiótica y Educación Matemática. *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(Número especial), 7-21.

Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(Número especial), 103-129.

Radford, L. (2007). Semiótica cultural y cognición. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las*

matemáticas: Un reporte Iberoamericano (pp. 669-689). Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Radford, L. (2010). Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. XXXIII-LIII). Institut National de Recherche Pédagogique, ERME.

Radford, L., Edwards, L. y Arzarello, F. (2009). Introduction: Beyond words. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 91-95. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9172-y

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge University Press.

Sfard, A. y McClain, K. (2002). Analyzing tools: Perspectives on the role of designed artifacts in mathematics learning. *The Journal of the Learning Sciences, 11*(2-3), 153-161. https://doi.org/10.1080/10508406.2002.9672135

Soto-Andrade, J. (2018). Enactive metaphorising in the learning of mathematics. En G. Kaiser *et al.* (Eds.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 619-637). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_34

Stake, R. E. (1995). *The Art of Case Study Research*. SAGE.

Suárez, F. y Pietrosemoli, L. (2007). Gestualidad y estructura narrativa. Análisis de un caso. *Lengua y Habla, 11*, 79-90.

Varela, F. J., Thompson, E. y Rosch, E. (1991). *The Embodied Mind: Cognitive Science and Human Experience*. MIT Press.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and Language* (A. Kozulin, Trad.) (2da ed.). The MIT Press. (Trabajo original publicado en 1934).

Wittgenstein, L. (2001). *Tractatus Logico-Philosophicus* (D. F. Pears y B. F. McGuinness, Trads.) (2da ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203010341 (Trabajo original publicado en 1921)

Luis Sandoval-Troncoso

Dirección postal: Departamento de Matemática y Estadística,
Facultad de Ingeniería y Ciencias, Universidad de la Frontera.
Calle Francisco Salazar 01145, Temuco, Chile
Teléfono: +56 942312256

ENSAYO DOI: 10.24844/EM3302.09

Desarrollo profesional de profesores de matemáticas en ambientes virtuales: ventajas, aproximaciones teóricas y futuras líneas de investigación

Online mathematics teachers' professional development: advantages, theoretical perspectives and future investigation lines

Fátima Widman Aguayo[1]

Resumen: Los ambientes virtuales han demostrado ser un espacio en donde el desarrollo profesional de docentes de matemáticas puede llevarse a cabo. Esta modalidad formativa ha cobrado importancia debido al rápido crecimiento en su oferta y demanda. Sin embargo, aún se sabe poco sobre cómo se aprovechan estos espacios en línea para favorecer el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. En este ensayo se presenta una revisión de literatura que sintetiza qué avances se han tenido en la investigación de esta área en la última década. Particularmente, se identifican cuáles son los principales argumentos por los que se piensa que los escenarios en línea son adecuados para promover el desarrollo profesional de los docentes de matemáticas; qué referentes teóricos se han utilizado para el diseño y análisis de las actividades formativas que promueven este tipo de desarrollo profesional, y cuáles son aquellos aspectos relevantes que no han sido suficientemente investigados con relación a este tema.

Palabras clave: *desarrollo profesional de docentes de matemáticas, formación docente en línea, educación a distancia en línea, profesores en servicio, tecnologías digitales.*

Fecha de recepción: 03 de julio de 2017. **Fecha de aceptación:** 08 de junio de 2021.

[1] Instituto Politécnico Nacional, CICATA Legaria, Programa de Matemática Educativa / Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicios 112, fatimawidman@hotmail.com, orcid.org/0000-0003-4040-8900

Abstract: Virtual environments have proven to be a space where the professional development of mathematics teachers can take place. This training modality has gained importance due to the rapid growth in its supply and demand. However, little is yet known about how these online spaces are used to promote the professional development of mathematics teachers. This essay presents a literature review that synthesizes what advances have been made in this research area during the last decade. In particular, I identify the main arguments why online settings are thought to be adequate to promote the professional development of mathematics teachers; what theoretical references have been used for the design and analysis of the training activities that promote this type of professional development, and what are the relevant aspects that have not been sufficiently investigated in relation to this topic.

Keywords: *online mathematics teacher's education, professional development, in service mathematics teachers, digital technologies, professional learning experiences.*

INTRODUCCIÓN

El estudio del desarrollo profesional de los docentes de matemáticas se ha consolidado como un área de investigación dentro de la matemática educativa. Esto se hace evidente al encontrar en la literatura científica un extenso número de publicaciones que abordan diferentes problemáticas o aspectos relativos a este tema. Particularmente, se ha notado un creciente interés en el estudio del desarrollo profesional de profesores de matemáticas dentro de escenarios virtuales o en línea. Lo anterior, debido al rápido aumento en la oferta y demanda de programas formativos en línea dirigidos a estos docentes (Gueudet *et al.*, 2012). Sin embargo, aún se sabe poco sobre cómo se aprovechan estos espacios en línea para favorecer el desarrollo profesional de dichos profesores (Cendros y Gadanidis, 2020). Por lo que, en este artículo se presenta una revisión de literatura que permita sintetizar qué avances se han tenido en la investigación de esta área en la última década y qué aspectos aún quedan pendientes por investigar.

Específicamente, la revisión de literatura presentada, se enfoca en: (1) identificar cuáles son los principales argumentos por los que se piensa que los

escenarios en línea son adecuados para promover el desarrollo profesional de los docentes de matemáticas; (2) cuáles son los referentes teóricos que se han utilizado para el diseño y análisis de las actividades formativas que promueven este tipo de desarrollo profesional, y finalmente (3) cuáles son aquellos aspectos relevantes que no han sido suficientemente investigados con relación a este tema.

MÉTODO

En esta sección se presenta el método que se siguió para desarrollar la revisión de literatura que se presenta en este escrito. Particularmente, se describen qué tipos de fuentes de información se consultaron y bajo qué criterios fueron seleccionadas.

Fuentes de información

Para la revisión bibliográfica realizada se consideraron tres tipos de fuentes de información: revistas especializadas, memorias de congresos de matemática educativa y libros relativos al desarrollo profesional docente de docentes de matemáticas.

En cuanto a las revistas especializadas, se seleccionaron aquellas con mayor prestigio dentro del campo de la matemática educativa con la intención de procurar la calidad y confiabilidad de la información obtenida. Para identificarlas, se utilizaron tres rankings de revistas de investigación que se han generado en esta disciplina: Toerner y Arzarello (2012), Williams y Leatham (2017), y Andrade-Molina *et al.*, (2020). En la tabla 1, se presentan los nombres de las revistas incluidas en los rankings en donde se encontró al menos un artículo relativo al desarrollo profesional de docentes de matemáticas en línea.

Tabla 1. Número de artículos relativos al desarrollo profesional docente en línea encontrados en las revistas seleccionadas.

Revista	Número de artículos identificados
ZDM Mathematics Education	10
Educational Studies in Mathematics	3
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)	2
Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)	1
Journal of Mathematics Teacher Education	1
Mathematics Education Research Journal	1
Research in Mathematics Education	1
School Science and Mathematics (SSM)	1
UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática	1

De igual forma, se revisaron las memorias de los grupos de trabajo relativos al desarrollo profesional docente en línea en los congresos: ICME (*International Congress on Mathematical Education*), PME-NA (*Psychology of Mathematics Education - North America*), CERME (*Congress of European Research in Mathematics Education*), RELME (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa) y CIAEM (Conferencia Interamericana de Educación Matemática). Dichos congresos fueron seleccionados debido a que sus memorias se encuentran accesibles para ser consultadas. En la tabla 2, se presentan los congresos en donde se encontró al menos un artículo relativo al desarrollo profesional de docentes de matemáticas en línea.

Tabla 2. Número de artículos identificados en las memorias de los congresos seleccionados.

Congreso	Artículos	Congreso	Artículos	Congreso	Artículos
ICME 13	1	RELME 26	1	PME-NA 34	2
CERME 11	2	RELME 28	2	PME-NA 36	1
CERME 9	1	RELME 31	2	PME-NA 37	1
CERME 7	1	XIV CIAEM	2	PME-NA 38	2
CERME 6	1	PME-NA 31	3	PME-NA 39	1
RELME 22	1	PME-NA 32	1	PME-NA 40	1
RELME 24	2	PME-NA 33	1	PME-NA 41	3

Finalmente, se consultaron varios libros especializados en desarrollo profesional docente, pero se seleccionaron únicamente aquellos que incluyeran al menos un capítulo relativo al desarrollo profesional de docentes en matemáticas en línea. En la tabla 3, se muestra tanto el nombre de estos libros como el nombre de los capítulos seleccionados dentro de ellos.

Tabla 3. Nombre de libros y capítulos seleccionados relativos al desarrollo profesional docente en línea.

Libro	Capítulos identificados
The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics	Tools and Settings Supporting Mathematics Teachers' Learning in and from Practice
Learning Through Teaching Mathematics	Dialogical Education and Learning Mathematics Online from Teachers

Criterios de selección

Para realizar la búsqueda en las fuentes previamente mencionadas se utilizaron las siguientes palabras clave: *online professional development, web based professional development, online mathematics teacher education, internet professional development,* formación docente en línea y formación continua de profesores a distancia. De los artículos resultantes en la búsqueda por palabras

claves, se seleccionaron aquellos que cumplieran los siguientes tres criterios: (1) que el artículo esté escrito en idioma inglés, español o portugués, (2) que la temática abordada sea relativa al desarrollo profesional de docentes de matemáticas dentro de ambientes virtuales, y (3) que las publicaciones se encuentren en el rango del 2009 al 2020. Se parte del 2009, por ser el año donde comienzan a reportarse estudios en congresos internacionales relativos a esta temática (Ponte *et al.*, 2009) y se revisa hasta el 2020 con la intención de presentar información lo más actualizada posible.

Se considera importante aclarar, que dentro del artículo se podrán encontrar algunas referencias que no corresponden a las fuentes de información ni criterios de selección mencionados con anterioridad, pero que se incluyeron debido a que conformaron fuentes de consulta imprescindibles, ya que ampliaban la explicación de ciertas aproximaciones teóricas mencionadas en los artículos inicialmente revisados.

CONCEPTUALIZACIÓN Y CLASIFICACIÓN DE PROCESOS DE DESARROLLO PROFESIONAL EN LÍNEA PARA DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Entre las actividades profesionales que un docente realiza, se encuentran aquellas destinadas a procurar su formación continua. Cuando estas actividades se llevan a cabo a través de entornos virtuales suelen nombrarse de diversas formas en la literatura científica, por ejemplo: formación continua a distancia, formación docente en línea, educación virtual para profesores, entre otras. En este artículo, a este tipo de actividades se les denominará actividades para el desarrollo profesional en línea de docentes de matemáticas y se conceptualizan, a partir de las propuestas de Kynigos y Kalogeria (2012) y Lezama (2009), como todo proceso formativo que se desarrolla en espacios virtuales y que permite al profesor cruzar los límites de sus comunidades académicas habituales y favorecer la problematización y mejora de su práctica a partir de la generación de espacios de aprendizaje, reflexión y diálogo y el trabajo con diferentes herramientas teóricas, metodológicas y tecnológicas.

El desarrollo profesional en línea de docentes de matemáticas puede clasificarse como formal o informal. Se le considera informal cuando se desarrolla a través de redes sociales (Facebook, Twitter, blogs, etc.) en donde los profesores interactúan y realizan acciones como compartir lecciones, sugerir y revisar recursos y participar en foros de discusión. Esto sin que exista un diseño instruccional

de por medio, ni se espere la entrega específica de alguna evidencia de aprendizaje por parte de los profesores. Un ejemplo de este tipo de formación profesional se muestra en Bommel y Liljekvist (2015).

Si bien, en la literatura se hace explícito cuándo un proceso de desarrollo profesional docente se considera informal, no se menciona de forma evidente cuándo se considera formal. Sin embargo, a partir de lo mencionado anteriormente, podrían considerarse procesos formales de desarrollo profesional aquellos que cuentan con un diseño instruccional basado en modelos o teorías pedagógicas, y que solicitan a los profesores participantes evidencias de sus aprendizajes o procesos reflexivos a partir de su participación en foros, entregas de productos, elaboración de propuestas pedagógicas, etc.

ARGUMENTOS POR LOS QUE SE PIENSA QUE LOS ESCENARIOS EN LÍNEA SON ADECUADOS PARA PROMOVER EL DESARROLLO PROFESIONAL DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Existen argumentos que permiten considerar al desarrollo profesional de docentes de matemáticas en escenarios virtuales como una buena práctica formativa incluso superior a la modalidad presencial (Surrette y Johnson, 2015) ya que posee características particulares que favorecen la formación de los docentes y que no pueden observarse en entornos presenciales (Dean y Silverman, 2009). Estos argumentos frecuentemente son asumidos y no siempre se mencionan de forma explícita (Li y Qi, 2011), por lo que a continuación, se presentan todos aquellos encontrados en la revisión realizada clasificados en tres categorías: institucionales, pedagógicos y relativas a la mejora profesional.

Argumentos institucionales

Se consideran argumentos institucionales a aquellos que presentan al desarrollo profesional en línea como una alternativa para solucionar problemáticas institucionales y no se enfocan en aspectos específicos de la formación docente. Uno de estos argumentos es la facilidad de implementar este tipo de cursos a gran escala a través de la reproducción repetitiva de un mismo diseño instruccional. Esta opción ha resultado ser conveniente para dar a conocer a todos los docentes de un país tanto las modificaciones realizadas en los currículos nacionales como

la introducción de nuevas estrategias pedagógicas, generalmente aquellas relacionadas con el uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (Maass *et al.*, 2019).

Otro argumento institucional, es aquel que presenta al desarrollo profesional en línea como una alternativa que permite a aquellos profesores que laboran en áreas marginadas o distritos rurales, acceder fácilmente a las mismas opciones formativas que sus colegas ubicados en distritos más poblados, sin que esto represente una derrama excesiva de recursos económicos invertidos en transporte (Dean y Silverman, 2009; Lee *et al.*, 2017).

Un último argumento institucional es que este tipo de formación continua posibilita que la participación de los profesores no se vea impedida por la variación en su disponibilidad de horario (Surrette y Johnson, 2015). Esta problemática es frecuente en algunos países porque la zona horaria cambia entre sus diferentes regiones, y en otros porque la carga laboral de los profesores suele ser excesiva o repartida entre varias escuelas, lo que dificulta su disponibilidad para reunirse a una determinada hora (Dean y Silverman, 2009; Montiel, 2010; Kynigos y Kalogeria, 2012). Si las actividades destinadas a la formación de los profesores son solicitadas de forma obligatoria por las instituciones educativas, la flexibilidad temporal que ofrecen los entornos virtuales representa una posibilidad para que un mayor número de profesores pueda participar en ellas, y cumplir de esta forma los requerimientos de su institución.

ARGUMENTOS PEDAGÓGICOS

Se consideran argumentos pedagógicos a aquellos que resaltan características de los ambientes virtuales que favorecen el aprendizaje de los profesores de matemáticas. Por ejemplo, Borba y Llinares (2012), y Clay *et al.* (2012) consideran que la comunicación escrita y asíncrona que caracteriza a las participaciones dentro de los foros virtuales provoca una mayor profundidad y riqueza en las reflexiones de los profesores, ya que permite que puedan leer y analizar con detenimiento las aportaciones previas de sus colegas y formular a partir de estas sus propias opiniones. Incluso, el dinamismo asíncrono de los foros facilita que los participantes consulten fuentes externas de información que les permitan clarificar y fundamentar de mejor forma sus aportaciones (Sánchez, 2010). De igual forma, se considera que es más fácil para los profesores realizar cuestionamientos a través de foros, ya que no necesariamente tienen que dirigirlos

hacia una persona en particular (Erixon, 2016). Cada una de las acciones mencionadas (lectura reflexiva, redacción escrita, búsqueda de información, cuestionamientos, etc.), son factores determinantes en el aprendizaje de los profesores y se favorecen al participar en actividades propias de entornos virtuales.

Otro de los argumentos pedagógicos mencionados en la literatura es que la variabilidad y disponibilidad de recursos de apoyo que son proporcionados en este tipo de espacios formativos favorecen el logro de los aprendizajes. Por ejemplo, las características de los entornos virtuales permiten que dichos recursos permanezcan alojados de forma permanente en el aula virtual y de esta forma, es posible que el docente consulte los recursos deseados las veces que considere, procurando de esta forma una continua reestructuración y recontextualización de los contenidos (Müller *et al.*,2011).

Asimismo, los entornos virtuales permiten el acceso a materiales especializados que pueden llegar a ser difíciles de conseguir para los profesores y que muchas veces contienen la información más actualizada y relevante del área de interés (Kynigos y Kalogeria, 2012; Surrette y Johnson, 2015). Finalmente, los entornos virtuales permiten que un mismo contenido se presente a través de diversos formatos (videos, audios, textos, etc.), favoreciendo los diferentes estilos de aprendizaje que pudieran tener los participantes y enriqueciendo los canales de atención (Borba y Llinares, 2012; Patahuddin, 2013).

Finalmente, otro de los argumentos pedagógicos encontrados en la literatura, hace referencia a la capacidad de los entornos virtuales para transformar la manera en la que los profesores aprenden matemáticas (Clay *et al.*, 2012). Por ejemplo, una determinada herramienta tecnológica puede permitir al profesor replantear o profundizar en la comprensión de cierto concepto matemático a partir del manejo de gráficas y de simuladores (Gueudet *et al.*, 2012). Asimismo, dichas herramientas permiten que el profesor genere propuestas innovadoras para la presentación de un tema particular y a la vez, pueda cuestionar y discutir sobre sus propuestas y las de sus colegas, a través de espacios síncronos y asíncronos generando así procesos de aprendizaje colaborativos mediados por la tecnología.

Argumentos relativos a la mejora profesional

Son aquellos que explican de qué forma la participación de los docentes en actividades de desarrollo profesional en línea impacta en su práctica profesional. Uno de ellos, afirma que este tipo de actividades formativas tienen un impacto positivo en las creencias de los docentes sobre el uso de la tecnología, por lo que es más probable que se vean motivados a incluirla dentro de su práctica (Patahuddin, 2013). Asimismo, Müller *et al.* (2011) afirman que estos espacios formativos permiten al docente familiarizarse con su funcionamiento, lo cual puede llegar a resultarles útil en caso de que se presentara la oportunidad o necesidad de integrar estas tecnologías a su práctica habitual.

Otro de los argumentos hace referencia al diseño instruccional de algunos de estos cursos, ya que generan alternativas de rutas o caminos profesionales y permiten que el profesor seleccione las actividades y temas con los cuales trabajar (Bommel y Liljekvist, 2015). Dicha flexibilidad genera una percepción de auto eficacia e independencia en los profesores (Patahuddin, 2013) y a la par, promueve la independencia y construcción de un camino profesional propio.

Finalmente, uno de los argumentos más mencionados en la literatura es la oportunidad que brindan las actividades de desarrollo profesional en línea para generar espacios de colaboración nacionales e internacionales entre docentes con intereses en común e incluso, con otros profesionales de la enseñanza (Surrette y Johnson, 2015; Gueudet *et al.*, 2012; Li y Qi, 2011). Dicho intercambio cultural y profesional permite la construcción de comunidades virtuales en donde se generan espacios para compartir experiencias profesionales, desarrollar nuevas ideas curriculares y colaborar en proyectos pedagógicos. Asimismo, este tipo de comunidades propician que el desarrollo profesional de los profesores progrese de forma continua, lo que aumenta las probabilidades de que lo aprendido realmente impacte de forma positiva en su desempeño profesional (Clark-Wilson y Hoyles, 2019).

En conclusión, se ha argumentado sobre una variedad de factores que permiten asegurar que el desarrollo profesional en línea de docentes de matemáticas constituye una opción formativa no solo favorable sino deseable para los profesores. Sin embargo, se considera importante aclarar que todos los argumentos mencionados parten del supuesto de que las actividades de desarrollo profesional en línea en las que un docente participa son propuestas por un equipo de profesionales, a partir de diseños instruccionales que consideran los

fundamentos teóricos, metodológicos y tecnológicos necesarios para un buen diseño e implementación.

APROXIMACIONES TEÓRICAS IMPLEMENTADAS EN EL DESARROLLO PROFESIONAL DOCENTE EN LÍNEA

Para que el desarrollo profesional pueda llevarse a cabo dentro de espacios virtuales requiere de un diseño instruccional en donde se determinen el o los propósitos formativos, las estrategias de aprendizaje, y los recursos didácticos necesarios. Adicionalmente, debido a su naturaleza virtual, se requiere disponer de diversas herramientas tecnológicas que permitan la participación e interacción de los participantes. En la literatura especializada se puede dar cuenta de cómo las perspectivas teóricas que se adoptan orientan la toma de ciertas decisiones en el diseño instruccional y a la par, sirven como lentes para el análisis de lo que ocurre en estos procesos formativos una vez que se han implementado, favoreciendo de esta forma la evaluación y mejora continua de dichos procesos.

En esta sección, se describen cuáles son las principales aproximaciones teóricas que se han empleado en los escenarios de instrucción virtual para el desarrollo profesional docente, clasificadas de acuerdo con la intención formativa para la que son utilizadas. Cabe aclarar que si bien, se mencionarán por separado, es posible encontrar más de una aproximación teórica en un mismo diseño instruccional, es decir, no son teorías necesariamente excluyentes entre sí.

Propósitos formativos

El conocimiento de los contenidos matemáticos y la pedagogía para abordar dichos contenidos en las aulas son aspectos formativos de interés dentro del desarrollo profesional en línea de docentes de matemáticas. Por ejemplo, Clay *et al.* (2012) y Silverman y Clay (2009a) utilizan ciertas propuestas pedagógicas de Shulman (1986) para plantear los objetivos de aprendizaje dentro de su propuesta de formación virtual. Asimismo, en los últimos años, han aumentado aquellos propósitos formativos relativos a que el profesor de matemáticas incorpore el uso de la tecnología dentro de sus estrategias de enseñanza en el aula (Hoyos, 2012). Un ejemplo de lo anterior es el que presentan Clark-Wilson y

Hoyles (2019), quienes adoptan el modelo PTK (*Pedagogical Technology Knowledge*) de Thomas y Hong (2013) en su propuesta formativa.

Interacción entre medios

En algunas propuestas formativas como la que presenta Borba (2012) se enfatiza que, si se busca generar conocimientos y colaboración dentro de ambientes virtuales, debe considerarse cómo los diferentes medios tecnológicos interaccionan con los humanos e impactan en sus producciones matemáticas. Es el caso del constructo teórico *humans-with-media* el cual asume que la tecnología puede afectar el tipo de conocimientos matemáticos producidos dentro de un ambiente de aprendizaje. Es decir, dicho constructo enfatiza que las tecnologías juegan un rol activo dentro del aprendizaje y se genera entre estas y los humanos una interrelación en donde cada parte resulta implicada (Borba y Llinares, 2012).

Otra aproximación teórica que considera el impacto de los medios en la formación profesional es la *documentational approach* propuesta por Gueudet y Trouche (2009). Bajo esta aproximación se considera que un proceso de génesis documental ocurre cuando los profesores utilizan diversos recursos y los transforman en nuevos ajustados a su práctica. Gueudet y Trouche (2009) afirman que el proceso de documentación es la parte central de cualquier actividad profesional de un docente, por lo que es importante enfocar la atención en cómo lo lleva a cabo a través de los recursos dispuestos en una experiencia de formación. Gueudet *et al.* (2012) consideran esta perspectiva teórica para observar la interacción entre los profesores y los recursos dentro de distintos entornos virtuales destinados al desarrollo profesional de docentes de matemáticas.

Formación de comunidades

Algunas de las propuestas formativas en línea destinadas al desarrollo profesional de profesores de matemáticas plantean, como una de sus principales intenciones diseñar espacios de encuentro entre grupos de profesores de matemáticas y ciertas comunidades de práctica (COP) constituidas por educadores matemáticos o bien generar nuevas comunidades de práctica entre los profesores participantes en un proceso formativo. Las COP conforman una teoría social de aprendizaje en donde se describen tres dimensiones mediante las

cuales la práctica docente puede generar una comunidad: un compromiso mutuo, una empresa conjunta y un repertorio compartido (Wenger, 2001). Lee *et al.* (2017) mencionan que al conformar dichas comunidades los participantes extienden sus accesos a diferentes recursos y prácticas pedagógicas más allá de las que pueden encontrar en sus centros laborales y de igual forma, se favorecen acciones formativas permanentes entre ellos.

Una de las estrategias utilizadas para la generación de este tipo de comunidades es proponer el uso de distintos artefactos (tareas, recursos, proyectos, etc.) diseñados particularmente para servir como objetos frontera que faciliten la incorporación entre ambas comunidades (Kynigos y Kalogeria, 2012). Un ejemplo lo presentan Matranga *et al.* (2016) al incluir un foro dentro de un programa virtual de formación profesional, en donde a través de la asignación previa de actividades que funcionan como "objetos frontera" generan el intercambio de experiencias entre profesores y educadores matemáticos.

Otro de los puntos de partida al diseñar procesos formativos en línea para profesores de matemáticas es el deseo de favorecer la formación de comunidades de investigación (COI). Este tipo de comunidades, de acuerdo con Garrison *et al.* (2000), se componen de profesores y estudiantes que se comunican a través de computadoras y logran aprendizajes mediante la interacción de tres elementos centrales: presencia cognitiva, presencia social y presencia del profesor. Cada uno de estos elementos, posee indicadores particulares que sirven como guía a los educadores para mediar los diálogos entre los participantes de forma tal que favorezcan el aprendizaje.

Choppin *et al.* (2019), describen cómo a través de un proceso de mediación, considerando los principios de las COI, se procura la construcción de significados mediante diversos procesos reflexivos entre profesores de matemáticas participantes en una experiencia de formación continua.

Todas las aproximaciones teóricas mencionadas en los párrafos anteriores se utilizan como puntos de referencia en ciertas partes del diseño instruccional propuesto en espacios de formación en línea para docentes de matemáticas. Sin embargo, se encontró poca información en la literatura sobre experiencias en donde se tomara una perspectiva teórica que pudiera servir no solo como punto de referencia, sino como eje central del diseño de todo un proyecto formativo.

El único modelo de este tipo creado específicamente para el desarrollo profesional de profesores de matemáticas en ambientes virtuales, es el *Online Asynchronous Collaboration Model* (OAC) planteado por Silverman y Clay (2009b). Sus autores afirman que su construcción se basa en resultados de

investigación recientes en el área de educación matemática para profesores y que a la par, considera las ventajas de la naturaleza colaborativa del internet y la posibilidad de las interacciones online. Lee *et al.* (2017), ilustran la implementación de dicha propuesta.

En la revisión de literatura también se encontraron otros modelos de diseño instruccional utilizados en propuestas de formación de profesores de matemáticas, pero se caracterizan por ser adaptaciones a modelos no específicos para educación matemática, por lo que los autores realizan propuestas de adaptación. Por ejemplo, Montiel (2010), cuya propuesta se basa en el diseño de instrucción para ambientes virtuales propuesto por Ally (2004) y Choppin *et al.* (2019), cuya propuesta formativa es una adaptación del modelo *Conjecture Mapping* propuesto por Sandoval (2014).

ASPECTOS RELEVANTES QUE NO HAN SIDO SUFICIENTEMENTE INVESTIGADOS

Es claro que existe un interés dentro de la educación matemática por conocer las innovaciones y beneficios que aportan los entornos virtuales a los procesos de desarrollo profesional docente. De igual forma, existen avances en cuanto a conocer cuáles son los principales referentes teóricos que han sido de utilidad para guiar tanto el diseño como la observación de los procesos que se desarrollan durante este tipo de formación docente. Sin embargo, aún hay varios aspectos relativos a esta área de investigación en los que se cuenta con poca información. En este sentido, Patahuddin (2013) confirma la necesidad de futuras investigaciones que permitan ofrecer una mejor comprensión de cómo el desarrollo profesional a través de entornos virtuales se ajusta a las diversos contextos y necesidades de los profesores, cuáles son los roles que juegan los facilitadores o educadores matemáticos en este tipo de ambientes, qué corrientes pedagógicas son utilizadas y cómo podría aprovecharse la información que proporcionan los macrodatos (*big data*) generados en estos espacios para una mejor comprensión de la efectividad del desarrollo profesional docente en entornos virtuales.

Particularmente, con relación al rol que juegan los educadores matemáticos en este tipo de formación docente, Bennison *et al.* (2020), mencionan que se le ha prestado poca atención a conocer bajo qué criterios estos formadores de docentes diseñan y seleccionan los recursos que utilizan durante la

implementación de estos cursos y cuáles son las estrategias que utilizan para asegurar la calidad de dichos recursos. Asimismo, se conoce poco sobre la forma, frecuencia y profundidad en la que estos educadores matemáticos interactúan con los profesores y los retroalimentan con relación a sus aportaciones.

Desde el punto de vista de los profesores participantes, aún se sabe poco sobre cuáles son los factores que encuentran más relevantes para su formación dentro este tipo de procesos formativos y que favorezcan un impacto positivo dentro de su práctica profesional. Asimismo, existe poca información sobre las emociones y niveles de satisfacción que experimentan durante su participación y la relación que guarda con su desempeño en estos espacios formativos. De igual forma, será necesario identificar cuáles son los factores críticos que favorecen la permanencia de las nuevas comunidades de práctica entre profesores más allá de su participación en algún programa formativo en específico (Borba y Llinares, 2012).

Finalmente, desde el punto de vista de las herramientas tecnológicas utilizadas, si bien, ya existen investigaciones que reportan cómo su utilización impacta tanto en la forma de aprender y aplicar diversos conceptos matemáticos como en la forma en la que se desarrollan los procesos comunicativos. Aún hace falta mayor claridad en cuánto a qué recursos tecnológicos resultan más o menos útiles según los objetivos planteados en cada espacio virtual destinado al desarrollo profesional docente y cómo dichos recursos pueden aprovecharse para ser utilizados como objetos frontera en la formación de comunidades de práctica (Kynigos y Kalogeria, 2012).

En suma, al ser la modalidad virtual, un espacio relativamente reciente utilizado para promover el desarrollo profesional de docentes de matemáticas, existe un gran número de aspectos que aún requieren ser estudiados con más detalle. En este sentido, será necesario revisar continuamente los avances en dicha área de investigación y considerarlos tanto para determinar qué aspectos resultan más relevantes estudiar en un futuro como para conocer qué ventajas ofrecen este tipo de espacios formativos y cuáles son los referentes teóricos que pueden guiar el diseño e implementación de este tipo de espacios.

REFERENCIAS

Ally, M. (2004). Foundations of educational theory for online learning. En T. Anderson y F. Elloumi (Eds.). *Theory and Practice of Online Learning* (pp. 3–31). Athabasca University.

Andrade-Molina, M., Montecino, A., y Aguilar, M. (2020). Beyond quality metrics: defying journal rankings as the philosopher's stone of mathematics education research. *Educational Studies in Mathematics*, *103*(3), 359–374.

Bennison, A., Goos, M., Geiger, V. (2020). Utilising a research-informed instructional design approach to develop an online resource to support teacher professional learning on embedding numeracy across the curriculum. *ZDM Mathematics Education*, *52*(5), 1017–1031.

Bommel, J., y Liljekvist, Y. (2015). Facebook and mathematics teachers' professional development: Informing our community. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2930–2936). ERME.

Borba, M. C. (2012). Humans-with-media and continuing education for mathematics teachers in online environments. *ZDM Mathematics Education*, *44*(6), 801–814.

Borba, M. C., y Llinares, S. (2012). Online mathematics teacher education: overview of an emergent field of research. *ZDM Mathematics Education*, *44*(6), 697–704.

Cendros, R., y Gadanidis, G. (2020). Online collaborative mind mapping in a mathematics teacher education program: a study on student interaction and knowledge construction. *ZDM Mathematics Education. 52*(5), 943-958.

Choppin, J. *et al.* (2019). Exploring qualities of a community of inquiry in a synchronous online course. En S. Otten, A. G. Candela, Z. de Araujo, C. Haines y C. Munter (Eds.), *Proceedings of the forty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.1841–1845). PME.

Clark-Wilson, A., y Hoyles, C. (2019). A research-informed web-based professional development toolkit to support technology-enhanced mathematics teaching at scale. *Educational Studies in Mathematics*, *102*(3), 343–359.

Clay, E., Silverman, J., y Fischer, D. J. (2012). Unpacking online asynchronous collaboration in mathematics teacher education. *ZDM Mathematics Education*, *44*(6), 761–773.

Dean, C., y Silverman, J. (2009). Transferability of an existing framework for analysing teacher's learning in an online professional teaching community. En S. Swars, D. Stinson, y S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1537–1544). PME.

Erixon, E. (2016). Learning activities and discourses in mathematics teachers' synchronous oral communication online. *Research in Mathematics Education, 18*(3), 267–282.

Garrison, D. R., Anderson, T., y Archer, W. (2000). Critical inquiry in a text-based environment: Computer conferencing in higher education. *The Internet and Higher Education, 2*(2-3), 87–105.

Gueudet, G. *et al.* (2012). Online paths in mathematics teacher training: new resources and new skills for teacher educators. *ZDM Mathematics Education, 44*(6), 717–731.

Gueudet, G., y Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 199–218.

Hoyos, V. (2012). Online education for in-service secondary teachers and the incorporation of mathematics technology in the classroom. *ZDM Mathematics Education, 44*(6), 775–786.

Kynigos, C., y Kalogeria, E. (2012). Boundary crossing through in-service online mathematics teacher education: the case of scenarios and half-baked microworlds. *ZDM Mathematics Education, 44*(6), 733–745.

Lee, H., Lovett, J., y Mojica, G. (2017). Characterizing impacts of online professional development on teacher's beliefs and perspectives about teaching statistics En E. Galindo y J. Newton (Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 407–414). Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Lezama, J. (2009). Posgrado a distancia en línea en matemática educativa, una alternativa de formación de profesores. La propuesta del Instituto Politécnico Nacional para América Latina. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (vol. 22, pp. 1585–1595). Colegio Mexicano de Matemática Educativa y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Li, Y., y Qi, C. (2011). Online study collaboration to improve teachers' expertise in instructional design in mathematics. *ZDM Mathematics Education, 43*(6-7), 833–845.

Maass, K. *et al.* (2019). Different ways to implement innovative teaching approaches at scale. *Educational Studies in Mathematics, 102*(3), 303–318.

Matranga, A. *et al.* (2016). Understanding teachers' participation in an emerging online community of practice. En M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil y J. A. Eli (Eds.), *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 383-386). PME.

Montiel, G. (2010). *Hacia el rediseño del discurso: formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-I), 69–84.

Müller, D. *et al.* (2011). Las interacciones en un entorno virtual. Una experiencia en la formación de docentes. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (vol. 24, pp. 971–980). Colegio Mexicano de Matemática Educativa y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Patahuddin, S. M. (2013). Mathematics teacher professional development in and through internet use: reflections on an ethnographic study. *Mathematics Education Research Journal, 25*(4), 503–521.

Ponte J. P. *et al.* (2009) Tools and Settings Supporting Mathematics Teachers' Learning in and from Practice. En R. Even y D. L. Ball (Eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study* (pp 185–209). Springer.

Sánchez, M. (2010). Internet-based dialogue: A basis for reflection in an in-service mathematics teacher education program. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 954–963). ERME.

Sandoval, W. (2014). Conjecture mapping: An approach to systematic educational design research. *Journal of the Learning Sciences, 23*(1), 18–36.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Silverman, J., y Clay, E. (2009a). Supporting teachers' development of coherence through a focus on mathematical structure. En S. L. Swars, D.W. Stinson, y S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1352–1359). PME.

Silverman, J., y Clay, E. L. (2009b). Online asynchronous collaboration in mathematics teacher education and the development of mathematical knowledge for teaching. *The Teacher Educator, 45*(1), 54–73.

Surrette, T. N., y Johnson, C. C. (2015). Assessing the ability of an online environment to facilitate the critical features of teacher professional development. *School Science and Mathematics, 115*(6), 260–270.

Thomas, M. O. J., y Hong, Y. Y. (2013). Teacher integration of technology into mathematics learning. *International Journal of Technology in Mathematics Education, 20*(2), 69–84.

Toerner, G., y Arzarello, F. (2012). Grading mathematics education research journals. *Newsletter of the European Mathematical Society, 86*, 52–54.

Wenger, E. (2001). Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad. Paidós.

Williams, S., y Leatham, K. (2017). Journal quality in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 48*(4), 369–396.

Fátima Widman Aguayo

Dirección: Calz. Legaria 694, Col. Irrigación, CP 11500, Miguel Hidalgo, Ciudad de México

Teléfono: (55) 5729 6000

CONTRIBUCIÓN A LA DOCENCIA DOI: 10.24844/EM3302.10

Influencia del software GeoGebra en el aprendizaje de la geometría en estudiantes de cuarto grado de secundaria en el distrito de Tambopata de la región de Madre de Dios

GeoGebra software influence on learning geometry in fourth grade high school students in the Tambopata district of the Madre de Dios region

Eliseo Pumacallahui Salcedo[1]
Cory Ingrid Acuña Quispe [2]
Dominga Asunción Calcina Álvarez[3]

Resumen: El objetivo de la investigación que se reporta en esta comunicación ha sido determinar la influencia del software GeoGebra en el aprendizaje de la geometría en estudiantes de cuarto grado de educación secundaria de la institución educativa Señor de los Milagros. El problema que motivó la investigación y una intervención didáctica fue el bajo nivel de aprendizaje de los estudiantes en los cursos de matemática, en especial en geometría. El estudio es cuasi experimental con una muestra de 67 estudiantes, distribuidos en dos grupos, que fueron evaluados con una prueba de evaluación del aprendizaje en geometría aplicada después de la intervención. Los resultados muestran que la intervención didáctica basada en el empleo del software GeoGebra, mejoró significativamente

Fecha de recepción: 08 de julio de 2020. **Fecha de aceptación:** 01 de julio de 2021.

[1] Universidad Nacional Intercultural de Quillabamba, Cusco, Perú, eliseo.pumacallahui@uniq.edu.pe, https://orcid.org/0000-0002-5730-684X

[2] Seguro Social de Salud de Quillabamba, Cusco, Perú. coryquispe@hotmail.com , https://orcid.org/0000-0003-3450-7187

[3] Universidad Nacional Amazónica de Madre de Dios, Perú. dcalcina@unamad.edu.pe, https://orcid.org/0000-0002-6869-0939

el aprendizaje de la geometría en estudiantes de cuarto grado de secundaria. Los estudiantes del grupo experimental y del grupo de control obtuvieron un promedio de 13.3611 y 8.9354 puntos respectivamente, dando una diferencia de 4.4257 puntos a favor del grupo experimental.

Palabras claves: *GeoGebra, aprendizaje, estudiantes, grupo experimental, grupo control.*

Abstract: The objective of this research has been to determine the influence of GeoGebra software on the learning of geometry in fourth grade students of secondary education at the Señor de los Milagros educational institution. The research problem was the presence of the low level of student learning in mathematics courses, especially in geometry. The study is quasi-experimental and the sample was 67 students divided into two groups. Both groups were evaluated with a geometry learning assessment test that was applied after the intervention. The results were finally discussed. The use of GeoGebra software significantly improved the learning of geometry in fourth grade high school students. Where the students of the experimental and control group obtained an average score of 13.3611 and 8.9354 points respectively, giving the difference of 4.4257 points in favor of the experimental group.

Keywords: *GeoGebra, learning, students, experimental group, control group.*

INTRODUCCIÓN

La investigación aborda la influencia del software GeoGebra en el diseño de una intervención didáctica para mejorar el aprendizaje de la geometría; específicamente, en las temáticas de triángulos, cuadriláteros y la circunferencia, en estudiantes del cuarto grado de secundaria. La motivación para desarrollar la investigación fue la evidencia el problema del bajo nivel de aprendizaje de los estudiantes en los cursos de matemáticas.

En el año 2018, el Perú se ubicó en el puesto 64 de 77 países en la prueba de lógico matemático, los datos provienen del Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA, 2018) y de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), estos resultados de las evaluaciones

internacionales indican que en los cursos de matemáticas el sistema educativo peruano necesita mejorar las estrategias de enseñanza (Lamana Selva y De La Peña, 2018), el problema también se extiende a los estudiantes universitarios, en especial en los primeros semestres académicos, ocasionando altas tasas de repitencia, abandono de estudios universitarios, inserción al pandillaje y limitaciones para continuar los estudios universitarios.

El sistema educativo peruano requiere plantear exigencias y alternativas de solución referentes a las estrategias dinámicas y de laboratorio para compartir experiencias y conocimientos en el área de la matemática, básicamente la geometría. Por otro lado, para mejorar la calidad de la educación básica regular y sus resultados no es suficiente aplicar pruebas y darle coherencia al currículo, sino reorientar las prácticas pedagógicas con el uso de metodologías innovadoras con apoyo de programas computacionales que permiten innovar el proceso de enseñanza-aprendizaje, evitando el tradicional paradigma de copiar página y repetir sin relacionar el conocimiento; así como disminuir la deficiente formación profesional docente (Consejo Nacional de Educación, 2006).

Las tecnologías de información y comunicación (TIC) en el ámbito educativo han generado nuevas maneras de pensar y regir los procesos de aprendizaje y enseñanza. Con la llegada de estas tecnologías se han sentado diversas posturas en cuanto a su incorporación e integración curricular y a las ventajas o desventajas que podrían tener en el desempeño académico de los estudiantes. La matemática es una de las áreas de la ciencia en donde la tecnología ha avanzado significativamente, con la creación de diferentes programas computacionales matemáticos crecen las expectativas por diseñar e implementar objetos y ambientes de aprendizaje que promuevan una mejor comprensión de conceptos matemáticos y que al mismo tiempo sirvan de apoyo al trabajo en clase y motiven a los estudiantes al estudio independiente (Córdoba et al.,, 2013).

Al respecto, Marqués (1995), citado por Cárdenas (2018, p. 10), explica que el software matemático, "constituye un estupendo laboratorio matemático que permite experimentar, suplir carencias en el bagaje matemático del estudiante, desarrollar la intuición, conjeturar, comprobar, demostrar, y, en definitiva, ver las situaciones matemáticas de una forma práctica". Sin embargo, los docentes del área de matemática, en especial de la geometría siguen insistiendo en la enseñanza caracterizada por la memorización de conceptos, propiedades, fórmulas y teoremas; privilegiando el uso de recursos como la pizarra, el plumón, la escuadra y el transportador hechos de madera; dejando de lado recursos tecnológicos, debido probablemente al desconocimiento de su empleo y su

potencial para dinamizar el trabajo en clase. Lo que puede tener efectos en el aprendizaje. Al respecto Cárdenas (2018) señala que los modelos tradicionales han afectado a muchos estudiantes, porque constituye el punto de quiebre para crear en ellos desidia, rechazo y resistencia hacia la matemática debido al cansancio que les genera realizar ejercicios rutinarios, mientras que las actividades basadas en las nuevas tecnologías son más dinámicas y divertidas. Por ello, se señala que el empleo adecuado de un software educativo sirve de apoyo al proceso de enseñanza aprendizaje.

El interés de este trabajo es generar una estrategia de enseñanza dinámica con el empleo del software GeoGebra, que puede ser aplicable a todo nivel educativo, considerado como una herramienta didáctica utilizada por quien enseña y quien aprende, lo que permite al usuario alcanzar determinados propósitos (Gross-Salvat, 2000, p. 213). El software matemático GeoGebra es un elemento físico o simbólico que, dentro del aula de clase, provee de cierta ventaja al maestro para la presentación de una temática en particular, que le proporcione al estudiante una forma de representación, visualización y organización de los conceptos trabajados en el estudio de la geometría. (Falen, 2017, p. 35).

Según el Programa Curricular de Educación Secundaria del Ministerio de Educación (MINEDU) del Perú (2017) la competencia "Resuelve problemas de forma, movimiento y localización", "consiste en que el estudiante se oriente y describa la posición y el movimiento de objetos y de sí mismo en el espacio, visualizando, interpretando y relacionado las características de los objetos con formas geométricas bidimensionales y tridimensionales; implica que realice mediciones directas o indirectas de la superficie, del perímetro, del volumen y de la capacidad de los objetos, planos maquetas, usando instrumentos, estrategias y procedimientos de construcción y medida" (p. 147).

Asimismo, el Programa Curricular de Educación Secundaria del Ministerio de Educación (MINEDU) del Perú (2017) señala que la competencia transversal "Se desenvuelve en entornos virtuales generados por las TIC", "consiste en que el estudiante interprete, modifique y optimice entornos virtuales durante el desarrollo de actividades de aprendizaje y en prácticas sociales. Esto involucra la articulación de los procesos de búsqueda, selección y evaluación de información; de modificación y *creación de materiales digitales*, de comunicación y participación en comunidades virtuales, así como la adaptación de los entornos virtuales de acuerdo a sus necesidades e intereses de manera sistemática" (p. 215).

Por las consideraciones anteriores, el objetivo de este trabajo de investigación subyace en determinar la influencia del uso del software GeoGebra en el

aprendizaje de la geometría en las temáticas de triángulos, cuadriláteros y la circunferencia en estudiantes de cuarto grado de educación secundaria de la institución educativa Señor de los Milagros del distrito y provincia de Tambopata de la región de Madre de Dios. La pregunta central de la investigación es: ¿En qué medida un diseño didáctico fundamentado en el uso del *software* GeoGebra influye el aprendizaje de la geometría en estudiantes del cuarto grado de educación secundaria?

La enseñanza de matemática en todos los niveles de educación, especialmente en educación secundaria, es un producto cultural dinámico, es cambiante, en constante desarrollo y reajuste. Al plantear y resolver problemas, los estudiantes se enfrentan a retos para los cuales *no conocen de antemano las estrategias de solución*; esta situación implica desafíos que van en busca de estrategias y recursos que activen la enseñanza de la matemática desde una perspectiva dinámica. El trabajo de investigación plantea que la estrategia didáctica fundamentada en el empleo del software GeoGebra, puede constituir una propuesta para mejorar la calidad de enseñanza de la geometría en estudiantes del cuarto grado de educación secundaria. Asimismo, se pretende optimizar el uso de los entornos proporcionados por las TIC que permitan la interacción entre los estudiantes y el docente.

El aporte al estado de conocimiento de esta investigación es incorporar al **proceso de enseñanza** de la geometría, el empleo del software GeoGebra brindando al docente de matemática un recurso didáctico tecnológico, para abordar de manera dinámica, pero con el rigor matemático, la enseñanza de la geometría, reemplazando así la enseñanza tradicional basada en la pizarra física y plumón que suelen conducir a una forma mecánica de plantear los temas de triángulos, cuadriláteros y circunferencias. Y al **proceso de aprendizaje**, porque le permite al estudiante, interactuar con los objetos y sus relaciones geométricas para adquirir conocimientos y aplicarlos a la resolución de problemas de la geometría.

MARCO TEÓRICO

Antecedentes del trabajo

Diaz-Nunja *et al.* (2018), realizaron un estudio sobre los efectos del empleo del software GeoGebra en la enseñanza de la geometría con estudiantes de educación

secundaria, enfocado en el desarrollo de capacidades de la matemática de educación básica regular: razonamiento y demostración, la comunicación matemática y la resolución de problemas. Se consideraron dos grupos, el experimental con el empleo del software GeoGebra y el grupo de control expuesto a una enseñanza tradicional sin el empleo del software. Ambos grupos fueron evaluados con una prueba del aprendizaje en geometría que se aplicó en momentos antes y después de la intervención. Los resultados sugieren que el empleo del software GeoGebra tuvo efectos en el fortalecimiento de las tres capacidades, con mejoras que resultaron significativas a niveles altos. También que las puntuaciones alcanzadas en el momento después fueron favorables al grupo intervenido en las tres capacidades, con diferencias significativas a niveles moderados.

Ruiz-López (2012), analizó el desarrollo de competencias geométricas y didácticas mediante el software GeoGebra en la formación inicial del profesorado de primaria. Trabajó con un grupo experimental, que había seguido el mismo proceso formativo que el grupo control, pero añadiendo el entorno GeoGebra para la resolución de problemas geométricos. Los resultados fueron estadísticamente significativos en la mejora de competencias didáctico-geométricas, a pesar de haber utilizado como instrumento de medida una prueba de lápiz y papel. Por su parte, Pablo (2016), realizó una investigación con el propósito de analizar si la aplicación del software GeoGebra influye significativamente en el aprendizaje de la geometría analítica en los estudiantes de quinto grado de educación secundaria. Participaron 60 estudiantes, los grupos experimental y de control estuvieron conformados por 30 estudiantes cada uno. Los resultados estadísticos indican que en el post-test efectuado, el grupo experimental obtiene un mayor desempeño que el grupo de control. Estos tres estudios sugieren que tanto los estudiantes como los futuros docentes, mejoraron su desempeño al utilizar el software GeoGebra. Un análisis sobre las tareas propuestas permitiría analizar más profundamente el tipo de actividad generada por los participantes y el empleo de GeoGebra.

El software GeoGebra

GeoGebra es un software libre, y puede considerarse como un software de geometría dinámica, pero que incluye otras particularidades algebraicas y de cálculo que permiten relacionar varias áreas matemáticas (Ruiz-Lopez, 2012). En nuestro caso hemos empleado el software GeoGebra fundamentalmente para resolver problemas de geometría, en especial en las temáticas de triángulos,

cuadriláteros y de las propiedades de la circunferencia. La idea básica de los creadores y desarrolladores de este software (Hohenwarter, 2002; Hohenwarter et al.,, 2009), ha sido unir geometría, álgebra y cálculo (las distintas representaciones de un mismo objeto se conectan dinámicamente) en un único programa de uso intuitivo que permita la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos, citado por (Ruiz-López, 2012, p. 55). Diaz-Nunja, *et al.* (2018) señalan que "la enseñanza de la geometría escolar desde una perspectiva dinámica es un campo relativamente nuevo en la docencia, pero con una presencia cada vez más frecuente y relevante (Ferreira, *et al.*, 2009; Duval, 2000). Por ello, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) promueve el uso de software de geometría dinámica en las aulas, entre ellos GeoGebra" (pp. 221-222). Estos mismos autores señalan atributos y características de Geogebra, mediante la tabla que se presenta a continuación.

Tabla 1. Atributos y características del software GeoGebra

Atributos	Características
Constructividad	Posibilidad de construir nuevos escenarios a partir de la combinación de objetos en espacio y tiempo. Concepto estrechamente vinculado al modelo constructivista del aprendizaje.
Navegabilidad	Posibilidad de explorar de manera libre y flexible, a diferencia de otros paquetes que emplean rutas fijas, lineales y secuenciales.
Interactividad	Sistema que provee al usuario retro-alimentación en tiempo real, además de adaptar o modificar dinámicamente su comportamiento en función de los eventos e información recibida.
Calidad del contenido	Fiabilidad, relevancia, organización y accesibilidad de la información que contiene el software, que adicionalmente puede ser adaptada a diversos tipos de audiencias
Interfaz	Pantalla con que el aprendiz interactúa, que captura la atención, guía sus acciones y refleja el estado del sistema

Fuente: (Diaz-Nunja, *et al.*, 2018, p. 222).

Otros estudios que se hicieron en el marco de la capacitación de docentes con el empleo de GeoGebra reportan que los docentes tuvieron opiniones favorables a su empleo en la enseñanza, si se tiene como base una capacitación adecuada (Tatar y Yilmaz, 2016; Bulut y Bulut, 2011). Todo ello, requiere de ser analizado en el contexto regional educativo peruano, que permita analizar la forma en que los

estudiantes emplean GeoGebra y lo que su actividad puede generar en la visión de los profesores. Asimismo, la forma en que puede sensibilizarse a las autoridades educativas para promover las condiciones materiales, que posibiliten su uso, su análisis y su incorporación en el corto, mediano y largo plaza en la enseñanza regular.

Aprendizaje de la geometría

La importancia de la geometría como una materia del currículo escolar ha sido ampliamente reconocida por autores como Almeida (2002), citado por Gamboa y Ballesteros, (2009, p. 114), "quien señala que existen algunos objetivos generales que todo ciudadano debería alcanzar durante su formación básica: tener una cultura geométrica con visión histórica e interdisciplinaria, aplicar conocimientos geométricos para modelar en el campo científico, crear o resolver problemas reales, usar los diferentes lenguajes y representaciones, entre otros". De acuerdo con Duval (2000), citado por Diaz-Nunja, *et al.* (2018), "el aprendizaje de la geometría involucra, como mínimo, realizar tres actividades cognitivas: la construcción, que alude al diseño de configuraciones mediado por instrumentos geométricos; el razonamiento, vinculado con los procesos discursivos y de argumentación; y la visualización, que se enfoca en las representaciones espaciales" (p. 223).

Por otra parte, el Programa Curricular de Educación Secundaria (2016) del Ministerio de Educación (MINEDU) del Perú, indica, "que el aprendizaje de la matemática contribuye a formar ciudadanos capaces de buscar, organizar, sistematizar y analizar información para entender e interpretar el mundo que los rodea, desenvolverse en él, tomar decisiones pertinentes, y resolver problemas en distintas situaciones usando, de manera flexible, estrategias y conocimiento matemáticos" (MINEDU, 2016, p. 147). Además, el logro del perfil egresado de los estudiantes de Educación Secundaria requiere el desarrollo de cuatro competencias en el "área de matemática", a través del enfoque centrado en la resolución de problemas, como lo es la competencia "Resuelve problemas de forma, movimiento y localización", detallada anteriormente. Asimismo, dentro de los "estándares de aprendizaje" de dicha competencia, en el nivel esperado V, el estudiante resuelve problemas en los que modela las características y la ubicación de objetos a formas bidimensionales y tridimensionales, sus propiedades, su aplicación, reducción o rotación. Describe y clasifica prismas rectos, cuadriláteros, triángulos, círculos, por sus elementos: vértices, lados, caras, ángulos, y por sus propiedades, usando el lenguaje geométrico. Realiza giros en cuartos y

medias vueltas, traslaciones, ampliación y reducción de formas bidimensionales en el plano cartesiano. Emplea procedimientos e instrumentos para ampliar, reducir, girar y construir formas; así como para estimar o medir la longitud, superficie y capacidad de los objetos.

Programa de intervención

En el marco de la estrategia de intervención del aprendizaje se elaboraron dos guías de aprendizaje, una para el grupo experimental y otra para el grupo de control. Se siguieron los objetivos del trabajo de investigación y los contenidos del Programa Curricular de Educación Secundaria del Ministerio de Educación del Perú, en las temáticas de triángulos, cuadriláteros y circunferencias.

La guía de aprendizaje para el grupo experimental estuvo apoyada para la enseñanza de una geometría dinámica con el uso del software GeoGebra. Tuvo la siguiente estructura: introducción para el estudiante, objetivos de aprendizaje, marco teórico, instrucciones para utilizar el software GeoGebra, actividades de aprendizaje y actividades de evaluación. La guía de aprendizaje para el grupo de control, incluía introducción para el estudiante, objetivos del aprendizaje, marco teórico, actividades de aprendizaje y actividades de evaluación; excepto las instrucciones para utilizar el software GeoGebra. Es decir, los contenidos y temáticas de la geometría, basada en la enseñanza de la geometría tradicional sin el uso de ninguna herramienta tecnológica.

El propósito del programa de intervención fue fortalecer el aprendizaje de la geometría con el empleo del software GeoGebra en las temáticas de triángulos, cuadriláteros y la circunferencia en comparación con la enseñanza tradicional. Se trabajó con un enfoque por competencias, centrado en la resolución de problemas. Ambas orientaciones pedagógicas son parte de las recomendaciones dadas por el MINEDU como parte del Programa Curricular de Educación Secundaria (2016) en el área de matemática.

El programa de intervención estuvo compuesto de 12 sesiones de aprendizaje por dos horas cada una y por el mismo docente del curso de geometría. La sesión del aprendizaje para el grupo experimental se aplicó en la sala de cómputo de la institución educativa, cada estudiante contó con un equipo de cómputo. Por su parte, la sesión del aprendizaje para el grupo de control se realizó en las aulas de clases con las mismas temáticas y ejercicios

del grupo experimental, sin utilizar el software GeoGebra y por el mismo docente. La intervención en total abarcó dos meses.

En las sesiones de clase los estudiantes del grupo experimental mediante el software GeoGebra construyeron triángulos, cuadriláteros y circunferencias y aprendieron cómo medir los ángulos, lados, el área y el perímetro de dichas figuras geométricas; luego se formalizaron las definiciones, propiedades y teoremas relacionados a triángulos, cuadriláteros y de la circunferencia para dar respuestas a situaciones problemáticas, mientras los estudiantes del grupo de control utilizaron directo las propiedades y teoremas relacionados a triángulos, cuadriláteros y de la circunferencia. En general, en las 12 sesiones se puso énfasis en el empleo de metodologías y didácticas basadas en la problematización. El docente y los estudiantes trabajaron apoyándose en las guías de aprendizaje. Cada estudiante contó con una de estas guías, a partir de las cuales el docente les acompañaba en la identificación de carencias o contradicciones, con el propósito de facilitar la solución de problemas. En términos operativos, el docente ofrecía a estudiantes situaciones problemáticas de las guías para que construyeran y descubrieran las propiedades y teoremas con el apoyo del software GeoGebra.

3. MATERIALES Y MÉTODOS

El tipo de investigación es aplicada, porque se trata de un estudio de aula, enfocado en analizar el quehacer del maestro, que debe ser de permanente búsqueda de nuevas tecnologías y la adaptación y aplicación de nuevas teorías a la práctica de la educación, a la pedagogía experimental, con la finalidad de transformar la realidad educativa. Específicamente, en este caso se pretende analizar la eficacia de la variable independiente, es decir, el empleo del software GeoGebra como sustento de una estrategia de aprendizaje desarrollada por un mismo docente en el grupo experimental y en el grupo de control.

Diseño de la investigación

El diseño de investigación es cuasi-experimental ya que pretende determinar la influencia del software GeoGebra en el aprendizaje de la geometría en estudiantes de cuarto grado de secundaria. Estos diseños se sustentan en la formación de dos grupos de personas o estudiantes con característica no homogéneas, un

grupo experimental y otro de control. Se elaboró una prueba de salida para ambos grupos. El esquema del diseño cuasi-experimental se muestra en la tabla 2.

Tabla 2. El diseño se diagrama de la siguiente manera

Grupos	Pre test	Tratamiento	Test
GE		X	O1
GC		Y	O2

Fuente: Metodología de Investigación. Hernández, Fernández y Baptista (2014).

Donde:
GE y GC: Grupo experimental y control
O1: Medición del test en el grupo experimental
O2: Medición del test en el grupo control
X: Tratamiento con el uso del software educativo GeoGebra.
Y: Tratamiento sin el uso del software.

Población y muestra

La población de estudio estuvo conformada por 67 estudiantes de cuarto grado de la insitución educativa "Señor de los Milagros", distribuidos de la siguiente manera: 36 estudiantes en el grupo experimental y 31 en el grupo de control. Los alumnos ya estaban asignados por grupos o secciones previamente a la investigación, por lo que no se asignaron aleatoriamente y por lo tanto no son grupos equivalentes. La distribución de la muestra se observa en la tabla 3.

Tabla 3. La distribución de la muestra del estudio.

Grupos	GE	GC
Estrategias	Con GeoGebra	Sin GeoGebra
Participantes	36	31
Total	67	

Fuente: Elaboración propia.

Técnicas e instrumentos

Técnicas

La técnica consistió en el desarrollo de la sesión de clases en laboratorio de cómputo usando el software GeoGebra, dentro de la jornada de clases de la institución educativa. Los alumnos contaron con guías de aprendizaje, entregadas al iniciar. Por su parte, los alumnos del grupo de control no asistieron al laboratorio de cómputo, solo trabajaron con guías de aprendizaje elaboradas sin el uso del software GeoGebra, y se desarrollaron empleando la sesión de clases. En ambos grupos de estudio se empleó la técnica de test para medir el aprendizaje de la geometría en estudiantes de cuarto grado de secundaria de la institución educativa, "Señor de los Milagros". Por último, para la presentación, análisis e interpretación de resultados se utilizó la estadística descriptiva y la estadística inferencial.

Instrumentos de investigación

Se elaboró una prueba de evaluación del aprendizaje en geometría, siendo el objetivo de la prueba medir la influencia del software GeoGebra en el aprendizaje de la geometría en estudiantes de cuarto grado de secundaria de la institución educativa. La prueba está compuesta por un total de 20 ítems para evaluar las tres dimensiones observadas: aprendizaje de las propiedades de los triángulos, aprendizaje de las propiedades de los cuadriláteros y el aprendizaje de las propiedades de la circunferencia. Cada pregunta correctamente contestada equivale a un punto, de tal manera que el puntaje máximo es de 20. La distribución de los ítems de la prueba aparece en la tabla 4

Tabla 4. Especificaciones de la prueba para medir la variable dependiente

Dimensión	Estructura de la prueba de post test		Porcentaje
	Ítems	Total	
Propiedades del triángulo	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	7	35
Propiedades del cuadrilátero	8, 9, 10,11 , 12, 13, 14	7	35
Propiedades de la circunferencia	15, 16, 17, 18, 19, 20	6	30
Total de ítems		20	100

Fuente: Elaboración propia.

La prueba de evaluación se validó por cinco expertos, cuyo resultado de Alfa de Cronbach tiene un valor de $\alpha = 0.845$ que corresponde a una escala de excelente de validez. Para determinar el grado de confiabilidad de la prueba, se eligió una muestra piloto de 10 estudiantes de similar característica al grupo de intervención, a los cuales se les aplicó una prueba. A partir de los datos obtenidos, se estimó el coeficiente de confiabilidad de la prueba, por el método de dos mitades. Posteriormente, se estableció el nivel de correlación existente entre los puntajes obtenidos en ambas mitades. Para lo cual se utilizó el coeficiente de correlación de Pearson (r). Así tenemos:

$$r = \frac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{\left[n\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2\right]\left[n\sum Y^2 - \left(\sum Y\right)^2\right]}}$$

Donde:
n: Es el número de alumnos evaluados de la muestra piloto.
X: Puntaje obtenido en las preguntas pares.
Y: Puntaje obtenido en las preguntas impares.
Finalmente se hace el ajuste a través del coeficiente de Spearman-Brow, lo cual nos permite determinar la confiabilidad de la prueba completa, así tenemos:

$$r_s = \frac{2r_{xy}}{1 + r_{xy}}$$

Donde:
r_s: Confiabilidad estimada para la prueba completa.
r_{xy}: Correlación de Pearson entre las dos mitades (r).

Tabla 5. Grado de confiablidad de la prueba para medir el aprendizaje de la geometría.

Alfa de Cronbach	Parte 1	Valor	0.623
		N° de elementos	10[a]
	Parte 2	Valor	0.78
		N° de elementos	10[b]
	N° total de elementos		20
Correlación entre formularios			0.704
Coeficiente de Spearman-Brown	Longitud igual		0.826
	Longitud desigual		0.826
Coeficiente de dos mitades de Guttman			0.817

Fuente: Elaboración propia.

De la tabla 5 se obtuvo el coeficiente de dos mitades de Guttman 0.817, que corresponde a una escala excelente de confiabilidad.

Métodos

La evaluación de las tres dimensiones empleó los datos obtenidos de la prueba de evaluación del aprendizaje en geometría, que se aplicó a los grupos experimental y de control, antes y después de la intervención del programa experimental. La aplicación de la prueba antes de intervención del programa experimental corroboró la equivalencia del desempeño de ambos grupos en las capacidades evaluadas. Luego vino la intervención, con 12 sesiones de clases de dos horas cada una, que se desarrolló en dos meses. Posteriormente, la aplicación después de la intervención estableció las diferencias significativas en el aprendizaje de la geometría de los estudiantes del grupo experimental en comparación con el grupo de control. Para el análisis de la investigación se utilizó la estadística descriptiva y para la prueba de hipótesis, se hizo la prueba de hipótesis de medias de dos poblaciones normales independientes de varianzas desconocidas, debido a que la intervención se realizó con dos grupos.

RESULTADOS

a) Análisis descriptivo

Análisis descriptivo del aprendizaje de la geometría

En la tabla 6 se muestra el promedio aritmético de las notas de los estudiantes que conformaron el grupo experimental y el grupo de control, siendo el promedio aritmético 13.3611 y 8.9354 puntos respectivamente. La diferencia de las notas de los alumnos del grupo experimental y del grupo de control es de 4.4257 puntos a favor de los alumnos que conformaron el grupo experimental. Demostrándose de esta forma que con el empleo del software GeoGebra, base de la estrategia didáctica utilizada en 12 sesiones de clase, mejoró significativamente el aprendizaje de la geometría en estudiantes de cuarto grado de secundaria.

Tabla 6. La estadística de las notas de los alumnos del grupo experimental y del grupo de control.

	Resultados estadísticos del grupo experimental	Resultados estadísticos del grupo de control
Media	13.3611	8.9354
Error típico	0.4994	0.5992
Moda	12	5
Desviación estándar	2.9966	3.3360
Varianza de la muestra	8.9801	11.1290
Coeficiente de asimetría	0.2775	0.2271
Estudiantes	36	31

Fuente: Procesamiento de datos obtenidos de la investigación.

La representación gráfica de las notas de los alumnos del grupo experimental y del grupo de control de la tabla 6, aparecen en la figura 1.

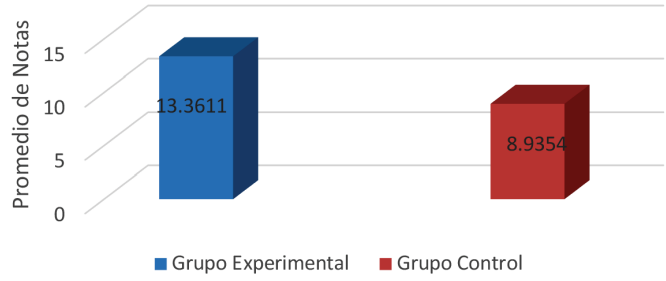


Figura 1. Comparación de las notas de los alumnos del grupo experimental y del grupo de control.

Análisis descriptivo del aprendizaje de las propiedades de los triángulos

En la tabla 7, se muestra el promedio aritmético de las notas de los estudiantes de la dimensión del aprendizaje de las propiedades de los triángulos, siendo 4.6111 y 3.2581 puntos respectivamente de un total de siete puntos. La diferencia de notas de los alumnos del grupo experimental y del grupo de control es de 1.3530 puntos a favor de los alumnos que conformaron el grupo experimental. Esto significa que el empleo del software GeoGebra como base de la estrategia didáctica, mejoró significativamente en el aprendizaje de las propiedades de los triángulos en estudiantes de cuarto grado de secundaria.

Tabla 7. La estadística de las notas de los alumnos en el aprendizaje de las propiedades de los triángulos.

	Resultados estadísticos del grupo experimental	Resultados estadísticos del grupo de control
Media	4.6111	3.2581
Error típico	0.2042	0.2072
Moda	4	3
Desviación estándar	1.2254	1.1538
Varianza de la muestra	1.5016	1.3312
Coeficiente de asimetría	0.3195	0.4303
Estudiantes	36	31

Fuente: Procesamiento de datos obtenidos de la investigación, 2019.

La representación gráfica de las notas de los alumnos en el aprendizaje de las propiedades de los triángulos de la tabla 7, aparece en la figura 2.

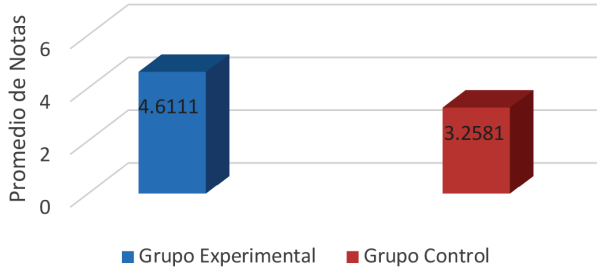


Figura 2. Comparación de las notas de los alumnos del aprendizaje de las propiedades de los triángulos.

Análisis descriptivo del aprendizaje de las propiedades de los cuadriláteros

En la tabla 8, se muestra el promedio aritmético de las notas de los estudiantes en el aprendizaje de las propiedades de los cuadriláteros y es de 4.6111 y 3.0968 puntos respectivamente de un total de siete puntos. La diferencia de notas de los alumnos del grupo experimental y del grupo de control es de 1.5143 puntos, también a favor de los alumnos que conformaron el grupo experimental. Esto significa que, el empleo del software GeoGebra como base de la estrategia didáctica, mejoró significativamente en el aprendizaje de las propiedades de los cuadriláteros en estudiantes del cuarto grado de secundaria.

Tabla 8. La estadística de las notas de los alumnos en el aprendizaje de las propiedades de los cuadriláteros.

	Resultados estadísticos del grupo experimental	Resultados estadísticos del grupo de control
Media	4.6111	3.0968
Error típico	0.1838	0.2381
Moda	4	2
Desviación estándar	1.1027	1.3255
Varianza de la muestra	1.2159	1.7569
Coeficiente de asimetría	-0.0956	0.2703
Estudiantes	36	31

Fuente: Procesamiento de datos obtenidos de la investigación, 2019.

La representación gráfica de las notas de los alumnos en el aprendizaje de las propiedades de los cuadriláteros de la tabla 8, aparece en la figura 3.

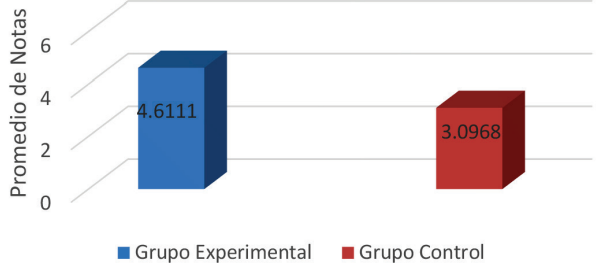


Figura 3. Comparación de las notas de los alumnos en el aprendizaje de las propiedades de los cuadriláteros.

Análisis descriptivo del aprendizaje de las propiedades de la circunferencia

En la tabla 9 se muestra el promedio aritmético de las notas de los alumnos del aprendizaje de las propiedades de la circunferencia, siendo esto 4.1111 y 2.4516 puntos respectivamente de un total de seis puntos. La diferencia de notas de los alumnos del grupo experimental y del grupo de control es de 1.6595 puntos a favor de los alumnos que conformaron el grupo experimental. Esto significa que, el empleo del software GeoGebra como base de la estrategia didáctica, mejoró

significativamente el aprendizaje de las propiedades de la circunferencia en estudiantes de cuarto grado de secundaria.

Tabla 9. Estadístico de las notas de los alumnos en el aprendizaje de las propiedades de la circunferencia.

	Resultados estadísticos del grupo experimental	Resultados estadísticos del grupo de control
Media	4.1111	2.4516
Error típico	0.2174	0.2167
Moda	5	3
Desviación estándar	1.3044	1.2066
Varianza de la muestra	1.7016	1.4559
Coeficiente de asimetría	0.1104	0.0006
Estudiantes	36	31

Fuente: Procesamiento de datos obtenidos de la investigación, 2019.

La representación gráfica de las notas de los alumnos en el aprendizaje de las propiedades de la circunferencia de la tabla 9, aparece en la figura 4.

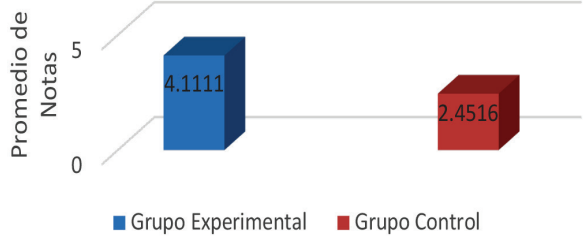


Figura 4. Comparación de las notas de los alumnos del aprendizaje de las propiedades de la circunferencia.

b) Análisis inferencial

Prueba de la hipótesis general

Para hacer la prueba de hipótesis, se utilizó la prueba de hipótesis de medias de dos poblaciones normales independientes de varianzas desconocidas, además se utilizó el Teorema de Límite Central (Córdova, 2008).

i) Formulación de hipótesis nula y alternativa:
   H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$, el empleo del software GeoGebra no mejora significativamente en el aprendizaje de la geometría en estudiantes de cuarto grado de secundaria.
   H1: $\mu_1 > \mu_2$, el empleo del software GeoGebra mejora significativamente el aprendizaje de la geometría en estudiantes de cuarto grado de secundaria.
   Donde μ_1 y μ_2, es el promedio poblacional de las notas del aprendizaje de la geometría de los estudiantes del grupo experimental y del grupo de control respectivamente.

ii) Establecer el nivel de significancia (α). Se considera $\alpha = 0.05$

iii) Seleccionar el valor estadístico de prueba. En este caso la estadística de la prueba es la variable Z normal estandarizado dada por:

$$Z_{Cal} = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim N(0,\ 1)$$

$$Z_{Cal} = \frac{(13.3611 - 8.9354}{\sqrt{\frac{8.980158}{36} + \frac{11.12903}{31}}} = 5.674$$

iv) Establecer la región de rechazo y de la región de aceptación. Para determinar la región de rechazo y de aceptación de la hipótesis H_0 se debe hacer la gráfica de la distribución normal estandarizada con un nivel de significancia de 0.05, dicha gráfica se muestra en la figura 5:

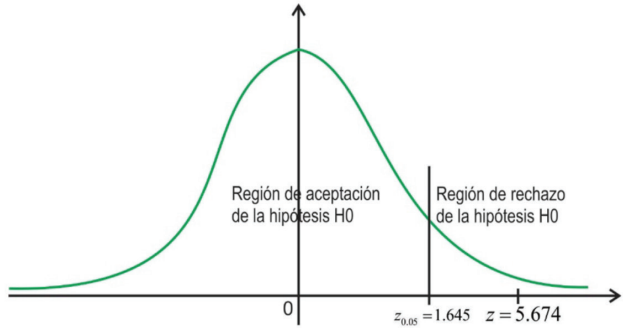


Figura 5. Región de rechazo y de aceptación de la hipótesis nula con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$

v) Tomar la decisión. De la figura 5 se observa que $z_{Cal} = 5.674 > z_{0.05} = 1.645$, es decir z calculado se encuentra dentro de la región de rechazo de la hipótesis H_0, por lo tanto se rechaza la hipótesis H_0 y se acepta la hipótesis H1, llegando a la conclusión que, el empleo del software GeoGebra mejora significativamente el aprendizaje de la geometría en estudiantes de cuarto grado de secundaria.

Prueba de la hipótesis específico 1

i) Formulación de hipótesis nula y alternativa:
H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$, el empleo del software GeoGebra no mejora significativamente en el aprendizaje de las propiedades de los triángulos en estudiantes de cuarto grado de secundaria.
H1: $\mu_1 > \mu_2$, el empleo del software GeoGebra mejora significativamente en el aprendizaje de las propiedades de los triángulos en estudiantes de cuarto grado de secundaria.
Donde μ_1 y μ_2, es el promedio poblacional de las notas del aprendizaje de las propiedades de los cuadriláteros de los estudiantes del grupo experimental y del grupo de control respectivamente

ii) Establecer el nivel de significancia (α). Se considera $\alpha = 0.05$.
iii) Seleccionar el valor estadístico de prueba. En este caso la estadística de la prueba es la variable Z normal estandarizado dada por:

$$Z_{Cal} = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim N(0,\ 1)$$

$$Z_{Cal} = \frac{(4.6111 - 3.2581}{\sqrt{\frac{1.5016}{36} + \frac{1.3312}{31}}} = 4.650$$

iv) Establecer la región de rechazo y la región de aceptación. Para determinar la región de rechazo y de la región de aceptación de la hipótesis H_0 se debe hacer la gráfica de la distribución normal estandarizada con un nivel de significancia de 0.05, dicha gráfica se muestra en la figura 6

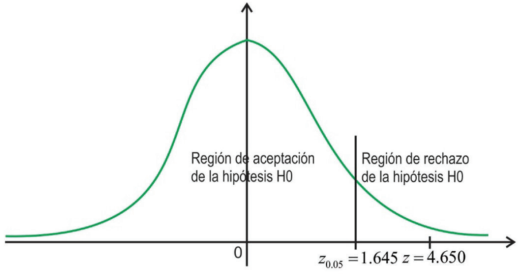


Figura 6. Región de rechazo y de aceptación de la hipótesis nula con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$

v) Tomar la decisión. De la figura 6 se observa que $z_{Cal} = 4.650 > z_{0.05} = 1.645$, es decir z calculado se encuentra dentro de la región de rechazo de la hipótesis H_0, por lo tanto se rechaza la H_0 y se acepta la hipótesis H1, llegando a la conclusión que, el empleo del software GeoGebra mejora significativamente el aprendizaje de las propiedades de los triángulos en estudiantes de cuarto grado de secundaria.

Prueba de hipótesis de la hipótesis específico 2

i) Formulación de hipótesis nula y alternativa:
H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$, el empleo del software GeoGebra no mejora significativamente en el aprendizaje de las propiedades de los cuadriláteros en estudiantes de cuarto grado de secundaria.

H1: $\mu_1 > \mu_2$, el empleo del software GeoGebra mejora significativamente en el aprendizaje de las propiedades de los cuadriláteros en estudiantes de cuarto grado de secundaria.

Donde μ_1 y μ_2, es el promedio poblacional de las notas del aprendizaje de las propiedades de los cuadriláteros de los estudiantes del grupo experimental y del grupo de control respectivamente

ii) Establecer el nivel de significancia (α). Se considera $\alpha = 0.05$.

iii) Seleccionar el valor estadístico de prueba. En este caso la estadística de la prueba es la variable Z normal estandarizado dada por:

$$Z_{Cal} = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim N(0,\ 1)$$

$$Z_{Cal} = \frac{(4.6111 - 3.0966)}{\sqrt{\frac{1.2154}{36} + \frac{1.7569}{31}}} = 5.035$$

iv) Establecer la región de rechazo y de la región aceptación. Para determinar la región de rechazo y de aceptación de la hipótesis H_0 se debe hacer la gráfica de la distribución normal estandarizada con un nivel de significancia de 0.05, dicha gráfica se muestra en la figura 7.

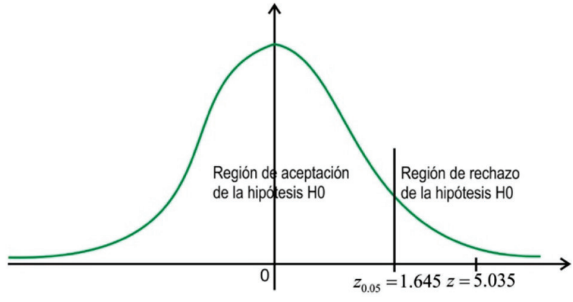


Figura 7. Región de rechazo y de aceptación de la hipótesis nula con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$

v) Tomar la decisión. De la figura 7 se observa que $z_{Cal} = 5.035 > z_{0.05} = 1.645$, es decir z calculado se encuentra dentro de la región de rechazo de la hipótesis H_0, por lo tanto se rechaza la H_0 y se acepta la hipótesis H1, llegando a la conclusión que, el empleo del software GeoGebra mejora significativamente el aprendizaje de las propiedades de los cuadriláteros en estudiantes de cuarto grado de secundaria.

Prueba de hipótesis de la hipótesis específico 3

i) Formulación de hipótesis nula y alternativa:
H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$, el empleo del software GeoGebra no mejora significativamente en el aprendizaje de las propiedades de la circunferencia en estudiantes de cuarto grado de secundaria.
H1: $\mu_1 > \mu_2$, el empleo del software GeoGebra mejora significativamente en el aprendizaje de las propiedades de la circunferencia en estudiantes de cuarto grado de secundaria.
Donde μ_1 y μ_2, es el promedio poblacional de las notas del aprendizaje de las propiedades de la circunferencia de los estudiantes del grupo experimental y del grupo de control respectivamente.

ii) Establecer el nivel de significancia (α). Se considera $\alpha = 0.05$.
iii) Seleccionar el valor estadístico de prueba. En este caso la estadística de la prueba es la variable Z estandarizado dada por:

$$Z_{Cal} = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim N(0,\ 1)$$

$$Z_{Cal} = \frac{(4.1111 - 2.4515)}{\sqrt{\frac{1.7016}{36} + \frac{1.4559}{31}}} = 5.406$$

iv) Establecer la región de rechazo y de la región de aceptación. Para determinar la región de rechazo y de aceptación de la hipótesis H_0 se debe hacer la gráfica de la distribución normal z estandarizada con un nivel de significancia de 0.05, dicha gráfica se muestra en la figura 8:

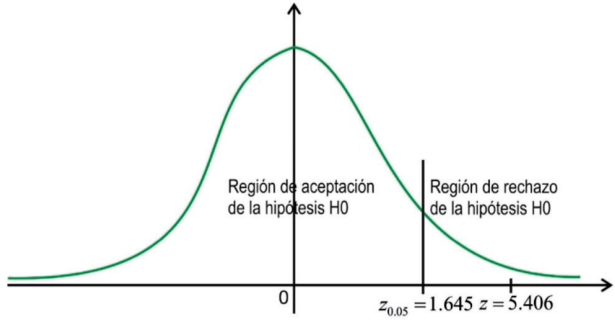


Figura 8. Región de rechazo y de aceptación de la hipótesis nula con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$

v) Tomar la decisión. De la figura 8 se observa que $z_{Cal} = 5.406 > z_{0.05} = 1.645$, es decir z calculado se encuentra dentro de la región de rechazo de la hipótesis H_0, por lo tanto se rechaza la H_0 y se acepta la hipótesis H1, llegando a la conclusión que, el empleo del software GeoGebra mejora significativamente el aprendizaje de las propiedades de la circunferencia en estudiantes de cuarto grado de secundaria.

SÍNTESIS DE RESULTADOS

Los resultados del trabajo de investigación demuestran que, el uso del software GeoGebra como base de la estrategia didáctica en sesiones de aprendizaje, mejoró significativamente en el aprendizaje de la geometría en estudiantes de cuarto grado de secundaria. Los estudiantes del grupo experimental y del grupo de control obtuvieron una nota en promedio aritmético de 13.3611 y 8.9354 puntos respectivamente. Lo que coincide con la investigación de Díaz-Nunja (2017). En relación con el aprendizaje de las propiedades de los triángulos, se observó, que el uso del software GeoGebra mejoró significativamente en el aprendizaje de las propiedades de los triángulos y que en una prueba de 7 puntos, los estudiantes del grupo experimental y del grupo de control obtuvieron una nota en promedio de 4.6111 y 3.2581 puntos respectivamente. Esto confirma los resultados encontrados por Ruiz (2012). En cuanto al aprendizaje de las propiedades de los cuadriláteros se observó, que en una prueba de 7 puntos, los estudiantes del grupo experimental y del grupo de control obtuvieron una nota en promedio de 4.6111 y 3.0966 puntos respectivamente. Aquí encontramos

una similitud importante con relación a los hallazgos encontrados por Pablo (2016), donde los estudiantes del grupo experimental obtuvieron un puntaje promedio de 14.50 puntos, a diferencia de los estudiantes del grupo de control que obtuvieron un puntaje promedio de 12.53 puntos. Por último, se observó que en el aprendizaje de las propiedades de la circunferencia, en una prueba de 6 puntos, los estudiantes del grupo experimental y control obtuvieron una nota en promedio de 4.1111 y 2.4515 puntos respectivamente.

CONCLUSIONES

Los resultados evidencian un comparación entre pruebas realizadas por estudiantes que siguieron una propuesta fundamentada en el uso de GeoGebra y un grupo de estudiantes que siguió una enseñanza tradicional, caracterizada por el uso de lápiz y papel. Un análisis sobre el tipo de tareas propuestas y la forma en que GeoGebra fue utilizado, permitiría mostrar las actividades de los estudiantes y la forma en que construyeron las propiedades de los triángulos, los cuadriláteros y la circunferencia. Es importante señalar, que los resultados cuantitativos, son considerados una evidencia sólida para dialogar con instancias decisivas en la innovación curricular y particularmente en la integración de GeoGebra –como ejemplo de software de geometría dinámica– para su inclusión en el corto, mediano y largo plazo en la enseñanza de la geometría. Asimismo, estos resultados sugieren la necesidad de crear talleres de capacitación basados en el uso de las tecnologías para los docentes de matemática, lo que permitiría asegurar la innovación didáctica constante, y atender una de las demandas pedagógicas y tecnológicas que impulsó el MINEDU. Esta formación especializada permitiría a los docentes, particularmente de las instituciones educativas de la región de Madre de Dios, incorporar en sus clases el uso del software GeoGebra. Lo que implicaría por supuesto, una reorganización didáctica estrechamente relacionada con la dimensión epistemológica de la geometría. Resulta necesario realizar más trabajos de investigación sobre el uso del software GeoGebra y la forma en que puede ser incorporado en las estrategias de enseñanza utilizadas por los docentes en la enseñanza de la geometría y en otras asignaturas matemáticas, que forman parte del programa curricular de Educación Secundaria. De manera general, el aporte de este estudio es mostrar la necesidad de incorporar al proceso de enseñanza de la geometría, el software GeoGebra, pues ofrece resultados en el aprendizaje de los estudiantes y sugiere al docente de matemática, que se trata de un

recurso didáctico tecnológico con potencialidad para estudiar la geometría de manera dinámica, pero con el rigor matemático. Lo que permitiría, al menos inicialmente, re-equilibrar su uso con el de la pizarra física y el plumón utilizado en la enseñanza tradicional, que suele conducir a una forma mecánica de plantear los temas de triángulos, cuadriláteros y circunferencias. En cuanto al proceso de aprendizaje, al estudiante se le permitiría interactuar con los objetos y sus relaciones geométricas para adquirir conocimientos y aplicarlos a la resolución de problemas de la geometría.

REFERENCIAS

Almeida, M. (2002). *Desarrollo Profesional Docente en Geometría: análisis de un proceso de Formación a Distancia.* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad Barcelona de España.

Bulut, M., y Bulut, N. (2011). Preservice teachers' usage of dynamic mathematics software. *TOJET: The Turkish Online Journal of Educational Tecnology, 10*(4), 294-299.

Cárdenas, G. E. (2018). *Influencia del software educativo Winplot en el aprendizaje de las funciones cuadráticas en los estudiantes del cuarto grado de secundaria de la Institución Educativa Nº 1260.* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima-Perú. https://cybertesis.unmsm.edu.pe/handle/20.500.12672/10112

Córdoba, F. J., Herrera, H. J., y Restrepo, C. M. (2013). Impacto del uso de objetos de aprendizaje en el desempeño en mamáticas de estudiantes del grado noveno. *Revista Virtual de la Universidad Católica del Norte, 2*(39), 47-58.

Córdova, M. (2008). *Estadística Aplicada.* MOSHERA S.R.L.

Díaz-Nunja, L. A. (2013). *La influencia del software GeoGebra en el aprendizaje del álgebra de los alumnos del 4to año de secundaria de la Institución Educativa Trilce de la Molina, periodo 2021.* (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Educación Enrique Guzmán y Valle. https://repositorio.une.edu.pe/handle/UNE/438

Díaz-Nunja, J. A. (2017). *La influencia del software GeoGebra en el aprendizaje del álgebra de los alumnos del 4to año de educación secundaria de la Institución Educativa Trilce del Distrito de Santa Anita.* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle. https://repositorio.une.edu.pe/handle/UNE/1371

Diaz-Nunja, L., Rodríguez-Sosa, J., y Lingán, K. S. (2018). Enseñanza de la geometría con el software GeoGebra en estudiantes secundarios de una institución educativa en Lima. *Propósitos y Representaciones* , *6*(2), 217-234.

Duval, R. (2000). Basic issues for research in mathematics education. En. T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th PME. International conference, 2* (pp. 55-69). PME.

Falen, R. (2017). *Uso de software GeoGebra en el aprendizaje de la línea de Matemáticas Aplicadas II de la carrera de Computación e Informática en el Instituto de Educación Superior Público República Federal de Alemania Chiclayo.* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, Lima-Perú. https://repositorio.une.edu.pe/bitstream/handle/UNE/1693/TD%20CE%201681%20F1%20-%20Falen%20Larrea.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ferreira, N., Guerra Cardoso, H., Santos Macedo, E., Brevario, D., y Arnholdt- Schmitt, B. (2009). Trabajo Conjetural con el uso de GeoGebra (Ed.), Memorias del Sexto Congreso Internacional de Matemática Asistida por Computadora (CIEMAC 6)- Costa Rica.

Gamboa R., y Ballesteros, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 4*(5), 113-136.

Gross-Salvat, B. (2000). *El Ordinador invisible: hacia la apropiación del ordenador en la enseñanza.* Gedisa.

Hernández, R., Fernández, C., y Batista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (Sexta Edición ed.). McGraw-Hill.

Hohenwarter , J., Hohenwarter , M., y Lavicza, Z. (2009). Introducing dynamic mathematic software to secondary school teachers: The case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 28*(2), 135-146.

Hohenwarter, M. (2002). GeoGebra-*a software system for dynamic geometry and algebra in the plane.* Unpublished Edition. Universidad de Salzburgo, Austria.

Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry. En L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secundary Matemátics: perspectives on practice*, (pp.121-139). Falmer Routledge.

Lamana-Selva, M. T., y De La Peña, C. (2018). Rendimiento Académico en Matemáticas. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 23*(79), 1076-1092.

López-Salmerón, N. (2006). *El empleo de software Cabri Geometri II en la enseñanza de la geometría en la Universidad Autónoma de Guerrero - México.* Universidad Autónoma de Guerrero.

Mejía, E. (2005). *Metodología de la investigación Científica.* San Marcos.

Mendes, T., Nascimento, G., Coelho Neto, J., Lucas, S., Pereira, R., y Bernadelli, M. (2014). The use of software GeoGebra as an Mathematics. *Revista Espacios*, 2-6.

MINEDU. (2017). *Currículo Nacional de la Educación Básica del Miniesterio de Educación.* Ministerio de Educación.

MINEDU. (2016). *Programa Curricular de Educación Secundaria.* Ministerio de Educación.

Murillo Hernández, W. (2008). *Investigación Científica.*

Pedhazur, E. J., y Pedhazur Schmelkin, L. (1991). *Medición, diseño y análisis: un enfoque integrado.* Lawrence Erlbaum Associates.

Peréz-Gómez, A. (1988). *Análisis didáctico de las teorías del aprendizaje.* Universidad de Málaga.

Pablo, M. (2016). *Influencia del software GeoGebra en el aprendizaje de la geometría análiitica en los estudiante de quinto grado de secundaria de la institución educativa Jose de la Torre Ugarte, El Augustino-2015.* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle. https://repositorio.une.edu.pe/handle/UNE/2006

Ruiz-López, N. (2012). *Análisis del desarrollo de competencias geométricas y didácticas mediante el software de geometría dinámica GeoGebra en la formación inicial del profesor de primaria.* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad Autónoma de Madrid.

Tatar, E., y Yilmaz, Z. (2016). Conceptual Understanding of Definite Integral with GeoGebra. Computers in the Schools. *Intersdisciplinary Journal of Practice, Theory and Applied Research, 33*(2), 120-132. http://doi.org/10.1080/07380569.2016.117480

Eliseo Pumacallahui Salcedo

Dirección: Tambopata, Puerto Maldonado

Teléfono: 95627745

RESEÑA DOI: 10.24844/EM3302.11

El Programa de Matemática Educativa del Instituto Politécnico Nacional, una historia de discotinuidades y rupturas

Veinte años han pasado tan rápido (Green Day, 2005)

Apolo Castañeda[1]

En el 2020 celebramos el vigésimo aniversario del Programa de Maestría y Doctorado en Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria en la Ciudad de México, uno de los Centros de Investigación del Instituto Politécnico Nacional. En el marco de estos festejos tuvo lugar un ciclo de conferencias en el que participaron profesores, activos desde su fundación, con el propósito de reflexionar el desarrollo del posgrado y señalar los desafíos para el futuro. Como cierre de este ciclo, se propuso una reflexión que no pretendió ser biográfica, lineal o cronológica, sino en un sentido ruptural, poniendo la mirada en los pliegues, fisuras, cortes, quiebres, y rupturas para dar cuenta de su transformación con el paso de los años y de cómo ha forjado su identidad como programa de posgrado.

Siguiendo las ideas de Foucault (1970), el método a partir del cuál pensamos las cosas, nos lleva a un determinado orden de saber, bajo esta idea, es posible formular una reflexión desde diversas perspectivas. Sin embargo, como se ha señalado, no se buscó hacer una historia del posgrado, sino detener la mirada en diversos acontecimientos que han propiciado las rupturas en el modo de hacer o de ser, siguiendo un método arqueológico documental, tratando de crear explicaciones sobre las relaciones de saber y poder que subyacen a estos

[1] Instituto Politécnico Nacional, acastane@ipn.mx, orcid.org/0000-0002-7284-8081

acontecimientos. El término "acontecimiento" en Foucault (1970) es empleado para designar la singularidad de un evento de carácter irrepetible, que aflora en un estado de fuerzas (fuerzas y contra-fuerzas) y que se opone a la regularidad discursiva construida por quienes operan la continuidad. Esto incluye relatos pequeños casi insignificantes, sujetos poco visibles, pequeños trozos de historia donde el desequilibrio y la inestabilidad son elementos comunes y sobre los cuales se problematiza.

En la emergencia de los acontecimientos no hay protagonistas ni responsables, la mirada se posiciona en comprender la dominación imperante de las reglas en un determinado momento. Si bien esta mirada en la ordenación de las cosas –a la que denominamos no-historia–, está influenciada por la propia relación con el Programa de Matemática Educativa, se decidió correr ese riesgo tratando de plantear esta reflexión con objetividad.

El primer acontecimiento "modelo educativo" tuvo lugar antes de la creación del programa. A finales de 1998 varios de los profesores fundadores participaron como docentes en un programa de maestría en el área educativa en modalidad virtual en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (una de las universidades privadas más importantes de México). Esta experiencia evidenció, por un lado, que era posible la educación mediada por las tecnologías y por otro, que se podría democratizar el acceso a los estudios de posgrado. Con esto en mente, se consolidó un proyecto de maestría y doctorado específicamente en el área de Matemática Educativa para el sector público, al seno de una de las instituciones educativas públicas más grandes del país: el Instituto Politécnico Nacional, bajo un modelo que irrumpía el *status quo*, no solo en el contexto de la propia institución, al posicionarse como el primer posgrado en modalidad a distancia, sino también, en el escenario nacional al proponer un modelo educativo innovador, inclusivo y accesible. El programa de Matemática Educativa surgió en este escenario de ruptura con el modelo educativo presencial, apostando por una mediación tecnológica sin pretender ser masivo.

Pero hubo dos factores decisivos para que el Instituto Politécnico Nacional acogiera el proyecto, por un lado, la experiencia acumulada de los Centros de Educación Continua en el país, al atender las demandas de formación profesional a través de la infraestructura de videoconferencia. Por otro, un grupo consolidado de investigadores en Matemática Educativa tanto del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav (Centro de Investigación y de Estudios Avanzados) como del propio Instituto que apoyaron la viabilidad del proyecto. Es decir, el Programa de Matemática Educativa, resultó de un juego de fuerzas que

permitieron la reconfiguración y reensamblaje en una nueva combinación y posibilidad de posgrado.

El segundo acontecimiento que se identificó fue el de "autonomía progresiva". El grupo de profesores que inicialmente concibió, creó, impulsó y defendió el proyecto del Programa de Matemática Educativa, finalmente no asumió su administración aunque tampoco se distanció, en cambio optó por apoyar la conformación de un grupo de profesores que asumiera la coordinación y estuviera dispuesto a atender cualquier contingencia en la gestión del programa. A este grupo de profesores, encargado de mantener la estabilidad del programa, les caracterizó la habilidad para inventar y reinventar las formas e infraestructuras sociotécnicas que posibilitaron las diversas formas de interacción, esenciales en la gestión del programa. Denotó la capacidad de cuidado, recuperación, creatividad y cantidad de trabajo para mantener el orden y la continuidad del programa. Plataformas, medios de comunicación, tecnologías de la información, etcétera, son solo algunas de las piezas de naturaleza técnica que se han reconfigurado y reensamblado en nuevas combinaciones y posibilidades, en palabras de Jackson (2014) "un tema tanto de esperanza como de preocupación".

En este proceso continuo de invención y reinvención, se observó el fenómeno ineludible de apropiación progresiva del posgrado, pues en las sucesivas intervenciones para reparar y mantener la continuidad este grupo de profesores tomó decisiones y definió, en términos De Certeau (2000) sus "maneras de hacer", un rasgo característico de la apropiación. Sin embargo, estas "maneras de hacer" generaron tensiones que fueron inevitables, por un lado, con relación al orden normativo-institucional vigente que en ese entonces contemplaba procedimientos para el posgrado presencial, por otra parte, con relación a las perspectivas académicas del grupo de profesores que concibió el posgrado, si bien, sensibles a la naturaleza y enfoque de este proyecto, distantes de las sutiles tareas de reparación, mantenimiento y "modos de hacer" que propusieron los profesores de este segundo grupo.

El tercer acontecimiento se ha denominado "autonomía tecnológica". En el contexto de la acción de este segundo grupo de profesores, fue evidente la incapacidad para mantener la continuidad de los nuevos subsistemas tecnológicos necesarios para la gestión del posgrado, particularmente en lo que se refiere a las tecnologías digitales. Los conocimientos ofimáticos si bien necesarios, no eran suficientes para responder a las necesidades de interacción sobre la que se planteó la orientación del posgrado. El modelo de videoconferencia a las subsedes, inicialmente planteado, no se consolidó debido a la

dificultad de los propios estudiantes para desplazarse a las Unidades de Educación Continua del Instituto, y para el caso de estudiantes extranjeros, sin una sede disponible, la única opción era el correo postal. Hay que considerar que el internet en el año 2000, los servicios de video streaming eran bastante rudimentarios y no se disponía de infraestructura tecnológica para la transmisión y recepción masiva de datos. Así que se replanteó y se optó por un modelo de interacciones asíncronas en el entorno de una plataforma virtual, el cual se mantiene hasta ahora. Sin embargo, el ideal de esta "infraestructura tecnológica" ha sido redefinida por varios episodios de ruptura y continuidad, algunos de ellos a consecuencia de políticas institucionales y otras, por razones económicas. No hay que olvidar que el Instituto Politécnico Nacional posee una enorme infraestructura tecnológica, pero la sede del CICATA en Legaria se encuentra fuera de la red principal de telecomunicaciones, lo que hace muy difícil la administración, gestión y coordinación de los servicios informáticos. Así que, en desde 2008 se decidió operar bajo servidores propios y administrar totalmente el servicio de telecomunicaciones. Este acontecimiento, disruptivo para la lógica institucional, permitió emanciparnos y controlar la gestión académica, haciendo más eficiente el flujo de información. Esto develó la trascendental participación de un tercer grupo de colaboradores, dedicado a atender las averías, el mantenimiento, las reparaciones a este ideal de infraestructura tecnológica que, dicho sea de paso, en su propia naturaleza está el romperse. Un grupo siempre *tras bambalinas* que mantiene la infraestructura tecnológica para que los estudiantes y los profesores no tuvieran problemas.

El cuarto acontecimiento "el establecimiento de la movilidad en la virtualidad" se produjo en los primeros años de operación del posgrado. Inicialmente se había pensado en el formato de videoconferencia, pero como se ha señalado, esto requería una infraestructura específica en la sede remota. El modelo pronto se mostró inviable debido a las exigencias para su operación, lo que motivó a replantearlo introduciendo el uso de una plataforma tecnológica. Este nuevo escenario facilitó la sistematización de los contenidos en los cursos y propició una interacción más fluida entre estudiantes y profesores. Este lugar de encuentro en la virtualidad, caracterizado por la flexibilidad en las formas de interacción y la disponibilidad de los materiales de estudio, contribuyó a sostener el propósito planteado inicialmente en el proyecto del posgrado; integrar a los más destacados investigadores y profesores de Matemática Educativa del país y del extranjero a las actividades académicas del posgrado. Desde los primeros años de su gestión y hasta la fecha, resulta muy natural la participación de profesores

invitados en cursos, seminarios, revisiones de tesis, direcciones de tesis, y eventos académicos. Esto es una característica propia del programa, de ahí su flexibilidad teórica y apertura a la diversidad de pensamiento.

El quinto y último acontecimiento se titula "visibilidad del programa". Desde la perspectiva de Foucault, la visibilidad o invisibilidad están íntimamente ligadas al poder, desde al menos dos dimensiones; una referida a un juego de fuerzas que limita o alienta esa visibilidad y, otra, a la propia fuerza de nuestra mirada que ineludiblemente está asociada a los "modos de hacer", en primer lugar, la efectividad que se puede valorar en términos del cumplimiento de los objetivos del posgrado, específicamente en lo que respecta a la formación de capital humano, al propiciar y lograr que los egresados se asuman "agentes de cambio", proactivos y de influencia en sus respectivos ámbitos de ejercicio profesional. Por otra parte, la innovación. En palabras de Jackson (2014), la innovación rara vez o incluso nunca es inherente a los momentos de origen, por que la eficacia de esa innovación es limitada, y se manifiesta plenamente cuando se mantiene y repara. Ese carácter innovador que reconocemos en el Programa proviene de las sucesivas intervenciones de sus profesores y administrativos al zurcir ese tejido, para darle continuidad a la misión y visión del programa, al afrontar los retos que impone la gestión, y no propiamente en el glamoroso uso de las tecnologías digitales. La mirada acerca del proceso formativo o, mejor dicho, del proceso de desarrollo académico de nuestros estudiantes se fundamenta en dos principios,: una intensa interacción y un acompañamiento continuo. Este es "un modo de hacer" característico del Programa que coloca en primer plano el desarrollo humano como medio de transformación social.

Algunas reflexiones finales. En esta época de confinamiento, atestiguamos muchas voces, algunas preocupadas sobre los cambios observados en la forma de plantear la educación, y que contrastan con las expresiones compartidas en este ciclo de conferencias como por ejemplo "el trabajo en línea lo hacemos desde hace 20 años", "planear un curso en línea...", "integrar tecnologías de comunicación...". Los estudiantes de posgrado, que han experimentado este modelo académico, se adaptaron rápidamente a la inesperada contingencia. Pero, el Programa se adelantó a la normatividad de los programas no presenciales en el Instituto Politécnico Nacional unos 10 años, a los esquemas de evaluación no presencial del Padrón Nacional de Posgrados 7 años, a la modalidad de congreso virtual 5 años, a la movilidad académica virtual, entre muchos otros, pues citando a la Dra. Avenilde Romo "la virtualidad nos hace presentes".

REFERENCIAS

De Certeau, M. (2000). *La invención de lo cotidiano, 1 Artes de hacer.* Universidad Iberoamericana-ITESO

Foucault, M. (1970). *Arqueología del saber.* Siglo XXI Editores.

Green Day (2005). Wake me up when september ends [Canción]. En *American Idiot.* Warner Bros Records.

Jackson, S. J. (2014). Rethinking Repair. En T. Gillespie, P. Boczkowski, y K. Foot (Eds.) *Media Technologies: Essays on communication, materiality and society*, 221–240. MIT Press. https://doi.org/10.7551/mitpress/9780262525374.003.0011

Apolo Castañeda

Domicilio Postal: Programa de Matemática Educativa
CICATA Unidad Legaria
Calzada Legaria 694, Col.Irrigación

RESEÑA DE LIBRO DOI: 10.24844/EM3302.12

La teoría de la objetivación. Una perspectiva vigotskiana sobre conocer y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, de Luis Radford

Armando Solares-Rojas[1]

Luis Radford nos ofrece en este libro un recuento sistemático de la Teoría de la Objetivación (TO). Ubica a la TO como una teoría sociocultural inspirada en el materialismo dialéctico contemporáneo; es decir, como una teoría que concibe al aprendizaje como un proceso histórico-cultural colectivo. Por "colectivo" la TO no se refiere a un conjunto de individuos que negocian idiosincráticamente los significados de sus conocimientos matemáticos; en la TO el colectivo se refiere a individuos que trabajan juntos para satisfacer las necesidades comunitarias del grupo; colectivo se refiere a maestros y estudiantes trabajando y aprendiendo juntos, co-produciendose a sí mismos en un transfondo histórico y cultural específico. En ese sentido, una característica fundamental de la TO es dicha *labor conjunta*.

La TO desconstruye y replantea nuestros conceptos de maestro y alumno. Va más allá del concepto del maestro como "patriarca del conocimiento", como poseedor, validador y gestor del conocimiento matemático que ayuda a los estudiantes a comprender los contenidos curriculares. La TO entiende al maestro y los estudiantes como seres en permanente flujo y cambio, que se co-producen a sí mismos mediante su labor educativa conjunta, con la cual se comprometen

[1] Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, asolares@cinvestav.mx, orcid.org/0000-0002-3478-1736

éticamente y en la cual sufren y luchan juntos, pero también encuentran disfrute y realización.

Inspirada en las filosofías de Hegel y Marx, la obra de Vygotsky y el concepto de educación de Freire, la TO se plantea el siguiente doble objetivo:

- ofrecer una concepción teórica del aprendizaje como un genuino proceso histórico-cultural colectivo, y
- explorar las condiciones pedagógicas concretas y específicas que hacen posible un aprendizaje colectivo genuino.

En concordancia con el principio dialéctico del materialismo de que el proceso de conocer *va/asciende de lo abstracto a lo concreto*, Radford comienza el primero de los diez capítulos del libro abordado la cuestión general de lo que es una teoría en educación matemática. A lo largo del libro, nos proporciona tanto elementos teóricos abstractos como sus concreciones a través de ejemplos provenientes tanto de la historia de las matemáticas como de situaciones concretas de aula. En el primer capítulo, Radford plantea que una teoría en educación matemática puede considerarse como un sistema que siempre está cambiando y que está constituido de componentes interrelacionados. Discute las diferencias de la aproximación de la TO con otras teorías, en particular, las constructivistas y la Teoría de las Situaciones Didácticas. En este capítulo Radford presenta el objetivo de la TO y lo enmarca en una concepción de la educación matemática "como un esfuerzo político, social, histórico y cultural dirigido a la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en discursos y prácticas matemáticas histórica y culturalmente constituidos, y que ponderan nuevas posibilidades de acción y pensamiento" (Radford, 2021, pp. 15-16).

El capítulo 2 se dedica a una descripción general de la TO en el marco de las teorías socioculturales en educación matemática. El autor nos ofrece una discusión de algunos de los elementos básicos de la TO, como los conceptos de aprendizaje, maestro, estudiantes, artefactos, signos, lenguaje y corporeidad (*embodiment*). Con estos elementos, Radford nos propone una primera descripción de la TO como una manera de comprender la enseñanza y el aprendizaje no como el resultado de los propios actos de los individuos, sino como procesos de conocer (*knowing*) y devenir (*becoming*) cultural e históricamente situados.

La cuestión fundamental del conocimiento y su aprendizaje se aborda en el capítulo 3, introduciendo los elementos teóricos saber (*knowledge*) y conocimiento (*knowing*). En la TO, la relación entre estos dos elementos es dialéctica en un

sentido materialista. Radford nos dice "el saber (*knowledge*) es una entidad general, un sistema de formas o arquetipos de pensamiento, acción y reflexión constituidos histórica y culturalmente a partir del trabajo colectivo material, corporizado y sensible" (pp. 40-41); mientras que "el conocimiento (*knowing*) es el contenido conceptual concreto a través del cual el saber se corporiza, materializa o actualiza" (p. 51). Al final del capítulo, Radford nos ofrece una hermosa metáfora de las diferencias entre estos dos elementos teóricos a partir del análisis de dos interpretaciones distintas (dos concreciones) de la Séptima sinfonía de Beethoven, dirigidas por Karajan y por Rubinstein, respectivamente.

Con estos elementos, en los capítulos 4 y 5 se discuten a detalle los conceptos de aprendizaje y objetivación. Si bien objetivación aparece en distintas teorías, su significado en la TO proviene de la fenomenología de Hegel y se entiende como "un proceso social mediante el cual el individuo adquiere progresivamente una conciencia crítica de las formas histórico-culturales de pensar y hacer" (p. 83). Pero es fundamental señalar que durante estos procesos la conciencia –en tanto relación y auto-posicionamiento del individuo con respecto al mundo exterior– se forma y se transforma. Por su parte, "El aprendizaje consiste en percibir activa y creativamente estos sistemas histórico-culturales de pensamiento y acción" (p. 84); es decir, aprender es volverse conciente y crear conciencia crítica de estos sistemas.

El capítulo 6 presenta un panorama de lo que se entiende por corporeidad (*embodiment*) y su importancia en la TO; a partir de ello, se introduce el concepto de *cognición sensible o sensual*. En relación con la corporeidad (*embodiment*), Radford sostiene que el cuerpo es un lugar para la constitución de los significados matemáticos subjetivos de los estudiantes y del sistema cultural e histórico de significados matemáticos que ofrece la escuela. Por su parte, "la cognición sensible (*sensuous cognition*) se refiere a la idea de que la cognición humana es una forma sensible, multimodal, cultural e históricamente constituida de responder, actuar, sentir, transformar y dar sentido al mundo de manera creativa" (p. 108). Para la TO el cuerpo, los sentidos y los objetos percibibles mediante los sentidos no se consideran entidades dadas, sino son entidades mutuamente transformadas por la actividad histórico-cultural.

Como toda teoría de educación matemática, el diseño de tareas constituye un aspecto metodológico de suma importancia. Esl capítulo 7 se dedica a la metodología de configuración de las actividades de enseñanza y aprendizaje en la TO. Este capítulo provee de elementos para la elección de problemas matemáticos a presentar a los estudiantes, el orden en que es conveniente

presentarlos, y las formas de colaboración que pueden ayudar a los estudiantes a resolver estos problemas. Radford propone que la organización de las tareas se efectúe mediante lo que llama *unidad conceptual y contextual* (la interrelación entre los problemas en términos de un contexto específico), con la cual se busca crear niveles profundos de conceptualización matemática mediante una curva de *creciente complejidad conceptual* de los problemas que se presenta a los alumnos.

El capítulo 8 se dedica a discutir una de las cuestiones más complejas pero menos atendidas de las teorías educativas socioculturales: la naturaleza cultural del pensamiento matemático. Desde mi punto de vista, se trata de uno de los capítulos más originales e interesantes de este libro. Después de discutir diferentes maneras de entender lo que son la "cultura" y las "diferencias culturales", Radford nos presenta qué se entiende por cultura desde el enfoque dialéctico materialista de la TO. A partir de estos posicionamientos, discute tres formas distintas de pensamiento matemático de la antigua Grecia, asociadas intrínsecamente a prácticas sociales que responden a las demandas de distintos momentos históricos, políticos y económicos de la sociedad griega. Más allá del pensamiento matemático teoremático frecuentemente asociado con los *Elementos* de Euclides, Radford nos ofrece en este capítulo un análisis profundo de las tradiciones del pensamiento matemático de los geómetras prácticos –*harpēdonaptai*–, dedicados a la medición de terrenos usando cuerdas, y de los calculistas con guijarros, dedicados a cálculos numéricos para negocios comerciales y finanzas de la época.

El capítulo 9 enfoca la discusión del proceso de subjetivación. Nuevamente, mediante ejemplos provenientes de la historia de las matemáticas y de situaciones de clase, el autor nos presenta procesos de subjetivación –de posicionamiento en las prácticas matemáticas específicas– entrelazados con los procesos de objetivación, a través de los cuales se da el aprendizaje.

Finalmente, el capítulo 10 nos reserva uno de los aspectos más característicos y originales de la TO, en tanto teoría de educación matemática: su *ética comunitaria*. Radford nos propone concebir y practicar una *ética de la liberación*, entendida "como una fuerza liberadora que puede ayudar a enfrentarnos a las fuentes y estructuras históricas, políticas y económicas de la opresión, la violencia y la desigualdad" (p. 206). Para Radford la TO no solo es un lente teórico a través del cual mirar e interpretar los fenómenos del aprendizaje; también es una invitación enfática y sólidamente fundamentada a transformar las prácticas pedagógicas matemáticas, a transformar el aula en un lugar donde los

estudiantes puedan encontrar conocimientos y voces culturales matemáticas diversas, y al mismo tiempo vivir experiencias de vida colectiva, de solidaridad, de pluralidad y de inclusión.

Para terminar esta reseña, un comentario personal. Coincido profundamente con el autor cuando nos propone mirar la labor educativa conjunta como portadoras de esperanza. Esperanza en el sentido de Freire, "la esperanza de que juntos podamos hacer del mundo que heredamos y del que somos responsables, un lugar mejor: un mundo digno para quienes vengan y vivan como humanos: es decir, en paz y en solidaridad" (p. 209).

REFERENCIAS

Radford, L. (2021). *The theory of objectification: A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Brill/Sense: Leiden, The Netherlands.

Armando Solares-Rojas

Dirección: Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav
asolares@cinvestav.mx

IN MEMORIAM
DOI: 10.24844/EM3302.13

Ubiratan D'Ambrosio: El legado de una vida dedicada a la búsqueda de las matemáticas por la paz

Milton Rosa[1]
Daniel Clark Orey[2]

El 12 de mayo del 2021, la comunidad mundial de Etnomatemáticas, Educación Matemática y afines, que Ubiratan D'Ambrosio sembró y cultivó, quedó consternada por la noticia de su fallecimiento.

Es innegable la importancia que tuvo Ubiratan D'Ambrosio para el desarrollo del Programa Etnomatemáticas en Brasil y, también, internacionalmente, ya que este investigador es el teórico y filósofo más importante en este campo de estudio e investigación. D'Ambrosio era el líder internacional y el principal divulgador mundial de las ideas relacionadas con las Etnomatemáticas y sus aplicaciones en la Educación Matemática a través de las conexiones entre las Matemáticas y la Cultura.

Ubiratán D'Ambrosio. Archivo personal de Milton Rosa (2019)

En sus investigaciones sobre los estudios sociales, políticos y culturales, D'Ambrosio estableció una profunda relación entre las matemáticas, la antropología y la sociedad. Por ejemplo, en 1983, D'Ambrosio fue honrado con el título de *Fellow de la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia* (AAAS) por su liderazgo efectivo en la evolución de la Educación

[1] Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), Milton.rosa@ufop.edu.br, Brasil.
[2] Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP), oreydc@gamil.com, Brasil

Matemática en América Latina y también por sus esfuerzos dirigidos al desarrollo de la cooperación internacional.

En ese contexto, en 1997 D'Ambrosio fue considerado como el padre intelectual del Programa Etnomatemáticas y en al año 2000, este investigador fue elegido como uno de los matemáticos más importantes del siglo XX, principalmente, en relación con los temas sociales, políticos, culturales y antropológicos a través del Programa Etnomatemáticas.

En 2001, D'Ambrosio fue honrado por el *Comité Internacional de Historia de las Matemáticas* con el *Premio Kenneth O. May* por sus importantes contribuciones a la Historia de las Matemáticas y, en el 2005, fue honrado por el *Comité Internacional de Instrucción de Matemáticas* (ICMI) con la segunda *Medalla Felix Klein* por el reconocimiento a sus aportes en el campo de la Educación Matemática.

En una búsqueda de los usos pacíficos de las Matemáticas y de las Ciencias, D'Ambrosio ofreció una dirección alternativa para brindar una nueva perspectiva a su trabajo en la Educación Matemática. Ha sido particularmente interesante profundizar en esta exploración de sus reflexiones sobre la globalización, los mitos y la religión porque D'Ambrosio también estaba preocupado con el desarrollo de las *ticas* del *matema* en diferentes *etnos*.

D'Ambrosio siempre se preocupó por la supervivencia de la humanidad que depende de nuestra relación con la naturaleza, que está regulada por principios ecológicos. Entonces, para comprender a los seres humanos, así como a las otras especies, D'Ambrosio enseñó que dependemos esencialmente del análisis de una tríada: *individuos-sociedad-naturaleza*, bien como de la efectividad de las relaciones entre ellas.

En este sentido, la supervivencia y la trascendencia han sido, a lo largo de la historia, las raíces del conflicto, que se desarrolla en el enfrentamiento, la violencia y el sometimiento de los individuos y la naturaleza.

Actualmente, el gran desafío para todos nosotros es poder enfrentar los conflictos, que son intrínsecos a la vida. Es un derecho innegable de todos los seres humanos compartir los bienes culturales y naturales necesarios para nuestra supervivencia material y superación en la búsqueda por la trascendencia intelectual.

Por medio de sus estudios, D'Ambrosio concluyó que los matemáticos, científicos e ingenieros no son los únicos que construyen, desarrollan, usan, acumulan y difunden el conocimiento matemático. Esto es porque el conocimiento se genera mediante el desarrollo de diferentes procesos, que son comunes a todos

los miembros de grupos socioculturales que permiten a sus integrantes elaborar y utilizar las habilidades matemáticas que incluyen contar, localizar, medir, dibujar, representar, jugar, comprender y explicar las necesidades e intereses de diversos grupos. e individuos.

En este sentido, esta visión más amplia de D'Ambrosio sobre la Educación Matemática explica el dinamismo cultural dentro y entre diferentes sociedades y comunidades, a través de una acción dialógica que puede transformar el conocimiento matemático en busca del bien común. Además, los principios de D'Ambrosio son consistentes con los ideales freireanos, ya que el conocimiento matemático es dinámico, siendo considerado como el resultado del desarrollo de la actividad humana.

Durante su trayectoria personal, académica y personal, D'Ambrosio compartió con nosotros su visión de cuán fundamental debe ser que la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas valoren el contexto sociocultural del conocimiento matemático y que debemos fomentar y conectar este aspecto a los diversos procesos de aprendizaje.

Este enfoque tiene como objetivo proponer metas educacionales que busquen el aprecio y respeto por los conocimientos matemáticos diversos, no solo la valorización de los currículos formales y académicos para que podamos lograr la justicia social y la paz en este momento de crisis pandémica.

Esperamos que este tributo sea significativo y relevante para la comunidad de la Educación Matemática, porque D'Ambrosio contribuyó para el desarrollo de una sociedad más justa a través de los aspectos socioculturales de las Matemáticas.

Así, a través de su liderazgo internacional, este investigador luchó por el bienestar de las personas, la preservación de los recursos naturales y culturales, que pueden sintetizarse como la paz en sus diversas dimensiones, como, por ejemplo, la paz interior, la paz social, la paz ambiental y la paz militar.

DOI: 10.24844/EM3302.14

In Memoriam Gérard Vergnaud[1]

Michèle Artigue[2] y Janine Rogalski[3]

Con gran tristeza la comunidad ICMI se enteró del fallecimiento de Gérard Vergnaud, en París, el 6 de junio de este año.

Gerard. Vergnaud

Gérard Vergnaud nació en 1933 en Doué-La-Fontaine, Francia, en el seno de una familia de origen modesto, lo que normalmente habría significado que sus estudios los interrumpiera después de la educación primaria. Afortunadamente, uno de sus maestros de primaria persuadió a sus padres para que lo inscribieran en un examen para obtener una beca, lo que le permitió acceder a la educación secundaria. Como compartió en la entrevista realizada para la preparación de la tarde temática del ICME-13 en 2016, su amor por el teatro y la mímica lo llevaron, luego de graduarse de HEC, una famosa escuela de negocios francesa, a interesarse por la psicología. Se inscribió en

[1] Publicado originalmente por la International Commision on Mathematical Instruction (ICMI) https://www.mathunion.org/icmi/icmi-news-july-2021.

Traducción: Mario Sánchez Aguilar y Luis Manuel Aguayo Rendón

[2] Profesora emérita. Laboratorio de Didáctica André Revuz, michele.artigue@univ-paris-diderot.fr

[3] Directora de investigación honoraria. Laboratorio de Didáctica André Revuz, rogalski.muret@gmail.com

psicología en la Universidad de la Sorbona y tomó el curso que en ese momento impartía Jean Piaget. Este fue un verdadero choque intelectual, que lo llevó a preparar una tesis bajo la supervisión de Piaget, sobre la actividad de resolución de problemas de los niños de 4 a 10 años de edad, la cual defendió en 1968. Mencionó, en la misma entrevista, que también fue gracias al apoyo de Piaget que ingresó al CNRS (Centro Nacional para la Investigación Científica) en 1963 como investigador asociado en el laboratorio de Bresson. Finalmente pasó toda su carrera en el CNRS, donde sucesivamente lideró equipos de investigación en varios laboratorios, vinculando siempre temas de investigación sobre el desarrollo cognitivo y el estudio del papel de la educación (para niños) o la formación (para adultos). Se jubiló en 1999 pero no detuvo su actividad científica, convirtiéndose en Director de Investigación Emérito.

Gérard Vergnaud jugó un papel importante en la evolución de la relación entre la psicología del desarrollo cognitivo y la didáctica de las matemáticas, ayudándola a pasar del estatus de referencia externa al papel de participante en el estudio de todo tipo de fenómenos didácticos, como lo expresó Jean Brun en su contribución al congreso organizado en Francia en 1993, en homenaje a los dos padres fundadores de la investigación francesa en didáctica de las matemáticas, Guy Brousseau y Gérard Vergnaud (Brun, 1994). Vergnaud es, en efecto, según sus propias palabras, el primer psicólogo que ha colocado la cuestión de los contenidos del conocimiento en el corazón de la psicología del desarrollo y que ha afirmado la necesidad de que el psicólogo no permanezca prisionero de su descripción actual para ser capaz de analizar la formación y el funcionamiento del conocimiento en el sujeto individual (Brun, 1994, pp. 71-72). Esto se convertiría en la base de su contribución principal a la educación matemática, la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud , 1991, 2009). Sin embargo, como también explicó en dicha entrevista, fue a través de una combinación de circunstancias que entró en contacto con el mundo de la educación y la naciente investigación didáctica. A finales de la década de los años 1960 aceptó una invitación para sustituir a un colega como consejero pedagógico de profesores de una escuela primaria cuyo director quería introducir las matemáticas modernas. Asistió a clases y ayudó a los maestros a elegir situaciones. En el panel de entrevistas del ICME-10, reflexionando sobre este primer compromiso, dijo: "Puedo añadir que la teoría de los campos conceptuales nació en ese momento, aunque solo varios años después pude formalizarla como una tripleta formada por un conjunto de situaciones, un conjunto de invariantes

operacionales y un conjunto de representaciones simbólicas y lingüísticas" (Artigue *et al*, 2008, p. 108).

En el lugar central que se le dio a la noción de situación en esta conceptualización, también jugó un papel su encuentro con Guy Brousseau, fundador de la teoría de las situaciones didácticas. Ocurrió a principios de los años setentas. Sobre este tema, en este mismo panel, Vergnaud dijo: "Me impresionó mucho la reflexión y la experiencia de Guy Brousseau sobre las situaciones didácticas [...]. Entonces pude relacionar el concepto de 'esquema', que había tomado prestado de Piaget, con el concepto de 'clases de situaciones' ". (Artigue *et al.,* 2008, p. 108). Pero su enfoque psicológico de la noción de situación es sustancialmente diferente del de Brousseau. Los didáctas franceses, quienes, como nosotros, vivieron este período, todavía recuerdan los debates científicos a los cuales dieron lugar estas diferencias de estilo, durante las sesiones del seminario nacional de didáctica o en las primeras escuelas de verano de didáctica de las matemática, a principios de los años 80.

La mayor contribución de Vergnaud a la didáctica de las matemáticas es, como se escribió antes, la teoría de los campos conceptuales. Ha nutrido y sigue nutriendo una gran cantidad de estudios de investigación en educación matemática, y más allá. La teoría se basa en la idea de que el desarrollo cognitivo no puede entenderse considerando los conceptos como entidades aisladas: es necesario abordarlos en sus interacciones con otros conceptos cercanos. Así, la noción de campo conceptual es definida como un "conjunto de situaciones y un conjunto de conceptos relacionados" (Vergnaud , 2009, p. 86).

La visión dialéctica que propone Vergnaud entre una noción de esquema inspirada por Piaget y la de situación, es el segundo pilar de la teoría. De hecho, Vergnaud define un esquema como la organización invariante de la acción para una clase de situaciones y distingue en él cuatro componentes: metas, submetas y anticipaciones; reglas de acción; invariantes operacionales (conceptos en acción o teoremas en acción); y posibilidades de inferencias. No podemos entrar en detalles, pero nos gustaría mencionar la importancia para Vergnaud de la distinción entre dos formas de conocimiento, el conocimiento operacional que permite actuar y el conocimiento predicativo que permite formular y justificar la acción. La extensa investigación que Vergnaud ha realizado sobre los campos conceptuales de las estructuras aditivas y multiplicativas es emblemática de este enfoque y se ha convertido en un referente internacional (Vergnaud, 1982, 1983).

Gérard Vergnaud se involucró desde el principio en las actividades de la comunidad ICMI. Junto con Efraim Fischbein y Richard Skemp, fue uno de los

fundadores del PME, uno de los dos primeros grupos de estudio afiliados al ICMI. La creación del PME siguió al congreso ICME-3 en Karlsruhe en 1976. En el panel de entrevistas en ICME-10, contó esta anécdota que revela su buena personalidad: durante la reunión de Warwick en 1979, "Alan Bell había escrito un borrador de una constitución, pero no habíamos podido llegar a un acuerdo. Invité a Alan Bell y Hartwig Meissner a mi casa en los suburbios de París. Tuvimos buena comida y buenos vinos. Llegamos a un acuerdo con bastante facilidad. El texto de la primera constitución del PME fue adoptado en Berkeley en 1980 sin discusión alguna" (Artigue *et al.*, 2008, p. 111).

El propio Vergnaud organizó dos conferencias PME, la primera en Grenoble en 1981 y la segunda en París en 1989, en el momento en que Francia celebraba el bicentenario de la Revolución de 1789.

Pero la contribución científica de Gérard Vergnaud no se limita a lo anterior, ni siquiera a su contribución a la educación matemática. A partir de los años noventa, cada vez más interesado en el desarrollo de las competencias y el aprendizaje en el trabajo con adultos, contribuyó, junto con Pierre Pastré, Pierre Rabardel, Janine Rogalski y Renan Samurçay, al surgimiento de la didáctica profesional (término introducido por Pierre Pastré en su tesis doctoral). En 1996 se incorporó al laboratorio de cognición de la Universidad París 8 y, desde su creación por Pierre Rabardel, participó en el equipo de ergonomía C3U en el laboratorio multidisciplinario Paragraphe. Como se destaca en la nota que sus compañeros escribieron tras su deceso, su profundo acuerdo con los investigadores de este laboratorio fue tanto metodológico, con la importancia que se le da al análisis de actividades complejas en situaciones naturales, como teórico, con una perspectiva de desarrollo que combina los aportes de la corriente de investigación piagetiana con los del enfoque histórico- cultural de la psicología soviética y el enfoque de Lev Vygotsky. A su vez, este nuevo campo de la didáctica profesional se ha convertido en un recurso para los investigadores en educación matemática que estudian las prácticas profesionales de los docentes (Vandebrouck , 2013).

Gérard Vergnaud no fue solo un científico eminente; a lo largo de su vida profesional también fue un activista, defendiendo su visión de la investigación en psicología, impulsando el reconocimiento del campo de la investigación didáctica por parte del CNRS (obteniendo la creación de la primera GDR didáctica en 1984), y también fue un investigador fuertemente comprometido con las actividades sindicales. Estableció numerosas relaciones con instituciones de investigación de todo el mundo y isupervisó más de 80 tesis doctorales! Fue

Doctor Honoris Causa por la Universidad de Ginebra (1995), por la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (2011) y miembro de la Academia Internacional de Ciencias Psicológicas de Rusia.

Hemos perdido a un gran y único investigador y ser humano, pero estamos seguros de que sus escritos continuarán inspirando a los investigadores en educación matemática y en otros campos durante décadas.

REFERENCIAS

Artigue, M., D'Ambrosio, U, Hanna, G., Kilpatrick, J., y Vergnaud, G. (2008). Plenary panel session moderated by Michèle Artigue. En M. Niss (Ed.), *Proceedings of ICME-10* (pp. 105-122). IMFUA, Department of Science, System and Models, Roskilde University, Denmark.

Brun, J. (1994). Evolution des rapports entre la psychologie du développement et la didactique des mathématiques. En M. Artigue, R. Gras, C. Laborde y P. Tavignot (Eds.), *Actes du Colloque Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France* (pp. 67-83). La Pensée Sauvage.

Vandebrouck, F. (Ed.) (2013). *Mathematics classrooms. Students' activities end teachers' practices*. Sense Publishers.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and substraction: a cognitive perspective* (pp. 39-59). Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Academic Press.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2/3), 133-170.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development, 52*, 83–94. http://www.cfem.asso.fr/cfem/ICME-13-didactique-francaise
https://ardm.eu/autres-annonces/deces-de-gerard-vergnaud/

Ver el sitio website https://gerardvergnaud.wordpress.com/ gathering various of Vergnaud's contributions.

www.revista-educacion-matematica.com

Educación Matemática *vol. 33 • núm. 2 • agosto de 2021*