

Educación Matemática



Sociedad Mexicana
de Investigación
y Divulgación
de la Educación
Matemática, A.C.



**UNIVERSIDAD DE
GUADALAJARA**

Red Universitaria e Institución Benemérita de Jalisco

**Centro Universitario de Ciencias
Exactas e Ingenierías**

Educación Matemática vol. 34 • núm. 2 • agosto de 2022

© Educación Matemática, agosto de 2022, vol. 34, núm. 2, es una publicación cuatrimestral editada por la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C., con domicilio en Adolfo Prieto 1734, Col. Del Valle centro, 03100, Benito Juárez, Ciudad de México, correo electrónico revedumat@yahoo.com.mx. y la Universidad de Guadalajara a través del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, dirección Blvd. Marcelino García Barragán #1421, esq Calzada Olímpica, C.P. 44430, Guadalajara, Jalisco, México, correo electrónico divcb@cucei.udg.mx

Editor responsable: Ernesto A. Sánchez Sánchez. Reserva de derechos al Uso Exclusivo del Título: 04-2015-10163264600-203, ISSN (web) 2448-8089, ambos otorgados por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor.

La presentación y disposición en conjunto de cada página de Educación Matemática, vol. 34, núm. 2, agosto de 2022, son propiedad de D.R. © Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C. y de la Universidad de Guadalajara (en trámite).

Diagramación y corrección de estilo: Formas e Imágenes, S.A. de C.V., Av. Universidad 1953, edif. 2, loc. E, Copilco el Bajo, Coyoacán, 04330, Ciudad de México, formaseimagenes@gmail.com

Fecha de la última actualización 30 de julio de 2022.

<https://www.revista-educacion-matematica.org.mx>

Contenido

Editorial	5
ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN	
Diseño de un entorno de aprendizaje del saber docente acerca de las construcciones euclidianas con GeoGebra	7
Design of a learning environment for teaching knowledge about euclidean constructions with GeoGebra	
<i>Juan Luis Prieto G., Elizabeth-H. Arredondo</i>	
Competencia de futuros profesores de matemáticas para el análisis de la idoneidad didáctica de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto	39
Prospective mathematics teachers' competence for analysing the didactic suitability of a proportionality lesson in a textbook	
<i>María José Castillo, María Burgos, Juan D. Godino</i>	
Desenvolvimento profissional docente: reflexões sobre saberes pedagógicos e matemáticos	72
Desarrollo profesional docente: reflexiones sobre el conocimiento pedagógico y matemático	
Teacher professional development: reflections on pedagogical and mathematical knowledge	
<i>Marcelo Carlos de Proença, Ana Lúcia Pereira, Luiz Otavio Rodrigues Mendes, Wilian Barbosa Travassos</i>	
Ações do professor e desenvolvimento do raciocínio matemático durante a discussão coletiva de uma tarefa	101
Teachers' actions and mathematical reasoning development during the collective discussion of a task	
<i>Joana Brocardo, Catarina Delgado, Fátima Mendes, João Pedro da Ponte</i>	
La generalización de patrones como herramienta para introducir el pensamiento algebraico en educación primaria	134
The generalization of patterns as a tool to introduce algebraic thinking in primary education	
<i>Alberto Zapatera Llinares</i>	

El MOOC, un entorno virtual para la resolución de problemas matemáticos	153
<i>MOOC, a virtual environment for mathematical problem solving</i>	
<i>Martha Leticia García Rodríguez, William Enrique Poveda Fernández</i>	
Niveles de razonamiento algebraico en libros de texto de educación básica de Chile	182
<i>Levels of algebraic reasoning in Chilean primary education textbooks</i>	
<i>Ana Luisa Llanes Luna, Luis R. Pino-Fan, Silvia Elena Ibarra Olmos</i>	
Conceptualizaciones de la pendiente en el currículo colombiano de matemáticas	217
<i>Conceptualizations of slope in Colombian intended mathematics curriculum</i>	
<i>Crisólogo Dolores Flores, Gustavo Andrés Mosquera García</i>	
La estadística y la probabilidad en los currículos de matemáticas de educación infantil y primaria de seis países representativos en el campo	245
<i>Statistics and probability in early childhood and primary mathematics curricula in six countries representative of the field</i>	
<i>Claudia Vásquez, Gabriela Cabrera</i>	
Capacidad de resolución de problemas matemáticos y su relación con las estrategias de enseñanza en estudiantes del primer grado de secundaria	275
<i>Ability to solve mathematical problems and their relationship with teaching strategies in students of the first grade of secondary school</i>	
<i>Clodoaldo Berrocal Ordaya, Alberto Alfredo Palomino Rivera</i>	
CONTRIBUCIÓN A LA DOCENCIA	
Esquemas de resolución de problemas de Fermi como herramienta de diseño y gestión para el profesor	289
<i>Fermi problem activity templates as a design and management tool for the teacher</i>	
<i>Lluís Albarracín, Jonas B. Årlebäck</i>	
RESEÑA	
Conversatorio SOMIDEM: Rediseño del marco curricular de educación media superior	310
<i>SOMIDEM dialogue: Redesign of the high school curriculum</i>	
<i>María S. García González, Carlos Valenzuela García</i>	
IN MEMORIAM	
Ed Dubinsky: Una leyenda y un pionero en Educación Matemática	315
<i>Ed Dubinsky: A legend and pioneer in undergraduate mathematics education</i>	
<i>Asuman Oktay</i>	

Editorial

Educación Matemática seguirá avanzando en el cumplimiento de su misión que se puede encapsular en tres palabras: Calidad, Comprensión y Comunicación; cada una corresponde a un objetivo de la revista. El primero, consiste en contribuir en el mejoramiento de la calidad de la investigación en educación matemática. El segundo, es mejorar la comprensión de la naturaleza de la enseñanza-aprendizaje de la matemática, así como de la formación y desarrollo profesional de los maestros y profesores en dicha disciplina. El tercer objetivo, es propiciar la comunicación entre investigadores, maestros, profesores y estudiantes en lo concerniente a la educación matemática.

¿Cómo contribuye este número a la consecución de cada objetivo? Con calidad basada en su proceso de arbitraje, que es por pares y doble ciego, por lo tanto, es el resultado del trabajo de la comunidad de árbitros. Como en todo, hay variedad de tendencias y estilos, hay árbitros muy exigentes y otros más tolerantes, pero en general, son profesionales que tienen competencia y voluntad para hacer bien su trabajo. Resulta entonces pertinente recuperar la tradición de dar crédito a los árbitros que colaboraron, realizando al menos un arbitraje el año pasado. Hemos subido a la página la lista con los nombres de aquellos que colaboraron en el 2021. En el primer número de 2023 se subirá la lista de quienes hayan realizado arbitrajes este año.

El avance en la comprensión de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y de la formación y desarrollo profesional de maestros y profesores lo proporcionan los contenidos de los artículos publicados. El conjunto de temas que se tocan en los artículos de este número, proporciona una muestra sobre aspectos que nos ayudan a entender la naturaleza de la educación matemática. Se podrán observar cinco artículos cuyo objeto de estudio o destinatario son los profesores, dos sobre libros de texto, dos sobre el currículo. Conceptualización, razonamiento, uso de tecnología y resolución de problemas son algunos de los procesos que se tocan. Además, cada artículo nos remite a marcos y teorías de la educación matemática, conectadas con una problemática particular, de modo que es posible apreciar su potencia.

Con relación a la comunicación conviene mencionar la interacción de los autores con los árbitros vía los editores de sección; en esta interacción hay un aprendizaje de ambas partes. Los árbitros frecuentemente se enfrentan a artículos que hacen uso de teorías y métodos con los cuales no están familiarizados y, por tanto, tienen que estudiar y reflexionar para hacer una evaluación inteligente. Los autores también aprenden de las sugerencias de los árbitros, con los comentarios de estos, las cuales permiten ver aspectos nuevos en su propio trabajo que habían pasado desapercibidos. Por otro lado, debemos reconocer que tenemos poca información sobre nuestros lectores que presumimos son profesores y estudiantes interesados en la educación matemática; necesitamos crear mecanismos que nos permitan informarnos al respecto.

Otro aspecto que queremos resaltar de este número es que se mantiene como un foro para que investigadores de diferentes países expongan su trabajo. Se podrá ver que hay autores de nueve países: Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, España, México, Perú, Portugal y Suecia. Sin duda, este rasgo indica una riqueza de contenidos, enfoques y métodos que contribuyen a que *Educación Matemática* sea de competencia internacional. El actual Consejo Directivo se esfuerza por descubrir la manera de mejorar los procesos que hacen funcionar a la revista y que le permitan seguir cumpliendo con calidad su misión; en los siguientes números podremos informar sobre nuestros hallazgos.

Consejo Directivo

Diseño de un entorno de aprendizaje del saber docente acerca de las construcciones euclidianas con GeoGebra

Design of a learning environment for teaching knowledge about euclidean constructions with GeoGebra

Juan Luis Prieto G.¹

Elizabeth-H. Arredondo²

Resumen: Se describen los referentes teóricos/metodológicos y elementos que estructuran el diseño de un entorno de aprendizaje centrado en las construcciones euclidianas (un tipo particular de construcciones con regla y compás) con el *software* GeoGebra y dirigido a futuros profesores de matemáticas. Desde una perspectiva histórica-cultural del aprendizaje y la enseñanza, se presenta una conceptualización del saber docente, del aprendizaje de este saber y de la actividad formativa que hace posible dicho aprendizaje. Los elementos del diseño incluyen una caracterización del saber acerca de las construcciones euclidianas con GeoGebra (SACEG), como un saber alimentado por una vertiente disciplinaria y profesional, el motivo, objetivo y metas de la actividad formativa, las tareas de la formación y las interacciones posibles entre el formador y los futuros profesores al resolver las tareas. Este diseño aporta elementos para el debate acerca de las exigencias propias de la promoción (o no) del aprendizaje del SACEG en contextos de formación inicial de profesores de matemáticas.

Fecha de recepción: 5 de abril de 2020. **Fecha de aceptación:** 16 de noviembre de 2021.

¹ Coordinación General, Asociación Aprender en Red, Maracaibo, Venezuela, juan.l.prietog@gmail.com, orcid.org/0000-0003-0798-5191

² Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile, elizabeth.hernandez@ulagos.cl, orcid.org/0000-0002-5285-1603

Palabras clave: *Formación inicial de profesores de matemáticas, procesos de objetivación, saber docente en geometría, experimento de enseñanza, interacciones.*

Abstract: This article describes the theoretical/methodological references and elements that structure the design of a learning environment focused on Euclidean constructions (a particular type of constructions with ruler and compass) with GeoGebra software and aimed at prospective mathematics teachers. From a historical-cultural perspective of learning and teaching, a conceptualization of teaching knowledge, of learning this knowledge and of the formative activity that makes this learning possible is presented. The elements of the design include a characterization of knowledge about Euclidean constructions with GeoGebra (SACEG), as a knowledge fed by a disciplinary and professional aspect, the motive, objective and goals of the training activity, the training tasks and the possible interactions between the trainer and the future teachers when solving the tasks. This design provides elements for the debate about the demands of promoting (or not) SACEG learning in contexts of initial mathematics teacher training.

Keywords: *Pre-service mathematics teachers' education, processes of objectivation, knowledge for teaching in geometry, teaching experiment, interactions.*

1. INTRODUCCIÓN

Por lo general, la Formación de Profesores de Matemáticas (FPM) se entiende como un área de prácticas educativas y de investigación surgida a partir del reconocimiento del importante rol que desempeñan los profesores en el aprendizaje matemático de sus alumnos (Lerman, 2001; Sfard, 2004). Desde esta perspectiva, la FPM comprende todo fenómeno concerniente al aprendizaje y desarrollo profesional del profesorado de matemáticas, producido en cualquiera de las etapas del ciclo de vida de la carrera docente (inicial, principiante y continua) mediante la implementación de actividades formativas diversas y dinámicas (Krainer y Llinares, 2010).

En la etapa de formación inicial, una problemática que afecta los procesos de aprendizaje de los futuros profesores puede resumirse en la débil relación entre la preparación disciplinaria y la preparación profesional que se establece

en los programas universitarios de formación docente de distintos países (Baldin y Malaspina, 2018; Ruiz, 2017), incluido Chile (Brandt, 2010; Manzi *et al.*, 2012). La atención puesta sobre esta problemática ha llevado a los investigadores a interesarse especialmente tanto en el saber disciplinario y didáctico requerido para enseñar matemáticas, como en los modos de incorporar este saber a los programas de formación (Tatto *et al.*, 2009). Al respecto, Liljedahl *et al.* (2009) han afirmado que las principales preocupaciones de la formación inicial del profesorado son *comprender* los procesos de adquisición del saber para la enseñanza de las matemáticas y *promover* tales procesos en la formación de los futuros profesores.

Dada la situación anterior, tanto el diseño como la implementación de entornos de aprendizaje (p. ej., Castellanos *et al.*, 2018; Ivars *et al.*, 2018; Prieto y Valls, 2010; Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou, 2012) adquieren relevancia para los programas de formación inicial del profesorado, ya que estos dispositivos (los entornos), entre otras posibilidades, pueden provocar que los futuros profesores movilicen el saber necesario para enseñar matemáticas a partir de la resolución de situaciones problemáticas propias de la dinámica de trabajo en el aula (Carrillo y Climent, 2009; Llinares, 2020). En la mayoría de los casos, estos entornos son diseñados e implementados en atención a las necesidades, demandas y expectativas particulares de la realidad escolar que envuelve a los programas de formación inicial en cada país.

En el caso de Chile, las necesidades de la formación inicial están descritas en los *Estándares Orientadores para Carreras de Pedagogía en Educación Media* (EOCP), un documento oficial dirigido a las Facultades y Escuelas de Educación del país que ofrece “una orientación acerca de los conocimientos y habilidades necesarias que debería manejar el egresado de pedagogía para enseñar estas disciplinas, sobre la base del criterio de expertos” (Ministerio de Educación [MINE-DUC], 2012, p. 8). Los estándares pedagógicos y disciplinarios del área de Matemática se organizan en cinco categorías o subáreas, entre ellas Geometría. Dentro de esta categoría, el estándar 12 revela la necesidad de que futuros profesores de matemáticas se preparen para:

[...] conducir el aprendizaje de los estudiantes en la realización de las construcciones geométricas con regla y compás de figuras elementales, justificando y explicando los procedimientos mediante lenguaje geométrico. Utiliza procesador geométrico para lograr la comprensión de los estudiantes en los temas de transformaciones del plano y construcciones geométricas. (MINEDUC, 2012, p. 115)

El énfasis del documento EOCP en el desarrollo del conocimiento y de las habilidades para la enseñanza de las construcciones geométricas tiene sentido si se consideran los resultados de investigaciones que evidencian las dificultades de los futuros profesores chilenos para realizar construcciones con regla y compás o con algún *software* de Geometría Dinámica (SGD). Por ejemplo, Rosales y Guzmán (2016) han concluido que los futuros profesores que logran realizar construcciones geométricas con SGD, muchas veces evitan describir y justificar los procedimientos empleados, desconocen el valor de la medición para verificar la consistencia geométrica de sus construcciones y restan importancia al papel del *software* como instrumento de construcción. Este hecho revela lo importante que resulta, en el contexto chileno, realizar investigaciones centradas en las condiciones de producción del saber para la enseñanza, relacionado con las construcciones geométricas producidas con algún SGD.

En vista de lo anterior, los autores de este artículo desarrollan un proyecto de investigación doctoral que busca aportar elementos para comprender y promover procesos de aprendizaje del saber acerca de la enseñanza de las construcciones euclidianas (un tipo particular de construcciones con regla y compás) realizadas con el *software* GeoGebra en contextos de formación inicial de profesores de matemáticas, con una perspectiva educativa de corte histórico-cultural. En el marco de tal proyecto, el presente artículo tiene el propósito de destacar cómo una determinada concepción del aprendizaje humano da forma al diseño de un entorno de aprendizaje centrado en las construcciones euclidianas con GeoGebra y dirigido a futuros profesores de matemáticas. Para esto, se describen los referentes teóricos/metodológicos y los elementos que han estructurado el diseño del entorno de aprendizaje.

2. REFERENTES TEÓRICOS DEL DISEÑO

El diseño del entorno de aprendizaje se fundamenta en los conceptos de *saber*, *aprendizaje* y *actividad*, tal como estos se presentan en la Teoría de la Objetivación (TO), una perspectiva educativa de corte histórico-cultural comprometida con “la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en prácticas matemáticas constituidas histórica y culturalmente, y que reflexionan sobre nuevas posibilidades de acción y pensamiento” (Radford, 2020a, p. 34). En lo que sigue, se definen estos tres conceptos y se relacionan con las características del contexto en el que se enmarca el entorno de aprendizaje.

2.1. SABER / SABER DOCENTE

En la TO, el *saber* se define como “un sistema codificado de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión, constituidos histórica y culturalmente” (Radford, 2017a, p. 101). Desde esta perspectiva, el saber es el producto de laboriosos e inacabados procesos históricos de refinamiento, codificación y expansión de determinadas formas culturales de expresión, acción y pensamiento. Para Radford (2017a), el saber aparece en un contexto específico y a través de un problema particular, como resultado de su puesta en movimiento, lo que implica materializarse en la forma de un *conocimiento*. En otras palabras, el conocimiento es “el contenido conceptual concreto en el que se manifiesta o actualiza o materializa o encarna el saber. Su contenido conceptual concreto aparece y puede aparecer únicamente en una actividad –la actividad que media el saber y el conocimiento” (p. 109).

Desde esta perspectiva, el *saber docente* se asume como un sistema de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y reflexión (siempre en movimiento), que existen y son reconocidos en la cultura académica universitaria como necesarios por cuanto permiten a los futuros profesores reafirmarse (y constituirse) como sujetos docentes a través de la enseñanza. Que el saber docente se encuentre en constante movimiento significa que, como todo saber cultural, el saber docente “cambia de cultura en cultura y con el paso del tiempo” (Radford, 2020a, p. 34). En este sentido, el carácter temporal, plural, heterogéneo y situado del saber docente contrasta con “los ideales de racionalidad y objetividad que han marcado, durante mucho tiempo, las pautas de algunos especialistas en planes y políticas dirigidas a los docentes” (Xavier, 2014, p. 831).

En cuanto a lo específico del saber docente, Tardif (2002) le considera como “un saber plural, formado por una amalgama, más o menos coherente, de saberes procedentes de la formación profesional y disciplinarios, curriculares y experienciales” (p. 29). Para este investigador, el saber docente es movilizado por el profesor durante el trabajo con sus alumnos en el aula y, de manera más general, dentro de la escuela. Por *saber profesional* se entiende aquel saber producido por las ciencias de la educación (p. ej., la educación matemática) y difundido por las instituciones de formación del profesorado; mientras que por *saber disciplinario* se entiende aquel producido por la tradición cultural y seleccionado por las instituciones de formación para su difusión a través de cursos o asignaturas (Tardif, 2002).

2.2. APRENDIZAJE

La TO considera el aprendizaje como el *encuentro* de los individuos con el saber histórico y cultural (p. ej., el saber matemático, pedagógico, estético); un saber que objeta al individuo en su encuentro, es decir, le opone resistencia. Para hacer operativa esta noción, Radford (2017b) conceptualiza el aprendizaje como *procesos de objetivación*, esto es, como procesos sociales, corporales, materiales y simbólicos de:

[...] volverse, progresivamente y críticamente, consciente de una forma codificada de pensamiento y de acción –algo que notamos gradualmente y al mismo tiempo adquiere significado. Son procesos de objetivación aquellos actos de notar significativamente algo que se revela a la conciencia por medio de nuestra actividad corpórea, sensorial y artefactual. (Radford, 2017b, p. 121)

En este artículo, los procesos de objetivación se entienden como actos progresivos de *toma de conciencia* de un determinado saber docente en el decurso de una *actividad formativa* concreta que es, además, una actividad social, corpórea, sensorial y artefactual. Para la TO, la toma de conciencia constituye la forma específicamente humana en que cada individuo reconoce los objetos de su cultura (en particular, el saber) y se posiciona críticamente ante tales objetos. En consecuencia, la toma de conciencia de un saber docente puede verse como el acto subjetivo, emocional y afectivo de reflexión y discernimiento sobre las formas de expresión, acción y pensamiento que constituyen dicho saber. En este acto se forman “sensibilidades culturales para ponderar, reflexionar, comprender, disentir, objetar y sentir a los otros, a nosotros mismos y a nuestro mundo” (Radford, 2017b, p. 122), las cuales permiten al futuro profesor orientarse en la formación, por ejemplo, para producir construcciones euclidianas con GeoGebra o involucrarse responsablemente en las experiencias de producción de estas construcciones de sus demás compañeros.

2.3. ACTIVIDAD / ACTIVIDAD FORMATIVA

La TO plantea que la transformación de un saber en objeto de conciencia requiere de una *actividad* sensual³ y práctica que ponga en movimiento este saber (Radford, 2020b). La actividad es la categoría ontológica y epistemológica fundamental de la TO para entender el modo específico en que los individuos se expresan, actúan y reflexionan. Para destacar el carácter de *espacio de producción humana* que es inherente a la actividad del aula, la TO se refiere a esta categoría como *labor conjunta*, definiéndola como “una forma de vida, algo orgánico y sistémico, un evento creado por una *búsqueda común* –es decir una búsqueda con otros– de la solución a un problema planteado, búsqueda que es al mismo tiempo cognitiva, emocional y ética” (Radford, 2017b, p. 125).

A partir de estos referentes, la *actividad formativa* se asume como la forma social, corpórea, sensorial y artefactual de labor conjunta mediante la cual el formador y los futuros profesores se implican mutuamente en una búsqueda de respuestas a problemas (o tareas) que orientan sus acciones al logro de un fin. De esta manera, la actividad formativa puede transformar las condiciones iniciales de una realidad (p. ej., un procedimiento particular de construcción de un triángulo con GeoGebra, conocidos un vértice y el tamaño de dos lados) en la búsqueda de su comprensión y, con ello, hacer posible la toma de conciencia progresiva del saber puesto en movimiento. En consecuencia, el producto de la labor conjunta del formador y los futuros profesores (la *obra común*) constituye tanto la forma material que adquiere el saber en la realidad concreta (a través de acciones y reflexiones), como el reflejo del saber en la conciencia de quienes producen la obra. Sobre esto último, Leontiev (1978, p. 123) afirma que “la actividad del hombre es lo que constituye la sustancia de su conciencia”.

Un aspecto importante de la labor conjunta se refiere a los *recursos semióticos* empleados por los individuos para producir la obra común. Estos recursos son consustanciales al pensamiento humano y se materializan a través del cuerpo (acciones cinestésicas, gestos y sensaciones), del uso de signos (lenguaje natural o simbólico) y de artefactos culturales (materiales concretos) (Radford *et al.*, 2009). Con respecto a los artefactos culturales, estos no son neutrales. Al contrario, por ser inseparables de la actividad humana, los artefactos portan significados

³ Según Fischbach (2015, p. 31), “Las facultades sensibles [humanas] como el oído o la vista no permanecen idénticas eternamente, sino que se producen, resultan y son modificadas por la actividad humana, participan en esta actividad y son un aspecto de ella”.

históricos y culturales que afectan inevitablemente las formas en que los individuos actúan y reflexionan durante la labor conjunta (Radford, 2014).

3. REFERENTES METODOLÓGICOS DEL DISEÑO

El diseño del entorno de aprendizaje es parte de un Experimento de Enseñanza (EE) que busca analizar las condiciones de producción de procesos de objetivación del saber acerca de las construcciones euclidianas con GeoGebra, producidas por futuros profesores de matemáticas chilenos en los últimos años de su carrera universitaria. Aunque este trabajo no se focaliza en el EE, es importante comentar brevemente en qué consisten estos estudios y, particularmente, la fase de diseño del entorno de aprendizaje.

Por EE se entiende el tipo de investigación de diseño (Design-Based Research) usado en la Educación Matemática para analizar la dinámica de actividades instruccionales, con el propósito de producir modelos locales de aprendizaje de los saberes puestos en movimiento (Steffe y Thompson, 2000). Según Barab y Squire (2004, p. 2), la investigación de diseño “no es tanto un enfoque, sino una serie de enfoques, con la intención de producir nuevas teorías, artefactos y prácticas que tengan en cuenta y potencialmente impacten el aprendizaje y la enseñanza en entornos naturalistas”. En las últimas décadas, los EE han ganado terreno en la investigación sobre el aprendizaje de futuros profesores de matemáticas en sus espacios naturales de producción social (Molina *et al*, 2011).

Por lo anterior, el EE en el que se enmarca este artículo fue pensado tanto para producir un modelo local de aprendizaje del saber acerca de las construcciones euclidianas con GeoGebra por futuros profesores de matemáticas, como para validar este modelo desde la evidencia empírica recolectada en diferentes programas de formación inicial del profesorado en Chile y la consecuente mejora de las actividades formativas del experimento.

La realización del EE contempla tres fases de investigación: diseño instruccional, implementación y análisis retrospectivo (Gravemeijer, 2004; Simon, 2000). En atención al propósito del artículo, seguidamente se explica en qué consiste la fase de diseño instruccional.

3.1. DISEÑO INSTRUCCIONAL

Por lo general, la fase de diseño instruccional consiste en la elaboración de un entorno de aprendizaje y la respectiva justificación. En este artículo, el entorno de aprendizaje se entiende como la “conjunción de las tareas diseñadas y la concepción de una determinada manera de usarlas, incluyendo el papel del formador de profesores y los documentos adicionales” (Llinares, 2004, pp. 97-98). Visto así, el diseño del entorno pone especial atención en las tareas de formación y en las interacciones entre el formador y los futuros profesores con las tareas y los recursos semióticos empleados para resolverlas. En sintonía con los referentes teóricos, estos elementos del diseño (tareas e interacciones) se corresponden con determinados saberes por movilizar, un motivo-objetivo y unas metas.

Teniendo en cuenta los referentes teóricos y metodológicos expuestos, en el próximo apartado se describen los elementos que estructuran el diseño del entorno de aprendizaje.

4. ELEMENTOS DEL DISEÑO

A partir de la concepción de actividad formativa, en este trabajo los elementos que estructuran el diseño del entorno de aprendizaje incluyen el *saber docente* movilizado (lo que da lugar al *contenido* de la formación), el *motivo*, *objetivo* y *metas* de la actividad formativa, las *tareas* de la formación y las *interacciones*.

4.1. EL SABER DOCENTE POR MOVILIZAR

Por medio de la implementación del entorno de aprendizaje se busca poner en movimiento un saber docente enraizado en el trabajo que realizan los profesores de matemáticas de educación básica y media de Chile, cuando enseñan las construcciones euclidianas haciendo uso del *software* GeoGebra. En este artículo, dicho saber se denomina: Saber Acerca de las Construcciones Euclidianas con GeoGebra (SACEG). Aunque se admite que el SACEG, como todo saber docente, puede nutrirse de saberes provenientes de distintas fuentes, en el diseño se asume que dicho saber se alimenta de saberes disciplinarios y profesionales específicos de la formación inicial del profesorado de matemáticas.

La vertiente disciplinaria

En cuanto a la vertiente disciplinaria, el SACEG se alimenta de ciertos procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y reflexión geométrica sobre las construcciones con regla y compás, movilizados en los cursos de formación inicial sobre geometría euclidiana. Siguiendo a Valente (2017), este tipo de cursos aportan al futuro profesor el objeto de enseñanza, es decir, esos contenidos que deberían ser aprendidos para su enseñanza en la escuela. Visto así, el SACEG comprende todo sistema de expresión, acción y pensamiento acerca de los objetos de la geometría plana (p. ej., rectas, ángulos y triángulos), codificado históricamente y culturalmente como procedimientos de construcción de estos objetos con regla y compás o *software* dinámico.

Las raíces de estos procedimientos pueden encontrarse en la Grecia clásica (450–300 a. de C.), cuando la producción de *tratados* sobre los fundamentos de la geometría hacía parte de una larga tradición de abstracción y sistematización progresiva de todo lo creado por el orden científico (Ríbnikov, 1987; Scriba y Schreiber, 2015). Estos tratados contenían los principales problemas geométricos de la época, entre ellos las construcciones con regla y compás. A través de estos problemas, los matemáticos griegos demostraban la existencia de los objetos geométricos con ciertas propiedades (objetos deseados), partiendo de unas condiciones iniciales (objetos dados) (Rey y Babini, 1985). En la resolución de los problemas se empleaba un método que consistía en *describir* el procedimiento de construcción con regla y compás del objeto deseado, y *demostrar* que tal procedimiento entregaba el objeto con las propiedades deseadas (Scriba y Schreiber, 2015). Este método fue adoptado por Euclides en su famoso tratado de geometría llamado *Elementos*.

Los *Elementos* datan del siglo III a. de C. y en el Libro I se presentan los principales problemas de construcción de la época (especialmente, los procedimientos de construcción y las demostraciones asociadas). Por ejemplo, la proposición I.1 enuncia el siguiente problema: *Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada* (Euclides, 1991, p. 201). La solución de este problema comienza con la presentación del segmento $\overline{AB}$ (un caso particular de la recta finita del enunciado), sobre el cual se determina la construcción del triángulo equilátero. El procedimiento de construcción con regla y compás empleado por Euclides se resume así: (i) describir el círculo $B\Gamma\Delta$ con centro B y radio AB ; (ii) describir el círculo $A\Gamma E$ con centro A y radio BA ; (iii) dibujar el segmento ΓA , desde Γ hasta A ; y (iv) dibujar el segmento ΓB , desde Γ hasta B (figura 1).

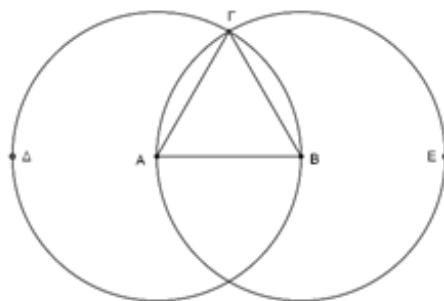


Figura 1. Dibujo asociado a la proposición I.1 de los *Elementos*, tomado de Euclides (1991, p. 202)

La demostración de la proposición I.1 comprende una serie de consecuencias lógicas justificadas por algunos postulados, definiciones o nociones comunes que se citan al inicio de los *Elementos*. Por ejemplo, en atención al procedimiento de construcción, las operaciones (i) y (ii) se presentan como consecuencia del postulado 3, el cual describe un círculo con cualquier centro y radio; mientras que las operaciones (iii) y (iv) se derivan del postulado 1 que describe el trazado de un segmento de cualquier punto a cualquier punto.

Según Rey y Babini (1985), la función de los postulados en los *Elementos* era la de “fijar la posibilidad constructiva de las figuras [...] determinando así su existencia y unicidad” (p. 74). De hecho, Euclides asume la posibilidad de dibujar un segmento entre dos puntos dados (Postulado 1), extender el segmento indefinidamente por cualquiera de sus extremos (Postulado 2) y dibujar un círculo con centro y radio dado (Postulado 3), haciendo que todas las proposiciones geométricas, fueran teoremas o construcciones, se fundaran “sobre esas dos figuras y sus relaciones y conexiones mutuas” (Rey y Babini, 1985, p. 52). En consecuencia, la regla y el compás de los griegos, como todo artefacto cultural, portaban contenidos conceptuales específicos que la tradición geométrica había depositado en ellos.

Actualmente, el SACEG se nutre de sofisticadas y evolucionadas definiciones y axiomas de la geometría elemental, de algo más que el método sintético euclídeo para explorar esta geometría (p. ej., el método analítico, originado en el siglo XVII) y de artefactos digitales que hacen posible el trabajo geométrico en el aula de formas novedosas. Con todo esto, los procesos de producción y justificación de construcciones euclidianas elaboradas con GeoGebra caracterizan

el SACEG. Para Laborde (1997), las construcciones creadas con SGD (p. ej., con GeoGebra) favorecen el reconocimiento de vínculos entre las evidencias visuales que aportan los dibujos en la pantalla (invarianza de las propiedades espaciales del dibujo) y los hechos geométricos (elementos del sistema axiomático-deductivo de la geometría euclidiana); estos últimos relacionados con ideas que subyacen en las herramientas que ofrece el *software*.

Desde una perspectiva histórica-cultural (Radford, 2014), GeoGebra constituye un artefacto cultural (de naturaleza digital) que proporciona a los usuarios una serie de *contenidos conceptuales* (herramientas de construcción, medida y otras opciones) y un *espacio de trabajo* estructurado conceptualmente (apariencias del *software*) para que ellos experimenten con tales contenidos y produzcan formas novedosas de construir los dibujos dinámicos⁴ y validar estas construcciones. Por ejemplo, para construir con GeoGebra un triángulo equilátero a partir del tamaño⁵ de sus lados (equivalente a la cantidad de longitud del segmento m) y de uno de sus vértices (punto P), la herramienta *Polígono* sugiere un procedimiento guiado por el reconocimiento y/o determinación de los vértices que lo definen (figura 2). La conceptualización que subyace en la herramienta denota la idea moderna de figura geométrica como “el conjunto de sus elementos; el triángulo es “tres puntos del plano”, a los cuales están adheridos tres segmentos y tres ángulos” (Levi, 2006, p. 116).



Figura 2. Conceptualización de *Polígono* por la herramienta correspondiente

⁴ Por *dibujo dinámico* se entiende el dibujo creado con un *software* dinámico, de manera que “[...] conserve ciertas propiedades espaciales impuestas cuando se desplace uno de los puntos básicos del dibujo” (Laborde, 1997, p. 42).

⁵ Según Guacaneme (2012), el tamaño de una magnitud es “una característica intrínseca del objeto geométrico, de orden cuantitativo, no numérico [...]; así, por ejemplo, el tamaño de un segmento es la cantidad de longitud del mismo, pero no la medida de la cantidad de su longitud” (Guacaneme, 2012, p. 117).

En el ejemplo, la conceptualización que subyace en la herramienta *Polígono* y las condiciones iniciales de la figura (m y P) posibilitan el surgimiento de procedimientos de construcción con GeoGebra del triángulo equilátero con consistencia geométrica, los cuales pueden acompañarse de modos de justificar dicha consistencia. Considerando que la incorporación del SGD al aula de matemáticas da lugar a nuevas formas de establecer la verdad de un hecho geométrico (De Villiers, 1998), la justificación de la consistencia geométrica de una construcción con GeoGebra es entendida en este artículo como una parte sustancial de la actividad formativa, manifestada en los modos en que los individuos tratan de persuadir a otros de que el razonamiento en torno al procedimiento de construcción empleado es correcto (Fiallo, 2011).

Desde esta perspectiva, tanto el procedimiento de construcción con GeoGebra del triángulo equilátero como su justificación comprenden formas singulares (conocimientos) del SACEG asociadas al caso de la proposición I.1 de los *Elementos*. En la práctica concreta, estas formas singulares del SACEG (particularizadas al caso del ejemplo) se manifiestan en *acciones* orientadas al logro de resultados intermedios que, por sí solos, no satisfacen la necesidad de construir con GeoGebra el triángulo equilátero. De hecho, en líneas generales, las necesidades que mueven a los individuos a realizar una actividad no son satisfechas por los resultados intermedios, sino por el producto de la actividad conjunta de todas las acciones desplegadas (Leontiev, 1978).

Por lo anterior, las acciones de una construcción con GeoGebra median entre la necesidad de los individuos de producir el dibujo dinámico esperado y las *operaciones* no conscientes realizadas con el *software* para lograr las acciones y que se encuentran subordinadas al espacio de trabajo (apariencia *Geometría*) de GeoGebra. En el ejemplo, una forma singular de construcción del triángulo equilátero puede considerar las acciones: determinar el segundo vértice (A-1), determinar el tercer vértice (A-2), y dibujar el triángulo (A-3); a su vez, cada acción se realiza mediante operaciones (O) con el *software* que conducen tanto a los resultados intermedios como al dibujo dinámico en su conjunto (figura 3).

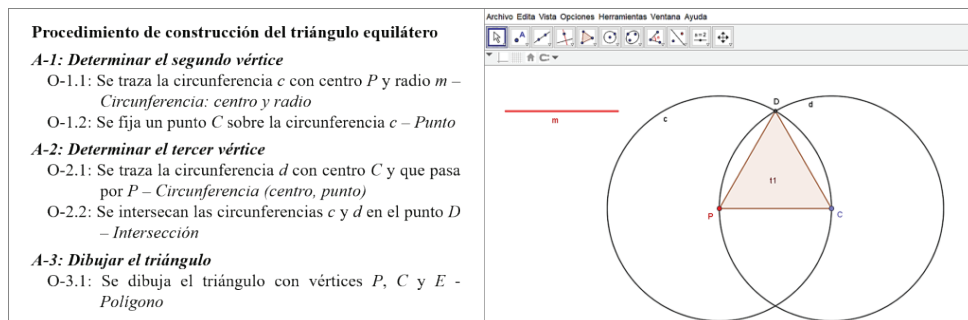


Figura 3. Ejemplo de acciones y operaciones en una construcción con GeoGebra

Finalmente, el significado que puede atribuirse a las acciones de un procedimiento de construcción con GeoGebra estaría determinado por las relaciones que los futuros profesores establecen entre cada acción y la construcción en su conjunto, de manera tal que la misma acción puede tener un significado distinto en diferentes construcciones de una misma figura. Para tomar conciencia de esta relación, los individuos hacen uso de diversos recursos semióticos que incluyen a GeoGebra, el propio cuerpo (p. ej., los gestos) y los signos (p. ej., el lenguaje natural o simbólico).

En síntesis, el SACEG desde la vertiente disciplinaria expresa la capacidad potencial de los futuros profesores para (i) producir un dibujo dinámico con GeoGebra ajustado al objeto geométrico demandado por una tarea de construcción, (ii) comunicar (de manera oral y/o escrita) el procedimiento de producción del dibujo dinámico en función de acciones y operaciones, y (iii) justificar la consistencia geométrica del dibujo dinámico producido. Esta caracterización es parte de una concepción más amplia del SACEG que se alimenta de una vertiente profesional.

La vertiente profesional

En el aula de matemáticas, el SACEG (en lo que concierne a la vertiente disciplinaria) es objeto de trabajo del profesor, quien busca crear condiciones para su materialización en la práctica concreta. Para cumplir con este objetivo, es necesaria una comprensión del SACEG que asuma la caracterización anterior e incluya otros saberes provenientes de las ciencias de la educación y, particularmente, de

la educación matemática. Por lo general, este saber profesional se deriva de estudios sobre el profesor de matemáticas y su práctica docente, cuyas conclusiones luego son incorporadas a los programas de formación inicial.

Para el diseño del entorno de aprendizaje, se ha considerado que el SACEG se alimenta de un saber profesional originado en investigaciones sobre el conocimiento, habilidades y actitudes del profesor de matemáticas. Hiebert *et al.* (2007) y Mason (2002) se refieren a este saber como la capacidad potencial del profesor para analizar *con sentido* la enseñanza, en atención al logro de los objetivos de aprendizaje. Siguiendo a Tardif (2002), este tipo de saber refleja un modo particular de relacionarse del profesor con la realidad del aula de matemáticas. En esta realidad, los profesores se tornan en seres sensibles, esto es, “en seres inevitablemente *afectados* por otras partes de la naturaleza” (Radford, 2018, p. 94), especialmente por los modos en que sus alumnos se expresan, actúan y piensan matemáticamente cuando resuelven problemas matemáticos.

Afectados así, los profesores sienten la necesidad de reconocer en las acciones de sus alumnos ciertos hechos que le atañen (p. ej., una forma histórica y cultural de construcción de un triángulo con GeoGebra) y comprometerse en la transformación de estos hechos, desarrollando la capacidad de mirar con sentido las situaciones de enseñanza y aprendizaje que le atañen (Hiebert *et al.*, 2007; Mason, 2002). Mediante esta capacidad latente, los profesores pueden capturar un hecho tal y como este se presenta en la actividad matemática de sus alumnos (la realidad concreta), al mismo tiempo que va captando los nexos causales y circunstanciales de este hecho en la práctica del aula, y sus contradicciones internas.

Recientemente, la capacidad de mirar con sentido las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se ha investigado en ambientes de formación inicial del profesorado y desde distintos enfoques epistemológicos. Por ejemplo, Sherin *et al.* (2011) se refieren al Teacher Noticing (TN) como la capacidad latente del profesor de lidiar con el conglomerado de datos sensoriales (en constante movimiento) que aparecen ante ellos en la instrucción. Para estos autores, TN involucra dos procesos interrelacionados: (i) *prestar atención* a hechos particulares del aula y (ii) *dotar de sentido* a estos eventos.

Sobre el segundo proceso, Van Es y Sherin (2002) sostienen que dotar de sentido es un proceso que implica tanto *interpretar* lo observado (relacionando los hechos con categorías abstractas y caracterizando lo visto en términos de episodios instruccionales familiares) como *tomar decisiones* pedagógicas con base en las interpretaciones. Centrados en el pensamiento de los alumnos,

Jacobs *et al.* (2010) vinculan la capacidad TN con el desarrollo de tres procesos interrelacionados: (i) identificar hechos matemáticos relevantes en las respuestas de los estudiantes; (ii) interpretar la comprensión de los estudiantes de los hechos matemáticos y (iii) decidir cómo actuar en función de la comprensión que se tiene de estos hechos.

En este artículo se asume el procedimiento de construcción con GeoGebra y la justificación de su consistencia como la realidad concreta que aporta a la actividad formativa la materia prima (materialización de un hecho geométrico) para desarrollar la capacidad de los futuros profesores de mirar con sentido sus producciones. Desde una perspectiva dialéctica-materialista, los procedimientos de construcción con GeoGebra llevan implícitas contradicciones⁶ internas (p. ej., las derivadas de las diferencias entre los dibujos dinámicos presentados y las respuestas esperadas por el formador) que, dentro de la actividad formativa, constituyen oportunidades para la toma de conciencia del SACEG en su vertiente profesional. En otras palabras, estudiando las contradicciones inherentes a la producción de construcciones euclidianas con GeoGebra es posible recrear formas de hacer progresar a los futuros profesores en su capacidad para dar sentido a los hechos geométricos asociados con los procedimientos de los demás compañeros. Con esto, se busca sacar provecho de las “situaciones imprevistas durante el desarrollo de la lección que pueden ser usadas para apoyar el aprendizaje de los estudiantes” (Llinares, 2019, p. 31).

En resumen, el SACEG en la vertiente profesional se nutre de la capacidad de mirar con sentido la enseñanza, al estilo de Jacobs *et al.* (2010), expresándose como procesos sociales que involucran (i) identificar un hecho geométrico en el procedimiento de construcción con GeoGebra realizado por un futuro profesor, (ii) interpretar el modo en que otros comprenden estos hechos, e (iii) intervenir para favorecer el progreso en la comprensión del hecho.

4.2. MOTIVO, OBJETIVO Y METAS

Según Leontiev (1978), toda actividad humana responde a necesidades de los individuos que se involucran en ella, siendo estas necesidades objetivadas en

⁶ En este artículo, las contradicciones se refieren a las acciones y operaciones de un procedimiento de construcción con GeoGebra (hechos geométricos), que son cuestionables porque ponen en riesgo la lógica de construcción del dibujo dinámico.

el *motivo* que impulsa la labor. Desde esta perspectiva, el entorno de aprendizaje descrito aquí tiene por motivo *contribuir* al desarrollo de las capacidades de los futuros profesores para relacionarse, de manera crítica y ética, con determinados procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y reflexión, característicos del SACEG.

Por su parte, el motivo se encuentra ligado a un *objetivo* (material o ideal) que le confiere cierta orientación a la actividad. Según Reverand (2004, p. 165), el objetivo “constituye el resultado futuro, anticipado de la actividad, todo aquello que el hombre desea alcanzar, obtener, crear”. En este sentido, la actividad formativa derivada de la implementación del entorno de aprendizaje tiene por objetivo el reconocimiento consciente y progresivo del SACEG a partir de la intervención responsable del formador y los futuros profesores en la labor de producción de procedimientos de construcción con GeoGebra y de formas de justificar la consistencia de estos procedimientos.

Finalmente, ya que “una actividad que se desenvuelve en alguna medida, presupone el logro de *una serie* de fines concretos” (Leontiev, 1978, p. 84), para que la resolución de una tarea de construcción con GeoGebra se mueva en la dirección de su objetivo, conviene identificar una o más *metas* que puedan lograrse a través de *tareas* especialmente elaboradas (Radford, 2017b). En este punto, una meta es la representación consciente del resultado al que se subordinan las acciones, mientras que una tarea comprende la enunciación de una meta que se estipula bajo ciertas condiciones.

A partir de lo anterior, para que la actividad formativa se despliegue en la dirección de su objetivo (el reconocimiento del SACEG), se han definido las siguientes metas:

- Resolver tareas que plantean construcciones euclidianas con GeoGebra, cuyas acciones se relacionan con el SACEG desde la vertiente disciplinaria.
- Afrontar profesionalmente las contradicciones inherentes a la resolución de tareas de construcción con GeoGebra, cuyas acciones se relaciona con el SACEG desde la vertiente profesional.

4.3. CONTENIDO DE LA ACTIVIDAD FORMATIVA

Como se ha dicho, para que un saber se materialice en la práctica concreta, este debe “mostrarse en sí mismo en la actividad a través de la cual este adquiere su contenido” (Radford, 2017a, p. 108). Para el diseño del entorno de aprendizaje se ha asumido que el contenido de las actividades formativas viene dado por la materialización del SACEG en la obra común del formador y los futuros profesores. Por tratarse de actividades mediadas por tareas, el modo en que el SACEG aparece en lo concreto (desde lo disciplinario) se relaciona con el contenido conceptual de la tarea.

4.4. TAREAS Y RECURSOS

Las tareas del entorno de aprendizaje (llamadas *tareas de construcción con GeoGebra*) se consideraron consustanciales de la actividad formativa en cuanto aportan las condiciones iniciales para que los futuros profesores configuren su experiencia con el saber involucrado en la actividad y comprendan la naturaleza del trabajo docente en geometría (Watson y Ohtani, 2015). En cada actividad formativa, la tarea asociada tiene el propósito de orientar las acciones de los individuos hacia el logro de las metas.

En total, se incorporaron 16 tareas de construcción con GeoGebra al entorno de aprendizaje. Todas se corresponden con las clásicas tareas de producción de Cabri-dibujos,⁷ las cuales demandan la construcción de dibujos dinámicos representativos de objetos geométricos dados mediante descripción verbal. Según Laborde (1997), mediante esta clase de tareas es posible producir:

(...) un dibujo en la pantalla que conserve ciertas propiedades espaciales impuestas cuando se desplace uno de los puntos básicos del dibujo. La tarea para el alumno consiste, por tanto, en elaborar un procedimiento de producción del Cabri-dibujo, basado en las primitivas geométricas disponibles. (Laborde, 1997, p. 42)

⁷ Un *Cabri-dibujo* es un dibujo dinámico creado con el *software* Cabri- Géomètre. Vale destacar que los dibujos de esta clase también pueden producirse con otras aplicaciones que tengan las características de un *software* de geometría dinámica, como es el caso de GeoGebra. Además, este *software* es completamente gratuito y accesible desde la Web.

El contenido conceptual de las tareas del entorno se determinó a partir de la caracterización del SACEG (antes descrita) y del análisis de un grupo de proposiciones tomadas de ciertas obras de geometría.⁸ Se seleccionaron 17 proposiciones (problemas de construcción con regla y compás) según la relevancia histórica del problema en función de su presencia directa o indirecta en el currículo de matemáticas chileno. A partir de estas proposiciones, se elaboraron 16 tareas de construcción (tabla 1), 7 referidas a rectas notables, ángulos, triángulos y cuadriláteros, y 9 referidas a la división de segmentos en una razón dada, usando la concepción euclidiana de razón y proporción.

Tabla 1. Proposiciones seleccionadas para la elaboración de las tareas

Fuente	Proposiciones
Libros I, II y IV de los <i>Elementos</i> (Euclides, 1991)	I.1, I.9, I.10, I.12, II.1, IV.10
Libro VI de los <i>Elementos</i> (Euclides, 1994)	VI.9, VI.11, VI.12*, VI.13, VI.16*, VI.30
Libros I, II y VI (Tratado III, Tomo I) del <i>Compendio Mathematico</i> (Tosca, 1757)	I.9, II.1, II.2, II.4, VI.5

(*) Estas proposiciones dieron lugar a la misma tarea de construcción.

El análisis de las proposiciones también aportó información sobre la solución de estos problemas, incluyendo los pasos de construcción con regla y compás sugeridos, el dibujo geométrico asociado y la demostración de la validez de cada construcción. Con esta información se procedió a formular los enunciados de las tareas de construcción con GeoGebra y establecer algunas posibles respuestas. La información recabada por cada proposición se organizó en cuadros similares al mostrado en la figura 4.

⁸ Las obras consultadas incluyeron tres fuentes históricas (Euclides, 1991, 1994; Simson, 2014; Tosca, 1757) y una obra moderna (Moise y Downs, 1966).

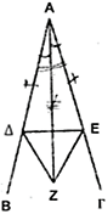
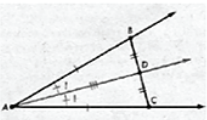
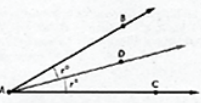
Fuente 1: Euclides (1991), p. 213, Libro I, Proposición I.9	Enunciado: Dividir en dos partes iguales un ángulo rectilíneo Hipótesis: Sea $\angle B\hat{A}I'$ el ángulo rectilíneo dado Tesis: Hay que dividirlo en dos partes iguales	Fuente 2: Moise y Downs (1972), p. 132, Teorema 5-2	Enunciado: Todo ángulo tiene exactamente una bisectriz Hipótesis: Sea $\angle A$ el ángulo dado Tesis: Hay que probar que $\angle A$ tiene una única bisectriz
Procedimiento de construcción	Prueba	Procedimiento de construcción	Prueba
1. Se toma un punto Δ en la recta AB y se quita de AI' la recta AE igual a $A\Delta$ (Prop. I.3). 2. Se traza el segmento ΔE (Post. 1). 3. Se construye sobre ΔE el triángulo equilátero ΔEZ (Prop. I.1). 4. Se traza el segmento AZ (Post. 1). 	1. $A\Delta$ es igual a AE (Constr. 1). 2. AZ es lado común de los triángulos ΔAZ y EAZ (Constr. 1-4). 3. ΔA y AZ son iguales respectivamente a EA y AZ (Por 1, 2). 4. La base ΔZ es igual a la base EZ (Constr. 3). 5. El ángulo ΔAZ es igual a ángulo EAZ (Prop. I.8 – Teorema). Conclusión: Por consiguiente, el ángulo rectilíneo dado $B\hat{A}I'$ ha sido dividido en dos partes iguales por la recta AZ.	1. Se toman los puntos B y C en los lados del $\angle A$, de manera que $AB=AC$ (Teorema 2-1). 2. Se biseca el segmento BC en su punto medio D (Teorema 2-2). 3. Se traza el rayo AD. 	Primera demostración: 1. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (Constr. 1). 2. $\overline{BD} \cong \overline{CD}$ (Constr. 2). 3. $\overline{AD}$ es lado común de los triángulos ΔADB y ΔADC (Constr. 3). 4. $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ (Post. LLL, Por 1-3). 5. $\angle BAD \cong \angle CAD$ (Por 4, ángulos que corresponden a lados iguales). Conclusión: $\angle A$ tiene una bisectriz Segunda demostración: 1. Supongamos que AD biseca al $\angle BAC$. 2. Sea $r = m\angle DAC$. 3. $r = m\angle DAB$ (Por 1). 4. $r + r = m\angle BAC$ (Post. 13). 5. $r = \frac{1}{2}m\angle BAC$ (Por 4) 

Figura 4. Cuadro con información acerca de la proposición I.9, elaborado por los autores

La información anterior permitió revelar los procedimientos de construcción (teoría geométrica) evocados en las respuestas de cada proposición, así como determinados signos y artefactos (sistemas semióticos) que se ofrecen a los individuos para poder expresarse, actuar y pensar sobre la teoría geométrica. Por ejemplo, la información de la figura 4 expresa procedimientos prototípicos o ideales de resolución del problema de dividir un ángulo dado en dos partes iguales, usando regla y compás (proposición I.9). En el contexto escolar chileno, este problema equivale a construir la bisectriz de un ángulo dado, en cuyo procedimiento los alumnos despliegan un repertorio de signos (dibujos, notación simbólica y marcas) y artefactos (teoría geométrica, lenguaje escrito e instrumentos de construcción), altamente sofisticados, que entran en juego para significar la idea de bisectriz de un ángulo como el rayo que biseca al ángulo.

El enunciado de una tarea de construcción con GeoGebra incluye la referencia al objeto geométrico a ser construido, unas preguntas orientadoras y una hoja de trabajo (archivo .ggb) con las condiciones iniciales de la construcción y sobre la cual se deben producir los dibujos dinámicos. Estos enunciados siguen

la misma estructura de las proposiciones en las obras consultadas (enunciado, hipótesis y tesis), reduciendo el caso general a un caso particular cuyos elementos dados se muestran en la hoja de trabajo. A modo de ejemplo, la figura 5 muestra la tarea GGB-4b, asociada a la proposición II.2 de Tosca (1757).

PROP. II.

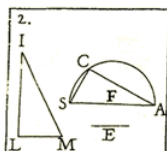
De dos rectas dadas, hacer un triángulo rectángulo. (fig. 2.)

Este Problema comprehende dos casos. *Caso 1.* Sean dadas las rectas IL, LM: y se pide se forme de ellas un triángulo rectángulo, cuyo ángulo recto sea comprehendido de dichas líneas.

Operacion. Hagale IL perpendicular à la extremidad de LM, (1. lib. 1. de este Trat.) y juntando la recta IM, quedará formado el triángulo ILM de dichas líneas, y rectángulo en L.

Caso 2. Sean dadas las líneas SA, y E: pide se forme de ellas un triángulo rectángulo, de fuerte, que la mayor SA sea la basa opuesta al ángulo recto.

Operacion. Divídase SA por medio en F; y haciendo centro en F con la distancia FA, hagale un femicirculo. Tómese con el compás la línea E, y páselle desde S hasta C. Tírense las líneas CA, CS, y quedará formado el triángulo que se pide, el qual será rectángulo en C, por estar el ángulo C en el femicirculo. (3.1. 3.)



Tarea GGB-4b

El archivo **GGB-4** muestra los segmentos m y n , y un punto P . Con estos elementos:

- Construir un triángulo rectángulo para el cual dos de sus lados midan m y n , y uno de sus vértices sea P .
- Comunicar la solución de la tarea, destacando: (i) el procedimiento de construcción del triángulo (justificando las acciones emprendidas) y (ii) la forma de validar el procedimiento de construcción: ¿Cómo se puede asegurar que el dibujo obtenido es el esperado?

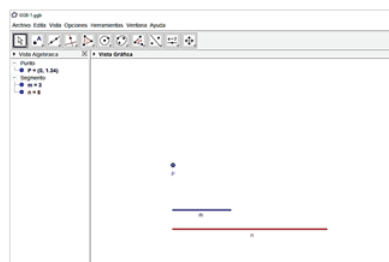


Figura 5. Ejemplo de una tarea de construcción con GeoGebra

Junto con la elaboración de las tareas de construcción con GeoGebra, se establecieron posibles respuestas considerando que la aplicación de cada tarea podía dar lugar a dos formas de obra común estrechamente vinculadas, en cuya producción el formador y los futuros profesores se encuentran con el SACEG.

La primera forma de obra común aparece en la actividad formativa como respuesta directa a las preguntas de las tareas de construcción con GeoGebra, y contiene: (i) el dibujo dinámico esperado, (ii) la comunicación (oral y/o escrita) del procedimiento de construcción del dibujo, y (iii) la justificación de su consistencia geométrica. Estas componentes de la respuesta a una tarea de construcción fueron anticipadas mediante el análisis de la información correspondiente al postulado que originó la tarea.

Por ejemplo, el análisis de la información asociada a la proposición II.2 (figura 5) permitió identificar dos casos posibles de construcción del triángulo rectángulo, según la posición que ocupan los objetos dados (lados del triángulo) en el dibujo. Claro está, la funcionalidad del *software* utilizado (como editor

gráfico) y la variedad de contenidos conceptuales que este ofrece convierte la resolución de una tarea de construcción con GeoGebra en una oportunidad para ampliar el campo de experimentación posible con los dibujos dinámicos (Laborde, 1997). En el caso de la tarea GGB-4b, la proposición II.2 puede sugerir un procedimiento de construcción para el cual m y n representan los tamaños de los catetos del triángulo (caso 1 de II.2). Al relacionar este procedimiento con la conceptualización de la herramienta *Polígono* (usada en este caso para producir el dibujo dinámico) es posible organizar la construcción en acciones y operaciones, según se muestra en la figura 6.

Procedimiento de construcción:

A-1: Determinar el segundo vértice del triángulo

- O-1.1: Se construye la circunferencia e con centro P y radio m – Circunferencia: centro, radio
- O-1.2: Se fija el punto E sobre la circunferencia e – Punto

A-2: Determinar el tercer vértice del triángulo

- O-2.1: Se traza la recta h por P y E – Recta
- O-2.2: Se traza la recta i , perpendicular a h por P – Perpendicular
- O-2.3: Se construye la circunferencia k con centro P y radio n – Circunferencia: centro, radio
- O-2.4: Se fija el punto F de intersección entre i y k – Punto

A-3: Dibujar el triángulo

- O-3.1: Se construye el triángulo $t1$ con vértices P , E y F – Polígono

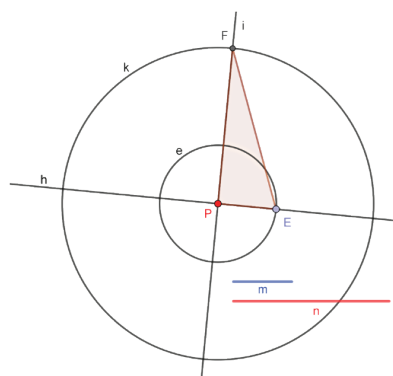


Figura 6. Respuesta posible a la tarea GGB-4b (dibujo dinámico y procedimiento de construcción)

En cuanto a la comunicación del procedimiento de construcción (pregunta b de la tarea), se espera que los futuros profesores justifiquen la consistencia (o no) de la construcción realizada, esto es, que formulen un discurso argumentativo que valide el procedimiento de construcción empleado, situando tal procedimiento dentro del marco axiomático asociado a la proposición que origina la tarea. En el espacio de trabajo del *software*, la relación con la teoría geométrica puede lograrse a partir de la identificación de propiedades del dibujo dinámico que se mantienen (o no) invariantes tras ser arrastrado por sus elementos libres. Ya que la producción del dibujo dinámico es mediada por GeoGebra, lo que importa de la argumentación aquí no es la secuencia proposicional de deducciones características de una demostración formal

escrita, sino la justificación razonada de lo obtenido en atención a la teoría geométrica (Sinclair y Robutti, 2013).

Antes de explicar la segunda forma de obra común, conviene recordar que la resolución de cada tarea de construcción con GeoGebra lleva implícitas contradicciones internas que pueden ser reconocidas y trascendidas por causa de la labor conjunta del formador y los futuros profesores. Por esta razón, se espera que la segunda forma de obra común aparezca en la actividad formativa como un modo específico de intervención del futuro profesor motivada por alguna contradicción presente en la respuesta de otro compañero a la tarea de construcción que se trate. En lo específico, este tipo de obra común implica: (i) identificar un hecho geométrico de la construcción que permita explicar la contradicción presente en la respuesta del compañero, (ii) interpretar el modo en que los otros entienden este hecho geométrico, e (iii) intervenir como profesor para ayudar a que otros mejoren su comprensión del hecho geométrico (avanzar para superar la contradicción).

A modo de ejemplo, se presenta el caso hipotético de Gonzalo y Layla, dos futuros profesores que se involucran en la resolución de la tarea GGB-4b de la figura 5. En un momento de la actividad formativa, Layla expone ante el formador y los demás compañeros su respuesta a la tarea de construcción, mientras que Gonzalo se va dando cuenta de que la joven ha empleado un procedimiento de construcción distinto al suyo (figura 7). En la respuesta de Layla, Gonzalo reconoce la forma de construcción del triángulo rectángulo para el cual el tamaño de la hipotenusa es n (este hecho se corresponde con el caso 2 de la proposición II.2), y se percata que la circunferencia h (operación 2 del procedimiento) no contribuye con la localización del tercer vértice del triángulo. En este ejemplo, las operaciones que producen el tercer vértice del triángulo constituyen un hecho geométrico, mientras que la circunferencia h se convierte en el foco de la contradicción.

Operaciones de la construcción:

1. Se traza la circunferencia e con centro P y radio m -
Circunferencia: centro y radio
2. Se traza la circunferencia h con centro P y radio n -
Circunferencia: centro y radio
3. Se fija el punto E sobre la circunferencia e - *Punto*
4. Se construye el segmento i con extremos P a E - *Segmento*
5. Se traza la circunferencia k con centro E y radio n -
Circunferencia: centro y radio
6. Se construye la recta p que pasa por P y es perpendicular a i -
Perpendicular
7. Se interseca la recta p con la circunferencia h , dando lugar a los puntos H e I - *Intersección*
8. Se construye el segmento q con extremos E e I - *Segmento*
9. Se construye el triángulo *polígono1* con vértices E , P y I - *Polígono*

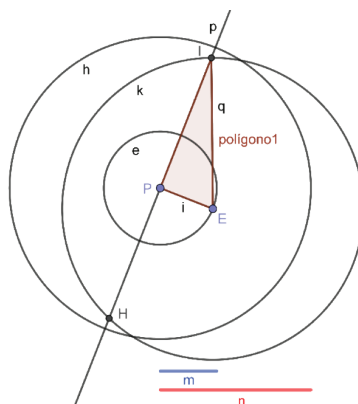


Figura 7. Procedimiento de construcción de Layla ante la tarea GGB-4b

Para hacer que Layla reconozca la contradicción en su respuesta y la supere, Gonzalo sugiere que se revisen las operaciones del procedimiento de construcción y se organicen dichas operaciones en acciones, atendiendo a la conceptualización de la herramienta *Polígono*, usada por Layla para dibujar el triángulo. Por ejemplo, las operaciones 1 y 3 de la figura 7 permiten determinar el vértice E del triángulo (primera acción), mientras que las operaciones 4, 5, 6 y 7 permiten la localización del vértice I (segunda acción). De esta manera (organizando las operaciones en acciones) se crean las condiciones para el cuestionamiento del papel que desempeña la operación 2 en la construcción.

Mientras esto se produce, Gonzalo podría intervenir formulando preguntas (p. ej., ¿qué herramienta del GeoGebra te permitió construir el triángulo?, ¿cuáles son los requerimientos de esta herramienta para ser usada?) con las cuales él busca dirigir la atención de Layla hacia los objetos que permiten determinar los vértices E e I , necesarios para el empleo de la herramienta.

4.5. INTERACCIONES

Dado que el aprendizaje del SACEG es un fenómeno social, las *interacciones* entre el formador y los futuros profesores durante los encuentros representan un aspecto crucial del entorno de aprendizaje. Se tiene previsto que la aplicación de cada tarea se haga siguiendo un ciclo de trabajo colaborativo inspirado en los momentos de la actividad del aula que propone Radford (2017b). La figura 8 muestra

los cuatro momentos que conforman el ciclo de resolución de una tarea de construcción con GeoGebra, ajustados al tiempo de duración del encuentro, la cantidad de tareas atendidas y las características del espacio físico.

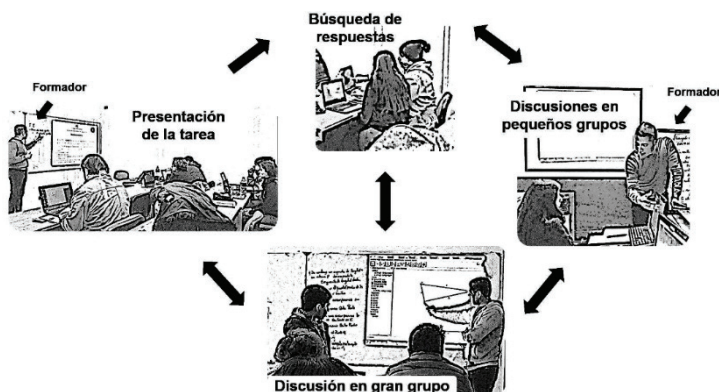


Figura 8. Representación de los momentos de la actividad formativa, elaborado por los autores

En el momento de *presentación de la tarea*, el formador muestra y explica la tarea a los futuros profesores, procurando que ellos entiendan lo que deben hacer. En ocasiones, será necesario despejar aquellas dudas iniciales que puedan interferir en el desarrollo del siguiente momento. Durante la *búsqueda de respuestas*, los futuros profesores trabajan de manera independiente o en pequeños equipos (según las condiciones del encuentro) para producir respuestas posibles a la tarea presentada.

Para el momento de *discusiones en pequeños grupos*, el formador ofrece la debida retroalimentación, responde las dudas que van surgiendo, hace preguntas y estimula la búsqueda de respuestas. Además, el formador se esfuerza por reconocer las oportunidades de aprendizaje del SACEG en los modos de resolución de la tarea que surgen durante un momento de la búsqueda, identificando las respuestas que merecen ser discutidas con todo el grupo y los signos de incomprensión o frustración que impiden el avance hacia la obra común. Al centrar la atención en estas cuestiones se aumentan las posibilidades de alcanzar las metas de la formación, ya que las respuestas detectadas por el formador se convierten en la materia prima para el siguiente momento del ciclo.

Luego de decidir las respuestas que serán compartidas y el orden de intervención en que serán compartidas, el formador pone en marcha la *discusión en gran grupo*. En este momento, se pide intencionalmente a los futuros profesores que presenten sus obras (completas o inconclusas) al resto del grupo, promoviendo el diálogo sobre ideas geométricas importantes (Stein *et al.*, 2008) para la situación de resolución en que se encuentren. Normalmente, este momento se desarrolla en dos instantes. El primer instante es de reconocimiento de las condiciones de la producción de la respuesta que es compartida. En este instante el formador intenta que los futuros profesores reconozcan las potencialidades y limitaciones⁹ de la construcción que se les presenta, para lo cual se podría optar por solicitar a quien la comparte que reproduzca el procedimiento de construcción en la hoja de trabajo, desde la primera operación realizada.

El segundo instante es de modificación de la respuesta. En este instante el formador invita a los presentes a comprometerse en la transformación de las condiciones iniciales de producción de la respuesta compartida, ofreciendo la ayuda necesaria para superar las limitaciones de la construcción. Este acto demanda la movilización del SACEG para el caso de la tarea que se trate, de manera que los esfuerzos mancomunados favorecen el reconocimiento de aquello que necesita ser modificado, ya sea en la construcción misma (el dibujo dinámico) o en la forma de comunicar y/o probar la consistencia del procedimiento de construcción.

Para que un futuro profesor se sienta desafiado a actuar profesionalmente, el formador le ofrece opciones de intervención a través de preguntas específicas, tales como: ¿Encuentras alguna diferencia importante entre esta respuesta y la tuya? ¿Dónde está el problema en la respuesta? ¿De qué manera puedes actuar como profesor para lograr que tu compañero reconozca este problema y lo supere?

El rol del formador en los momentos antes descritos se corresponde con un rol *ético* (Radford, 2020b), en el sentido de reconocerse como inseparable de la actividad formativa que media y actualiza el SACEG. En otras palabras, el formador actúa éticamente en la actividad al asumirse dentro de una conciencia colectiva en la búsqueda de la obra común, problematizando la relación de los futuros profesores con el SACEG, abonando el camino hacia el logro de las metas

⁹ Para conocer las posibles limitaciones en las respuestas de futuros profesores, las tareas de construcción con GeoGebra fueron aplicadas en 2019 durante el curso de *Didáctica de la Matemática IV*, perteneciente a la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación de la Universidad de Los Lagos (Chile). En la aplicación participaron 11 estudiantes en el último año de la carrera.

de la formación y aportando a la labor conjunta sus formas idiosincráticas de expresión, acción y pensamiento como un profesor de matemáticas más, dentro de un marco de actuación profesional éticamente responsable.

Se tiene previsto que la aplicación de las tareas se realice por *encuentros* con los futuros profesores, de 90-120 minutos de duración. Bajo condiciones ideales, se requieren 10 encuentros para aplicar las tareas, a los que se anteponen dos encuentros destinados a discutir sobre la resolución de tareas de construcción geométrica con *software* dinámico y la elaboración de narrativas como herramienta de formación profesional.

CONSIDERACIONES FINALES

Se describieron los referentes teóricos/metodológicos y los elementos que conformaron el diseño de un entorno de aprendizaje centrado en el saber acerca de las construcciones euclidianas con GeoGebra. Tal descripción es una respuesta a la necesidad de los autores de mostrar cómo una determinada concepción del aprendizaje humano puede dar forma al diseño de un entorno de aprendizaje centrado en las construcciones euclidianas con GeoGebra y dirigido a futuros profesores de matemáticas chilenos, próximos a egresar. Desde una perspectiva histórica-cultural del aprendizaje, se procuraron las condiciones para el encuentro progresivo de futuros profesores con el SACEG. En particular, el hecho de asumir el aprendizaje del SACEG como procesos de objetivación ha supuesto el reto de pensar en la naturaleza y fuentes del SACEG como saber docente.

Por otro lado, la concepción de actividad adoptada permitió que la actividad formativa se proyectara como un espacio legítimo de toma de conciencia del SACEG, en sus vertientes disciplinaria y profesional. Una ventaja de la actividad formativa que se propone es la posibilidad de ser integrada parcial o totalmente a la dinámica de funcionamiento de las carreras de Pedagogía en Matemáticas del país ya sea como curso optativo, unidad de aprendizaje o actividad de mejoramiento. Finalmente, el camino recorrido ofrece un acercamiento a lo que implica asumir algunos principios de la Teoría de la Objetivación para diseñar un entorno de aprendizaje dirigido a futuros profesores de matemáticas, estableciendo con ello un puente entre la formación inicial y el mundo de la enseñanza.

AGRADECIMIENTOS

El trabajo fue realizado en el marco de la tesis doctoral en Educación Matemática de Juan Luis Prieto G., bajo la dirección de Elizabeth-H. Arredondo y con financiamiento parcial de la Dirección de Investigación de la Vicerrectoría de Investigación y Postgrado de la Universidad de Los Lagos, D.U. 430.

Los autores agradecen la oportunidad dada por el Grupo de Investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Alicante (GIDIMAT-UA), de participar como ponentes en el Seminario de Investigación Didáctica de la Matemática en marzo de 2020. El artículo tiene en cuenta los aportes surgidos en este espacio.

REFERENCIAS

- Baldin, Y. y Malaspina, U. (Eds.) (2018). *Mathematics teacher education in the Andean region and Paraguay. A comparative analysis of issues and challenges*. Springer.
- Barab, S. y Squire, K. (2004). Design-based research: Putting a stake in the ground. *The Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 1–14. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_1
- Brandt, N. (2010). Chile: Climbing on giants' shoulders: Better schools for all Chilean children. OECD Economics Department Working Papers No. 784. Sitio Web de la OECD Economics Department Working Papers: http://www.oecdilibrary.org/economics/chile-climbing-on-giants-shoulders_5kmd41g7x9g0-en
- Carrillo, J. y Climent, N. (2009). From professional tasks in collaborative environments to educational tasks in mathematics teacher education. En B. Clarke, B. Grevholm y R. Millman (Eds.), *Tasks in primary mathematics teacher education: Purpose, use and exemplars* (pp. 215-234). Springer.
- Castellanos, M. T., Flores, P. y Moreno, A. (2018). Reflexión en el prácticum: un experimento de enseñanza con estudiantes colombianos. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 22(1), 413-439.
- De Villiers, M. (1998). An alternative approach to proof in dynamic geometry. En R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 369–393). Lawrence Erlbaum.
- Euclides (1991). *Elementos (Libros I–IV)*. Traducción de María Luisa Puertas Castaño. (1era Ed.). Editorial Gredos.

- Euclides (1994). *Elementos (Libros V–IX). Traducción de María Luisa Puertas Castaño*. (1era Ed.). Editorial Gredos.
- Fiallo, J. (2011). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, España.
- Fischbach, F. (2015). *Philosophies de Marx (Moments philosophiques)*. Vrin.
- Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematics Thinking and Learning*, 6(2), 105–128. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_3
- Guacaneme, E. A. (2012). Teoría euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales: ¿Un asunto útil para un profesor? *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (31), 113–131. <https://doi.org/10.17227/ted.num31-1651>
- Hiebert, J., Morris, A., Berk, D. y Jansen, A. (2007). Preparing teachers to learn from teaching. *Journal of Teacher Education*, 58(1), 47–61. <https://doi.org/10.1177/0022487106295726>
- Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S. y Choy, B. H. (2018). Enhancing noticing: Using a hypothetical trajectory to improve pre-service primary teachers' professional discourse. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(11), 3m1599. <https://doi.org/10.29333/ejmste/93421>
- Jacobs, V., Lamb, L., y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169–202.
- Krainer, K. y Llinares, S. (2010). Mathematics teacher education. En P. Peterson, E. Baker y B. McGaw (Eds.), *International Encyclopedia of Education* (pp. 702–705). Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-044894-7.00680-1>
- Laborde, C. (1997). Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig (Ed.), *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática* (pp. 33–48). Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.
- Leontiev, A. (1978). *Actividad, conciencia y personalidad*. Ediciones Ciencias del Hombre.
- Lerman, S. (2001). A review of research perspectives on mathematics teacher education. En F. L. Lin y T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of Mathematics Teacher Education* (pp. 33–52). Kluwer.
- Levi, B. (2006). *Leyendo a Euclides*. Libros del Zorzal.
- Liljedahl, P., Durand-Guerrier, V., Winsløw, C., Bloch, I., Huckstep, P., Rowland, T., Thwaites, A., Grevholm, B., Bergsten, C., Adler, J., Davis, Z., Garcia, M., Sánchez, V., Proulx, J., Flowers, J., Rubenstein, R., Grant, T., Kline, K., Moreira, P., David, M., et al. (2009). Components of mathematics teacher training. En R. Even y D. L. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics* (pp. 25–34). Springer.

- Llinares, S. (2004). La generación y uso de instrumentos para la práctica de enseñar matemáticas en educación primaria. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, 36, 93-115.
- Llinares, S. (2019). Enseñar matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 14(18), 30-43.
- Llinares, S. (2020). Tools and ways of thinking in mathematics teacher education: An introduction. En S. Llinares y O. Chapman (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education. Volume 2: Tools and processes in mathematics teacher education* (Second edition, pp. 1-22). Brill.
- Manzi, J., Lacerna, P., Meckes, L., Ramos, I., García, M., Pavez, P., Ortega, L. y San Martín, E. (2012). ¿Qué características de la formación inicial de los docentes se asocian a mayores avances en su aprendizaje de conocimientos disciplinarios? Informe final Proyecto FONIDE F511015. Ministerio de Educación de Chile. Sitio Web del Centro de Estudios del MINEDUC: <https://centroestudios.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/100/2017/07/Informe-Final-Jorge-Manzi-PUC-511015.pdf>
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge.
- Ministerio de Educación [MINEDUC]. (2012). *Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media. Estándares pedagógicos y disciplinarios*. LOM Ediciones.
- Moise, E. E. y Downs, F. L. (1966). *Geometría moderna*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Molina, M., Castro, E., Molina J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435>
- Prieto, J. L. y Valls, J. (2010). Aprendizaje de las características de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva en estudiantes para maestro. *Educación Matemática*, 22(1), 57-85.
- Radford, L. (2014). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 85, 405-422. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9527-x>
- Radford, L. (2017a). Saber y conocimiento desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. En B. D' Amore y L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y culturales* (pp. 97-114). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Radford, L. (2017b). Aprendizaje desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. En B. D' Amore y L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y culturales* (pp. 115-136). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

- Radford, L. (2018). Pautas para repensar el sujeto y el objeto desde una epistemología de solidaridad, en tiempos de una educación para el mercado y el consumo. En A. Ávila (Coord.), *Rutas de la educación matemática* (pp. 89–105). SOMIDEM.
- Radford, L. (2020a). El aprendizaje visto como saber y devenir: una mirada desde la teoría de la objetivación. *REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, 15(36), 27–42. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n16.p27-42.id306>
- Radford, L. (2020b). Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. En S. T. Gobara y L. Radford (Eds.), *Teoria da objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática* (pp. 15–42). Livraria da Física.
- Radford, L., Edwards, L. y Arzarello, F. (2009). Introduction: Beyond words. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 91–95.
- Reverand, E. (2004). Una aproximación a la teoría de la actividad. En D. Mora, A. Rivera, E. Reverand, W. Beyer, W. Serrano, O. Brito y C. Torres (Eds.), *Tópicos en Educación Matemática* (pp. 151–181). GIDEM.
- Rey, J. y Babini, J. (1985). *Historia de la matemática (vol. 1)*. Gedisa.
- Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las matemáticas*. Editorial Mir.
- Rosales, M. A. y Guzmán, I. (2016). Resolución de problemas de construcción geométrica con estudiantes de pedagogía en educación básica. *PARADIGMA*, 37(1), 135–160.
- Ruiz, A. (Ed.). (2017). *Mathematics teacher preparation in Central America and the Caribbean. The cases of Colombia, Costa Rica, the Dominican Republic and Venezuela*. Springer.
- Sáenz-Ludlow, A. y Athanasopoulou, A. (2012). The GSP as a technical and psychological-symbolic tool: The case of a lateral entry teacher. En C. E. Vasco, C. A. Álvarez, O. León, A. Athanasopoulou, A. Sáenz-Ludlow y B. D'Amore (Eds.), *Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas* (pp. 167–188). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Scriba, C. y Schreiber, P. (2015). *5000 Years of geometry. Mathematics in history and culture*. Springer.
- Sfard, A. (2004). What could be more practical than good research? On mutual relations between research and practice of mathematics education. En M. Niss (Ed.), *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematics Education* (pp. 76–92). IMFUFA.
- Sherin, M., Jacobs, V. y Philipp, R. (2011). Situating the study of teacher noticing. En M. Sherin, V. Jacobs y R. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing. Seeing through teachers' eyes* (pp. 3–13). Routledge.
- Simon, M. (2000). Research on development of mathematics teachers: The teacher development experiment. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335–359). Lawrence Erlbaum.

- Sinclair, N. y Robutti, O. (2013). Technology and the role of proof: The case of dynamic geometry. En A. Bishop, K. Clement, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 571–596). Springer.
- Simson, R. (2014). *Los seis primeros libros, y el undécimo y duodécimo de los Elementos de Euclides*. Editorial Maxtor.
- Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267–306). Lawrence Erlbaum.
- Stein, M., Engle, R., Smith, M. y Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313–340.
- Tardif, M. (2002). *Los saberes del docente y su desarrollo profesional*. Narcea Editores.
- Tatto, M. T., Lerman, S. y Novotná, J. (2009). Overview of teacher education systems across the world. En R. Even y D. L. Ball (Eds.), *The Professional education and development of teachers of mathematics* (pp. 15–23), Springer.
- Tosca, T. (1757). *Compendio Mathematico. Tomo I: En que se contienen todas las materias más principales de las ciencias que tratan de la cantidad*. Imprenta de Antonio Bordazar.
- Valente, W. (2017). A matemática a ensinar e a matemática para ensinar: Os saberes para a formação do educador matemático. Em: R. Hofstetter y W. Valente (Orgs.). *Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores* (pp. 201–229). Livraria da Física.
- Van Es, E. y Sherin, M. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10(4), 571–596.
- Watson, A. y Ohtani, M. (2015). Themes and issues in mathematics education concerning task design: Editorial introduction. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education, an ICMI Study 22* (pp. 3–15). Springer.
- Xavier, L. N. A. (2014). A construção social e histórica da profissão docente: Uma síntese necessária. *Revista Brasileira de Educação*, 19(59), 827–849. <https://doi.org/10.1590/S1413-24782014000900002>

JUAN LUIS PRIETO GONZÁLEZ

Dirección: Edificio de Postgrados en Educación Matemática. Lord Cochrane 1046. Osorno, Chile
Teléfono: (+56) 642333000

Competencia de futuros profesores de matemáticas para el análisis de la idoneidad didáctica de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto

Prospective mathematics teachers' competence for analysing the didactic suitability of a proportionality lesson in a textbook

María José Castillo,¹ María Burgos,²
Juan D. Godino³

Resumen: Se describe el diseño y resultados de una intervención formativa con futuros profesores de matemáticas orientada a promover la competencia de análisis de la idoneidad didáctica de una lección de libro de texto sobre proporcionalidad. El enfoque metodológico adoptado corresponde a la ingeniería didáctica. Además, se sigue una metodología de análisis de contenido para la evaluación de los informes escritos producidos por 14 equipos de trabajo sobre la idoneidad cognitiva-afectiva e instruccional-ecológica de la lección. Dichos equipos conforman una muestra de 30 futuros profesores de matemáticas de secundaria, estudiantes de un Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Tomando como base el análisis a priori consensuado por el equipo investigador, se detecta que la mayoría de las valoraciones realizadas por los equipos de trabajo son adecuadas. Los futuros profesores identifican carencias y aspectos positivos de la lección y plantean sugerencias en cuanto a la gestión de uso del libro de texto. Se concluye que la experiencia permite a los futuros profesores

Fecha de recepción: 9 de agosto de 2021. **Fecha de aceptación:** 17 de enero de 2022.

¹ Universidad de Costa Rica. mariajosecastillo.24@gmail.com, orcid.org/0000-0002-8046-8927.

² Universidad de Granada. mariaburgos@ugr.es, orcid.org/0000-0002-4598-7684.

³ Universidad de Granada. jgodino@ugr.es, orcid.org/0000-0001-8409-0258.

reflexionar y adquirir conocimientos y competencias necesarias, no solo en el análisis de lecciones de libros de texto, sino en la gestión crítica de estas.

Palabras clave: *formación de profesores; análisis de libros de texto; idoneidad didáctica; proporcionalidad.*

Abstract: In this paper the design and results of a training intervention aimed to promote prospective high school mathematics teachers' competence for analyzing the didactic suitability analysis of a textbook proportionality lesson is described. The methodological approach adopted corresponds to didactic engineering. Furthermore, content analysis was used to evaluate the written reports produced by 14 work teams on the lesson cognitive-affective and instructional-ecological suitability. These teams make up a sample of 30 prospective high school mathematics teachers, who were enrolled in a Master's Degree in Compulsory and Post-compulsory Secondary Education. Most of the work teams' assessment reports were adequate, according to the a priori analysis agreed upon by the research team. The prospective teachers pointed out to shortcomings and positive aspects of the lesson and made suggestions regarding the management of the textbook's use. We conclude that the experience allowed the future teachers to reflect and acquire knowledge and necessary competences, not only for the analysis of textbook lessons but also for their critical management.

Keywords: *teacher education; textbook didactical analysis; didactic suitability; proportionality.*

1. INTRODUCCIÓN

Conocer los modelos didácticos implícitos en los textos escolares es de vital importancia para comprender el tipo de intervención que promueven y poder reflexionar sobre sus consecuencias y su evolución (Serradó y Azcárate, 2003). Así, se espera que el profesor sea capaz de utilizar los materiales curriculares como guía para el diseño instruccional, tomando decisiones pedagógicas, interpretando la información que en ellos se incluye, estableciendo críticas y realizando adaptaciones que solventen sus limitaciones al considerar las

necesidades del contexto (Avila, 2019; Braga y Belver, 2016; Brown, 2009; Choppin, 2011; Remillard, 2005; Yang y Liu, 2019).

A pesar de ello, los profesores en formación y en ejercicio tienen dificultades, tanto para realizar un análisis adecuado de los libros de texto como para adoptar un enfoque analítico, al basarse en sus propios criterios intuitivos (Beyer y Davis, 2012; Nicol y Crespo, 2006; Schwarz *et al.*, 2008). Esto nos lleva a reconocer la importancia y necesidad de incorporar herramientas de análisis en el diseño de actividades formativas que guíen a los docentes en la identificación de fortalezas y debilidades de los materiales curriculares y la realización de adaptaciones oportunas.

La idoneidad didáctica (Breda *et al.*, 2017; Breda *et al.*, 2018; Godino *et al.*, 2016) surgió en el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino *et al.*, 2007), para orientar al profesorado en la toma de decisiones en las fases de diseño, implementación y evaluación de la práctica docente. Numerosas investigaciones en el campo de la formación de profesores han empleado dicha herramienta teórica, sus componentes e indicadores para organizar la reflexión del profesor y desarrollar la competencia de valoración de los procesos de instrucción implementados (Breda *et al.*, 2017; Burgos *et al.*, 2020; Castro *et al.*, 2018; Castro y Velásquez, 2014; Giacomone *et al.*, 2018; Hummes *et al.*, 2019). Dado que una lección de un libro de texto puede considerarse como un proceso de instrucción potencial o planificado por el autor del libro, que el profesor puede adoptar para implementar el proceso de instrucción efectivo, es posible aplicar la herramienta idoneidad didáctica, para valorar la adecuación de dicho proceso.

En este trabajo exploramos el uso de la herramienta idoneidad didáctica para que futuros profesores de matemáticas de secundaria reflexionen y adquieran los conocimientos y competencias necesarias, no solo en el análisis de lecciones de libros de texto, sino en la gestión crítica de dichas lecciones.

La elección del tema de la proporcionalidad se debe fundamentalmente a tres motivos: (1) la importancia que tiene el estudio de razones, proporciones y proporcionalidad en los currículos de Educación Primaria y Secundaria; (2) que este contenido no suele recibir un tratamiento adecuado en los textos (Ahl, 2016; Avila, 2019; Shield y Dole, 2013) y (3) que, a pesar de que tanto estudiantes como profesores muestran dificultades con el razonamiento proporcional (Fernández y Llinares, 2011; Van Dooren *et al.*, 2008) son pocos los estudios que abordan el conocimiento necesario para que los docentes puedan enseñar de manera pertinente la proporcionalidad (Weiland *et al.*, 2021).

En la sección 2 se introducen los elementos del marco teórico adoptado para la investigación y el problema que abordamos. En la sección 3 se describe la metodología. Los resultados del análisis de las valoraciones de idoneidad y de los juicios razonados elaborados por los participantes en las facetas Cognitiva, Afectiva, Interaccional, Mediacional y Ecológica sobre la lección de proporcionalidad de la lección se incluyen en la sección 4. La sección 5 abarca las conclusiones, limitaciones y posibles líneas de investigación.

2. MARCO TEÓRICO Y PROBLEMA

Diversas tendencias sobre formación de profesores proponen la reflexión sobre la práctica docente como una competencia clave para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza (Hummes *et al.*, 2019; Mason, 2016). En este sentido, desde el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) desarrollado en el marco del EOS (Godino *et al.*, 2017) se destaca la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción, refiriéndose a la competencia para la reflexión global sobre la práctica docente (la propia y la de otros), su valoración y mejora progresiva. En dicho marco se entiende la idoneidad didáctica como el grado en que un proceso de instrucción (o una parte de este) reúne ciertas características óptimas para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno) (Breda *et al.*, 2017; Godino *et al.*, 2016). Supone la articulación coherente y sistémica de seis facetas: Epistémica, Ecológica, Cognitiva, Afectiva, Interaccional y Mediacional.

La *idoneidad epistémica* refiere a la enseñanza de una ‘buena matemática’ (Breda *et al.*, 2017). Para que el proceso de enseñanza observado sea considerado de calidad, se debe tener en cuenta la presencia de diversos significados del contenido correspondiente y su interconexión (Godino *et al.*, 2016).

Un adecuado grado de *idoneidad cognitiva*, requiere que los contenidos posean una dificultad manejable para el nivel educativo al que se dirige, así como que las situaciones propuestas respondan a distintos niveles de dificultad. Es importante también que se promueva el uso de diversas estrategias de resolución y que se advierta a los alumnos de posibles dificultades y errores. La *idoneidad afectiva* se relaciona con factores que dependen de la institución y

del alumno. Un alto grado de idoneidad afectiva requiere la existencia de elementos motivadores (ilustraciones, humor...) y la selección de situaciones que respondan a los intereses de los alumnos y que permitan valorar la utilidad del contenido. Además, se deben promover actitudes de perseverancia y responsabilidad hacia las matemáticas, en particular, la flexibilidad para explorar ideas matemáticas y métodos alternativos, para la resolución de problemas.

El término *idoneidad instruccional* se usa para referirse a la idoneidad interaccional y mediacional en conjunto. La idoneidad interaccional es el grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje. La *idoneidad mediacional*, supone el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. En el aspecto temporal, se debe garantizar que la secuenciación de contenidos y actividades es la adecuada, dedicando tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión. Por último, el grado en que la acción formativa es adecuada dentro del entorno en que se implementa es la *idoneidad ecológica*. Esto supone, en particular, que los contenidos y su desarrollo se correspondan con las directrices curriculares, y que estos aparezcan relacionados con otros contenidos disciplinares.

Para cada una de estas facetas, se identifican un sistema de componentes e indicadores empíricos generales, que constituyen una guía para el análisis y reflexión sistemática, aportando criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Dado que la idoneidad didáctica se puede aplicar para analizar aspectos parciales de un proceso de enseñanza, como el previsto en una lección concreta de un libro de texto y dada la importancia que dicho recurso sigue teniendo en el diseño instruccional (Braga y Belver, 2016) consideramos conveniente que los profesores conozcan las facetas, componentes e indicadores de la idoneidad didáctica y adquieran competencia para su uso en el análisis crítico de dichos recursos.

En este texto, se describe el diseño, implementación y resultados de una intervención formativa con futuros profesores de secundaria orientada a desarrollar la competencia de análisis de la idoneidad didáctica de lecciones de libros de texto en el tema de proporcionalidad. Los objetivos específicos de la investigación son:

- Dar a conocer a los futuros profesores una metodología para analizar la idoneidad didáctica de lecciones de libros de texto de matemáticas.

- Analizar cómo estos sujetos aplican la herramienta para valorar de manera crítica y constructiva una lección particular de proporcionalidad y cómo consideran su análisis para proponer mejoras en la gestión del recurso. En este caso se centra la atención en las facetas Cognitiva-Afectiva e Instruccional-Ecológica.⁴

3. METODOLOGÍA

Dado que el interés de nuestra investigación es llevar a cabo acciones formativas con futuros profesores de matemáticas destinadas a desarrollar su competencia de análisis de la idoneidad didáctica, el enfoque metodológico que adoptamos es la ingeniería didáctica entendida en el sentido generalizado propuesto por Godino *et al.* (2014). Esta interpretación distingue cuatro fases de investigación: estudio preliminar en sus diferentes dimensiones (Epistémica, Cognitiva, Afectiva, Instruccional y Ecológica), diseño del experimento (selección de tareas, secuenciación y análisis a priori de las mismas), implementación (observación de las interacciones entre las personas y evaluación del aprendizaje alcanzado), y análisis retrospectivo (derivado del contraste entre lo previsto en el diseño y lo observado en la implementación). A continuación, se presentan el estudio preliminar y el diseño del experimento (contexto, consignas entregadas a los participantes y análisis a priori del texto). El análisis de contenido (Cohen *et al.*, 2011) de los informes entregados por los futuros profesores, empleando las facetas, sus componentes e indicadores de idoneidad como categorías de análisis para mostrar de modo sintético las respuestas de los participantes, nos permite valorar los resultados de aprendizaje logrados, comparando con la valoración experta previa. Los resultados de este análisis se muestran en la sección 4.

3.1. ESTUDIO PRELIMINAR

La valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción planificado en una lección de un libro de texto sobre proporcionalidad, requiere recopilar, analizar y sistematizar conocimientos didáctico-matemáticos resultados de las

⁴ Por motivos de espacio, la faceta epistémica centrará la atención de un nuevo artículo.

investigaciones educativas sobre la enseñanza y aprendizaje de dicho tópico. Esta información permite enriquecer y particularizar los componentes e indicadores en cada faceta de la idoneidad didáctica para elaborar una Guía de Análisis de Lecciones de Libros de Texto de Matemáticas adaptada al tema de proporcionalidad (GALT-Proporcionalidad), que constituya la herramienta metodológica que empleen los futuros profesores en la intervención formativa. Aunque esta guía incluye indicadores para las seis idoneidades parciales contempladas en el EOS, centramos nuestra atención en las dimensiones cognitivo-afectiva e instruccional-ecológica.

Si bien la consideración del tema específico de la proporcionalidad no supone cambios relevantes en los indicadores de la guía general GALT-Matemáticas (Castillo *et al.*, 2022) referentes a las dimensiones afectivo y ecológica y que pueden consultarse en las tablas 2 y 4, si fue necesario refinar algunos indicadores en las dimensiones cognitiva e instruccional, incorporando conocimientos didáctico-matemáticos relevantes en relación a dichas facetas.

Desde el punto de vista cognitivo, para valorar si los contenidos presentes en la lección son de un nivel de dificultad adecuado para los alumnos a los que se dirige, es importante tener en cuenta aquellos factores que influyen en el nivel de éxito de los alumnos al resolver tareas de proporcionalidad. Trabajos como los de Fernández y Llinares (2011), Silvestre y da Ponte (2011) o Van Dooren *et al.* (2008), señalan: la relación entre los números involucrados, el uso de razones enteras y no enteras, las unidades de las magnitudes involucradas en la situación, la manera en que se formula la tarea, o la ubicación del valor desconocido en una situación de valor faltante entre otros. Se observa que los problemas que involucran números naturales pequeños o aquellos en los que existe una relación de divisibilidad entre sus términos, resultan más fáciles para los alumnos (Silvestre y da Ponte, 2011).

Se considera importante que la lección de libro de texto advierta de errores y dificultades de los alumnos. En este sentido, algunas estrategias erróneas que comúnmente emplean los estudiantes al enfrentarse a una tarea de proporcionalidad, tienen que ver con el uso de relaciones aditivas en lugar de multiplicativas evitando el uso de fracciones (Lamon, 1993). Por otro lado, ocurre que los estudiantes utilizan modelos lineales en situaciones no pertinentes para su aplicación (“ilusión de linealidad”) y que caracterizan (erróneamente) la proporcionalidad entre magnitudes A y B basándose en la aplicación solo de condiciones necesarias como la regla “más en A, más en B” (Van Dooren *et al.*, 2008).

Para atender a las diferencias individuales, es imprescindible promover el uso de diversas estrategias correctas en situaciones de proporcionalidad. Por ejemplo, estrategias de construcción progresiva, el uso de la razón unitaria (¿cuánto por uno?), uso del factor de cambio (se reconoce el factor multiplicativo entre cantidades), entre otras (Fernández y Llinares, 2011; Silvestre y da Ponte, 2011).

Desde el punto de vista instruccional, y en lo que respecta a la secuenciación de la lección, diversos autores consideran pertinente avanzar desde un conocimiento de naturaleza intuitiva y cualitativa, de estructura aditiva (pre-proporcional), hacia un conocimiento cuantitativo de estructura multiplicativa (proporcional). Por otro lado, el uso indiscriminado de la regla de tres impide el desarrollo adecuado del razonamiento proporcional, en particular, la correcta distinción de las situaciones de proporcionalidad de aquellas que no lo son (Fernández y Llinares, 2011), por lo que es recomendable, antes de introducir este algoritmo, ofrecer otros procedimientos como los mencionados previamente (Ercole *et al.*, 2011; Shield y Dole, 2013).

3.2. DISEÑO DEL EXPERIMENTO E IMPLEMENTACIÓN

La experiencia se realizó en el marco de un Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato (especialidad de Matemáticas), en diciembre del 2019, con 30 estudiantes del curso de posgrado Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas en Educación Secundaria, en el que se contempla el libro de texto como recurso en el aula de matemáticas y su relación con los organizadores curriculares. La intervención formativa tuvo una duración de dos horas y media de trabajo presencial en el aula. De manera previa a esta sesión, los participantes habían recibido formación (dos sesiones de dos horas y media de duración) sobre significados y distintos tipos de objetos matemáticos. Los participantes contaron con dos semanas para elaborar los informes escritos; durante este tiempo, podían preguntar sus dudas por medio de la plataforma Moodle. Se dispone de los informes sobre el análisis de una lección de proporcionalidad en un libro de texto, producidos por 14 equipos de estudiantes, lo anterior como trabajo voluntario para incrementar la calificación del curso.

Instrumento de recogida de datos

Se escogió como texto de proporcionalidad la lección de Arias y Maza (2015) de uso extendido entre los centros escolares en el contexto español. Tras la presentación y discusión de la noción de idoneidad didáctica y de la GALT-Proporcionalidad se propuso a los estudiantes del Máster que, trabajando en equipos de dos o tres estudiantes, respondieran a las siguientes consignas:

1. En cada una de las unidades de análisis en que se ha descompuesto el texto sobre proporcionalidad (Arias y Maza, 2015) y para cada una de las facetas:
 - a) Identificar los componentes y subcomponentes según corresponda, tomando como base el orden en que se presentan en la GALT-Proporcionalidad.
 - b) ¿En qué grado se cumple cada indicador de idoneidad didáctica en la unidad de análisis? En la columna valoración asignar 0, 1, 2 para expresar el grado de cumplimiento de cada indicador según el siguiente criterio: 0 si no se cumple el indicador; 1 si se cumple parcialmente; 2 si se cumple totalmente. Tenga en cuenta si existe algún tipo de discordancia entre el significado planificado por los autores y el significado de referencia sobre el mismo (conflictos).
 - c) Elaborar un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la lección en cada una de las facetas. Tenga en cuenta la información obtenida anteriormente y los criterios de idoneidad didáctica (GALT-Proporcionalidad).
2. ¿Cómo crees que se debe gestionar el uso del texto para incrementar la idoneidad del proceso de estudio? Describir los cambios que habría que introducir en el proceso de estudio para resolver los conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales que previamente se han identificado.

Se explicó a los estudiantes que, en caso de no considerar apropiado aplicar un indicador en una unidad de análisis, debían indicarlo.

Análisis a priori de la idoneidad Cognitivo-Afectiva e Instruccional-Ecológica de la lección

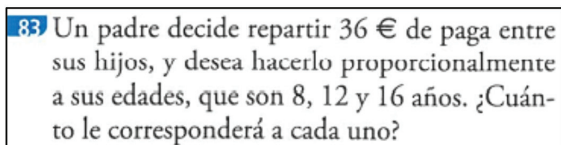
Como parte del diseño de la intervención, los investigadores realizaron de manera independiente el análisis a priori de la idoneidad de la lección de proporcionalidad del libro de texto (Arias y Maza, 2015), que había sido dividida en cuatro unidades de análisis: U1, razón y proporción; U2, proporcionalidad

directa; U3, proporcionalidad inversa; U4, porcentajes. Posteriormente se consensuó una valoración común que es la que a continuación se presenta. Este análisis constituye el referente para interpretar las respuestas dadas por los profesores en formación.

Las puntuaciones (0, 1, 2 según la consigna) otorgadas por el equipo investigador a partir de estas valoraciones quedan recogidas en las tablas de la 1 a la 4 (destacadas en negrita), donde estas se comparan con las asignadas por los futuros profesores. Empleamos las siglas I (indicador) acompañada de su correspondiente numeración según se muestra en las tablas de la 1 a la 4 para la correspondiente valoración.

Idoneidad Cognitiva. En relación a los conocimientos previos, no se referencian contenidos asociados al tema como pueden ser: operaciones con decimales en U1, ley del doble, triple, mitad, magnitud, unidades de medida de magnitud en U2 y U3, área de un rectángulo en U3, expresión de partes usando porcentajes en U4. Mediante una anotación se precisa una diferencia entre el concepto de razón y fracción en U1, y en U2 se incluye el “recuerda” con información sobre condiciones que deben cumplir dos magnitudes directamente proporcionales (I1). Por otro lado, en todas las unidades los contenidos pretendidos poseen una dificultad manejable (I2).

En cuanto a las *diferencias individuales*, existe poca presencia de tareas de ampliación (dirigidas a estudiantes con mayor competencia matemática, que involucren procesos como la modelización o generalización); identificándose actividades de este tipo únicamente en U2 y U3. Un ejemplo de este tipo de situación se incluye en la figura 1, sobre repartos proporcionales, no tratados previamente. Además, se utilizan únicamente dos estrategias correctas para resolver situaciones en U2, U3 y U4, para U1 solo se trabaja las proporciones con el producto cruzado (I4).



83 Un padre decide repartir 36 € de paga entre sus hijos, y desea hacerlo proporcionalmente a sus edades, que son 8, 12 y 16 años. ¿Cuánto le corresponderá a cada uno?

Figura 1. Tarea de ampliación (Arias y Maza, 2015, p. 148)

Respecto al componente *conflictos cognitivos* observamos que no se emplean estrategias erróneas como fuente de aprendizaje en ninguna de las unidades (I5).

Existen diferentes niveles de dificultad en relación con la naturaleza numérica de las cantidades de magnitudes propuestas y el lugar que ocupa la variable en las diferentes situaciones propuestas en U1 y U2. Sin embargo, en U3 todos los datos numéricos empleados son números enteros y en U4 existe poca variedad respecto a los ejemplos resueltos (I6). Se encuentran algunas advertencias de errores y dificultades a los alumnos en U1, U2 y U3. Por ejemplo, en U1 se advierte que una razón no es una fracción, en U2 se precisa “para saber si dos magnitudes son directamente proporcionales no basta con comprobar que, al aumentar una magnitud, la otra aumenta también”. Para U3 se señala “recuerda que lo primero que hay que hacer es determinar si las magnitudes son inversamente proporcionales” (I7). Con relación a la evaluación, no se proponen instrumentos que permitan evaluar al alumno ni que permitan la autoevaluación (I8).

Idoneidad Afectiva. En la lección no se promueve la perseverancia, responsabilidad, etc. en el trabajo matemático (I9), ni se favorece la argumentación en situaciones de igualdad (I10). Se echan en falta situaciones-problemas previos que motiven los procedimientos y no se fomenta la flexibilidad para explorar ideas matemáticas y métodos alternativos para la resolución de problemas: en U2, U3 y U4 se establecen dos métodos de solución para las tareas de valor faltante y para resolver problemas de aumentos y descuentos (I11).

Respecto a la consideración de *emociones y valores* en la lección, se incluyen situaciones contextualizadas que implican conexiones con la vida real, lo cual podría ser de interés para el alumno (I12) a la vez que permiten valorar la utilidad de las matemáticas, aunque no sus cualidades de estética o precisión (I18). También se utilizan algunas ilustraciones, pero no situaciones de humor o curiosidades (I13). En ninguna de las unidades se potencian los razonamientos lógicos, las ideas originales o el trabajo útil, práctico o realista (I14). Tampoco se dedica espacio para que los estudiantes puedan expresar sus emociones hacia las situaciones propuestas (I15), ni se promueve la autoestima, evita el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas (I16). Por otro lado, en ninguna de las unidades se consideran las *creencias* (I17). Tampoco se proponen actividades de *evaluación* que permitan valorar los aspectos afectivos (I19).

Idoneidad Instruccional. En relación a la *interacción autor-alumnos*, la presentación teórica del tema es organizada, proponiéndose primero definiciones y procedimientos con pasos a seguir y posteriormente ejemplos resueltos. No obstante, no se presentan de manera suficientemente clara los conceptos claves: razón, proporción, constante de proporcionalidad (U1), magnitudes directa e inversamente proporcionales (U2 y U3). Las proposiciones y procedimientos

fundamentales no se tratan de manera adecuada en U2 y U3. Por ejemplo, en la figura 2 se observa la descripción del método de la regla de tres y como se identifica la relación de proporcionalidad directa con “más a más” o “menos a menos”. Los porcentajes se presentan en U4 de forma rutinaria y desconectada de las secciones previas (I20).

2.4 Método de regla de tres directa

Para resolver los problemas de regla de tres directa se sigue el procedimiento:

- a) Se identifican las magnitudes que intervienen y sus unidades.
- b) Se colocan las magnitudes y los datos poniendo en **último** lugar la incógnita.
- c) Se determina si la proporcionalidad es **directa**. Es **directa** cuando va de **+ a +** o de **- a -**
- d) Se forma la proporción y se calcula el cuarto proporcional.

Figura 2. Descripción de la regla de tres. (Arias y Maza, 2015, p. 139)

En la lección no se presentan situaciones que permitan llegar a consensos empleando argumentos diversos (I21). No se puede considerar que el autor use recursos retóricos y argumentativos para captar la atención del alumno (I22); excepcionalmente se emplea una nota “recuerda” en U2 y esquemas que resumen procedimientos a seguir en U4. Dado que en la explicación teórica los ejemplos están completamente acabados, no se invita al alumno a involucrarse en la dinámica de la exposición (I23).

En relación a las *interacciones discentes*, no existen tareas que permitan al alumno resolverlas y discutir las de forma colaborativa por lo que no se favorece el diálogo y debate entre los estudiantes (I24), ni el planteamiento de conjeturas o empleo de argumentos matemáticos (I25). No se fomenta la *autonomía* dado que son escasos los momentos donde los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (I26); estos responden a la resolución de tareas propuestas similares a los ejemplos resueltos previamente, lo que implica que el alumno no tiene la oportunidad de explorar, investigar o conjeturar. Solo dos actividades solicitan interpretar la respuesta en U1, y únicamente la primera situación en U3 (figura 3) puede considerarse una oportunidad para que el alumno explore e investigue ya que es la primera vez que el alumno se enfrenta al tema.



Figura 3. Situación introductoria en U3 (Arias y Maza, 2015, p. 139)

Como se mencionó no se identifican instrumentos de *evaluación* (I27).

En cuanto al componente *recursos*, no se promueve el uso de materiales manipulativos, audiovisuales e informáticos (I28) ni se explicitan las fuentes usadas en toda la lección (I30). No se utilizan modelos concretos que permitan contextualizar y motivar las definiciones y propiedades. No obstante, se emplean visualizaciones para representar los factores que se multiplican en el producto cruzado en U1, se incluyen visualizaciones tabulares y diagramáticas en U2, U3 y U4 (I29).

Por otro lado, no se plantea el *espacio temporal* suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión (I31). La temporalización de la secuenciación de actividades y contenidos no es del todo adecuada (I32). La presentación de definiciones o procedimientos seguida de un ejemplo resuelto únicamente para U1, U2 y U3 refleja que el espacio dedicado a todos los contenidos es homogéneo; únicamente para U4 se proponen más ejemplos resueltos y algunos se resuelven mediante dos formas diferentes.

Idoneidad Ecológica. La *adaptación* de la lección *al currículo* (I33) se considera inadecuada: los conceptos de proporción continua y medio proporcional presentados en U1 no se contemplan en las directrices curriculares, en la lección no se tratan los repartos directa e inversamente proporcionales, y no existe una conexión de los porcentajes con las magnitudes directamente proporcionales, no se aborda su cálculo con calculadora. Además, las tareas propuestas no promueven el uso de diferentes estrategias en la resolución de problemas de variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales.

La lección no contempla la *apertura a la innovación* y la *educación en valores*, ya que las situaciones propuestas no promueven la investigación ni la práctica reflexiva en los alumnos (I34), tampoco se dan oportunidades para que los alumnos desarrollen un pensamiento crítico, cuestionando lo aparentemente evidente, ni se contempla la formación en valores democráticos en ninguna de las situaciones propuestas (I36). La *adaptación socio-profesional* y las *conexiones intra e interdisciplinares* se abordan parcialmente, ya que, por un lado,

las situaciones contextualizadas no tratan lo suficiente aspectos sociales o profesionales (I35), y por otro, se tratan conexiones intra (geometría) e interdisciplinarias (velocidad-física) en algunas situaciones de U1, U2, U3 y la aplicación de impuestos en algunas tareas de U4 (I37).

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

Se presentan los resultados del análisis de las valoraciones de idoneidad dadas por los futuros profesores sobre la lección de proporcionalidad, por medio de la herramienta GALT-Proporcionalidad en las facetas Cognitiva, Afectiva, Instruccional y Ecológica. En primer lugar, se comparan dichas valoraciones con el análisis a priori realizado por los investigadores. En segundo lugar, se describen los juicios razonados sobre la idoneidad de la lección elaborados por los participantes, indicando las características que emplean para dar una evaluación positiva o negativa. Finalmente se analizan las respuestas sobre la gestión de uso de la lección.

4.1. ANÁLISIS DE LA LECCIÓN A TRAVÉS DE LA GALT-PROPORCIONALIDAD

En las tablas de la 1 a la 4 se presentan las valoraciones cuantitativas dadas por los participantes en cada uno de los indicadores de las facetas en las cuales nos centramos. Para comprobar su grado de corrección, se incluye la valoración otorgada por los investigadores, destacada en negrita. La valoración ordinal indica la presencia o no de cada indicador en la lección (0 nunca, 1 a veces-parcialmente, 2 siempre-totalmente) dada por los equipos. En paréntesis se indica la frecuencia de las valoraciones hechas por los equipos. Si en algún caso la suma de las frecuencias no es 14 (número total de equipos), se debe a que algún equipo no ha valorado dicho indicador. Destacaremos aquellos indicadores de idoneidad que la mayoría de los equipos valoraron de modo diferente a la del grupo investigador. Su formulación y aplicación al análisis de la lección requieren especial atención y suponen reflexionar sobre las causas que originan dichas discrepancias.

Valoraciones en las facetas Cognitiva y Afectiva

Como se observa en la tabla 1 existen discordancias en las valoraciones otorgadas por el grupo investigador y la mayoría de los equipos en los indicadores I1, I4, I6, I7, I8, de la Faceta Cognitiva, que intentamos justificar a continuación.

Tabla 1. Comparación de valoraciones en la Faceta Cognitiva

Indicadores según componentes	Valoración (Frecuencia)			
	U1	U2	U3	U4
Conocimientos previos				
I1. Se contempla en el texto los conocimientos previos necesarios de acuerdo con el nivel educativo correspondiente.	0(12) 1 (1) 2(1)	0(4) 1 (5) 2(5)	0(6) 1 (2) 2(6)	0(6) 1 (4) 2(4)
I2. Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.	0(0) 1(3) 2 (11)	0(0) 1(5) 2 (9)	0(0) 1(4) 2 (10)	0(0) 1(3) 2 (11)
Diferencias individuales				
I3. Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.	0(0) 1 (10) 2(4)	0(1) 1 (7) 2(6)	0(0) 1 (9) 2(5)	0(1) 1 (9) 2(4)
I4. Se promueve el acceso, el logro y apoyo de todos los estudiantes, por ejemplo, promoviendo uso de diversas estrategias correctas.	0 (10) 1(4) 2(0)	0(9) 1 (4) 2(1)	0(7) 1 (5) 2(2)	0(8) 1 (4) 2(2)
Conflictos cognitivos				
I5. Se valora y emplea el uso de estrategias erróneas (estrategias aditivas...) como fuente de aprendizaje.	0 (12) 1(1) 2(1)	0 (13) 1(0) 2(1)	0 (11) 1(2) 2(1)	0 (13) 1(0) 2(1)
I6. Se prevén situaciones con diferentes niveles de dificultad (con números enteros, no enteros, relaciones de divisibilidad...)	0(2) 1(5) 2 (7)	0(2) 1(7) 2 (5)	0(3) 1 (6) 2(5)	0(3) 1 (6) 2(5)
I7. Se advierte de errores y dificultades de los alumnos (obstáculo de linealidad, asumir como suficientes condiciones necesarias...).	0(13) 1 (1) 2(0)	0(10) 1 (1) 2(3)	0(12) 1 (1) 2(1)	0 (11) 1(2) 2(1)
Evaluación				

Indicadores según componentes	Valoración (Frecuencia)			
	U1	U2	U3	U4
I8. Se proponen instrumentos de evaluación, autoevaluación.	0(1) 1(9) 2(4)	0(0) 1(10) 2(4)	0(2) 1(7) 2(5)	0(0) 1(12) 2(2)

Para la valoración de I1 es probable que la mayoría de los participantes no contemplaron en U1 la referencia al concepto de fracciones, o bien que hayan considerado que debería existir un apartado previo a la lección donde se “repasen contenidos anteriores”. En las demás unidades las frecuencias no describen una preferencia clara de la mayoría de los participantes.

En relación con I4 suponemos que los participantes no consideraron que en U2, U3 y U4 existen dos modos de proceder en la solución de algunas tareas, lo que justifica la valoración parcial del indicador, a pesar de que las mismas no son suficientemente diversas. Para I6, aunque la mayoría de los participantes no coinciden con nuestra valoración parcial del indicador para U2, U3 y U4, en general reflexionaron que se cumple de manera total o parcial. En este caso, cinco equipos no han tenido en cuenta que en U3 no se tratan números no enteros en las tareas propuestas y que en U4 las situaciones son todas de ejercitación por lo que podría existir mayor variedad en cuanto al nivel de dificultad.

La mayoría de los participantes han valorado I7 con cero en todas las unidades. Esto puede deberse a que obviaron las advertencias incluidas en la lección de que una razón no es una fracción, o que “para saber si dos magnitudes son directamente proporcionales no basta con comprobar que, al aumentar una magnitud, la otra aumenta también” o bien que no las reconocieron suficientes para estimar el indicador como parcialmente satisfecho.

Finalmente, en I8, es factible que la mayoría de los participantes consideraran las actividades propuestas al final de cada unidad como de evaluación, sin embargo, no pensamos que las mismas tengan este fin, simplemente son actividades para que el alumno resuelva.

Como se observa en la tabla 2, las valoraciones de los estudiantes y las valoraciones del equipo investigador concuerdan en la mayoría de los indicadores de la Faceta Afectiva. Únicamente aparecen discordancias con la mayoría de los equipos en cuanto a la existencia de elementos motivadores (I13). La existencia de ilustraciones en el texto (si bien no son situaciones humorísticas o curiosidades) llevó al equipo investigador a valorar con pertinencia media este

indicador en las distintas unidades, mientras que los participantes en su mayoría reconocieron con pertinencia baja este indicador en cada unidad.

Tabla 2 Comparación de valoraciones en la Faceta Afectiva

Indicadores según componentes	Valoración (Frecuencia)			
	U1	U2	U3	U4
Actitudes				
I9. Se promueve la participación en actividades, perseverancia, responsabilidad, etc., para fomentar una actitud matemática.	0(11) 1(3) 2(0)	0(12) 1(2) 2(0)	0(11) 1(2) 2(1)	0(10) 1(4) 2(0)
I10. La argumentación se favorece en situaciones de igualdad, el valor de un argumento no depende de quién lo dice.	0(6) 1(2) 2(4)	0(8) 1(2) 2(3)	0(9) 1(2) 2(2)	0(8) 1(3) 2(3)
I11. Se fomenta la flexibilidad para explorar ideas matemáticas y métodos alternativos, para la resolución de problemas.	0(12) 1(2) 2(0)	0(10) 1(3) 2(1)	0(10) 1(3) 2(1)	0(13) 1(1) 2(0)
Emociones				
I12. Las tareas y el contenido correspondiente tienen interés para los alumnos.	0(2) 1(8) 2(4)	0(3) 1(8) 2(3)	0(4) 1(8) 2(2)	0(1) 1(7) 2(6)
I13. Existen elementos motivadores: ilustraciones, humor, poesías, adivinanzas, etc.	0(9) 1(4) 2(1)	0(10) 1(4) 2(0)	0(9) 1(5) 2(0)	0(10) 1(4) 2(0)
I14. Se fomentan y potencian los razonamientos lógicos, las ideas originales o el trabajo útil, práctico o realista.	0(9) 1(5) 2(0)	0(11) 1(3) 2(0)	0(11) 1(3) 2(0)	0(11) 1(3) 2(0)
I15. Se programan momentos específicos a lo largo de las sesiones para que los estudiantes puedan expresar sus emociones hacia las situaciones propuestas.	0(14) 1(0) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)	0(14) 1(0) 2(0)	0(14) 1(0) 2(0)
I16. Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, la fobia, el miedo a las matemáticas.	0(12) 1(2) 2(0)	0(14) 1(0) 2(0)	0(14) 1(0) 2(0)	0(12) 1(2) 2(0)

Indicadores según componentes	Valoración (Frecuencia)			
	U1	U2	U3	U4
Creencias				
I17. Se analizan y consideran las creencias sobre: las matemáticas, la enseñanza de las matemáticas y el contexto social en el que desarrolla el aprendizaje.	0(11) 1(3) 2(0)	0(11) 1(3) 2(0)	0(10) 1(4) 2(0)	0(10) 1(4) 2(0)
Valores				
I18. Se promueve que el estudiante valore las cualidades de estética, precisión, utilidad de las matemáticas en la vida diaria y profesional.	0(1) 1(11) 2(2)	0(5) 1(8) 2(1)	0(6) 1(7) 2(1)	0(6) 1(6) 2(2)
Evaluación formativa				
I19. Se proponen actividades de evaluación que permitan valorar los aspectos afectivos de la enseñanza y aprendizaje.	0(11) 1(2) 2(1)	0(13) 1(0) 2(1)	0(12) 1(0) 2(2)	0(10) 1(3) 2(1)

Valoraciones en las facetas Instruccional y Ecológica

Como se observa en la tabla 3, solo existe una diferencia considerable en la valoración que el equipo investigador otorgó a los indicadores I20 (interacción autor-alumno), I26 (autonomía) e I27 (evaluación formativa) y la considerada por la mayoría de los equipos. La mayoría de los equipos valoran I20 con puntuación media o máxima. Aquellos que dan la puntuación máxima al indicador pueden no haber identificado que las definiciones de razón, proporción, constante de proporcionalidad, magnitudes directa o inversamente proporcionales son ambiguas o incompletas. Esto pone de manifiesto una falta de conocimiento didáctico-matemático en relación con la proporcionalidad (Weiland *et al.*, 2021).

La valoración parcial de I26 en U1 y U3 puede deberse a la presencia de actividades que implican que el alumno interprete su respuesta o que los equipos consideraron que el alumno se enfrenta por primera vez al tema de magnitudes inversamente proporcionales. No obstante, la lección presenta, en general, carencias relevantes en el cumplimiento de este indicador. En I27, como se señaló, es posible que los participantes contemplaron las tareas para el alumno como instrumentos de evaluación.

Tabla 3. Comparación de valoraciones en la Faceta Instruccional

Indicadores según componentes	Valoración (Frecuencia)			
	U1	U2	U3	U4
Interacción autor-alumno				
I20. El autor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, enfatiza los conceptos claves del tema, etc.)	0(4) 1(4) 2(5)	0(3) 1(5) 2(5)	0(4) 1(6) 2(3)	0(3) 1(6) 2(4)
I21. Se promueven situaciones donde se busque llegar a consensos con base al mejor argumento.	0(11) 1(2) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)	0(12) 1(2) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)
I22. Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos.	0(10) 1(4) 2(0)	0(9) 1(4) 2(1)	0(9) 1(4) 2(1)	0(10) 1(4) 2(0)
I23. Se promueve o facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la exposición.	0(13) 1(1) 2(0)	0(14) 1(0) 2(0)	0(14) 1(0) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)
Interacciones discentes				
I24. Se proponen tareas que favorecen la comunicación y debate entre los estudiantes donde cuestionen diferentes puntos de vista con argumentos matemáticos.	0(13) 1(1) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)
I25. Se plantean situaciones en las que los estudiantes deban convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus conjeturas con argumentos matemáticos.	0(12) 1(2) 2(0)	0(11) 1(3) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)	0(12) 1(2) 2(0)
Autonomía				
I26. Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y soluciones, exploran ejemplos, investigan)	0(8) 1(6) 2(0)	0(10) 1(3) 2(1)	0(9) 1(5) 2(0)	0(8) 1(5) 2(1)
Evaluación formativa				
I27. Se incluyen formas de evaluación que permita la observación sistemática y continua del progreso cognitivo de los alumnos.	0(4) 1(9) 2(1)	0(5) 1(5) 2(4)	0(5) 1(6) 2(3)	0(5) 1(8) 2(1)
Recursos materiales				
I28. Se promueve el uso de materiales manipulativos, audiovisuales e informáticos para introducir el contenido pretendido.	0(14) 1(0) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)	0(14) 1(0) 2(0)	0(14) 1(0) 2(0)

Indicadores según componentes	Valoración (Frecuencia)			
	U1	U2	U3	U4
I29. Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.	0(1) 1(10) 2(3)	0(4) 1(7) 2(3)	0(4) 1(8) 2(2)	0(5) 1(8) 2(1)
I30. Se explicitan las fuentes usadas y son diversas.	0(14) 1(0) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)	0(14) 1(0) 2(0)
Tiempo				
I31. Se plantea el espacio temporal suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.	0(7) 1(5) 2(1)	0(5) 1(6) 2(1)	0(5) 1(7) 2(1)	0(5) 1(5) 2(3)
I32. La temporalización de la secuenciación de actividades y contenidos es adecuada.	0(5) 1(5) 2(3)	0(2) 1(7) 2(3)	0(4) 1(7) 2(2)	0(6) 1(5) 2(2)

Como muestra la tabla 4, desde el punto de vista del equipo investigador, la lección no cubre totalmente las disposiciones curriculares. Sin embargo, la mayoría de los equipos de futuros profesores consideraron este componente (I33) con la máxima puntuación. Es probable que los participantes no realizaron un análisis previo del currículo en lo que refiere al contenido de la lección o que pasaran por alto los objetivos curriculares (criterios y estándares de aprendizaje evaluables) en sus valoraciones. Por otro lado, en relación a I37, aunque no existen conexiones intra e interdisciplinarias diversas, se hacen algunas referencias a temas de geometría y física que la mayoría de los equipos parece ignorar.

Tabla 4. Comparación de valoraciones en la Faceta Ecológica

Indicadores según componentes	Valoración (Frecuencia)			
	U1	U2	U3	U4
Adaptación al currículo				
I33. Los objetivos, contenidos, su desarrollo y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.	0(0) 1(3) 2(11)	0(0) 1(4) 2(10)	0(0) 1(5) 2(9)	0(0) 1(4) 2(10)

Indicadores según componentes	Valoración (Frecuencia)			
	U1	U2	U3	U4
Apertura a la innovación				
I34. Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva.	0(12) 1(1) 2(0)	0(12) 1(1) 2(0)	0(11) 1(2) 2(0)	0(11) 1(2) 2(0)
Adaptación socio-profesional				
I35. Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes	0(4) 1(8) 2(2)	0(3) 1(9) 2(2)	0(4) 1(8) 2(2)	0(4) 1(7) 2(3)
Educación en valores				
I36. Se contempla la formación en valores democráticos, se dan oportunidades para que los alumnos cuestionen (pensamiento crítico).	0(13) 1(0) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)	0(13) 1(1) 2(0)
Conexiones intra e interdisciplinares				
I37. Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares (temas transversales, historia de la matemática, otros)	0(10) 1(4) 2(0)	0(10) 1(4) 2(0)	0(9) 1(5) 2(0)	0(9) 1(5) 2(0)

4.2. ANÁLISIS DE LOS JUICIOS RAZONADOS SOBRE LA IDONEIDAD DE LA LECCIÓN

Basándose en la información obtenida por medio de la aplicación de la GALT-Proporcionalidad, descrita en la sección anterior, los futuros profesores debían elaborar un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la lección en cada una de las facetas.

El análisis de contenido de sus respuestas permitió identificar las carencias que destacaban los participantes en su análisis y que después debían tener en cuenta para decidir cómo se debía gestionar el uso del texto para incrementar la idoneidad del proceso de estudio, describiendo los cambios necesarios para su mejora. Las carencias indicadas aparecen resumidas en la tabla 5.

Aquellas características que no corresponden a componentes de las facetas se incluyen en la categoría *otras opiniones*. Todos los equipos indicaron insuficiencias en la lección en alguna de las facetas correspondientes.

Como se observa en la tabla 5, en el componente *diferencias individuales*, cuatro equipos consideran que no se usan diversas estrategias de solución en las

situaciones, señalando por ejemplo que “siempre se aplica el mismo instrumento procedimental de resolución, favoreciendo la adición de los contenidos” (E2).

En cuanto a los *conflictos cognitivos*, dos equipos coinciden con E11 en que “nunca se advierte de los errores que se podrán cometer con la intención de hacer reflexionar al alumno sobre ello”. En relación a la evaluación, E1, E2, E5 y E7 consideran que no se aborda la autoevaluación, o coevaluación.

Tabla 5. Carencias, según componentes, destacadas por los equipos

Componente	Descripción	Frecuencia
Faceta Cognitiva		
Conocimientos previos	No se alude a los conocimientos previos.	5
Diferencias individuales	Inexistencia de diversidad de estrategias para resolver tareas.	4
Conflictos cognitivos	No se trata el error.	3
	Los ejercicios no poseen diferentes niveles de dificultad.	2
Evaluación	No existen distintos métodos de evaluación.	4
Faceta Afectiva		
Actitudes	No se promueve la participación, ni la flexibilidad para explorar ideas.	4
Emociones	No se promueve el interés del alumno, faltan elementos motivadores, no se evita el rechazo hacia la disciplina.	7
Evaluación	No se evalúan aspectos afectivos	1
Faceta Instruccional (interaccional-mediacional)		
Interacción autor-alumno	No se enfatizan conceptos claves, ni se usan recursos que involucren al alumno.	2
Interacciones discentes	No se promueven interacciones discentes.	9
Autonomía	No se fomenta la autonomía del alumno.	4
Recursos	Falta de uso de recursos materiales.	9
	Falta de contextualización.	4
Tiempo	Temporalización inadecuada.	4

Componente	Descripción	Frecuencia
Faceta Ecológica		
Apertura a la innovación	Falta de apertura a la innovación.	3
Adaptación socio-profesional	No se promueve dicha adaptación.	2
Educación en valores	La educación en valores no se fomenta.	6
Conexiones intra e interdisciplinares	No se promueven estas conexiones.	7
Otras opiniones	Idoneidad baja en alguna o todas las facetas.	7

En la Faceta Afectiva, algunos equipos indican deficiencias en cuanto a las *actitudes*. Los equipos E1, E5 y E8 comparten opiniones respecto a que “la lección carece de ejercicios en los que se promueva la participación del alumnado, su creatividad o ejercicios dinámicos que motiven al estudio de las Matemáticas” (E1) y E3 manifiesta que “no se fomenta la flexibilidad para explorar ideas matemáticas y métodos alternativos, para la resolución de problemas”.

Además, la mitad de los equipos encontraron que la lección presenta carencias en el tratamiento de las *emociones*, señalando como E13 que “ninguno [de los ejercicios propuestos] hace referencia a aspectos relacionados con el ocio o actividades que el propio alumno pueda practicar por interés”. Por su parte, E3 y E7 indican la falta de elementos motivadores, particularmente E3 indica:

Los ejemplos carecen de humor y motivación para el alumnado al que va dirigido, constituyendo un ambiente no cercano a su contexto. Falta el impulso por la búsqueda e interés de los conocimientos, en donde no se apuesta por la variedad de las tareas, como la inclusión de la gamificación o retos y adivinanzas.

Los equipos E5, E13 y E12 indican que no se promueve la autoestima. Este último equipo también señala, como E8 y E3, que no se evita el rechazo hacia las matemáticas. Únicamente E12 señala que “tampoco se proponen actividades de evaluación que valoren los aspectos afectivos de la enseñanza y aprendizaje”.

Es interesante observar que el componente de *interacciones discentes* acaparó la atención de la mayoría de los equipos, que opinan de modo similar a E1 cuando advierte que:

Se observa la carencia de ejercicios de trabajo colaborativo que implique una investigación por parte del alumnado, para fomentar la puesta en común de ideas, resultados, procedimientos y trabajo en equipo en general. Además, no se proponen actividades que impliquen la exposición de un tema defendiéndolo y argumentándolo a modo de debate.

Sin embargo, únicamente dos equipos precisan en sus juicios deficiencias en cuanto a la *interacción autor-alumno*. Como indica E3 “no se enfatiza en los conceptos claves, ni se usan recursos retóricos y argumentativos para implicar al alumno”.

Cuatro equipos indican como E3 que “no hay espacios donde el alumno asuma responsabilidad del estudio”, en referencia a que no se fomenta la *autonomía*. Con relación al aspecto mediacional, nueve equipos apuntan que no se utilizan *recursos materiales* en la lección; cinco de ellos precisan la falta de recursos audiovisuales, tecnológicos o manipulativos. Por ejemplo, E1 propone que “podrían plantearse ejercicios que involucren el uso de calculadoras y materiales informáticos, pues resultan muy atractivos para el alumnado”.

Cuatro equipos sugieren deficiencias de contextualización en la lección, indicando que “las definiciones no son motivadas usando situaciones concretas” (E12), existen “ejemplos limitados relacionados con la vida cotidiana” (E2), “el contenido está muy poco contextualizado al no involucrar la sociedad y cultura en la que nos encontramos” (E9) y la “ausencia de fuentes tanto históricas como académicas” (E7). Con relación al *tiempo*, E8 afirma que “se emplea el mismo tiempo para contenidos asequibles que para los más complejos” y E12 considera que “la secuenciación de actividades y contenidos no es del todo adecuada”.

Aunque en la Faceta Ecológica se señalan limitaciones en todos los componentes, los equipos no suelen argumentar sus juicios. Seis equipos indican que no se aborda la *educación en valores*, de los cuales cuatro solo lo señalan y únicamente E3 y E14 aportan información adicional. Así, E14 arguye que se puede hacer referencia al “más famoso de los porcentajes, educando en valores: el 0,7% del PIB, que históricamente reclaman las ONGs de este país a los diferentes gobiernos de la nación para fines solidarios (“lo que daría pie al debate/reflexión del aprendiz sobre...”)

La mitad de los equipos mencionan que no se promueven las *conexiones intra e interdisciplinares*, pero únicamente E7 precisa que “esta faceta solo se ve perjudicada por la ausencia de referencias a otras ramas aparte de la física, así como la aportación de datos históricos que ayuden a la contextualización del contenido”.

En la categoría *otras opiniones* se incluyen observaciones que hacen algunos equipos en cuanto al nivel de idoneidad de algunas facetas. Por ejemplo, E7 señala “...una carencia notable en lo interaccional, afectivo y especialmente en lo mediacional”, calificando esta última como “la menos idónea en este libro de texto, principalmente en lo que a recursos se refiere”. También E6 menciona que “podemos ver que las puntuaciones son bastante bajas en todas las facetas estudiadas. Por tanto, el libro no se ajusta a los indicadores analizados y debería ser modificado para su correcto uso docente”.

4.3 ANÁLISIS DE LAS PROPUESTAS DE GESTIÓN DE LA LECCIÓN

El objetivo final del análisis y la valoración de la idoneidad didáctica de la lección como proceso de instrucción planificado, es la toma de decisiones razonadas sobre la gestión del recurso. Se pedía para ello a los futuros profesores que concretasen cambios fundamentados para la lección que permitieran incrementar la idoneidad del proceso de enseñanza y aprendizaje.

En general, la mitad de los equipos consideran que el libro solo puede constituir una guía sobre los contenidos a abordar que debe complementarse con otras fuentes y una buena labor docente debido a las deficiencias que presenta. La tabla 6 sintetiza las propuestas de mejora que proponen los participantes. A continuación mostramos algunos ejemplos prototípicos de sus descripciones.

Tabla 6. Propuestas de mejora de la lección

Componente	Descripción de las propuestas	Frecuencia
Faceta Cognitiva		
Conocimientos previos	Referir a conocimientos previos y a definiciones más fáciles.	3
Diferencias individuales	Introducir actividades de ampliación y refuerzo.	4
Conflictos cognitivos	Advertir de errores y dificultades, incluir situaciones secuenciadas en niveles de dificultad.	6
Evaluación	Incluir un solucionario de los ejercicios y diversos modos de evaluación.	7

Componente	Descripción de las propuestas	Frecuencia
Faceta Afectiva		
Actitudes	Incluir situaciones que promuevan la participación del alumno.	2
Emociones	Incentivar la creatividad, autoestima, interés y motivación del alumno.	6
Valores	Incluir situaciones cotidianas para valorar la utilidad de la disciplina.	3
Faceta Instruccional		
Interacción profesor-alumno	Realizar cambios al presentar el tema, reforzar con material adicional y explicaciones más claras.	6
Interacción discente	Incluir tareas que impliquen el trabajo en equipo.	12
Autonomía	Incluir tareas que fomenten la autonomía.	5
Recursos	Incluir tareas para emplear diversos materiales y contextualizar los contenidos.	10
Faceta Ecológica		
Educación en valores	Formar en valores democráticos.	4
Conexiones intra e interdisciplinares	Relacionar el contenido con otras áreas.	4

Respecto a los *conocimientos previos*, E2 plantea que “para resolver los conflictos en referencia al contenido, tendríamos que recurrir a definiciones más claras y fáciles de entender y asimilar por el alumnado”. Para mejorar el aspecto de evaluación, E1 propone que “sería interesante que el profesor aporte al alumnado un solucionario de ejercicios que aborden todos los contenidos explicados y que pretendan ser evaluados para ofrecer así una retroalimentación que ayude al alumnado en el proceso de aprendizaje”, lo que está en línea con la carencia en autoevaluación indicada por este equipo. Además, tres equipos precisan que deben incluirse actividades de autoevaluación, coevaluación, heteroevaluación y E6 sugiere “incluir también formas de evaluar de forma continua el aprendizaje”.

En relación con los *conflictos cognitivos*, dos equipos consideran necesario advertir a los alumnos de errores y dificultades. Los demás equipos plantean como E2 que “sería necesario introducir una línea de ejercicios que se encuentren graduados en cuanto a dificultad”. En este sentido, es interesante notar que

solo dos equipos habían precisado como carencia la uniformidad en el nivel de dificultad de las tareas (tabla 5).

En cuanto a la Faceta Afectiva, E3 y E8 consideran que “los cambios a introducir deberían tener en cuenta la propuesta de ejercicios más participativos”. En atención a las *emociones*, E2 y E6 creen que “deberían aparecer tareas que promuevan la creatividad, curiosidad y el ingenio del alumnado proponiendo [...] actividades fuera del aula” (E2) o bien plantear situaciones “que promuevan el trabajo en grupo, además de la autoestima y la seguridad en sí mismo para realizar los problemas matemáticos” (E6). Otros cuatro equipos reconocen que se debe fomentar el interés y motivación del alumno “ya sea adaptando el contenido a alumnos de la edad correspondiente con referencias con las que se sientan identificados” (E7) o bien incluyendo “más tipos de ejercicios diferentes... que muestren que las matemáticas son divertidas y pueden practicarse en conjunto” (E5).

Seis equipos sugieren cambios en relación con el componente *interacción autor-alumno*. En cuanto a la presentación del tema señalan como E3 que se debe “intentar dar un enfoque diferente al contenido presentado en el texto o reforzarlo con material adicional, pues algunas explicaciones pueden resultar confusas a los estudiantes” (E3). En particular E10 propone que “al presentar cada uno de los conceptos se deberían dar dos ejemplos diferentes que no se resuelvan de manera análoga”.

La mayoría de los equipos estiman como E5 que “sería imprescindible añadir ejercicios que fomenten el trabajo en equipo, el trabajo cooperativo, y que hagan que los alumnos reflexionen, aparte de asimilar conceptos”. Finalmente, para la Faceta Interaccional cinco equipos señalan que se deben incluir tareas para fomentar la *autonomía del alumno*, y dos precisan que se deben incluir actividades de investigación.

Las propuestas de cambios respecto a la Faceta Mediacional plantean mayoritariamente la inclusión de diversos *recursos*. Cinco de los diez equipos sugieren como E1 que “el docente puede proponer actividades en las que se emplee el uso de herramientas tecnológicas como puede ser un ordenador o simplemente una calculadora”. Por otro lado, E8, E10 y E11 precisan que deben contextualizarse los contenidos y proponen incluir “ejercicios para poder aplicar las definiciones y propiedades contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones” (E10).

Cuatro equipos consideran que debe contemplarse la formación en valores democráticos, dado que “no solo se trata de explicar los contenidos matemáticos sino realizar un proceso de enseñanza-aprendizaje integral, [...] sin olvidar la

parte emocional y los valores que el alumno debe adquirir cómo persona” (E5). Para ello, E3 sugiere

se deben plantear actividades grupales para fomentar el respeto a la diversidad, la cooperación y la tolerancia, [...] por ejemplo, un proyecto en el cual se proponga el proceso de reciclaje de un folio donde se vayan usando las proporciones en cada paso del proceso concienciando así al alumnado de la importancia que tiene no derrochar papel.

Finalmente, cuatro equipos proponen la necesidad de relacionar el contenido con la historia de las matemáticas u otras áreas de conocimiento. Por ejemplo, E3 recomienda “establecer conexiones con otros temas como son el de la estadística, a la hora de representar datos en gráficos de líneas y barras se usa la proporcionalidad”.

5. ANÁLISIS RETROSPECTIVO Y CONCLUSIONES

En este trabajo hemos descrito el diseño, implementación y resultados de una intervención formativa orientada a promover en futuros profesores de secundaria de matemáticas la competencia de análisis de idoneidad didáctica empleando como recurso una lección de proporcionalidad de un libro de texto y como herramienta metodológica la GALT-Proporcionalidad.

El análisis a priori por medio de la GALT-Proporcionalidad permitió evidenciar deficiencias de la lección en los aspectos cognitivos, afectivos, instruccionales y ecológicos. Los resultados muestran que, en general, los futuros profesores reconocen estas limitaciones, concordando con las valoraciones numéricas (0, 1 o 2) otorgadas por el equipo investigador en la mayoría de los indicadores (23 de 37). A pesar de existir algunas discordancias en la valoración cuantitativa, el análisis de contenido de los juicios realizados por los participantes sobre las idoneidades respectivas muestra que los futuros docentes identifican las principales carencias de la lección en los diversos componentes. Asimismo, al solicitarles a los participantes reflexionar sobre posibles cambios, estos han sido más específicos en críticas sobre la lección en componentes que poseen carencias significativas. Así, se observa en la tabla 6 un incremento de equipos que reconocen la necesidad de mejora en el componente evaluación, en comparación a aquellos que habían señalado deficiencias en dicho aspecto en la tabla 5. Podemos

concluir que la reflexión sobre el modo de uso de la lección, tras valorar su idoneidad, puede constituir una buena estrategia para involucrar a los futuros profesores en análisis más profundos, generando aprendizaje y reflexión por los docentes (Nicol y Crespo, 2006).

Como afirman Castro y Velásquez (2014), "la formación del maestro debería incluir experiencias que favorezcan la construcción de un panorama más amplio de su futuro ámbito profesional" (p. 51). Una labor compleja que forma parte de este panorama profesional es el análisis crítico y reflexivo de los procesos de instrucción. Por ello, es importante analizar qué estrategias de formación mejoran las críticas de los profesores de matemáticas de los recursos educativos, en particular de las lecciones de libros de texto (Yang y Liu, 2019). Consideramos que la metodología de análisis de lecciones de libros de texto que describimos en este artículo, es un aporte relevante en el ámbito de la investigación sobre libros de texto, por cuanto no se limita a un aspecto meramente descriptivo de la lección (Fan, 2013). Además, permite al docente analizar sistemáticamente la adecuación de lecciones en un tema concreto, contemplando aspectos como el afectivo, que normalmente quedan relegados a un segundo plano y ser capaces de concretar aspectos referentes a la gestión de dicho recurso para aumentar la calidad del proceso de instrucción planificado.

Dada la naturaleza del proceso de instrucción analizado, ha sido difícil para algunos participantes identificar el cumplimiento de algunos indicadores recogidos en la GALT-Proporcionalidad. Esto supone la necesidad de revisar y precisar dichos indicadores (por ejemplo, los relativos a una secuenciación adecuada de los contenidos de la proporcionalidad según la literatura existente) pero también de identificar a priori el conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores en relación a la proporcionalidad. Consideramos que una posible limitación de nuestro estudio es que los docentes no han tenido la oportunidad de familiarizarse lo suficiente con la GALT-Proporcionalidad, ni de recibir formación específica sobre conocimientos didáctico-matemáticos relacionados con la proporcionalidad. De cara a futuras intervenciones formativas se requiere especificar con mayor claridad aquellos indicadores que han sido más difíciles de valorar en la guía y solicitar a los futuros docentes que justifiquen su valoración cuantitativa. Además, incluir una formación previa sobre las facetas, componentes e indicadores de la idoneidad didáctica.

RECONOCIMIENTOS

Trabajo elaborado en el marco del proyecto de investigación: PID2019-105601GB-I00/ AEI / 10.13039/501100011033 (Ministerio de Ciencia e Innovación), con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España). Se agradece por el apoyo económico de una beca en el exterior otorgada al primer autor por la Universidad de Costa Rica.

REFERENCIAS

- Ahl, L. M. (2016). Research findings' impact on the representation of proportional reasoning in Swedish Mathematics textbooks. *REDIMAT*, 5(2), 180–204. <https://doi.org/10.17583/redimat.2016.1987>
- Arias, J., y Maza, S. (2015). *Matemáticas, 1º ESO*. Código Bruño.
- Avila, A. (2019). Significados, representaciones y lenguaje: las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria. *Educación Matemática*, 31(2), 31–59. <https://doi.org/10.24844/EM3102.02>
- Beyer, C. J., y Davis, E. A. (2012). Learning to critique and adapt science curriculum materials: Examining the development of preservice elementary teachers' pedagogical content knowledge. *Science Education*, 96(1), 130–157. <https://doi.org/10.1002/sce.20466>
- Braga, G., y Belver, J. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación*, 27(1), 199–218. https://doi.org/10.5209/rev_RCED.2016.v27.n1.45688
- Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, 32(60), 255–278. <http://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Breda, A., Pino-Fan, L. R., y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6), 1893–1918. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a>
- Brown, M. (2009). The teacher-tool relationship: Theorizing the design and use of curriculum materials. En J. T. Remillard, B. Herbel-Eisenmann, y G. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 17–36). Routledge.
- Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., y Godino, J. D. (2020). The issue of didactical suitability in mathematics educational videos: experience of analysis with prospective primary

- school teachers. *Revista Española de Pedagogía*, 78(275), 27–49. <https://doi.org/10.22550/REP78-1-2020-07>
- Castillo, M. J., Burgos, M., y Godino, J. D. (2022). Elaboración de una guía de análisis de libros de texto de matemáticas basada en la idoneidad didáctica. *Educação e Pesquisa*, 48. <https://doi.org/10.1590/S1678-4634202248238787eng>
- Castro, W. F., y Velásquez, H. (2014). Idoneidad didáctica de la práctica de maestros en formación inicial en un contexto urbano de conflicto social violento. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 33–54.
- Castro, W.F., Pino-Fan., y Velásquez-Echevarría, H. (2018). A proposal to enhance preservice teacher's noticing. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 14(11), Artículo em1569. <https://doi.org/10.29333/ejmste/92017>
- Choppin, J. (2011). Learned adaptations: Teachers' understanding and use of curriculum resources. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(5), 331–353. <https://doi.org/10.1007/s10857-011-9170-3>
- Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Routledge.
- Ercole, L. K., Frantz, M., y Ashline, G. (2011). Multiple ways to solve proportions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 16(8), 482–490.
- Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: Towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education*, 45(5), 765–777. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6>
- Fernández, C., y Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje*, 34(1), 67–80. <https://doi.org/10.1174/021037011794390111>
- Giacomone, B., Godino, J. D., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. *Educação e Pesquisa*, 44, Artículo e172011. <https://doi.org/10.1590/S1678-4634201844172011>
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 39(1–2), 127–135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., Contreras, A., y Wilhelmi, M. R. (2016). The theory of didactical suitability: Networking a system of didactics principles for mathematics education from different theoretical perspectives [Comunicación oral, TSG-51]. *13th International Congress on Mathematical Education*, Hamburgo, Alemania. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/ICME13_TSG51_PA_Godino.pdf
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90–113. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>

- Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Laso, A., y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2-3), 167-200.
- Hummes, V., Font, V., y Breda, A. (2019). Combined use of the lesson study and the criteria of didactical suitability for the development of the reflection on the own practice in the training of mathematics teachers. *Acta Scientiae*, 21(1), 64-82. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss1id4968>
- Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(1), 41-61. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.24.1.0041>
- Mason, J. (2016). Perception, interpretation and decision making: Understanding gaps between competence and performance—a commentary. *ZDM Mathematics Education*, 48(1-2), 219-226. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0764-1>
- Nicol, C. C., y Crespo, S. M. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How preservice teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics*, 62(3), 331-355. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-5423-y>
- Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research*, 75(2), 211-246. <https://doi.org/10.3102/00346543075002211>
- Schwarz, C., Gunckel, K., Smith, E., Covitt, B., Bae, M., Enfield, M., y Tsurusaki, B. (2008). Helping elementary pre-service teachers learn to use science curriculum materials for effective science teaching. *Science Education*, 92(2), 345-377. <https://doi.org/10.1002/sce.20243>
- Serradó, A., y P. Azcárate (2003). Estudio de la estructura de las unidades didácticas en los libros de texto de matemáticas para la educación secundaria obligatoria. *Educación Matemática*, 15(1), 67-98.
- Shield, M., y Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 183-199. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9415-9>
- Silvestre, A. S., y da Ponte, J. P. (2011). Una experiencia de enseñanza dirigida al desarrollo del razonamiento proporcional. *Revista Educación y Pedagogía*, 23(59), 137-158.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., y Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 311-342.
- Weiland, T., Orrill, C. H., Nagar, G. G., Brown, R. E., y Burke, J. (2021). Framing a robust understanding of proportional reasoning for teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 24(2), 179-202. <https://doi.org/10.1007/s10857-019-09453-0>

Yang, K., y Liu, X. (2019). Exploratory study on Taiwanese secondary teachers' critiques of mathematics textbooks. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(1), Artículo em1655. <https://doi.org/10.29333/ejmste/99515>

MARÍA JOSÉ CASTILLO CÉSPEDES

Dirección postal: "Rodrigo Facio Brenes" Sede Montes de Oca, San José Costa Rica, 11501-2060 San José (Dirección permanente). Estudiante del programa de Doctorado en Ciencias de la Educación de la Facultad de Ciencias de la Educación, Campus Universitario de Cartuja C.P. 18071 (Granada), Universidad de Granada.

Desenvolvimento profissional docente: reflexões sobre saberes pedagógicos e matemáticos

Desarrollo profesional docente: reflexiones sobre el conocimiento pedagógico y matemático

Teacher professional development: reflections on pedagogical and mathematical knowledge

Marcelo Carlos de Proença,¹ Ana Lúcia Pereira,²
Luiz Otavio Rodrigues Mendes,³ Wilian Barbosa Travassos⁴

Resumo: No presente artigo temos como objetivo analisar algumas fases do desenvolvimento profissional docente de um professor de matemática. A pesquisa é de natureza qualitativa e trata-se de um estudo de caso. Os dados foram coletados por meio de entrevista semiestruturada e organizados com base na Análise de Conteúdo de onde foi possível identificarmos quatro eixos centrais no desenvolvimento profissional do professor pesquisado: saberes pedagógicos e matemáticos trazidos no início da carreira; saberes pedagógicos e matemáticos do desenvolvimento profissional; saberes pedagógicos e matemáticos utilizados pelo professor; e, desafios para o desenvolvimento dos saberes pedagógicos e matemáticos. Os resultados apontam que em cada uma das fases do desenvolvimento profissional docente do professor pesquisado se

Fecha de recepción: 28 de enero de 2021. **Fecha de aceptación:** 11 de noviembre de 2021.

¹ Doutor na área de Ensino de Ciências e Matemática, Professor do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, Brasil, mcproenca@uem.br, orcid.org/0000-0002-6496-4912

² Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Professora do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Ponta Grossa, Bolsista Produtividade da Fundação Araucária, Brasil, anabaccon@uepg.br, orcid.org/0000-0003-0970-260X

³ Doutorando em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Brasil, mendesluizotavio@hotmail.com, orcid.org/0000-0002-3160-8532

⁴ Doutorando em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Brasil, wiliantravassos@hotmail.com, orcid.org/0000-0003-1693-8899

evidencia os saberes pedagógicos e saberes matemáticos construídos por ele. Apontam também que para que o professor possa ir além das suas crenças ancoradas no ensino tradicional e realizar um trabalho metodológico diferenciado e fundamentado nas tendências da Educação Matemática com seus alunos, este necessita de uma formação contínua para que consiga, de fato, reunir teoria e prática.

Palavras-chave: *Desenvolvimento profissional docente; Formação de professores de Matemática; Saberes docentes.*

Resumen: En este artículo pretendemos analizar algunas fases del desarrollo profesional de un profesor de matemáticas. La investigación es de naturaleza cualitativa y es un estudio de caso. Los datos fueron recolectados a través de entrevistas semiestructuradas y organizados en base al Análisis de Contenido, a partir de los cuales fue posible identificar cuatro ejes centrales en el desarrollo profesional del docente investigado: conocimientos pedagógicos y matemáticos aportados al inicio de su carrera profesional; conocimiento pedagógico y matemático del desarrollo profesional; conocimientos pedagógicos y matemáticos utilizados por el docente; y desafíos para el desarrollo del conocimiento pedagógico y matemático. Los resultados muestran que en cada una de las fases del desarrollo profesional del docente investigado se evidencian los conocimientos pedagógicos y matemáticos construidos por él. También señalan que para que el docente pueda ir más allá de sus creencias ancladas en la enseñanza tradicional y realizar un trabajo metodológico diferenciado basado en las tendencias de la Educación Matemática con sus alumnos, necesita una formación continua para que, de hecho, pueda recopilar teoría y práctica.

Palabras clave: *Desarrollo profesional docente; Formación de profesores de matemáticas; Enseñanza del conocimiento.*

Abstract: In this article we aim to analyze some phases of the professional development of a mathematics teacher. The research is of a qualitative nature and is a case study. The data were collected by means of a semi-structured interview and organized based on Content Analysis from which it was possible to identify four central axes in the professional development of the researched teacher: pedagogical and mathematical knowledge brought in at the beginning of a professional career; pedagogical and mathematical knowledge of

professional development; pedagogical and mathematical knowledge used by the teacher; and, challenges for the development of pedagogical and mathematical knowledge. The results show that in each of the phases of the professional development of the researched teacher, the pedagogical and mathematical knowledge built by him is evident. They also point out that for the teacher to go beyond his beliefs anchored in traditional teaching and carry out methodological work that is differentiated and based on trends in Mathematics Education with his students, he needs service teacher education so that he can, in fact, bring together theory and practice.

Keywords: *Teacher professional development; Mathematics teacher education; Teacher knowledge.*

1. INTRODUÇÃO

O tema desenvolvimento profissional docente tem se destacado e ocupado um lugar importante no contexto educacional, principalmente no que tange às discussões sobre as diferentes vertentes da formação de professores. Desse modo, o desenvolvimento profissional é tratado como um tema de destaque nas discussões e reflexões sobre como se dá a formação docente, como se constitui ou se caracteriza a carreira docente, os principais desafios, bem como, em quais são as novas perspectivas para a profissão docente na sociedade contemporânea.

Segundo Marcelo (2009), Vaillant e Marcelo (2012) e Pimenta e Anastasiou (2014), o desenvolvimento profissional docente abrange a concepção de professor como profissional da área de ensino e envolve vários aspectos da sua formação, que abrange desde a formação inicial, contínua e permanente (ou em serviço), bem como o seu aperfeiçoamento, desenvolvimento e aprendizagens ao longo da vida, etc. O desenvolvimento profissional docente se caracteriza como um processo que ocorre no contexto educacional (contexto de trabalho do professor) de forma individual e ou coletiva, a partir diferentes experiências (Marcelo, 2009) e também colabora para a melhoria da qualidade da educação (Vaillant e Marcelo, 2012).

Imbernón (2011, p. 46) conceitua o desenvolvimento profissional docente como um “[...] conjunto de fatores que possibilitam ou impedem que o professor progrida em sua vida profissional”. Portanto, acreditamos que é necessário refletirmos

como se dá a construção do desenvolvimento profissional docente principalmente na sociedade contemporânea, em que a profissão docente tem sido tão desclassificada e desmerecida. Acreditando que a formação docente é um processo contínuo e permanente, onde a construção de saberes do professor é vista como um processo de aprendizagem permanente, como resultado de um processo de formação profissional e pessoal, e que caracteriza o desenvolvimento profissional docente. Assim, no presente artigo, temos como objetivo analisar algumas fases do desenvolvimento profissional docente de um professor de matemática.

Como opção de processo de escrita, os pesquisadores organizaram o artigo da seguinte forma: 1) Inicialmente apresentamos algumas reflexões sobre pesquisas que abordam o desenvolvimento profissional do professor de matemática; 2) Discussão relacionadas ao desenvolvimento profissional de professores: conceito e desafios; 3) Reflexões a respeito dos saberes do professor; 4) Descrição dos pressupostos metodológicos utilizados; 5) Apresentação dos resultados obtidos, realizando a sua discussão; e, por fim, 6) As considerações finais passíveis de serem suscitadas a partir do estudo.

2. REFLEXÕES SOBRE PESQUISAS QUE ABORDAM O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Embora no presente artigo não tenhamos como objetivo fazer uma pesquisa do tipo estado da arte ou uma revisão sistemática sobre o tema aqui pesquisado, na presente seção apresentamos alguns dos principais resultados de um fichamento sobre pesquisas mais recente e que permitem fazer algumas reflexões sobre o tema.

O estudo de Lima e Belmar (2016, p. 1) teve como objetivo “analisar as pesquisas acadêmicas realizadas no Brasil e em outros países a respeito das principais dificuldades enfrentadas pelos professores de matemática em início de carreira”, da qual analisou-se as pesquisas presentes no banco de dados do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) e nos anais do Congresso Internacional de Professorado Principiante (CIPP). Os resultados destacam algumas dificuldades que se sobressaíram nesta pesquisa exploratória, tais como: cumprir o plano de ensino e lecionar para turmas que já iniciaram o ano letivo, indisciplina na sala de aula e alunos desmotivados. E que, para superar essas dificuldades, a utilização de metodologias para o ensino foi uma das soluções encontradas.

A pesquisa de Belmar, Bressan e Goulart (2017, p. 1) teve como objetivo “investigar as implicações na carreira do professor de matemática da educação básica em início de carreira”. Os sujeitos da pesquisa foram sete professores de matemática da educação básica do município de Juína/Mato Grosso – Brasil. A coleta dos dados se deu por questionários semiestruturados. Os resultados deste estudo apontam, dentre outros resultados, que ocorrem implicações que desestimulam o professor, como, por exemplo, sua competência ser posta em dúvida, seja pelos próprios colegas de trabalho, seja pelos alunos. Outras implicações também são relatadas, como dúvidas em relação a postura a ser assumida pelo professor frente aos alunos, aos pais, ou até mesmo alguém de cargo superior da escola ou professor mais experiente. Além destas, frustrações relacionadas a como preencher procedimentos padrões do contexto escolar e a conquista do espaço e autonomia são fatores mencionados.

A pesquisa de Belo e Gonçalves (2012, p. 299) teve como objetivo “discutir a identidade profissional do professor formador de professores de matemática e a repercussão que pode haver dessa identidade na formação de futuros docentes dessa área”. Os sujeitos da pesquisa foram dois professores com título de mestrado, formadores de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade federal brasileira. Como instrumentos de pesquisa, foram utilizados um questionário e entrevista semiestruturada, além de utilizar como apoio o currículo *Lattes* dos formadores, assim como documentos do curso de graduação, a exemplo, o Projeto Pedagógico do Curso (PPC). Para análise, utilizou-se da Análise Textual Discursiva. Os resultados deste trabalho mostraram que há ênfase na identidade profissional dos formadores quanto à pesquisa, ou seja, pesquisar sobre matemática os motivaram a ingressar na carreira docente. Sobretudo, não identificaram a relação de seus mestrados com suas práticas docentes, exceto em conteúdos aplicáveis em sala de aula e autonomia de estudos.

Com intuito de proporcionar um desenvolvimento profissional para professores sobre a resolução de problemas, alinhado a reforma da educação que houve no Chile, o trabalho de Felmer e Perdomo-Díaz (2017, p. 201) procurou “promover o desenvolvimento de habilidades matemáticas e fortalecer o conhecimento matemático” de docentes para atender os requisitos do novo currículo. Tomando como eixo central a resolução de problemas, o autor desenvolveu três momentos de formação para 21 professores, um primeiro denominado *Workshop Resolución de Problemas Action* que foi desenvolvido com os docentes em 5 horas com experiências sobre a resolução de problemas; Oficina de *Resolución de Problemas Contenido* desenvolvida em 5 dias (25 horas) aprofundando os conhecimentos

sobre a resolução de problemas com os conteúdos de fração e geometria (perímetro, ângulos e teorema de Pitágoras) e *Workshop Resolución de Problemas Aula* de 30 horas (em 1 ano) para os professores implementarem a resolução de problemas. Os principais resultados mostram que a primeira formação favoreceu a autonomia dos docentes, a segunda oficina proporcionou aos professores que fosse trabalhado o conhecimento de conteúdo, bem como o trabalho em grupo. Cabe ressaltar que os professores consideraram como um ponto profícuo, entender mais sobre os problemas matemáticos. Na terceira formação, as aulas dos docentes se tornaram mais ricas, ao deixarem os alunos verbalizarem suas estratégias, trabalhando em grupo, melhorando nas avaliações.

O trabalho de Losano, Fiorentini e Villarreal (2017) aborda um estudo de caso para analisar o primeiro ano de uma professora, denominada Sol, com objetivo de entender o desenvolvimento da sua identidade e agência profissional por meio da análise narrativa de uma entrevista. Em relação a essa identidade, os autores destacam a ideia da criação de mundos figurados. Para Losano, Fiorentini e Villarreal (2017, p. 5, tradução nossa) “Um mundo figurado oferece um conjunto de papéis, atribui importância a certos fatos e atividades e valoriza alguns resultados mais do que outros”. Desta forma, os autores concluem que os professores novatos –no caso a Sol–, não internalizam os discursos criados nas escolas de forma passiva, sendo que mesmo às vezes se rendendo aos discursos criados nas escolas, eles procuram lacunas para se refazer. Por fim, Losano, Fiorentini e Villarreal (2017, p. 26) destacam que “Nossas descobertas também indicam que o início da carreira de um professor é complexo e contraditório, mas é também um período fundamental e rico para o desenvolvimento da formação de professores e identidades profissionais”. O complexo diz respeito ao processo de formação identitária do professor, em relação as posições de um recém-chegado na escola e em relação as suas práticas culturais do passado. O contraditório diz respeito em saber negociar seus entendimentos advindos do passado em relação ao futuro.

3. O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DE PROFESSORES: CONCEITO E DESAFIOS

De modo geral, vários autores (Pacheco e Flores, 1999; Marcelo, 2009; Imbernón, 2011; Nóvoa, 2019) entendem que tornar-se professor implica seguir um processo formativo em que se aprende a ensinar pela via de três grandes fases/ momentos que podemos apresentar da seguinte forma: a) formação inicial;

b) iniciação ao ensino ou iniciação à docência; c) formação contínua ou formação permanente ou no sentido de desenvolvimento profissional.

No caso da formação de professores em serviço, o foco estaria nas discussões sobre o início de carreira na atividade docente e, em seguida, sobre a busca de melhorias de seus conhecimentos, habilidades, destrezas e saberes ao longo da trajetória profissional. De acordo com Roldão (2017), tratar sobre a formação de professores da escola como processo de desenvolvimento profissional contínuo, referente à construção de saberes e de processos de reflexão no contexto escolar, implica ter atenção ao aspecto da diferença entre um professor em início de carreira e um professor que está a vários anos em atividade de sala de aula.

Desse modo, a iniciação ao ensino corresponde, na visão de Pacheco e Flores (1999), aos primeiros anos como professor da escola (principiante) em que se desenvolve conhecimentos práticos. Segundo os autores, o professor principiante corresponde à fase em que exerce os primeiros anos da função docente na escola. Nesse caso, diferencia-se do estagiário, uma vez que não se submete mais a orientadores, pois, além dos alunos, é o único ator. “Contudo, esta libertação não significa uma total autonomia profissional, já que o professor entra numa fase de crescente e tácita socialização profissional” (Pacheco e Flores, 1999, p. 56).

Após a fase de iniciação ao ensino, Pacheco e Flores (1999), Imbernón (2011) e Nóvoa (2019) entendem que o professor pode desenvolver e ampliar os seus conhecimentos profissionais, entrando na fase de formação contínua/permanente. Segundo esses autores, esta fase implica em um professor na posição de professor com experiência em que seu percurso de aprendizagem ocorre ao longo da sua vida profissional, o que corresponderia ao seu desenvolvimento profissional, segundo Pacheco e Flores (1999), a qual envolve:

[...] uma atitude permanente de indagação ou capacidade de um professor em manter a curiosidade acerca da aula, identificar interesses significativos no processo de ensino e aprendizagem, valorizar o diálogo com os colegas, procurando problematizar toda a sua atividade profissional. (Pacheco e Flores, 1999, p. 56)

Nesse sentido, para Pacheco e Flores (1999), ao longo da carreira profissional do professor, várias mudanças ocorrem (deveriam ocorrer) com suas destrezas, suas atitudes, suas expectativas e problemas relacionados às questões profissionais. Conforme apontou-se no estudo de Proença (2019), que investigou a compreensão de oito pós-graduandos sobre o tema formação de professores,

entendeu-se como importantes a valorização da prática e a constituição de saberes docentes para mudanças que visem, por exemplo, ao reequilíbrio teórico-prático.

Na visão de Marcelo (2009, p. 09), noções como formação contínua, formação permanente, formação em serviço e formação ao longo da vida deveriam ser vistas em termos do conceito de *desenvolvimento profissional de professores*, porque melhor reflete ao professor como profissional do ensino e porque “[...] supera a tradicional justaposição entre formação inicial e formação contínua dos professores”. Para Roldão (2017), essa justaposição é uma forma clássica que tradicionalmente se visualizava a formação de professores:

De um lado, tem-se o entendimento da formação inicial, que se configura como de cariz predominantemente escolar, constituindo a etapa chave na formação do profissional. Esta será complementada ao longo do seu percurso, por atualizações pontuais de natureza também predominantemente escolar, que se integram num processo designado como formação contínua. (Roldão, 2017, p. 194)

Ao contrário disso, após apresentar as definições de vários autores sobre o que entendiam por desenvolvimento profissional de professores, Marcelo (2009) destaca que se trata de um conceito fundamental da formação profissional docente.

Como podemos verificar, as definições, tanto as mais recentes como as mais antigas, entendem o desenvolvimento profissional docente como um *processo*, que pode ser individual ou colectivo, mas que se deve contextualizar no local de trabalho do docente – a escola – e que contribui para o desenvolvimento das suas competências profissionais através de experiências de diferente índole, tanto formais como informais. (Marcelo, 2009, p. 10, grifo do autor)

Ao longo do seu desenvolvimento profissional, Marcelo (2009) explica que o professor constrói sua identidade profissional, a qual não é algo fixo e sim resultado individual e coletivo, proveniente de contextos relacionais.

Esta é uma reflexão que considero necessária uma vez que é através da nossa identidade que nos percebemos, nos vemos e queremos que nos vejam. A identidade profissional é a forma como os professores se definem a si mesmos e aos outros. É uma construção do seu *eu* profissional, que evolui ao longo da sua carreira

docente e que pode ser influenciada pela escola, pelas reformas e contextos políticos. (Marcelo, 2009, p. 11, grifo do autor)

Em concordância com o conceito de desenvolvimento profissional, Roldão (2017, p. 194) entende a formação profissional do professor no sentido de que “[...] a formação é um processo contextualizado de socialização profissional, de construção contínua e gerido pelo próprio sujeito ao longo do seu percurso profissional – sendo formação inicial apenas uma primeira etapa, dentro de uma lógica de formação contextualizada”. Porém, a formação inicial é vista pela autora como parte de um *continuum* da formação profissional porque justifica a construção de quadros de saberes de referências em face das práticas analisadas em contexto escolar (no estágio), os quais podem ser tomados para as práticas em contexto de trabalho na escola. Tais quadros de saberes suscitam:

[...] a necessidade de adquiri-los de forma mais estruturada e geradora de quadros de referência para o pensamento e a ação deverá ser maior na formação inicial, porque sem ela a desejada reflexão terá escassos suportes. Pelo contrário, a formação de profissionais já atuantes terá de apelar crescentemente à incorporação da vivência prática, para questioná-la, bem como para articular teoricamente e reinvestir em práticas melhoradas e produtoras de novos saberes. (Roldão, 2017, p. 196)

Para que seja possível desenvolver ou construir práticas melhoradas no contexto de sala de aula, ampliando a qualidade dos saberes necessários ao ensino, entendemos que o desafio principal é realizar um reequilíbrio teórico-prático (Imbernón, 2011). Tal desafio deve ser superado porque do ponto de vista histórico se entendia que ser professor é apenas transmitir um saber (Gauthier *et al.*, 1998) ou, em outros termos, passar, fixar um saber. Desse modo, a necessidade de estabelecer o reequilíbrio entre teoria e prática é fruto da tentativa de superar, segundo Roldão (2007), a visão histórica de que o trabalho do professor é o de transmitir, de passar o saber. Ao contrário disso, Roldão (2007, p. 36, grifo da autora) considera que “a função específica definidora do profissional professor não reside, pois, na passagem do saber, mas sim na *função de ensinar*, e ensinar não é apenas, nem sobretudo, “passar” um saber”.

Uma vez que para Roldão (2007) a função de ensinar implica na organização do ensino para que o aluno aprenda, identificamos a necessidade de (re) estruturação da relação teoria e prática ao longo da carreira. Para que isso ocorra, Marcelo (2009) explicou que as mudanças nas práticas de professores ao longo

do desenvolvimento profissional necessitam de que as crenças dos professores sejam foco de mudanças. Para o autor, muitas vezes as crenças são difíceis de transformar/mudar ou mesmo eliminar e que têm origem em três tipos de experiências, conforme o que a literatura apontou sobre aprender a ensinar.

Experiências pessoais: incluem aspectos da vida que conformam determinada visão do mundo, crenças em relação a si próprio e aos outros, ideias sobre a relação entre escola e sociedade, bem como família e cultura. A origem socio-económica, étnica, de género, religião pode afectar as crenças sobre como se aprende a ensinar. Experiência baseada em conhecimento formal: o conhecimento formal, entendido como aquele que é trabalhado na escola – as crenças sobre as matérias que se ensinam e como se devem ensinar. Experiência escolar e de sala de aula: inclui todas as experiências, vividas enquanto estudante, que contribuem para formar uma ideia sobre o que é ensinar e qual é o trabalho do professor. (Marcelo, 2009, p. 15)

Para superar as crenças que não levam a rever práticas de sala de aula no sentido de estabelecer a relação dialética entre teoria e prática, Gatti *et al.* (2019), ao discorrer sobre os novos cenários de formação de professores no Brasil, apontaram que um dos desafios centrais ainda a serem enfrentados consiste da reflexão das práticas dos professores no coletivo.

Um dos desafios que acompanha a história da formação docente tem sido o de superar o uso da reflexão como prática exclusivamente individual e restrita à própria prática, pois se supõe que a reflexão na prática profissional, que tem na teoria e na reflexão coletiva suas bases de sustentação, poderá oportunizar ao professor a tomada de consciência do sentido de sua profissão, e, assim, ressignificar a sua prática, levando-o a refletir sobre sua cultura, suas experiências pessoais e profissionais, o que lhe possibilitará o exercício da autonomia. Desse modo, quando desenvolver a reflexão com seus pares, o professor exercerá a dimensão crítica, política e social da atividade docente. (Gatti *et al.*, 2019, p. 186)

Gatti *et al.* (2019) destacaram que o trabalho do professor envolve uma atividade complexa, pois corresponde a uma profissão que envolve relação com outros colegas e suas subjetividades. Dessa forma, os autores ressaltam que a formação também acaba por se concretizar como complexa. Nesse sentido, considerando-se a formação inicial e o desenvolvimento profissional, Gatti *et al.* (2019) apontaram que os desafios da atuação do professor na escola seriam os seguintes:

a) pensar a formação dos alunos/estudantes compreendendo contextos específicos e diversidades, considerando aspectos do desenvolvimento cognitivo, social e emocional desses alunos/estudantes e os conteúdos a serem ensinados; b) integrar formação teórica com práticas sociais e educacionais – criar mediações autorais, de forma consciente e clara; c) integrar fundamentos da educação e dos processos de aprendizagem às metodologias e práticas educacionais, de modo consciente dominando os conhecimentos de sua profissão; d) utilizar formas de comunicação didática levando em conta os novos meios tecnológicos presentes na vida social; e) valorizar o compartilhamento e o trabalho coletivo. (Gatti *et al.*, 2019, p. 41)

Além disso, no novo cenário de formação de professores, Gatti *et al.* (2019) também destacaram outras necessidades importantes à valorização do trabalho docente, as quais também entendemos ser desafios ao desenvolvimento profissional de professores:

Do ponto de vista social essa valorização requer também políticas consistentes de carreira, salário e das condições da própria vida escolar: infraestrutura, materiais didáticos, apoios pedagógicos, respeito ao seu âmbito de ação com vistas a instauração de uma gestão democrática, com espírito de cooperação. (Gatti *et al.*, 2019, p. 42).

Portanto, é possível apontar que na formação contínua (entendida como desenvolvimento profissional) é preciso superar o desafio de estabelecer o reequilíbrio entre teoria e prática, bem como outros fatores desafiantes da estrutura da carreira docente. O que está em jogo seria, em essência, superar a má formação dos saberes profissionais dos professores.

4. OS SABERES DO PROFESSOR

Ao discorrer sobre os saberes dos professores em atuação na escola, Tardif (2007) apontou que seu foco de análise na epistemologia da prática profissional revelou o que chamou de saber docente, sendo constituído pelos seguintes quatro saberes: da formação profissional, disciplinar, curricular, da experiência. Segundo o autor, o saber da experiência é o que faz com que os saberes profissionais, disciplinares e curriculares sejam mobilizados de forma coerente ou não ao que foi abordado em sua formação inicial.

Em linhas gerais, o saber profissional (das ciências da educação e da ideologia pedagógica) é o conjunto de saberes que são transmitidos pelas escolas normais ou também as faculdades de ciências da educação (instituições de formação de professores), o que, em nosso entendimento, corresponde aos saberes sobre a educação escolar e aos saberes pedagógicos ao ensino. Os saberes disciplinares são os saberes adquiridos sob a forma de disciplinas (Matemática, Física, Química etc.) em faculdades, universidades e etc., integrando-se na prática docente por meio da formação inicial e contínua. Os saberes curriculares são saberes dos quais a instituição escolar categoriza, correspondendo, assim, aos discursos, conteúdos, objetivos e métodos que são utilizados para configurar o currículo escolar. Por fim, os saberes experienciais são decorrentes da prática da profissão de professor, baseados em seu trabalho e no conhecimento do seu meio, podendo ser também incorporado à experiência individual e coletiva. Dessa forma, os saberes experienciais correspondem ao saber que não se oferece à formação e sim é algo próprio do professor, ou seja:

[...] são saberes práticos (e não da prática: eles não se superpõem à prática para melhor conhecê-la, mas se integram a ela e dela são partes constituintes enquanto prática docente) e formam um conjunto de representações a partir das quais os professores interpretam, compreendem e orientam sua profissão e sua prática cotidiana em todas as suas dimensões. Eles constituem, por assim dizer, a cultura docente em ação. (Tardif, 2007, 49)

Revelar os saberes docentes dos professores implica, na visão de Tardif (2007), uma superação da concepção de formação que vê a relação teoria e prática de forma dissociada. A nosso ver, essa dissociação ocorre porque o professor não associa a teoria à sua prática, e que a teoria pouco contribuiu para a prática ou para seu conhecimento em si. Ao contrário disso, é possível entender que não se pode falar em teoria sem sua vivência na prática escolar, de modo que se pode inferir para a área específica de ensino de matemática que:

Sendo assim, o saber docente é formado pela prática e sustentado por teorias da educação e da educação matemática. A teoria é parte fundamental na formação dos docentes, pois alicerça o sujeito para uma ação contextualizada, para que compreenda o contexto histórico-social-cultural e organizacional e a si próprio como profissional. (Manrique, 2009, p. 532)

Outros autores que apresentaram uma visão sobre os saberes dos professores foram Gauthier *et al.* (1998), os quais destacaram que a docência não pode ser exercida como sendo *ofício sem saberes*, ou seja, deve-se evitar ideias de que ser professor basta conhecer o conteúdo ou que basta ter talento, bom senso, intuição ou mesmo que basta apenas a experiência. A docência também não pode ocorrer sob a ideia de se configurar como *saberes sem ofício*, pois a tentativa de formalizar o ensino sem relação à realidade de sala de aula acaba provocando uma redução de sua complexidade de tal modo que já não representa a realidade. Ao contrário disso, o *ofício feito de saberes* corresponde ao que os professores se apoiam ou utilizam em suas práticas docentes.

Assim, o ofício feito de saberes é constituído pelos seguintes: a) os saberes disciplinares (relativo às disciplinas, matéria, teoria); b) os saberes curriculares (relativo ao programa); c) os saberes das ciências da educação (saber o que é conselho escolar, sindicato, carga horária); d) os saberes da tradição pedagógica (saber dar aulas, muitas vezes guiado por comportamento observado em professores que fizeram parte de sua formação antes mesmo de iniciar sua formação inicial); e) os saberes experienciais (relacionado com hábitos, truques, estratégias, que normalmente se tornam regras, e que geralmente o professor acredita que leva os alunos a aprenderem); f) o saber da ação pedagógica (é o saber experiencial depois de tornado público e testado por pesquisas em salas de aula) (Gauthier *et al.*, 1998).

5. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este artigo delinea-se na perspectiva de um estudo de caso. Segundo Yin (2015, p. 12), este tipo de pesquisa “[...] investiga um fenômeno contemporâneo (o “caso”) em seu contexto de mundo real, especialmente quando as fronteiras entre o fenômeno e o contexto puderem não estar claramente evidentes”. O nosso fenômeno foi o caso de um professor de matemática no contexto da busca de seu desenvolvimento profissional sobre seus saberes pedagógicos e matemáticos. A escolha do referido caso se deu um programa de pós-graduação da área de Ensino de Ciências e Matemática, em que buscamos levantar informações sobre quais eram os estudantes do referido programa no ano de 2019. Com isso, estabelecemos os seguintes critérios para determinar a escolha do caso: a) que fosse professor de matemática da Educação Básica em escola pública; b) que

desejasse participar da pesquisa de forma espontânea. Após contanto com esses estudantes, apenas um deles se encaixava nesses critérios.

Dessa forma, o professor participante da pesquisa, foi denominado em nosso estudo de Carlos. O seu percurso profissional foi o seguinte: após a conclusão de sua graduação, em 2003, fez uma especialização em Gestão, Supervisão e Orientação escolar composta de 600 horas, durante um ano. Além disso, atuava em colégios particulares (mesmo durante a graduação), lecionando em disciplinas dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio e em universidades particulares até 2010, quando foi aprovado em um concurso do Estado do Paraná/Brasil e começou a atuar como docente com 40 horas aulas em escolas públicas. De 2014 a 2016, Carlos realizou, pelo programa de pós-graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, seu mestrado. Em 2019, começou a cursar o doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática. No corrente ano, realizou disciplinas que abarcam as teorias de ensino e aprendizagem, a epistemologia e história da ciência, entre outras. Enquanto participou da pesquisa, no segundo semestre de 2019, Carlos estava cursando disciplinas relacionadas a formação do professor de matemática e do professor para as ciências no geral.

Para coletar dados sobre nosso caso, realizamos uma entrevista com Carlos, contendo questões que perpassam a busca de informações desde o início da sua carreira docente em escola pública até os dias atuais. O roteiro da entrevista foi o seguinte:

- 1) Quando ingressou como professor da escola, sentiu-se apto a fazer uso dos conhecimentos pedagógicos e matemáticos que trouxe da graduação?
 - a. Questionar sobre quais desafios enfrentou no início da carreira.
- 2) Você busca melhorar seus conhecimentos pedagógicos e matemáticos para atuar em sala de aula?
 - a. Questionar sobre se faz cursos sobre esses conhecimentos.
 - b. Questionar sobre a importância do mestrado e de estar cursando doutorado.
 - c. Questionar se esses cursos estão ajudando a melhorar seus conhecimentos pedagógicos e matemáticos para melhorar seu ensino.
- 3) Tendo em vista a formação que buscou após a graduação, que conhecimentos novos (ou reestruturados) você utiliza para ensinar matemática?
- 4) O que você acha que algo te impossibilita a ampliar e melhorar seus conhecimentos pedagógicos e matemáticos?

Em uma sala do programa de pós-graduação que Carlos frequentava, período final da tarde, realizamos a entrevista, do tipo semiestruturada, gravada em áudio. Duarte (2005, p. 3) destaca que esse tipo de entrevista o autor “[...] se caracteriza pela flexibilidade e por explorar ao máximo de determinado tema, exigindo da fonte subordinação dinâmica ao entrevistado”.

Este estudo é de natureza qualitativa, pois “se desenvolve numa situação natural, é rico em dados descritivos, tem um plano aberto e flexível e focaliza a realidade de forma complexa e contextualizada” (Lüdke e André, 1986, p. 18). Com o objetivo de elucidar as fases de desenvolvimento profissional do professor analisado Carlos, como base na Análise de Conteúdo de Bardin (2011), após a transcrição da entrevista, a análise dos dados elaboramos quatro eixos que se constituem como fases desse desenvolvimento, a saber:

- 1) Saberes pedagógicos e matemáticos apresentados no início da carreira;
- 2) Saberes pedagógicos e matemáticos do desenvolvimento profissional;
- 3) Saberes pedagógicos e matemáticos utilizados pelo professor;
- 4) Desafios para o desenvolvimento dos saberes pedagógicos e matemáticos.

Dentro de cada um destes eixos, buscamos relacionar os dados advindos da entrevista a saberes pedagógicos e saberes matemáticos do professor Carlos. Para tanto, aqui também, apropriamo-nos dos pressupostos da Análise de Conteúdo para fazer a categorização *a posteriori* dentre de cada um destes eixos. De acordo com Bardin (2011, p. 15), este tipo de análise consiste em “um conjunto de instrumentos metodológicos cada vez mais sutis em constante aperfeiçoamento, que se aplicam a “discursos” (conteúdos e continentes) extremamente diversificados”.

6. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Em nosso primeiro eixo de análise denominado Saberes pedagógicos e matemáticos apresentados no início da carreira, a compreensão do desenvolvimento profissional do professor Carlos a respeito de seus saberes pedagógicos e matemáticos é mostrada no Quadro 1 a seguir em que suas respostas evidenciaram a situação de tais saberes em fase de iniciação ao ensino, na escola pública.

Quadro 1 – Saberes revelados no início da carreira docente.

Saberes	Situação	Resposta
Pedagógicos	Possuía formação	“(…) eu já aprendi um pouco lá [como professor da escola particular – 2005 a 2010] sobre modelagem, sobre resolução de problemas, sobre trabalhar coisas de tecnologia, então nesse período eu já sabia. A gente foi agregando conhecimento desse período, e quando eu entrei na escola pública que tinha mais facilidade de saber lidar com aluno, trazer as metodologias certas (...)” “(…) da [escola] particular para a pública é não só a estrutura ... na particular você tem menos alunos, tem o material pronto, se precisar alguma metodologia já vem no próprio conteúdo ”
Matemáticos	Possuía formação	“Nesse período de 2005 a 2010, eu continuei trabalhando e depois peguei aulas em outras escolas particulares. Eu achei que esse período foi muito importante para minha formação como professor iniciante. Porque o que que acontece em escola particular, você tem uma apostila, tem um calendário e você tem que adequar aquela apostila em seu calendário. (...) Daí eu passei em um concurso eu obtive mais facilidade, pela exigência da escola particular, então eu acabei pegando bastante experiência, eu não tive tanta dificuldade assim em trabalhar os conteúdos na escola pública ”.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Pode-se observar que Carlos possuía formação sobre saberes pedagógicos, os quais indicou como sendo sobre modelagem matemática, resolução de problemas e tecnologia. Também deixou claro que seus saberes matemáticos –o saber disciplinar, segundo Tardif (2007)– permitiu-lhe não ter dificuldades para trabalhar os conteúdos. Conforme se verifica, o que possibilitou a Carlos iniciar sua carreira docente na escola pública foi justamente o fato de ter sido professor da escola particular. Diferente do que foi apresentado no trabalho de Belmar, Bressan e Goulart (2017), Carlos não destacou ter dificuldades em relação a sua postura como professor frente aos colegas, alunos, pais ou supervisores, o que possivelmente se deu pela sua experiência na escola particular.

Apesar de Carlos apontar que possuía formação sobre tais saberes em início de carreira, fica claro que o uso de saberes matemáticos ocorria sem grandes dificuldades. Porém, não se pode afirmar sobre o uso dos saberes pedagógicos que apontou possuir formação. O que a princípio pode-se perceber é que a seguinte passagem de sua resposta “(…) tem o material pronto, se precisar

alguma metodologia já vem no próprio conteúdo” indica que na escola particular ele tinha essa possibilidade, mas, como sabemos, não há para professores da escola pública material (livro didático) que tenha como estrutura o ensino de conteúdos matemáticos pela condução de metodologias de ensino.

Dessa forma, antes de mostrarmos dados sobre como Carlos, professor experiente (quase nove anos na escola pública), utiliza seus saberes pedagógicos e matemáticos em suas aulas, buscamos entender como ele procurou se desenvolver profissionalmente até o atual momento. O Quadro 2 a seguir mostra os dados sobre nosso segundo eixo de análise, Saberes pedagógicos e matemáticos do desenvolvimento profissional, cujas subcategorias elencadas se associam ao tipo de formação recebida.

Quadro 2. Saberes oriundos do desenvolvimento profissional do professor.

Saberes	Tipo da formação	Resposta
Pedagógicos	Discussões na escola	“Então, a gente trabalha algumas abordagens, discussões pedagógicas na escola , algumas coisas em relação ao processo dentro da sala de aula da escola”.
	Experiência	“Eu fui adquirindo assim, uma formação não tanto de referenciais teóricos, mas de ... eu fui melhorando assim em relação a prática, assim sem conhecer o referencial teórico . Eu fui me virando com o passar dos anos. Aí eu fui correndo atrás, foi passando, a gente vai aprendendo, vai buscando...”
	Especialização	“Eu fiz uma em gestão escolar e outra em metodologia do ensino da matemática ”.
	Doutorado (em andamento)	“As disciplinas que eu fiz no 1.º semestre por exemplo de fundamentos de educação, teorias de ensino e aprendizagem, sobre história e epistemologia. Então, essas disciplinas ... estão me abrindo muita visão assim de como ocorre, como se dá o processo de ensino e aprendizagem. Como o aluno adquire conhecimento, como a gente transmite, transmite o conhecimento é importante isso . Eu acho que está sendo bacana, porque no mestrado eu aprendi a técnica e agora estou aprendendo, mais o processo da educação. Agora, no doutorado eu acho que está melhorando essa visão pedagógica”.
Matemáticos	Mestrado (Profmat)	“Então o meu mestrado foi profissional, o Profmat, que é da área pura, é mais aplicações que a gente vê as matérias da graduação de nível mestrado. (...) O que melhora muito é o conhecimento matemático, então você acaba sendo um professor mais dedicado em relação a definições, em resolver problemas mais elaborados, fazer exercícios ”.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Conforme se observa, os saberes pedagógicos de Carlos em fase de desenvolvimento profissional situam-se em duas vertentes. A primeira ocorre durante discussões na escola, o que revela a importância de sua participação em experiências formativas coletivas na escola (Marcelo, 2009) e pela sua experiência advinda de sua prática como professor. No entanto, a sua experiência como professor mostra que ele não toma como fundamento de suas práticas referenciais teóricos: “(...) eu fui melhorando assim em relação a prática, assim sem conhecer o referencial teórico”. Isto revela que, em sua atividade docente, Carlos dá forte indício de que seus saberes estão na situação de um desequilíbrio teórico-prático” (Imbernón, 2011).

A segunda vertente revela que o desenvolvimento profissional de Carlos sobre seus saberes pedagógicos situou-se no âmbito de cursos de especialização e de doutorado. No caso dos cursos de especialização, teve formação sobre gestão escolar e metodologia de ensino de matemática, o que está alinhado à importância de desenvolver seus saberes profissionais (Tardif, 2007). Já sobre o curso de doutorado que está em andamento, sua resposta revela que está tendo a possibilidade de ampliar seus saberes pedagógicos: “(...) como se dá o processo de ensino e aprendizagem. Como o aluno adquire conhecimento, como a gente transmite, transmite o conhecimento é importante isso”. No entanto, é possível verificar que Carlos faz uso do termo “transmite o conhecimento”, termo este que Roldão (2007) já defendia como inadequado à função de ensinar, pois o professor não transmite ou passa um conhecimento e sim deve organizá-lo para que o aluno o aprenda, mas percebemos que Carlos faz um alinhamento entre o que está aprendendo no Doutorado, como algo importante para sua atuação enquanto professor, diferentemente da pesquisa de Belo e Gonçalves (2012). Compreendemos que essa relação é tanto quanto positiva, apesar de necessitar de uma adequação de termos, como quando utilizou “transmite o conhecimento”.

Possivelmente, o uso do termo “transmite o conhecimento” é resultado da falta de reflexão sobre as bases de ensino e aprendizagem, sendo um dos desafios ainda atuais da formação de professores (Gatti *et al.*, 2019) e que, ao longo da vida profissional de Carlos, ainda continua a influenciar seu modo de pensar. Conforme mostra o Quadro acima, o desenvolvimento profissional dos saberes matemáticos de Carlos ocorreu em curso de mestrado do tipo Profmat em que o foco foi apenas sobre conteúdos: “melhora muito é o conhecimento matemático, então você acaba sendo um professor mais dedicado em relação a definições, em resolver problemas mais elaborados, fazer exercícios”. Dessa forma, isso revela uma possível justificativa pelo uso do termo acima, pois geralmente quem

aprende a matemática pela matemática acaba acreditando que ensinar é transmitir conhecimentos (Roldão, 2007). Na visão de Marcelo (2009), trata-se de uma crença de Carlos que estaria atrelada às suas experiências formais sobre a matéria e como ensiná-la que ainda resistem às mudanças.

Tendo em vista esse desenvolvimento profissional seguido por Carlos, o Quadro 3 a seguir mostra como ele utiliza seus saberes pedagógicos e matemáticos em suas aulas. Buscamos delimitar as respostas em subcategorias relacionadas à situação de origem desses saberes, evidenciando dados ao nosso terceiro eixo de análise: Saberes pedagógicos e matemáticos utilizados pelo professor.

Quadro 3. Saberes pedagógicos e matemáticos utilizados pelo professor.

Saberes	Situação	Resposta
Pedagógicos	Oriundo da especialização	“De metodologia sim [que utiliza o que aprendeu em metodologia de ensino de matemática]. (...) eu não tinha muito conhecimento das tendências da educação matemática muito aprofundado. Então eu consegui ter um aprofundamento geral. Que elas existem. E alguns exemplos de como usá-las em sala de aula. Porque eu acho que na minha graduação não foi tão bom essa abordagem”.
	Oriundo da experiência	“Que nem no dia que a gente falou na aula [em aula de uma disciplina da pós-graduação] que eu passava slides com animações de como se chegou em fórmulas de cálculo de área de retângulo, trapézio, triângulo, paralelogramo, losango. Então eu passava simplesmente aqueles slides. Os alunos entenderam, tem animação bem legal, mas quando chegava na hora de executar, às vezes, resolver exercícios de um livro, eles não sabiam qual que era a fórmula. Perguntavam por que que era aquela fórmula. Confundiam a área do paralelogramo com a do triângulo. Então eu tentei modificar para o ano seguinte, antes de passar os slides, trabalhar com modelagem. Então eles recortarem, por exemplo fazer o paralelogramo, recortar ... tem um triângulo do lado esquerdo, colar, no lado direito eles veem que vira um retângulo. Então eu fiz isso, fiz eles construírem isso, através de uma modelagem e no final passar os slides ... Eu tentei ... é ... como que eu posso dizer ... é ... melhorar esse processo, porque a gente vê que às vezes não estava dando certo só daquele jeito. A gente acha, nossa que legal fiz uns slides com animação, eles vão entender. É claro que eles entendem, mas não marca. Então se você trabalhar um pouquinho mais, melhorar o processo, fica bom”.

Matemáticos	Oriundo do mestrado (Profmat)	“Eu achei que melhorou bastante a minha prática, em relação a definição, a entender a estrutura do conteúdo”.
-------------	-------------------------------	--

Fonte: Elaborado pelos autores.

Conforme se observa no Quadro acima, os saberes pedagógicos utilizados por Carlos em suas aulas são oriundos da especialização que fez em metodologia de ensino de matemática sobre as tendências em Educação Matemática (citadas no Quadro 1: a modelagem matemática, a resolução de problemas e a tecnologia) as quais, para fins de esclarecimento ao leitor, fazem parte dentre as sugeridas nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (Paraná, 2008). Carlos havia tido contato com essas tendências quando foi professor de escola particular, conforme Quadro 1, mas apenas no curso de especialização ampliou esses saberes que aponta utilizar em suas aulas: “Então eu consegui ter um aprofundamento geral. Que elas existem. E alguns exemplos de como usá-las em sala de aula”.

No caso dos saberes pedagógicos oriundos da experiência em sala de aula, subcategoria esta que se refere ao uso teórico-prático de seus saberes, Carlos atuava da seguinte forma: “[...] eu passava slides com animações de como se chegou em fórmulas de cálculo de área de retângulo, trapézio, triângulo, paralelogramo, losango”. Como ele ficou insatisfeito com o retorno da aprendizagem de seus alunos, passou a utilizar o que tinha tido em sua formação, no caso, a modelagem matemática: “Então eu tentei modificar para o ano seguinte, antes de passar os slides, trabalhar com modelagem”. Dessa forma, Carlos repensou suas aulas e fez uma modificação na sequência de ensino: “Então eu fiz isso, fiz eles construírem isso, através de uma modelagem e no final passar os slides ... Eu tentei ... é ... como que eu posso dizer ... é ... melhorar esse processo, porque a gente vê que as vezes não estava dando certo só daquele jeito”.

Apesar de Carlos ter revelado que tinha conhecimento sobre modelagem matemática em seu início de carreira (Quadro 1), que seu desenvolvimento profissional sobre modelagem matemática ocorreu ao longo de seus anos como professor da escola pública em curso de especialização em metodologia de ensino de matemática (Quadro 2) e que destacou que essa abordagem de ensino, além das que citou, pode ser ampliada nesse curso de especialização (Quadro 3), buscamos questioná-lo sobre esse uso da modelagem matemática no ensino de fórmulas de áreas, conforme mostra o diálogo abaixo:

Pesquisador: Sobre o uso da modelagem nessa aula de fórmulas de área, você considera que é uma modelagem matemática?

Carlos: "Talvez não seria uma modelagem completa. Trabalha com situações problemas, resolução de problemas. ... talvez não seja uma modelagem como a tendência da educação matemática como ela traz nos referenciais teóricos. É o início de uma modelagem. Os professores eu já vi, também, chamar de encaminhamento metodológico. Pegou uma ideia da modelagem, pegou uma ideia da resolução de problemas e aplicou isso na prática".

Pesquisador: Sobre o exemplo que você deu de cálculo de fórmulas de áreas, envolvendo recortes, como você realiza essa modelagem matemática? O que você domina sobre essa estratégia de ensino?

Carlos: "Que eles pesquisassem e construíssem a fórmula de figuras planas. Então eu penso assim, que em relação ao dominar, é pretensão. Mais em relação a conhecer um pouco do referencial teórico. Falar que eu domino modelagem, falar que eu domino resolução de problemas, tecnologias que eu gosto também, eu não domino totalmente. A gente tenta fazer uma abordagem inspirada nelas. Agora, aprender, saber todos os passos, o que cada um tem na sua essência, é difícil".

De acordo com esse diálogo, revela-se que o que Carlos conhece sobre o ensino por meio da modelagem matemática baseia-se no uso de situações-problemas e que seu objetivo seria levar seus alunos a pesquisarem para conseguirem construir as fórmulas das áreas pretendidas. Trata-se, conforme sua resposta, de uma ideia que ele toma como referência, afirmando que conhece pouco sobre o seu referencial teórico e, assim, dos passos que envolvem esse ensino. Essa prática de sala de aula pode ser entendida como derivada de seu saber experiencial (Tardfi, 2007), uma vez que ao tentar rever o ensino de fórmulas de áreas, Carlos faz uso da modelagem matemática conforme direciona seu entendimento. Essa prática configura-se como o *saber docente* de Carlos, pois é a sua forma, mais ou menos coerente, de utilizar o saber pedagógico para ajudar na compreensão do saber matemático envolvido (Tardif, 2007).

Diante disso, é possível supor que Carlos não conhece como se desenvolve um ensino por meio da modelagem matemática. Consequentemente, o que consta do Quadro 3, sobre seus saberes pedagógicos, é mais um conhecimento geral e da existência das estratégias de ensino de modelagem matemática, de resolução de problemas e de uso de tecnologia. O que podemos apontar, assim, é que Carlos tem uma identidade profissional (Marcelo, 2009) que revela que o

seu 'eu profissional' o identifica como um professor que não segue referenciais teóricos que explicam a abordagem dessas estratégias em sua totalidade e sim se concentra na ideia principal. Assim, o que se verifica, em síntese, é que a relação teoria e prática, presente em suas aulas, ainda necessita ser revista para um reequilíbrio consistente. Diferente do trabalho de Feler e Perdomo-Díaz (2017) que obtiveram resultados profícuos na formação ofertada aos professores de matemática, Carlos talvez necessite de uma formação mais direcionada, como foi no trabalho dos autores sobre resolução de problemas.

Por fim, o Quadro 3 indica que os saberes matemáticos que Carlos utiliza em suas práticas de sala de aula foram oriundas do mestrado, do programa Profnat. Segundo sua resposta, verifica-se que isso foi importante no seu desenvolvimento profissional para ampliar seu saber disciplinar (Tardif, 2007): "Eu achei que melhorou bastante a minha prática, em relação à definição, a entender a estrutura do conteúdo". Realmente, esse mestrado foi importante para Carlos para melhorar seu saber matemático, conforme indicado no Quadro 2, refletindo em sua prática. Diante disso, questionamos Carlos sobre esse saber matemático adquirido, conforme mostra o diálogo a seguir:

Pesquisador: Como você avalia seu domínio sobre o conhecimento matemático?

Carlos: "Em relação ao conhecimento matemático eu considero ter um bom conhecimento ... eu acho que a minha experiência também proporcionou isso. Eu não cheguei a falar antes, mas eu trabalhei também em universidade particular. Então me ajudou também a aprofundar um pouquinho mais o conhecimento que eu tive na licenciatura e também no mestrado".

Diante do exposto até aqui, verifica-se que Carlos pode ampliar seus saberes matemáticos ao longo de sua trajetória docente, tendo contribuído para isso o curso de mestrado e sua atuação como professor universitário em instituição particular. Hoje, como estudante de doutorado da área de ensino de Ciências e Matemática, Carlos reconheceu, ao final da entrevista, que o que lhe falta realmente para desenvolver teoria e prática de forma dialética, em sala de aula, é o saber pedagógico: "(...) o que falta realmente é o conhecimento pedagógico (...) do trabalho em sala de aula, saber o referencial, saber aplicar na essência dele mesmo".

Em nosso último eixo de análise, denominado Desafios para o desenvolvimento dos saberes pedagógicos e matemáticos, buscamos verificar quais desafios Carlos apontaria como possíveis obstáculos ao desenvolvimento de seus

saberes pedagógicos e matemáticos em continuidade da sua carreira docente. O Quadro 4 a seguir mostra esses desafios.

Quadro 4. Desafios ao desenvolvimento dos saberes pedagógicos e matemáticos.

Saberes	Desafio	Resposta
Pedagógicos e matemáticos	Falta de proposta do governo	"Também a parte política, que não investe na formação de professores , então tudo acaba agregando para impedir que a gente melhore, tanto a prática, quanto ao conhecimento".
	Falta de tempo	"O que eu acho que impossibilita assim, é as condições de trabalho que a gente tem, trabalha muito tempo, trabalha 40 horas semanais ".
	Baixo salário	" condições financeiras , então você não tem muita condição de investir no conhecimento".
	Desmotivação	"é ... creio que com o passar do tempo a falta de motivação , acho que são coisas que acabam influenciando".
Pedagógicos	Participação e interesse dos alunos	"E as vezes, para você adotar uma metodologia, os alunos são muito acostumados com o ensino tradicional , eu vejo assim. Então eles perguntam: vale nota? É para copiar? O que que é para fazer? É para resolver esse exercício? Eles não entendem que você quer dar uma metodologia diferenciada, trabalhar a resolução de problemas ou modelagem . É que eles têm que ser ativo, eles que vão fazer, vão construí o conhecimento deles, eles esperam tudo pronto as vezes no quadro, é para copiar? Então quer fazer o exercício para ganhar nota, não ter essa atitude de ele fazer, ele construir . A gente só auxilia ele fazer parte do auxílio, aquela ponte entre eles e o conhecimento, então eu penso muito nisso, essa é a dificuldade de aplicar a metodologia que a maioria dos professores desejam . Eu vejo que a maioria dos professores de matemática usam o método tradicional, e os alunos já estão condicionados a isso. A copiar, resolver exercícios e fazer a prova sem pensar muito".
Matemáticos	Tratamento pedagógico dos conteúdos	"Em relação ao conhecimento matemático eu considero ter um bom conhecimento, o que falta realmente é o conhecimento pedagógico ".

Fonte: Elaborado pelos autores.

Conforme se observa no Quadro acima, os desafios caracterizados como falta de proposta do governo, falta de tempo, baixo salário e desmotivação estiveram

relacionados à estrutura da carreira de professores, constituindo-se como desafios que influenciam tanto à constituição de saberes pedagógicos quanto os saberes matemáticos, resultado esse como também apresentado no trabalho de Lima e Belmar (2016). Estes autores buscaram solucionar a desmotivação por meio da busca de novas metodologias, o que também ocorreu com Carlos quando se dispôs a tentar a utilização da modelagem matemática que havia aprendido em suas especializações. Tais desafios são justamente os que constituem, atualmente, os novos cenários de formação de professores no Brasil, referentes aos desafios concernentes à valorização do trabalho docente (Gatti *et al.*, 2019).

Em relação ao saber pedagógico, o único e principal desafio apontado por Carlos foi o que envolve a participação e interesse dos alunos. Segundo sua resposta, percebe-se que o uso de alguma metodologia de ensino nas aulas não teria muito sucesso: “Eles não entendem que você quer dar uma metodologia diferenciada, trabalhar a resolução de problemas ou modelagem”. E o que o impede de utilizar uma metodologia de ensino seria a pouca participação e interesse dos alunos: “Então, quer fazer o exercício para ganhar nota, não ter essa atitude de ele fazer, ele construir”.

Devido a essa situação, é possível inferir da resposta de Carlos que pouco espaço se encontra em sala de aula, na escola, para ensinar matemática com uso de alguma metodologia de ensino o que, conseqüentemente, direciona sua prática, como de seus colegas, ao ensino tradicional: “(...) essa é a dificuldade de aplicar a metodologia que a maioria dos professores desejam. Eu vejo que a maioria dos professores de matemática usam o método tradicional, e os alunos já estão condicionados a isso”.

Por fim, sobre os desafios no desenvolvimento dos saberes matemáticos ao longo dos demais anos da carreira docente de Carlos, identificamos apenas aspectos relacionados ao tratamento pedagógico dos conteúdos, um dos principais saberes necessários ao professor (Gauthier *et al.*, 1998; TARDIF, 2007). Conforme sua resposta, Carlos mais uma vez afirma que seu saber matemático apresenta um bom nível. O seu desafio é justamente desenvolver um outro saber: “(...) o que falta realmente é o conhecimento pedagógico”. Essa fala de Carlos vai ao encontro da pesquisa feita por Losano, Fiorentini e Villarreal (2017), no sentido de mostrar que é complexo o início da carreira do professor, mesmo que ela aconteça em escolas particulares que tecnicamente tem o material apostilado. Além disso, destaca-se o contraditório em relação a aquisição de novos conhecimentos pelo professor em sua carreira, pois apesar de buscar por

melhorar seus conhecimentos pedagógicos, fica evidente que pouco os domina, pois pouco evoluíram.

Essa fala de Carlos vai ao encontro da pesquisa feita por Losano, Fiorentini e Villarreal (2017), no sentido de mostrar que é complexo o início da carreira do professor, ainda mais por ter sido professor em escolas particulares, que tecnicamente trabalham com um material apostilado, e dependendo da forma como é produzida, muitas vezes não valoriza muitos os aspectos pedagógicos no seu ensino. Isso pode ser evidenciado na fala de professor Carlos, quando destaca não ter adquirido novos conhecimentos durante a sua carreira, pois, embora tenha buscado melhorar seus conhecimentos pedagógicos, fica evidente que não os domina muito, e que não houve muita evolução nesse sentido.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente artigo tivemos como objetivo analisar algumas fases do desenvolvimento profissional de um professor sobre seus saberes pedagógicos e matemáticos. O estudo de caso que realizamos foi sobre a trajetória docente do professor Carlos, de acordo com relatos cedidos na forma de entrevista, e que foram organizados e analisados com base em quatro eixos: Saberes pedagógicos e matemáticos apresentados no início da carreira; Saberes pedagógicos e matemáticos do desenvolvimento profissional; Saberes pedagógicos e matemáticos utilizados pelo professor; e, Desafios para o desenvolvimento dos saberes pedagógicos e matemáticos. Cada um destes eixos, foram relacionados com os saberes pedagógicos e saberes matemáticos construídos por Carlos.

Sobre o desenvolvimento dos saberes pedagógicos, Carlos indicou que no início da carreira de professor da escola pública (em 2010) possuía saberes pedagógicos, o que, segundo ele, foi possível devido ter sido professor (entre 2005 e 2010) de escola particular. A sua trajetória de formação mostra que ele fez dois cursos de especialização, sendo um em metodologia de ensino de matemática. Atualmente, Carlos é aluno de curso de doutorado. Dessa forma, ao analisar suas respostas durante uma prática docente com seus alunos, verificamos que ele não construiu muitos conhecimentos sobre as metodologias de ensino durante a sua carreira docente, ou com base no curso de especialização realizado. Inferimos que lhe falta um embasamento teórico que sustente a sua prática, por exemplo, o uso da modelagem matemática, pois não identificamos uma relação entre a teoria e a prática. Entendemos que essa falta de relação ainda persiste na prática de

professores, pois, de acordo com Gatti *et al.* (2019), trata-se de um desafio que, para ser superado, exige do professor a integração de conhecimentos pedagógicos à sua prática de forma consciente, revelando domínio para tal.

Sobre o desenvolvimento dos saberes matemáticos, Carlos apontou que sempre teve bom conhecimento matemático e que o fato de ter sido professor de escola particular só lhe permitiu ter menos dificuldades quando ingressou como professor da escola pública. Assim, no decorrer de sua trajetória de busca de formação, a ampliação de seus saberes matemáticos ocorreu em meio ao curso de mestrado (do Profmat), o qual, segundo ele, somente abordou conteúdos matemáticos. Dessa forma, a análise de suas respostas sobre sua prática docente com seus alunos mostra que ele aprendeu e considera ter bom conhecimento das definições, da estrutura dos conteúdos, e de resolver problemas e exercícios.

Sobre os desafios para desenvolver seus saberes pedagógicos e matemáticos, Carlos indica aspectos em relação à questão das condições da estrutura da formação profissional de professores, os quais são importantes e referentes à valorização da carreira do professor (Gatti *et al.*, 2019). Especificamente sobre desenvolver seus saberes pedagógicos, Carlos apresentou um desafio referente à participação e interesse dos alunos nas aulas, o que, segundo ele, seria o que o impediria de fazer uso de metodologias de ensino de forma contínua, situação essa que o levaria, assim como seus colegas professores, a apelar, infelizmente, para aulas tradicionais como modo de ensinar. Por último, por considerar seu saber matemático como bom, Carlos entendeu que o desafio é construir saberes pedagógicos que lhe faltam.

Contudo, é possível afirmar que o desenvolvimento profissional de Carlos, até o momento, mostra que ele buscou ampliar seus conhecimentos pedagógicos. Porém, apesar do contato que teve com metodologias de ensino e outros conhecimentos educacionais, o que ele relata sobre sua prática de sala de aula revela que precisa se apropriar, constantemente, de referencial teórico para atuar de forma consistente ao longo de sua carreira. Portanto, o desafio para Carlos, a partir dos próximos anos de sua trajetória docente é desenvolver seus saberes pedagógicos e, assim, conseguir o reequilíbrio teórico-prático. Por outro lado, seus saberes matemáticos não foram foco de sua busca por melhor formação. Seu relato mostra que o curso de mestrado focou apenas saberes matemáticos, o que contribuiu para tal.

Por fim, destacamos uma implicação de nosso estudo sobre o desenvolvimento profissional de Carlos e sua prática de sala de aula, referente à falta de participação dos alunos, a qual nos levou à uma reflexão do trabalho docente.

De um lado, tem-se um professor que utiliza em suas aulas ideias de uma metodologia de ensino, a modelagem matemática, para abordar a fórmula de área, confirmando seu uso, mas este não conhece o referencial teórico sobre essa metodologia, pautando-se apenas na ideia central (possivelmente, a busca de um modelo matemático, mas de forma isolada). De outro lado, tem-se como desafio o uso de uma metodologia de ensino que vise solucionar/amenizar a falta de participação e interesse dos alunos, falta essa que acaba conduzindo para um ensino tradicional.

Uma explicação para tal é que, possivelmente, os alunos demonstrem essas atitudes porque a metodologia de ensino utilizada, por ser abordada apenas em sua ideia central, talvez esteja sendo tratada de forma tradicional. Um ponto da resposta de Carlos, no Quadro 4, que ele revela naturalmente é: “A gente só auxilia ele [aluno] fazer parte do auxílio, aquela ponte entre eles [alunos] e o conhecimento (...)”. Dessa forma, podemos inferir que Carlos realmente esteja apenas apresentando alguma situação-problema, mas não dando os encaminhamentos metodológicos necessários para a realização de uma modelagem matemática como estratégia de ensino, fundamentada em um referencial teórico. Assim, o apelo à aula tradicional acaba sendo natural para tomar espaço como forma de ensino. O que acaba por desenvolver o seguinte ciclo: o professor tenta abordar a metodologia de ensino, mas de forma incompleta; com isso, os alunos não demonstram interesse em participar; por frustração, o professor acaba retornando ao ensino tradicional; e, por tentar novamente o uso de metodologia de ensino diferenciados, esbarra-se em alunos acostumados ao ensino tradicional. Diante disso, é possível apontar que o professor precisa fundamentar sua prática com uso adequado dos referenciais teóricos, seguindo, implementando e testando as propostas de ensino (metodologias) conforme são sugeridas.

8. REFERÊNCIAS

- Bardin, L. (2011). *Análise de Conteúdo*. Edições 70.
- Belmar, C. C.; Bressan, S.; Goulart, A. (2017). Experiências vivenciadas por professores de Matemática em início de carreira. In VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, 2017, Madrid. *Anais do VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, 2017.

- Belo, E. S. V.; Gonçalves, T. O. (2012) A identidade profissional docente do formador de professores de Matemática. *Educação Matemática Pesquisa* (Online).
- Duarte, J. (2005) *Entrevista em profundidade. Métodos e técnicas de pesquisa em comunicação*. Atlas.
- Felmer, P.; Perdomo-Díaz, J. (2017). Un programa de desarrollo profesional docente para un currículo de matemática centrado en las habilidades: la resolución de problemas como eje articulador. *Educación Matemática*, 29. <https://doi.org/10.24844/EM2901.08>
- Gatti, B. A.; Barreto, E. S. S., André, M. E. D. A.; Almeida, P. C. A. (2019). *Professores do Brasil: novos cenários de formação*. UNESCO.
- Gauthier, C. et al. (1998). *Por uma teoria da Pedagogia*. Unijuí.
- Imbernón, F. (2011). *Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza*. 9. ed. Cortez, 2011.
- Lima, A. L.; Belmar, C. C. (2016). Dificuldades apresentadas por professores de matemática em início de carreira: um estudo exploratório. In XII Encontro Nacional de Educação Matemática. *Anais do XII ENEM*.
- Losano, L., Fiorentini, D., e Villarreal, M. (2018). The development of a mathematics teacher's professional identity during her first year teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21(3), 287-315. <https://doi.org/10.1007/s10857-017-9364-4>
- Lüdke, M.; André, M. E. D. A. (1986). *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas*. Editora Pedagógica e Universitária.
- Manrique, A. L. (2009) Licenciatura em Matemática: formação para a docência x formação específica. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, 11(3), 515-534.
- Marcelo, C. (2009). Desenvolvimento profissional docente: passado e futuro. *Sísifo: Revista de Ciências da Educação*, (8), 7-22.
- Nóvoa, A. (2019). *Os professores e a sua formação num tempo de metamorfose da escola*. Educação & Realidade.
- Pacheco, J. A.; Flores, M. A. (1999). *Formação e avaliação de professores*. Porto Editora.
- Paraná (2008). *Diretrizes Curriculares da Educação Básica*. Secretaria de Estado da Educação do Paraná.
- Pimenta, S. G.; Anastasiou, L. das G. C. (2014). *Docência no ensino Superior*. 5. ed. Cortez.
- Proença, M. C. (2019). Análise da compreensão sobre formação de professores desenvolvida por pós-graduandos da área de ensino de matemática. *Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 10(2), 1-14. <https://doi.org/10.36397/emteia.v10i2.239529>
- Roldão, M. C. (2007). *Formar para a excelência profissional: pressupostos e rupturas nos níveis iniciais da docência*. Educação e Linguagem.

- Roldão, M. C. (2017). Formação de professores e desenvolvimento profissional. *Revista de Educação*, PUC-Campinas. <https://doi.org/10.24220/2318-0870v22n2a3638>
- Tardif, M. (2007). *Saberes docentes e formação profissional*. 8ª ed. Vozes.
- Vaillant, D.; Marcelo, C. (2012). *Ensinando a ensinar: as quatro etapas de uma aprendizagem*. UTFPR.
- Yin, R. K. (2015). *Estudo de Caso: planejamento e métodos*. 6ª ed. Bookman editora.

MARCELO CARLOS DE PROENÇA

Dirección: Avenida Colombo, 5790, Zona 7, 87020-900, Bloco F67, local 118,
Maringá, Paraná, Brasil.

Teléfono: +55 44 999698729

Ações do professor e desenvolvimento do raciocínio matemático durante a discussão coletiva de uma tarefa

Teachers' actions and mathematical reasoning development during the collective discussion of a task

Joana Brocardo,¹ Catarina Delgado,²
Fátima Mendes,³ João Pedro da Ponte⁴

Resumo: Este artigo procura caracterizar as ações do professor em discussões coletivas que promovem o desenvolvimento do raciocínio matemático e identificar eventuais relações entre essas ações e os processos de raciocínio matemático. A par destes objetivos, pretende propor um modelo que integre características específicas destas ações e evidencie as que se relacionam com os processos de raciocínio matemático. A metodologia é interpretativa e os dados são recolhidos a partir da gravação, em vídeo, do momento de discussão coletiva de uma tarefa, numa aula de uma professora do 5.º ano de escolaridade. A análise dos dados permitiu especificar seis tipos de ações do professor associadas ao momento de trabalho na sala de aula (Convidar, Apoiar, Guiar, Desafiar, Informar e Sugerir), bem como as potencialidades de cada um deles no desenvolvimento de processos de raciocínio matemático dos alunos.

Fecha de recepción: 14 de septiembre de 2021. **Fecha de aceptación:** 22 de noviembre de 2021.

¹ Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, Departamento de Ciências e Tecnologias, Setúbal, Portugal, joana.brocardo@ese.ips.pt, orcid.org/0000-0002-0526-7332.

² Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, Departamento de Ciências Sociais e Pedagogia, Setúbal, Portugal, catarina.delgado@ese.ips.pt, orcid.org/0000-0001-8146-1236.

³ Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, Departamento de Ciências e Tecnologias, Setúbal, Portugal, fatima.mendes@ese.ips.pt, orcid.org/0000-0002-7112-9034.

⁴ Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal, jpponte@ie.ulisboa.pt, orcid.org/0000-0001-6203-7616.

Permitiu, ainda, evidenciar a inter-relação entre alguns destes tipos de ações tendo em vista esse desenvolvimento.

Palavras-chave: *Ações do professor; processos de raciocínio matemático; discussões coletivas; tarefas matemáticas.*

Abstract: This article seeks to characterize the teacher's actions of in whole-class discussions, which promote the development of mathematical reasoning, and to identify possible relationships between these actions and mathematical reasoning processes. In addition to these aims, it intends to propose a model that integrates specific characteristics of these actions and shows those related to mathematical reasoning processes. The methodology is interpretive and the data are collected from the recording, on video, of the moment of whole-class discussion of a task, in a class of a grade 5 teacher. Data analysis allowed to specify six types of teacher actions associated with the moment of work in the classroom (*Invite, Support, Guide, Challenge, Inform and Suggest*), as well as the potential of each of them in the development of students' mathematical reasoning processes. It also allowed to evidence the interrelation between some of these types of actions in view of such development.

Keywords: *Teacher actions; mathematical reasoning processes; whole-class discussions; mathematical tasks.*

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos é uma prioridade para a aprendizagem da Matemática, claramente expressa em muitos currículos de Matemática escolar (Jeannotte e Kieran, 2017). Este valor curricular relaciona-se, em parte, com um entendimento mais amplo de raciocínio matemático do que usualmente é considerado. De facto, distinguindo-se de um significado exclusivamente centrado em aspetos lógicos, tem vindo a afirmar-se uma visão de que o raciocínio matemático integra, igualmente, a formulação e teste de novas ideias (Mata-Pereira e Ponte, 2012). A valorização do raciocínio ancora-se, igualmente, na importância que hoje se reconhece a uma formação escolar fortemente marcada pela procura de respostas para situações novas que se colocam num

mundo cada vez mais complexo e que exigem raciocínio para analisar novas questões e para interpretar e justificar afirmações que permitam chegar a novas conclusões e tomar decisões. O desenvolvimento do raciocínio matemático poderá dar um contributo importante para o desenvolvimento do raciocínio em geral.

Raciocinar matematicamente é fazer inferências justificadas (Mata-Pereira e Ponte, 2018a) e envolve formulação de conjecturas, organização de testes e procura de justificações. O raciocínio matemático permite que os alunos vão além do uso de procedimentos rotineiros, dando sentido a conceitos e procedimentos matemáticos, relacionando e dando um significado coerente a diferentes aspetos da Matemática (Ball e Bass, 2003; Boaler, 2010).

Apesar da relevância de desenvolver nos alunos o seu raciocínio matemático, a investigação mostra que os professores enfrentam vários desafios quando organizam e concretizam atividades de ensino que o visam trabalhar e consolidar (Stylianides *et al.*, 2013). De facto, os professores precisam de ter um entendimento aprofundado sobre o raciocínio matemático, quais as características dos seus principais processos, como adaptar e explorar tarefas e como conduzir discussões coletivas com os seus alunos para o promover (Ponte *et al.*, 2013; Stein *et al.*, 2008).

A condução das discussões coletivas é um aspeto importante da prática do professor em que se completam as ideias dos alunos, transformando-as em ideias matemáticas mais precisas e poderosas (Stein *et al.*, 2008). A análise das discussões coletivas implica ter em atenção as ações do professor encaradas como uma intervenção ou conjunto de intervenções relacionadas entre si e realizadas com uma determinada intenção.

Este artigo visa contribuir para aprofundar o conhecimento sobre as ações do professor que incidem no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Partimos do modelo das ações do professor na condução de discussões matemáticas proposto por Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) e Mata-Pereira e Ponte (2017; 2018a; 2018b) para caracterizar as ações de uma professora, Leonor, que ocorreram durante a discussão coletiva da tarefa “Quantas maçãs?” com uma turma de alunos de 5º ano (10-11anos). Destacamos e analisamos as características das ações da professora focando, em particular, as diretamente relacionadas com o desenvolvimento de processos de raciocínio matemático, propondo um modelo que caracteriza e integra as diferentes ações do professor sob a ótica das suas potencialidades para o desenvolvimento do raciocínio matemático e que avança características específicas destas ações. Mais especificamente, este estudo visa responder às questões: Quais as características das ações da professora que

se focam no desenvolvimento do raciocínio matemático durante a condução da discussão coletiva de uma tarefa? Que relações se identificam entre as ações da professora e os processos de raciocínio matemático?

AÇÕES DO PROFESSOR NAS DISCUSSÕES COLETIVAS

A discussão coletiva na sala de aula decorrente da exploração de tarefas que visam promover o raciocínio e a resolução de problemas é fundamental para o desenvolvimento da compreensão de conceitos e para uma aprendizagem matemática com significado (NCTM, 2017). Oferece aos alunos oportunidades para partilharem ideias matemáticas e elaborarem argumentos válidos que as sustentem e clarifiquem (NCTM, 2007). À medida que os alunos tentam apresentar argumentos fundamentados para as suas ideias, esclarecem os seus próprios pensamentos e são capazes de (re)criar algumas das práticas que os matemáticos usam ao produzir argumentos e justificações (Brodie, 2010).

O reconhecimento da importância de discussões coletivas na promoção do raciocínio matemático dos alunos desencadeou, a partir dos anos 90 do Séc. XX, a realização de estudos focados na preparação e condução destes momentos de exploração das tarefas (Fraivillig *et al.*, 1999; Lampert, 2001; Stein *et al.*, 2008; Wood, 1999). Estes estudos realçam as ações do professor como um elemento-chave das discussões coletivas.

Fraivillig *et al.* (1999) organizam essas ações em três categorias: (i) *Incentivar* (*eliciting*) os alunos a apresentar os seus métodos, (ii) *Apoiar* (*supporting*) a compreensão conceptual dos alunos, (iii) *Ampliar* (*extending*) o pensamento dos alunos. Os resultados deste estudo revelam que os dois primeiros tipos de ações ocorrem, sobretudo, quando os professores pretendem ter acesso ao pensamento matemático dos alunos ou apoiar esse pensamento. Revelam, ainda, que o terceiro tipo de ações é, simultaneamente, o que contribui para um maior desenvolvimento do pensamento dos alunos e o que constitui um maior desafio para os professores.

Apoiando-se no modelo de Fraivillig *et al.* (1999), Cengiz *et al.* (2011) caracterizam de forma mais aprofundada as ações de *Ampliar* que ocorrem durante as discussões coletivas, analisando-as individualmente. Advertem, contudo, que as várias ações surgem muitas vezes de forma interligada e que, em alguns casos, as ações individuais a que os professores recorrem para atingir determinado fim são eficazes, mas noutros casos não o são, havendo a necessidade de

desencadear uma sequência de ações. Este estudo reforça a ideia de que as ações de *Ampliar*, ou seja, de levar os alunos a compreender um fenómeno matemático, evoluindo para além das suas ideias iniciais, são complexas e constituem um desafio para o professor.

Ellis *et al.* (2013) acrescentam às três categorias de ações do professor apresentadas por Fraivillig *et al.* (1999), uma quarta que designam por *Responder a* (*responding to*). Esta categoria inclui ações de reação ao que os alunos dizem ou fazem, como, por exemplo, redizer uma afirmação dos alunos ou solicitar a um aluno que rediga afirmações de outros. Neste modelo de análise das ações do professor, em cada categoria são considerados dois níveis (baixo e elevado), de acordo com o potencial das ações para apoiar o raciocínio matemático dos alunos. As quatro categorias de ações são assumidamente apresentadas sequencialmente, para evitar um entendimento hierárquico quanto à sua importância no desenvolvimento do raciocínio matemático. Esta opção distancia-se da perspetiva de Fraivillig *et al.* (1999) ao sugerir *Ampliar* (*extending*) como o conjunto de ações que mais contribui para o desenvolvimento do pensamento dos alunos.

Também com o objetivo de estudar a condução de discussões coletivas Ponte *et al.* (2013) propõem o modelo de análise para as ações do professor da figura 1, que posteriormente foi também usado por Mata-Pereira e Ponte (2017; 2018a; 2018b) para analisar processos de raciocínio matemático nesta fase da exploração de tarefas.

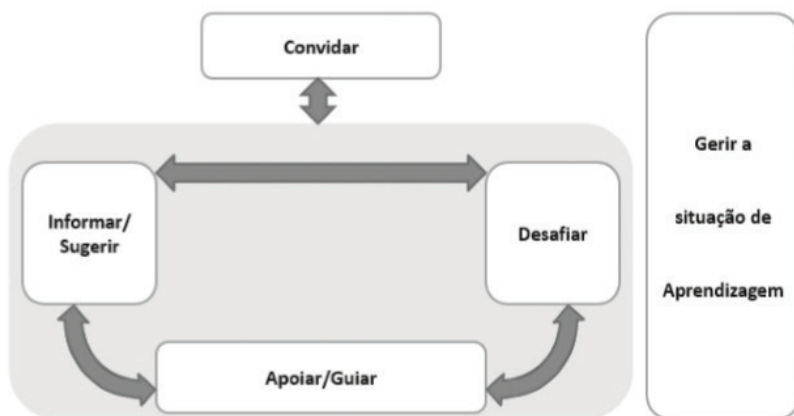


Figura 1. Modelo das ações do professor na condução de discussões matemáticas (Ponte *et al.*, 2013).

Neste modelo, as ações do professor são organizadas em dois grupos distintos – as que se relacionam diretamente com os tópicos e processos matemáticos e as que se focam na gestão da aprendizagem (Ponte *et al.*, 2013). É dado especial relevo às ações do primeiro grupo, que os autores designam por *Convidar*, *Apoiar/Guiar*, *Desafiar* e *Informar/Sugerir*. As ações de *Convidar* promovem o envolvimento inicial dos alunos na discussão ou num seu segmento (Ponte *et al.*, 2013), incentivando os alunos a participar e a partilhar as suas resoluções (Mata-Pereira e Ponte, 2018a). As ações de *Apoiar/Guiar* incentivam a continuação da participação dos alunos na discussão (Ponte *et al.*, 2013), conduzindo-os a apresentar informação (Mata-Pereira e Ponte, 2018a). *Informar/Sugerir* corresponde a ações em que é o próprio professor que introduz informação, sugere argumentos, ou valida respostas dos alunos (Ponte *et al.*, 2013). Já nas ações de *Desafiar*, a intenção do professor é que sejam os alunos a assumir esse papel, incentivando-os a ir além do seu conhecimento prévio (Mata-Pereira e Ponte, 2018a). Este tipo de ações “coloca o aluno na situação de ser ele próprio a avançar em terreno novo, seja em termos de representações, da interpretação de enunciados, do estabelecimento de conexões, ou de raciocinar, argumentar ou avaliar” (Ponte *et al.*, 2013, p. 59).

Com o intuito de contribuir para a construção de princípios orientadores para a promoção do raciocínio matemático dos alunos, Mata-Pereira e Ponte (2018a) recorrem a este modelo para analisar episódios de discussões coletivas e concluem que as ações do professor não surgem com uma ordem ou sequência pré-estabelecida, dependendo do que os alunos dizem ou fazem e das oportunidades que as intervenções destes geram para o desenvolvimento da aula.

RACIOCÍNIO E PROCESSOS DE RACIOCÍNIO

Sendo consensual que raciocinar é uma atividade comum a todos os seres humanos, já não é tão consensual o que se entende por raciocínio matemático. Diversos autores (Jeannotte e Kieran, 2017, Mata-Pereira e Ponte, 2018b; Oliveira, 2008) caracterizam raciocínio matemático, enfatizando alguns dos seus aspetos. Para Oliveira (2008), o raciocínio matemático refere-se a um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtém conhecimento novo a partir de conhecimento prévio. Pelo seu lado, Jeannotte e Kieran (2017) associam o raciocínio matemático a um processo de comunicação que permite inferir enunciados matemáticos a partir de outros. Tendo em conta estas

caracterizações de raciocínio matemático e a de Mata-Pereira e Ponte (2018b), consideramos que raciocinar matematicamente é fazer inferências justificadas.

Indo além da ideia de que raciocinar matematicamente se restringe ao raciocínio dedutivo, a investigação tem mostrado que há diferentes modos de fazer inferências justificadas, o que remete para o que Jeannotte e Kieran (2017) denominam como o “aspecto estrutural” do raciocínio. Este diz respeito ao modo como os elementos discursivos se associam num sistema ordenado que descreve os seus elementos e a relação entre eles, incluindo os diferentes tipos de raciocínio: dedutivo, indutivo e abduutivo. As autoras identificam ainda no raciocínio matemático o seu “aspecto processual”, que diz respeito a processos “meta-discursivos, isto é, que derivam narrativas sobre objetos ou relações através da exploração de relações entre objetos” (Jeannotte e Kieran, 2017, p. 9) e que estão associados a identificar padrões, procurar semelhanças e diferenças, comparar, classificar ou provar. Este aspecto processual está diretamente relacionado com o que se denomina comumente por processos de raciocínio, caracterizados por diversos autores (Lannin *et al.*, 2011; Mata-Pereira e Ponte, 2017; Rivera e Becker, 2019). Relacionando diretamente raciocínio matemático com alguns desses processos, Lannin *et al.* (2011) referem que o raciocínio integra processos como conjecturar, generalizar, investigar porquê, desenvolver e avaliar argumentos.

Sendo comum a todos os autores que investigam processos de raciocínio matemático a assunção da sua complexidade, variedade e inter-relação, há diferentes caracterizações destes processos. O projeto REASON destaca os seguintes processos: generalizar, justificar, classificar, conjecturar e exemplificar. Generalizar, um processo central do raciocínio matemático, consiste em afirmar que uma ideia, propriedade ou procedimento é válido para um determinado conjunto de objetos (Carraher *et al.*, 2008; Jeannotte e Kieran, 2017) ou afirmar que uma propriedade é comum a um grupo de objetos (Jeannotte e Kieran, 2017). Justificar, um outro processo central do raciocínio matemático, consiste em apresentar um argumento lógico baseado em ideias matemáticas para sustentar uma determinada afirmação ou refutá-la utilizando um contraexemplo (Jeannotte e Kieran, 2017). Classificar é um processo de inferência sobre classes de objetos com base nas suas propriedades e definições, que pode ser desencadeado pela procura de semelhanças ou diferenças entre objetos matemáticos (Jeannotte e Kieran, 2017) e pode corresponder, por vezes, a uma generalização. Conjecturar está associado à procura de regularidades, semelhanças ou diferenças, com o objetivo de estabelecer uma relação (Jeannotte e Kieran, 2017), envolvendo a formulação de afirmações (conjeturas) que se espera que sejam verdadeiras, mas cuja

veracidade é necessário validar (Lannin *et al.*, 2011). Finalmente, exemplificar consiste em encontrar exemplos que apoiam a procura de aspetos semelhantes e diferentes ou que apoiem a validação, sendo um processo que surge associado, e que apoia, outros processos (Jeannotte e Kieran, 2017).

A centralidade do raciocínio matemático e a importância de o desenvolver na sala de aula desde os primeiros anos é aceite por investigadores e professores, sendo essencial perceber como pode ser promovido o seu desenvolvimento. Um dos aspetos comuns às investigações sobre a temática é que o envolvimento dos alunos em discussões coletivas, em que elaboram e exprimem os seus argumentos e em que analisam a argumentação matemática de colegas e do professor, contribui para o desenvolvimento do seu raciocínio matemático (Oliveira, 2008; Stein *et al.*, 2008). A par deste envolvimento em discussões coletivas e com elas relacionadas, identificam-se a natureza das tarefas que são propostas aos alunos (Battista, 2017; Lannin *et al.*, 2011; Lithner, 2017) bem como ações específicas do professor durante as discussões coletivas (Ellis *et al.*, 2018; Lannin *et al.*, 2011; Mata-Pereira e Ponte, 2017, 2018a, 2018b) que contribuem, igualmente, para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

METODOLOGIA

Esta investigação segue uma metodologia interpretativa (Erickson, 1986). A recolha de dados é realizada numa turma de 5º ano de uma professora, Leonor, que participou numa oficina de formação integrada no projeto REASON. No âmbito deste projeto, que tem como objetivo geral estudar o conhecimento matemático e didático que os professores precisam para conduzir uma prática que promova o raciocínio matemático dos alunos, realizou-se esta oficina em que participaram 19 professores dos 1º e 2º ciclos do ensino básico.

A formação, orientada pelas três primeiras autoras deste artigo, incluiu seis sessões presenciais de 3 horas e dois momentos, designados por “Levar à prática”, em que cada professor explorou, na sua turma, uma tarefa por si selecionada ou adaptada e que considerava com potencialidades para desenvolver o raciocínio matemático dos seus alunos. O momento “Levar à prática I” ocorreu após a terceira sessão de formação e o “Levar à prática II” após a quinta sessão de formação. Cada um destes momentos englobou a planificação e exploração de uma tarefa na aula e a apresentação no grupo de formação que incidiu na análise dos processos de raciocínio usados pelos alunos e nas ações do professor para os

desenvolver. As aulas em que foram exploradas as tarefas foram observadas e videogravadas por colegas da formação e pelas formadoras.

Leonor, com 36 anos de experiência profissional, trabalhou em grupo durante a formação com uma colega de escola, com quem partilhou as decisões sobre a escolha das tarefas e sobre a sua planificação, aspetos que o par igualmente discutiu com as formadoras. No “Levar à prática I” este par selecionou a tarefa Chupa-chupas⁵, analisada durante a oficina de formação, optando por substituir o contexto de distribuir chupa-chupas por distribuir maçãs (Figura 2).

Neste artigo analisamos a discussão coletiva desta tarefa ocorrida na aula de Leonor, que decorreu nos últimos 45 minutos de uma aula de 90 minutos.

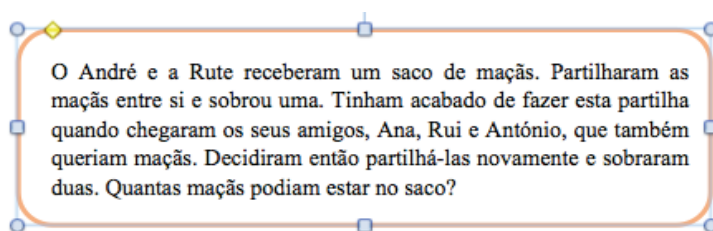


Figura 2. Tarefa “Quantas maçãs?”

A análise de dados foi realizada em três fases. Na primeira fase começou-se por garantir o rigor da transcrição, visionando a aula e introduzindo os necessários ajustamentos. Em seguida, produziu-se um relato da discussão coletiva que exclui da transcrição diálogos ou comentários não diretamente relacionados com a discussão da tarefa, como os que dizem respeito, por exemplo, a pontos de ordem relativamente a normas gerais a seguir (Professora: “Shiiiiu. Dedo no ar se quiserem contribuir ou fazer perguntas. Vá! Põem o dedo no ar. Já lá vamos”). Neste relato incluem-se notas explicativas sobre a sequência das apresentações realizadas pelos alunos e os registos realizados no quadro, de modo a traduzir o mais fielmente possível tudo o que respeita à discussão matemática da tarefa.

A segunda fase de análise incidiu sobre o relato, que foi analisado tendo como base o modelo de Ponte *et al.* (2013) e Mata-Pereira e Ponte (2017, 2018a, 2018b) de modo a associar as intervenções da professora a um tipo de ações consideradas por estes autores. Deste modo, as intervenções da professora que integravam o relato foram associadas à ação que ela ilustra e foi incluída uma

⁵ Tarefa adaptada da tarefa “Lots of Lollies”, disponível em: <https://nrich.maths.org/2360>.

descrição que justifica a associação realizada. Diversos exemplos são apresentados no Quadro 1.

Quadro 1. Classificação das ações da professora em três momentos da discussão coletiva e sua justificação.

Ações	Excertos	Concretização da ação da professora
<i>Convidar</i>	Professora: Vou pedir primeiro ao vosso grupo para ir ali apresentar o que fizeram.	Convida a participar quem seguiu uma determinada estratégia. (o grupo selecionado conclui que o facto de ter de dividir as maçãs por dois, sobrando uma maçã, implica que o número de maçãs é ímpar).
<i>Desafiar</i>	Professora: Porque é que 5 maçãs a dividir por 5 [pessoas] também não estava certo e estava também ali indicado a vermelho que não está certo. Porquê? O que é que era preciso acontecer para estar certo?	Desafia os alunos a analisar as condições do problema e perceber o que o resultado de um determinado teste implicaria para as condições iniciais do problema.
<i>Guiar</i>	Professora: Os dois amigos é que se iam dividir pelas maçãs?	Coloca uma questão para que Lourenço corrija o que está a dizer (significado dos números envolvidos).

Na terceira fase de análise de dados, as ações da professora começaram por ser organizadas de acordo com o modelo proposto por Ponte *et al.* (2013) e Mata-Pereira e Ponte (2017, 2018a, 2018b) nos quatro tipos de ações centrados nos tópicos e processos matemáticos: (i) *Convidar*, (ii) *Apoiar/Guiar*, (iii) *Desafiar* e (iv) *Informar/Sugerir*. O conteúdo de cada um dos conjuntos de ações foi analisado em detalhe de modo a especificar as suas particularidades e a identificar e caracterizar as ações que diretamente se relacionam com o desenvolvimento do raciocínio matemático. Desta análise detalhada emergiu uma subdivisão de algumas das categorias inicialmente consideradas: (i) *Convidar*, (ii) *Apoiar*, (iii) *Guiar*, (iv) *Desafiar*, (v) *Informar* e (vi) *Sugerir*. As ações da professora incluídas em cada um dos tipos anteriores foram organizadas nas categorias relacionadas com processos de raciocínio (Quadro 2), que igualmente emergiram nesta fase de análise de dados.

Quadro 2. Categorias de análise de cada grupo de ações da professora.

Ações associadas a processos de raciocínio	Processos específicos	Exemplificar	Ações que se relacionam diretamente com a explicitação de processos de exemplificar.
		Classificar	Ações que se relacionam diretamente com a explicitação de processos de classificar.
		Conjeturar	Ações que se relacionam diretamente com a explicitação de processos de conjeturar.
		Generalizar	Ações que se relacionam diretamente com a explicitação de processos de generalizar.
		Justificar	Ações que se relacionam diretamente com a explicitação de processos de justificar.
	Processos transversais	Meta-analisar	Ações que visam promover uma análise global dos processos usados e das conclusões a que os alunos chegam.

Nesta fase de análise de dados foi também contabilizado o número de ações da professora incluídas em cada uma das categorias consideradas. Na secção relativa à análise de dados a ordem pela qual são apresentadas as ações da professora está associada à sua expressão nos processos de raciocínio que apoia e promove.

TIPOS DE AÇÕES DO PROFESSOR E PROCESSOS DE RACIOCÍNIO

Desafiar

No momento de discussão coletiva, embora solicitando também uma análise do que cada grupo tinha realizado ao explorar a tarefa, Leonor coloca novos desafios aos alunos que passam por justificar o que realizaram em grupo e por avançar com questões novas ou que os alunos não explicitaram na sua apresentação.

Durante a discussão coletiva, identificam-se 25 ações de desafiar (Tabela 1), organizadas em diferentes categorias, estabelecidas de acordo com as características específicas de cada uma, destacando-se as que se relacionam com processos de raciocínio.

Tabela 1. Ações *Desafiar* com diferentes características

Associadas a processos de raciocínio	Meta-analisar	7	24
	Exemplificar	4	
	Justificar	8	
	Classificar	2	
	Generalizar	3	
Não associadas a processos de raciocínio			1
Total			25

Das 25 ações de *desafiar* identificadas apenas uma não se foca em aspetos relacionados com processos de raciocínio. Nesta ação Leonor pede aos alunos “Expliquem-se”, e ocorre depois de um conjunto de ações de *guiar* mais focadas e a que os alunos iam correspondendo, mas avançando com respostas pouco precisas:

- Professora: Qual é o número maior possível, com o algarismo das unidades 7, que serve para solução do número de maçãs dentro do saco?
- Raquel: Tudo o que seja, tudo o que acaba em 7.
- Professora: Tudo. E esse tudo é o quê?
- Raquel: Infinitos.
- Professora: Não acaba, é sempre... OK. Expliquem-se.

O desafio “expliquem-se” surge aqui como um convite para concretizar a resposta a uma questão e culmina um segmento de perguntas a que os alunos iam dando respostas imprecisas, mas que tinham como intenção compreender que não podiam indicar o maior número possível de maçãs.

De entre as 24 ações associadas a processos de raciocínio (Tabela 1), sete delas refletem desafios que Leonor explicitamente lança aos alunos para fazerem uma análise meta dos processos usados e das conclusões a que chegaram. Estas ações, que não incidem diretamente em processos de raciocínio específicos, pretendem promover uma reflexão sobre as condições expressas do problema, sobre as estratégias usadas ou sobre o que significa formular e testar uma conjectura. O Quadro 3 descreve os três tipos destas ações identificados e apresenta os excertos que ilustram as suas características.

Quadro 3. Tipos de ações *Desafiar* associadas a meta-analisar.

<i>Desafiar</i> Meta-analisar	Descrição	Excerto
Os dados da tarefa.	Desafia os alunos a analisar as condições do problema e perceber o que o resultado de um determinado teste implicaria para as condições iniciais do problema.	Lourenço descreve um a um os testes que realizaram, experimentando se poderiam estar no saco 3, 4 e 5 maçãs. Lourenço: 3 maçãs a dividir por 5 também não dava. 5 maçãs a dividir por 5 também não dava. Professora: Porque é que 5 maçãs a dividir por 5 também não estava certo e estava também ali indicado a vermelho que não está certo. Porquê? O que é que era preciso acontecer para estar certo? Professora: Distribuir por 5 e? O que é que tinha de acontecer no problema?
As estratégias usadas pelos alunos.	Desafia os alunos a identificar diferenças entre resoluções da tarefa, explicando-as e/ou explicitando como poderiam modificar a sua estratégia inicial.	Depois de dois grupos terem apresentado a sua resolução da tarefa: Professora: O que é que foi diferente nesses grupos? Vamos ver se vocês conseguem explicar.
		Professora: Então o que é que é diferente para os grupos que, a certa altura, deixaram de estar 1 a 1 e começaram a...
		Professora: Não? OK. Então reparem... então vou fazer uma pergunta diferente. O que é que vocês compreenderam de todas estas apresentações dos vossos amigos? No fundo o que é que, o que é que não conseguiram fazer enquanto estavam a trabalhar em grupo, mas que se fizessem agora fariam diferente e o que é que iam fazer?
O significado de uma conjectura.	Procura que os alunos analisem o seu modo de pensar e o associem ao processo de formular e testar conjecturas.	Professora: OK. Então o pensamento qual foi? Será que... vamos transformar o nosso pensamento numa pergunta. Qual foi essa pergunta? Bia: Será que os números, que os números que têm 7, ou que acabam em 7, também dão? Professora: Também dão? Portanto, fizemos uma pergunta e quando fazemos uma pergunta matemática ou em ciência, o que é que temos de ir fazer a seguir? Tomás. Tomás: Testar essa coisa.

A Tabela 1 evidencia ainda que 17 das 25 ações de desafiar relacionam-se diretamente com a explicitação de processos de raciocínio matemático. Identifica ações em que Leonor desafia os alunos a (i) explicar como a procura de exemplos lhes permitiu ir encontrando soluções para a tarefa (exemplificar), (ii) refletir sobre o processo de justificar, (iii) identificar uma classificação que agrupe os valores que verificam uma determinada condição da tarefa e classificar valores e (iv) formular, criticar ou reformular generalizações. O Quadro 4 descreve estas ações e ilustra-as recorrendo a excertos ocorridos durante a discussão da tarefa.

Quadro 4. Tipos de ações *Desafiar* associadas a processos de raciocínio matemático.

	Descrição:	Excerto
Exemplificar	Provoca uma instabilidade relativamente à justificação dos exemplos analisados ou procura que os alunos explicitem outros exemplos.	Gabriela: <i>Nós já sabíamos que tinha de ser com número ímpar e então começamos a ver com os números ímpares que davam e quando, quando eu já estava a ter uma coisa em olho, eles iam para o 17, fizeram isso e...</i> Professora: E o 17? Enganaram-se e escreveram 17, não foi? Bia: Depois a professora disse para nós experimentarmos com outros números, então nós fizemos com 27 e também deu. Professora: (...) E chegaram a mais alguma conclusão? Alguém acrescentou a esta solução e àquela solução mais números?
Justificar	Procura que justifiquem porque é que um exemplo não funciona, desafia a pensar no que seria necessário para funcionar ou pergunta porque é que não testaram determinados valores.	Professora: Porque é que 5 maçãs a dividir por 5 também não estava certo e estava também ali indicado a vermelho que não está certo. Porquê? O que é que era preciso acontecer para estar certo?
		Professora: Mas não testaram 101, 103, ... Professora: Porque é que não podia ser 3, Lara?
Classificar	Procura que os alunos identifiquem os valores numéricos que obedecem a uma das condições do problema (números que divididos por 5 dão resto 2).	Professora: Portanto, de cinco em cinco dava que tipo de números? Raquel: 7, 12, 17, o 22.

Generalizar	Desafia os alunos a reformular (é solução se tem um 7) e/ou estabelecer uma generalização.	Bia: (...) bem, então se dá o 17 ou o 27, vai dar o 7... é o número... pronto, é o número chave". Então, experimentámos o 27. Professora: Mas olhem, número chave, porque é que o 71 não dá? Também tem lá o 7. Diga, Dinis.
		Professora: Qual é o número maior possível, com o algarismo das unidades 7, que serve para solução de maçãs dentro do saco?

Guiar

Na análise das ações de Leonor durante a condução da discussão coletiva associada à tarefa "Quantas maçãs?", foram identificadas um total de 49 ações de *Guiar*. A Tabela 2 apresenta a distribuição destas ações, destacando aquelas que estão associadas a processos de raciocínio dos alunos.

Tabela 2. Ações *Guiar* com diferentes características.

Associadas a processos de raciocínio.	Exemplificar	2	14
	Justificar	7	
	Conjeturar	1	
	Generalizar	4	
Não associadas a processos de raciocínio			35
Total			49

A maior parte das ações de *Guiar* não estão associadas a processos de raciocínio, mas ajudam os alunos a esclarecer algo, a explicitar o que fizeram, a reformular algo ou a justificar algo, como a opção por uma estratégia de resolução, a escolha de um exemplo, ou o significado de uma expressão. Foi o que aconteceu quando uma aluna explicava como o seu grupo tinha resolvido a tarefa e é interpelada pela professora para explicitar um caminho de resolução: "Bia, o que é que fizeram a seguir?". Por vezes, a professora pede também aos alunos que clarifiquem um passo da sua resolução. O episódio seguinte ilustra esta ação, depois de Gabriela apresentar a primeira etapa do processo de resolução do seu grupo:

- Gabriela: Nós primeiro lemos o texto outra vez para vermos as conclusões que podíamos retirar e depois como a professora já tinha dado alguma informação eu quis dizer umas partes (impercetível) para chegarmos ao número e nós quisemos começar pelo 10 para ver quanto é que dava... e dava 0 então quer dizer que não podia ser.
- Professora: Dava 0 onde? Nas sobras ou... 10 a dividir por 2 amigos, era isso?
- Ricardo: Nas sobras.

A questão colocada por Leonor leva Ricardo, um aluno do mesmo grupo, a clarificar a afirmação de Gabriela sobre o significado da expressão “dava 0”. A preocupação de incentivar a explicitar e, por vezes, de corrigir afirmações dos alunos, aparece, também associada à ação de *Guiar*:

- Lourenço: A conta, a conta que nós fizemos foi dois, dois amigos a dividir por... e nós pusemos um, um... sim, um pontinho...
- Professora: Os dois amigos é que se iam dividir pelas maçãs?
- Lourenço: Não, as maçãs é que iam dividir pelos amigos.

A ação de *Guiar* surge também relacionada com o conduzir os alunos a justificar uma opção tomada durante o processo de resolução da tarefa. É o que acontece quando, durante a apresentação da resolução do seu grupo, Ricardo refere que experimentaram com o número 13, opção esta que Leonor pede para justificar: “Porque era ímpar, era isso?”.

A ação de *Guiar* aparece, ainda, relacionada com o pedido de explicitação, no momento de discussão coletiva, de um desafio colocado aos alunos durante a sua realização em grupo da tarefa, ou seja, associada à ação de desafiar (em diferido). Exemplos desta ação são ilustrados no episódio em que Leonor interpela Inês quando esta descreve o processo de resolução do seu grupo:

- Inês: Depois ela disse que ia dar 7, nós experimentámos outra vez, fizemos os bonecos outra vez com 0, mas depois começamos a fazer a conta de dividir.
- Professora: Pronto, mas eu quando fui aí ... (...). Eu quando fui aí vocês disseram “o 17 não dá” e eu perguntei porque é que não dá... porque a gente começou a desenhar umas bolas e depois ela disse que aquilo não dava e acabou-se e qual foi a pergunta que eu fiz?
- Bia: Se todos os números...
- Professora: Não, não. O que é que eu perguntei, Bia?
- Bia: Porque é que o 17 não dava.

Professora: Porque é que o 17 não dava?

Aluno: E depois nós fizemos uma conta de dividir e afinal dava.

A ação evidenciada mostra que Leonor leva os alunos a concretizar, perante toda a turma, o desafio que lhes tinha colocado durante o momento de realização da tarefa em pequeno grupo e que lhes permitiu corrigir o teste relacionado com o número 17 (sobre ser ou não solução do problema) e avançar na sua resolução.

Guiar surge também em algumas ocorrências relacionada com a explicitação e concretização de processos de raciocínio. Identificam-se, assim, ações em que a professora questiona os alunos de modo a: (i) explicar o uso de exemplos que lhes permitiram encontrar, ou não, soluções da tarefa (exemplificar); (ii) concretizar a justificação de usar certos números com determinadas características (justificar); (iii) explicitar conjecturas que formularam (conjeturar); e (iv) concretizar a formulação de generalizações (generalizar). Finalmente, associada ao processo de generalizar, a ação de *Guiar* surge, também, sob a forma de uma questão que leva os alunos a fazer uma síntese da sua resolução, que poderá conduzir ao processo de generalizar. Este tipo de ação de *Guiar* destaca-se no final da discussão coletiva, quando Leonor coloca uma questão que leva os alunos a explicitar uma conclusão relacionada com a generalização das características dos números que são solução do problema.

O quadro 5 descreve estas ações relacionadas com processos de raciocínio (exemplificar, justificar, conjeturar e generalizar) e ilustra-as recorrendo a excertos ocorridos durante a discussão da tarefa.

Quadro 5. Tipos de ações *Guiar* associadas a processos de raciocínio matemático.

	Descrição	Excerto
Exemplificar	Guia os alunos a concretizar o uso de exemplos que foram testados, neste caso, 37.	Professora: Então vou fazer uma pergunta: alguém, para além deste grupo que nós vimos que chegou ao 17 e testou ali o 17, pensou que não e depois que sim? (...) Alguém passou para o 37, por exemplo?
Justificar	Orienta os alunos a fundamentar o uso de exemplos que lhes permitiram encontrar, ou não, soluções da tarefa. Neste caso é pedida a justificação de começar pelo 5.	Madalena: Primeiro começámos por explicar com o 5. Depois vimos que não dava e experimentámos com outros números. Professora: OK. E porque é que começaram pelo 5?
Conjeturar	Leva os alunos a explicitar a formulação de uma conjetura, neste caso que todos os números terminados em 7 são solução.	Ricardo: Nós chegámos ao 27. Professora: Chegaram ao 27, mas quando eu passei aí, vocês já estavam a ficar com aquela ideia de quê? Aluno: Que todos os números que acabavam em sete davam.
Generalizar	Orienta os alunos a formular uma característica comum dos números que são solução, conduzindo-os à generalização.	Pedro: E nunca dava. Professora: OK, mas como chegaram ao 7? (sobre o facto de os números terem o algarismo das unidades igual a 7) Pedro: Depois, quando chegávamos ao 7, é que dava.
	No final da discussão, leva os alunos a explicitar uma conclusão sobre o que fizeram, que corresponde a generalizar (<i>guiar síntese</i>).	Depois de todos os grupos terem apresentado as suas resoluções, Leonor dirige-se ao último grupo e pergunta: Professora: Então eu vou perguntar a este grupo a que conclusão é que chegámos todos hoje, mesmo que não tivéssemos chegado no grupo?

Informar

No momento de discussão coletiva, a ação de *Informar* descreve ou recorda o caminho seguido por um determinado grupo na resolução da tarefa, tal como ilustra o excerto seguinte:

Professora: Mas eles disseram, Pedro. Estiveste a ouvir, eles disseram que chegaram ao 17 e ainda chegaram ao 19, mas estavam a gastar muito tempo. (...) O que é que faltou? eles foram testando um a um, não é? Um a um, um a um, mas houve aqui grupos que não testaram... Quer dizer, começaram a testar 1, 2, 3, mas depois, de repente, tiveram uma ideia e foram testar essa ideia.

Envolve, também, a correção ou inibição de caminhos de resolução que resultam de interpretações incorretas do enunciado da tarefa, tal como acontece quando Leonor chama a atenção para a impossibilidade de se considerarem cortes nas maçãs:

Lourenço: Depois nós concordámos que com 5 amigos... 5... nós fizemos uma maçã a dividir por 5 não dava.

Professora: Eu tinha dito que não havia cá cortes das maçãs, não é?

Salientar ou validar uma ideia a partir do que os alunos fizeram ou disseram é outra intenção subjacente à ação de *Informar*. No excerto seguinte, Leonor reforça uma propriedade dos “não exemplos”, ou seja, dos números que não satisfazem as condições do enunciado (o número de maçãs não pode ser divisível pelo número de pessoas).

Lourenço: Ah! Não sobrar nenhuma [maçã].

Professora: Pois, é que se não sobrasse nenhuma não está certo, e não sobrou nenhuma, pois não?

Lourenço: Não.

É ao salientar ou validar uma ideia a partir do que os alunos fizeram ou disseram que se evidenciam preocupações relativas a processos de raciocínio, nomeadamente à exemplificação e à generalização. A tabela 3 sintetiza o número de ações de informar observadas, destacando as que surgem associadas a processos de raciocínio.

Tabela 3. Ações *Informar* com diferentes características.

Associadas a processos de raciocínio	Exemplificar	2	6
	Generalizar	4	
Não associadas a processos de raciocínio			11
Total			17

Das 17 ações associadas a *Informar*, 6 relacionam-se diretamente com processos de raciocínio. As ações associadas ao processo de exemplificação evidenciam-se pela preocupação de Leonor em validar exemplos (números que satisfazem as condições do enunciado) e “não exemplos” (números que não satisfazem as condições do enunciado). Ao validar uma propriedade dos exemplos, Leonor visa uma generalização. O quadro 6 exemplifica cada uma destas situações.

Quadro 6. Ações de *Informar* associadas a processos de raciocínio matemático.

	Descrição	Excerto
Exemplificar	Salienta/valida uma ideia a partir do que os alunos fizeram ou disseram: valida a existência de mais exemplos (não há só um exemplo que satisfaz as condições do enunciado).	Aluno F: Mas depois chegámos ao 7 e percebemos que era um bom número e dava tudo certo, por isso, escolhemos o 7 e começámos a fazer sobre o 7. Professora: Só à volta do 7? Como se houvesse só uma solução.
	Salienta/valida uma ideia a partir do que os alunos fizeram ou disseram: valida “não-exemplos” (12 e 14 não satisfazem as condições do enunciado).	Professora: Mas eles explicaram porque é que não escolheram nem o 12, nem o 14.
Generalizar	Salienta/valida uma ideia a partir do que os alunos fizeram ou disseram: valida uma propriedade dos exemplos (os números ímpares que satisfazem as condições do enunciado terminam em 7).	Bia: Eu disse uma coisa “Já repararam que sempre que é ímpar e acaba em 7?”. Professora: Já repararam que sempre que é ímpar, acaba em 7?

Sugerir

No momento de discussão coletiva da aula, a ação *Sugerir* está associada a duas intenções. Uma tem subjacente uma possível explicação ou justificação para o que os alunos fizeram ou disseram. No excerto seguinte, Leonor sugere uma justificação (motivo) para um procedimento usado pelos alunos. Neste caso, estes repetem as condições explicitadas no enunciado e a professora avança com uma justificação para essa opção:

Bia: Depois nós, nós, nós vimos que com cinco amigos tinha de sobrar 2 e com 2 tinha de sobrar 1.

Professora: Para se lembrarem, não é?

A outra intenção inclui a validação ou crítica, por vezes implícita, de uma ideia ou de um caminho de resolução. No exemplo seguinte, a professora sugere que um determinado procedimento é pouco adequado, criticando-o subtilmente. Parece pretender sugerir aos alunos que o recurso a uma representação icónica no trabalho com números grandes não é uma estratégia eficaz:

Inês: Depois nós vimos que no 7 não dava então depois estava a experimentar o 17, mas depois a Beatriz fez o desenho no caderno dela...

Professora: Muita bolinha, não era?

Inês: Sim.

Professora: E aqui cansaram-se...

Em alguns casos, a ação *Sugerir* evidencia preocupações associadas a processos de raciocínio. Das oito ações de *Sugerir* identificadas no momento de discussão coletiva, quatro relacionam-se diretamente com estes processos (Tabela 4).

Tabela 4. Ações de *Sugerir* com diferentes características.

Associadas a processos de raciocínio	Meta-analisar	1	4
	Generalizar	3	
Não associadas a processos de raciocínio			4
Total			8

Tal como mostra a tabela 4, ocorre um processo Meta-analisar focado nas estratégias utilizadas pelos alunos. Mais concretamente, Leonor chama a atenção que os caminhos de resolução até ao momento apresentados pelos grupos têm implícitos processos de raciocínio que são concretizados sequencialmente: exemplificar, observar um padrão, conjecturar e testar. O quadro seguinte descreve estas ações relacionadas com processos de raciocínio (meta-analisar e generalizar) e ilustra-as recorrendo a excertos ocorridos durante a discussão da tarefa.

Quadro 7. Ações de *Sugerir* associadas a processos de raciocínio matemático.

	Descrição	Excerto
Meta-analisar as estratégias usadas pelos alunos.	Sugere uma estratégia, validando-a: Chama a atenção dos alunos que ao observarmos uma regularidade, produzimos uma conjectura e tentamos testá-la, parando o processo de exemplificação.	Professora: Testar essa nossa ideia e houve alguém que disse experimentar, fazer as contas com esses números que estão na nossa ideia e isso poupa-nos, se tivermos uma boa ideia a certa altura porque estamos a reparar que há ali algumas coisas que são parecidas, poupa-nos trabalho. Já não gastamos tanto tempo em vez de ir de um em um podemos testar essa nossa ideia, certo?
Generalizar	Sugere a possibilidade de vir a analisar a generalização proposta (os números terminados em 7 experimentados satisfazem as condições do problema).	Um aluno: Todos os números que acabavam em sete davam. Professora: Talvez houvesse aqui uma história, que o 7 seria uma boa referência, se bem que eu já aí vou voltar numa outra questão.

Convidar

Foram identificadas 11 ações de *Convidar*. Uma parte destas ações tem subjacente uma intenção associada à Matemática e conduz à participação de determinados alunos ou grupos:

Professora: Quem é que aqui testou com números relativamente altos?
(...)

Professora: Ouçam uma coisa, vocês em algum momento experimentaram números pares?
A dividir pelo dois ou pelo cinco?

O primeiro excerto ilustra um convite à participação dos alunos que testaram números com determinadas características, neste caso, números pares, enquanto o segundo exemplifica um apelo à intervenção daqueles que experimentaram números com uma certa 'grandeza'.

Durante a discussão coletiva, identificam-se um total de quatro ações deste tipo, não se destacando alguma que explicitamente traduza preocupações associadas a processos de raciocínio dos alunos.

É de salientar que nem sempre é evidente ou explícita uma intenção da professora relacionada com a Matemática quando convida alunos a participar na discussão. Identificam-se sete deste tipo de ações cuja intenção é gerir as intervenções dos alunos na discussão, quer dando voz especificamente a alguns deles quer solicitando globalmente a participação dos alunos da turma na discussão. São exemplos destas ações as seguintes intervenções de Leonor:

Professora: Espera que eu quero ouvir a Gabriela, ou a Bia, ou a Inês, ou o Ricardo.
(...)

Professora: Alguém quer fazer alguma pergunta?

O primeiro caso ilustra uma ação em que a professora dá voz, explicitamente aos elementos de um grupo de alunos enquanto o segundo exemplifica uma ação em que solicita a participação global dos alunos da turma na discussão. Tal como era expectável, neste caso, nenhuma destas ações surge explicitamente associada a processos de raciocínio dos alunos.

Apoiar

Foram identificadas um total de 12 ações de *Apoiar* por parte de Leonor. Este tipo de ação corresponde a enfatizar uma opção, um caminho, uma resposta dos alunos bem como a redizer o que os alunos disseram. No caso desta professora, muitas das suas intervenções são iniciadas com a expressão "OK", dando um sinal inequívoco aos alunos de que apoia e está de acordo com o que estes acabaram de dizer:

Bia: Sim e depois, pronto, fizemos o número ímpar e a partir daí fizemos ímpar...
Professora: OK. Foram experimentando.
Bia: Sim.

Neste episódio, para além de validar o que os alunos efetuaram, Leonor enfatiza ainda o caminho de resolução que estes seguiram, dizendo “foram experimentando”. As ações observadas deste tipo não surgem associadas a processos de raciocínio dos alunos.

INTER-RELAÇÃO E SEQUENCIALIDADE DAS AÇÕES DA PROFESSORA

Nas secções anteriores analisámos as ações de Leonor durante o momento de discussão coletiva, tanto as que se ligam diretamente a processos de raciocínio matemático como as que apenas têm como intenção a orquestração das intervenções dos alunos. Embora esta análise tenha sido realizada ação a ação tendo como objetivo a apresentação de evidências associadas a cada uma, no momento de discussão coletiva foram identificados padrões entre elas, tanto no que se refere à sua relação como à sua sequencialidade.

Duas ações que se interligam no discurso da professora, no momento de discussão coletiva, são as de *Apoiar* e *Guiar*, tal como acontece neste episódio:

Professora: E depois foram dividir. Ah, OK. Então, quando dividiram, o resto era...?

Inês: O resto era...O do 10 era 0 e o do dois acho que era...

Gabriela: 1.

Esta interligação parece ter uma dupla intenção, por um lado, valida o que os alunos disseram (*Apoiar*) e, por outro, questiona-os, de modo a que estes explicitem algo na sua apresentação (*Guiar*), neste caso sobre o valor do resto que obtiveram quando efetuaram diversas divisões. Em todos os casos analisados desta associação de ações da professora, num total de quatro, identifica-se, também, esta sequencialidade – Leonor começa por apoiar o discurso dos alunos, colocando depois uma questão no sentido de os guiar na sua intervenção.

A ação *Apoiar* surge, ainda, num total de oito vezes, associada a *Desafiar*. Frequentemente, o apoio é verbalizado apenas pela expressão “OK” que valida o caminho seguido pelos alunos até aí, antes de lhes colocar o próximo desafio:

Raquel: Fizemos as contas e depois... dão os setes, então nós pensámos “então vamos fazer um número maior” pensamos em 100 e depois eu assim “então, mas se dá 7, se fizermos 107?” e fizemos 107.

Professora: OK. Então o pensamento qual foi? Será que... vamos transformar o nosso pensamento numa pergunta. Qual foi essa pergunta?

Bia: Será que os números que têm 7, ou que acabam em 7, também dão?

Neste excerto, *Apoiar* é seguido de um desafio associado à formulação de uma conjectura sobre as características dos números que são solução do problema.

AÇÕES DA PROFESSORA DURANTE A DISCUSSÃO COLETIVA

A análise de todas as ações de Leonor durante a discussão coletiva permite identificar a frequência observada em cada uma das categorias identificadas, distinguindo as ações em que foi observada uma associação a processos de raciocínio das que, pelas suas características, não o podem estar (tabela 5).

Tabela 5. Frequência de cada tipo de ação por categoria analisada.

Ações	Associadas a processos de raciocínio							Não associadas a processos de raciocínio
	Exemplificar	Classificar	Justificar	Generalizar	Conjeturar	Meta	Total	
Desafiar	4	2	8	3	-	7	24	1
Guiar	2	-	7	4	1	-	14	35
Informar	2	-	-	4	-	-	6	11
Sugerir	-	-	-	3	-	1	4	4
Convidar	-	-	-	-	-	-	0	11
Apoiar	-	-	-	-	-	-	0	12

Desafiar e *Guiar* destacam-se como as ações mais focadas no raciocínio. Na ação de *Desafiar* há um claro predomínio de características ligadas ao raciocínio: só num caso é que a professora lança um desafio que não lhe está associado. É também na ação de *Desafiar* que se identificam quase todas as questões da professora com características não diretamente relacionadas com processos de raciocínio específicos (*Meta-analisar*), como acontece quando Leonor desafia os alunos a analisar as condições do problema, as estratégias usadas ou o que significa testar uma conjectura.

Ao contrário do que acontece com *Desafiar*, a maioria das ações de *Guiar* (35 em 49) não incidem diretamente no raciocínio matemático. *Guiar* envolve levar os alunos a esclarecer, explicitar ou justificar algo, seja a escolha de um exemplo, o significado de uma expressão, a explicitação de justificações, generalizações e conjecturas ou a opção por uma estratégia de resolução. *Guiar* tem ainda características de *desafiar em diferido*, quando se concretiza via um pedido de explicitação de um desafio colocado pela professora a um ou vários grupos, na fase de exploração autónoma da tarefa.

Informar assume a forma de uma afirmação ou esclarecimento que visa descrever ou recordar um determinado caminho de exploração da tarefa, salientar ou validar uma ideia, relacionada ou não com o raciocínio matemático. Assim, pode ter características associadas aos processos de raciocínio, revelando-se como a ação em que o professor inclui aspetos importantes destes processos, concretizando-os para a tarefa em discussão.

A ação de *Sugerir* assume a forma de um comentário ou recomendação e envolve a análise de explicações ou justificações e a apreciação crítica de uma estratégia, podendo ou não focar o raciocínio matemático. Distingue-se da ação de *Informar* por visar diretamente a participação do aluno.

Ao *Convidar* podem ou não estar subjacentes aspetos relacionados com Matemática uma vez que a organização das intervenções dos alunos pode assentar no conhecimento que o professor tem das conclusões a que chegou durante o trabalho autónomo ou das características das suas participações habituais. As “ações de *Convidar* que têm subjacente uma intenção relacionada com a Matemática” estão muito associadas ao início de segmentos de discussão coletiva, em que se solicita a alunos ou grupos que apresentem o que fizeram, evidenciando-se um planeamento da sequência de apresentações baseado no trabalho por eles previamente realizado. Podem, igualmente, ocorrer na sequência de um momento de discussão em que a professora parece sentir importante introduzir um contributo com determinadas características. *Convidar* pode estar associado à explicitação de processos de raciocínio, embora esta relação não tenha sido identificada na análise efetuada.

Apoiar é uma ação que se distingue de *Guiar* uma vez que corresponde a enfatizar uma opção, uma resposta ou observação dos alunos, sem ter a intenção de lhes solicitar alguma resposta, mas que visa encorajá-los a prosseguir a apresentação de uma ideia ou argumentação.

CARACTERÍSTICAS DAS AÇÕES ASSOCIADAS AO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

A análise de dados permite destacar uma categoria de processos matemáticos que designamos por *Meta-analisar*, não associada a um determinado processo de raciocínio, mas claramente focada no raciocínio matemático. Esta categoria é identificada, sobretudo, na ação de *Desafiar*, mas também ocorre em *Sugerir*. Envolve a reflexão sobre estratégias gerais de resolver um problema ou de conduzir uma investigação matemática (Quadro 8).

Quadro 8. Características das ações focadas em processos *Meta-analisar*.

Desafiar os alunos a:

- analisar as condições do problema e perceber o que o resultado de um determinado teste implicaria para as condições iniciais do problema;
- identificar diferenças entre resoluções da tarefa, explicando-as e/ou explicitando como poderiam modificar a estratégia que usaram inicialmente;
- associar o procedimento que usaram ao de formular e testar conjecturas.

Sugerir uma estratégia para produzir e testar uma conjectura.

As ações da professora associadas a *Justificar* (Quadro 9) centram-se, no caso da tarefa analisada, na justificação de porque é que alguns exemplos ‘funcionam’ e outros não e na fundamentação dos exemplos usados.

Quadro 9. Características das ações focadas em *Justificar*.

Desafiar os alunos a pensar

- porque é que um exemplo não ‘funciona’;
- o que seria necessário para que o exemplo ‘funcionasse’;
- o porquê de não terem testado determinados valores.

Guiar os alunos de modo a fundamentar o uso de exemplos.

Associado a *Generalizar* (Quadro 10) salientamos o desafio para reformular ou avançar com uma generalização e a sugestão de análise de um padrão.

Quadro 10. Características das ações focadas em *Generalizar*.

Desafiar os alunos a reformular e/ou estabelecer uma generalização.
Guiar os alunos a formular uma característica geral comum a todas as soluções.
Informar, validando, uma ideia baseada no que os alunos fizeram ou disseram indicada pelos alunos.
Sugerir a hipótese de haver ‘algo’ por detrás da generalização avançada pelos alunos.

As ações da professora focadas em *Exemplificar* (Quadro 11) visam a análise crítica do uso de exemplos, quer provocando instabilidade sobre se eles podem ou não ser considerados exemplos, quer procurando a explicitação de mais exemplos e o seu uso para avançar na resolução do problema. Este último aspeto é fundamental pois é nele que reside a essência de considerar a exemplificação como um processo (auxiliar) de raciocínio.

Quadro 11. Características das ações focadas em *Exemplificar*.

Desafiar os alunos

- provocando uma instabilidade relativamente à justificação dos exemplos analisados;
- procurando que explicitem outros exemplos.

Guiar os alunos a concretizar o uso de exemplos que foram testados.
Informar que não há só um exemplo que satisfaz as condições do enunciado.

A tarefa analisada ilustra como focar a atenção no tipo de números que obedecem a uma ou mais condições é uma ação que pode levar os alunos a *Classificar* (Quadro 12).

Quadro 12. Características das ações focadas em *Classificar*.

Desafiar os alunos a identificar o tipo de números que obedecem a uma das condições do problema.

Finalmente, conjecturar (Quadro 13), embora seja um processo de raciocínio pouco presente na discussão coletiva, é um processo para o qual a professora consegue guiar os alunos.

Quadro 13. Características das ações focadas em *Conjeturar*.

Guiar os alunos a explicitar a formulação de uma conjectura

RELAÇÕES ENTRE AÇÕES E PROCESSOS DE RACIOCÍNIO

As características das ações identificadas têm diferentes níveis de generalidade, com as mais específicas, naturalmente, muito associadas à tarefa discutida com os alunos. No entanto, sugerem um menu de características que o professor pode ter em conta na preparação da discussão coletiva.

Na Figura 3 apresentamos um modelo com génese no proposto por Ponte *et al.* (2013) e Mata-Pereira e Ponte (2017, 2018a, 2018b), que traduz as relações e ações observadas e que reflete (i) a individualização de ações que possuem características próprias, tal como fundamentado anteriormente, (ii) as potencialidades de cada tipo de ação para desenvolver o raciocínio matemático, e (iii) a inter-relação e sequencialidade das ações.

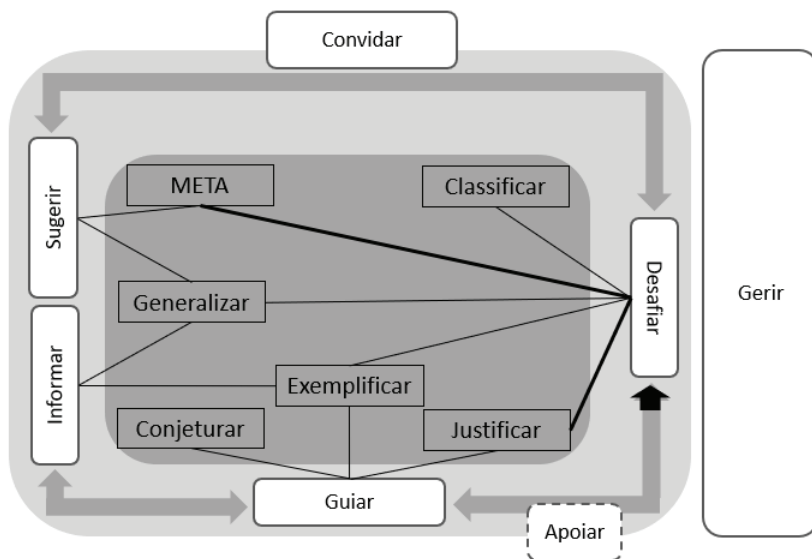


Figura 3. Modelo das ações da professora na condução de discussões coletivas que promovem o raciocínio matemático.

A parte mais sombreada destaca as relações entre as ações do professor e o foco no raciocínio matemático. As ligações ‘diretas’ entre cada ação e os diferentes processos de raciocínio traduzem os dados analisados e permitem assinalar as potencialidades identificadas. *Desafiar* é a ação mais associada ao raciocínio matemático, incidindo diretamente sobre Classificar, Justificar, Exemplificar, Generalizar e sobre os processos Meta-analisar, associados à análise de estratégias gerais de resolução de problemas e de exploração de investigações matemáticas. As ligações mais ‘grossas’ traduzem a maior incidência nos processos Justificar e Meta-analisar.

A parte mais escura da seta dupla que liga *Guiar* a *Desafiar* traduz uma característica importante da ação de *Guiar*, quando assume a forma de desafio em diferido, em que a professora solicita que os alunos explicitem desafios que colocou durante a fase de exploração da tarefa em pequenos grupos.

Não foi identificada nenhuma ação de *Convidar* ou *Apoiar* que incidisse diretamente sobre o raciocínio matemático. No entanto, é possível que isso aconteça quando, por exemplo, se seleciona um aluno ou grupo a participar, ou se enfatiza o que disseram, tendo como critério, um exemplo, uma justificação, uma classificação que a professora identificou durante a exploração autónoma da tarefa. Por isso, no modelo da Figura 3 estas ações estão parcialmente incluídas na parte sombreada mais clara. *Apoiar* está colocado entre *Guiar* e *Desafiar*, evidenciando a interligação e sequencialidade identificadas: (1) começar por *Apoiar* validando o que os alunos disseram e solicitando de seguida que precisem aspetos ligados ao que estavam a apresentar (*Guiar*) e (2) começar por *Apoiar* antes de *Desafiar* os alunos.

O modelo apresentado avança seis categorias para as ações do professor durante a discussão coletiva, diretamente relacionadas com tópicos e processos matemáticos, explicita as suas relações com o raciocínio matemático e salienta a interligação entre elas. A opção de análise foi focar cada ação e não sequências de ações. No entanto, uma vez que a sequencialidade entre *Apoiar* e *Guiar* e *Apoiar* e *Desafiar* se evidenciou, ela é igualmente assinalada no modelo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo das ações do professor na condução de discussões coletivas que promovem o raciocínio matemático que propomos (Figura 3), evidencia, tal como o de Ponte *et al.* (2013) e Mata-Pereira e Ponte (2017, 2018a, 2018b), a

importância das ações do professor para que nas discussões coletivas possa emergir o raciocínio matemático. Avança, ainda, com a especificação das potencialidades de cada um dos tipos de ações para promover os processos de raciocínio matemático considerados.

Este estudo, embora focando cada tipo de ação do professor *per si*, identifica a inter-relação entre ações de *Apoiar* e *Guiar* e um sentido de *Guiar* associado a *Desafiar*, *Desafiar em diferido*. Estes resultados estão na linha do que Cengiz *et al.* (2011) afirmam sobre a combinação de sequências de ações para efetivamente desenvolver o pensamento dos alunos e sugerem, igualmente, a pertinência de desenvolver um modelo que possa incluir o impacto de um conjunto de ações e não apenas o de ações isoladas.

Identificamos um processo de raciocínio não referido na literatura, Meta-analisar, que corresponde a um nível de pensamento em que os objetos são os processos de raciocínio e sobre o qual importa que o professor foque algumas das suas ações. Meta-analisar corresponde a fazer uma abstração e pensar sobre características, por exemplo, de conjecturar ou generalizar.

Reconhecemos potencialidades do modelo das ações do professor na condução de discussões coletivas que promovem o raciocínio matemático (Figura 3) e das características das ações do professor identificadas, nomeadamente na fase de planificação quando o professor prepara as questões que pode colocar aos alunos e antecipa os processos e representações que eles poderão usar. No entanto, esta será uma vertente que importa aprofundar em futuras investigações. Finalmente, salientamos que o modelo proposto é hipotético e necessita ser precisado em futuros estudos que incidam na análise da exploração de outras tarefas, focadas no desenvolvimento do raciocínio matemático, conduzidas por diferentes professores.

AGRADECIMENTOS

Esta investigação foi suportada pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, Portugal, através do projeto REASON – Raciocínio Matemático e Formação de Professores (PTDC/CED-EDG/28022/2017).

REFERÊNCIAS

- Ball, D., e Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, e D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school Mathematics* (pp. 27–44). NCTM.
- Battista, M. (Ed.) (2017). *Reasoning and sense making in the mathematics classroom Grades: 3-5*. NCTM.
- Boaler, J. (2010). The road to reasoning. In K. Brodie, *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms* (pp. v-vii). Springer. <https://link.springer.com/content/pdf/bfm%3A978-0-387-09742-8%2F1.pdf>
- Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-09742-8>
- Cengiz, N., Kline, K., e Grant, T. J. (2011). Extending students' mathematical thinking during whole-group discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 355-374. <https://doi.org/10.1007/s10857-011-9179-7>
- Ellis, A., Özgür, Z., e Reiten, L. (2018). Teacher moves for supporting student reasoning. *Mathematics Education Research Journal*, 5. <https://doi.org/10.1007/s13394-018-0246-6>
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. Wittrockk (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed., pp. 119-161). MacMillan.
- Fraivillig, J. L., Murphy, L. A., e Fuson, K. C. (1999). Advancing children's mathematical thinking in everyday mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 148–170. <https://doi.org/10.2307/749608>
- Jeannotte, D., e Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>.
- Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. Yale University Press. <http://www.jstor.org/stable/j.ctt32bpsx>
- Lannin, J., Ellis, A., e Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. NCTM.
- Lithner, J. (2017). Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. *ZDM*, 49(6), 937–949. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0867-3>
- Mata-Pereira, J., e Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 169–186. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02>
- Mata-Pereira, J., e Ponte, J. P. (2018a). Promover o raciocínio matemático dos alunos: Uma investigação baseada em design. *Bolema*, 32(62), 781–801. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a02>

- Mata-Pereira, J., e Ponte, J. P. (2018b). Teacher's actions to promote students' justifications. *Acta Scientiae*, 20(3), 487–505. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss3id3910>
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. APM.
- NCTM (2017). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em matemática*. APM.
- Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática*, 100, 3-9. <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1715/1755>
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., e Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, XXII(2), 55–81. <https://quadrante.apm.pt/article/view/22894/16960>
- Rivera, F., e Becker, J. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teacher in the Middle School*, 15(4), 213-221.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., e Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313–340. <https://doi.org/10.1080/10986060802229675>
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., e Shilling-Traina, L. N. (2013). Prospective teachers' challenges in teaching reasoning-and-proof. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11(6), 1463–1490. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9409-9>
- Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 171–191. <https://doi.org/10.2307/749609>

JOANA BROCARDÓ

Dirección: Instituto Politécnico de Setúbal, Campus do IPS – Estefanilha, 2910-761 Setúbal, Portugal; joana.brocardo@ese.ips.pt. Telef: 00351 265710800

CATARINA DELGADO

Dirección: Instituto Politécnico de Setúbal, Campus do IPS – Estefanilha, 2910-761 Setúbal, Portugal; catarina.delgado@ese.ips.pt. Telef: 00351 265710800

FÁTIMA MENDES

Dirección: Instituto Politécnico de Setúbal, Campus do IPS – Estefanilha, 2910-761 Setúbal, Portugal; fatima.mendes@ese.ips.pt. Telef: 00351 265710800

JOÃO PEDRO MENDES DA PONTE

Dirección: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Alameda da Universidade, 1649-013 Lisboa, Portugal; jponte@ie.ulisboa.pt. Telef: 00351 217943633

La generalización de patrones como herramienta para introducir el pensamiento algebraico en educación primaria

The generalization of patterns as a tool to introduce algebraic thinking in primary education

Alberto Zapatera Llinares¹

Resumen: Investigadores y corrientes didácticas, como la Early Algebra, recomiendan introducir el pensamiento algebraico desde los primeros años de la escolarización, incorporando tareas de generalización de patrones, relaciones y propiedades. En este trabajo se estudian las respuestas de 106 estudiantes de Educación Primaria a un problema de generalización de patrones, analizando el nivel de éxito, los grados de desarrollo y la utilización de estrategias y se realiza un estudio de casos. Se ha comprobado que los estudiantes de Primaria están preparados para trabajar la generalización de patrones y que las estrategias más usadas en los cursos inferiores son las aditivas y en los cursos superiores las funcionales.

Palabras clave: *pensamiento algebraico, generalización de patrones y estrategias de resolución*

Abstract: Researchers and didactic currents, such as Early Algebra, introduce algebraic thinking from the first years of schooling, incorporating tasks of

Fecha de recepción: 8 de septiembre de 2020. **Fecha de aceptación:** 13 de diciembre de 2021.

1 Departamento de Ciencias de la Educación, Universidad Cardenal Herrera CEU. C/Carmelitas 1, 03203 Elche (España). alberto.zapatera@uchceu.es, orcid.org/0000-0002-7531-8609

generalization of patterns, relationships and properties. In this work, the responses of 106 Primary Education students to a pattern generalization problem are studied, analyzing the level of success, the degrees of development and the use of strategies, and a case study is carried out. It has been proven that Primary students are prepared to work on the generalization of patterns and that the strategies most used in lower grades are additive and in higher grades, functional ones.

Keywords: *algebraic thinking, pattern generalization and resolution strategies.*

1. INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente los currículos de matemáticas han retrasado de forma explícita el estudio del álgebra a los primeros cursos de la educación secundaria, debido a que, según la teoría piagetiana, la escasa capacidad de abstracción de los alumnos de primaria no les permitía pasar del pensamiento operacional concreto al pensamiento formal algebraico.

Sin embargo, investigaciones en didáctica de las matemáticas han observado que los alumnos llegan al sistema educativo con capacidades naturales de generalización que permiten desarrollar el pensamiento algebraico (Mason, 1999) y que este está implícito en los alumnos de primaria (Socas, 2011). Otros investigadores complementan estas ideas al considerar que los alumnos de primaria son capaces de simbolizar algebraicamente conjeturas sobre relaciones aritméticas básicas (Carpenter *et al.*, 2003), de considerar las operaciones aritméticas como funciones en vez de simples cálculos con números particulares (Schliemann *et al.*, 2003), de trabajar con relaciones funcionales (Carraher *et al.*, 2003) y de usar representaciones algebraicas, como gráficos y tablas, para resolver problemas (Brizuela y Schliemann, 2003).

A partir de estas investigaciones surgen corrientes, como la pre-álgebra o la early algebra, que proponen introducir el álgebra en la educación primaria. Ambas corrientes consideran necesario iniciar el pensamiento algebraico con actividades que involucren a los alumnos en procesos matemáticos como la identificación de las estructuras matemáticas, la generalización y la representación de relaciones, pero difieren en su finalidad y en el momento de introducción. Mientras la pre-álgebra intenta suavizar el paso de la aritmética al álgebra con una aritmética

generalizada en los últimos años de la primaria, la early algebra propone introducir el pensamiento algebraico, de manera transversal, gradual y sistemática, desde los primeros años de escolarización, incorporando actividades dirigidas a la identificación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas (Molina, 2009).

Ambas corrientes coinciden en que 1) no es preciso aumentar los contenidos, sino que deben ser tratados con más profundidad resaltando las ideas de generalización, estructura y relaciones, 2) la introducción temprana de temas algebraicos puede ayudar al alumno a adquirir un mejor nivel de análisis y de lógica, a realizar generalizaciones, utilizar símbolos y relaciones y 3) el desarrollo de estas capacidades evitaría problemas de aprendizaje del álgebra en los niveles medio y superior.

Para Kieran (2004) el álgebra es una forma de pensar que sirve para captar y explicar relaciones y considera que el pensamiento algebraico en las primeras etapas no debe centrarse en la mera presentación de las simbolizaciones prefabricadas (expresiones algebraicas), sino en actividades que “incluyan el análisis de relaciones entre cantidades, la identificación de estructuras, el estudio de los cambios, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción” (Kieran, 2004, p. 149).

Para la introducción temprana del álgebra es preciso crear ambientes de instrucción para explicitar el pensamiento algebraico implícito en los alumnos de la Educación Primaria (Carpenter y otros, 2003) y el trabajo con patrones y el estudio de sus regularidades y propiedades pueden contribuir de forma eficaz a la creación de estos ambientes.

Desde esta perspectiva, el objetivo de este trabajo es analizar las respuestas de alumnos de primaria a un problema de generalización de patrones, estudiando los niveles de éxito, los grados de desarrollo y las estrategias usadas.

2. MARCO TEÓRICO

La generalización es uno de los procesos cognitivos más importantes de la actividad matemática y tiene un papel relevante dentro del álgebra. Así Mason, Burton y Stacey (1992), afirman que las generalizaciones constituyen el verdadero nervio de la matemática y Mason *et al.* (2005) señalan que la generalización es la esencia del álgebra y una de las rutas fundamentales hacia ella.

El proceso de generalización consiste en “pasar de un objeto a una clase que contiene el objeto” (Pólya, 1954, p. 12), en “derivar o inducir desde lo particular, identificando lo que es común y extendiendo dominios de validez para

incluir un conjunto mayor de casos" (Dreyfus, 1991, p. 35) o en "aplicar un argumento dado en un contexto más amplio" (Harell y Tall, 1991, p. 38); es decir, generalizar es "ver lo general a través de lo particular y ver lo particular en lo general" (Mason *et al.*, 2005 p. 310).

Para Radford (2006), la generalización de un modelo algebraico se basa en la capacidad de captar alguna regularidad observada en algunos elementos de una secuencia, siendo conscientes de que esta regularidad se aplica a todos los términos de la secuencia y siendo capaces de utilizarla para proporcionar una expresión directa de cualquier término de la secuencia. Kaput (1999) concreta esta idea al definir la generalización como la identificación y exposición de la regularidad o similitud entre casos particulares y la extensión del razonamiento a los patrones, estructuras y relaciones.

Así pues, generalizar es universalizar una propiedad observada en un número limitado de casos, e implica poner a los estudiantes en la necesidad de buscar pautas generales de comportamiento, reglas y leyes que se puedan expresar verbal o simbólicamente y que se puedan aplicar a cualquier caso que se presente, haciéndoles notar la insuficiencia del método experimental.

Radford (2008) concreta la generalización de patrones en tres etapas: en la primera etapa el estudiante observa una propiedad común en algunos términos de una secuencia y extiende la propiedad observada a términos cercanos (generalización cercana), en la segunda extiende la propiedad a términos lejanos (generalización lejana) y en la tercera obtiene una regla general que permite calcular cualquier término.

En la generalización de patrones se observan los dos momentos indisolubles de la abstracción reflexiva, que es el centro de la teoría de la construcción del conocimiento de Piaget (1977/2001): un proceso de reflexión o proyección en el que lo abstraído pasa de un plano inferior a otro superior y una reflexión que permite una reorganización cognitiva sobre el nuevo plano. En el plano inferior las acciones y operaciones se realizan sobre objetos concretos, físicos o imaginados, mientras que en el plano superior las acciones y operaciones actúan sobre objetos abstractos. De esta manera, los procesos de generalización cercana y lejana se establecen en el plano inferior y la obtención de la regla general en el superior.

En muchos problemas de generalización de patrones se especifican gráficamente los primeros términos $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$... de una progresión aritmética $f(n)$ $a \cdot n \pm b$, y se pide (1) calcular $f(n)$ para n pequeño (generalización cercana), (2) calcular $f(n)$ para n grande (generalización lejana) y (3) expresar la regla general (Autor,

2011). En algunos problemas también se incluye el proceso inverso, es decir, hallar n a partir de $f(n)$.

En el paso de la generalización cercana a la generalización lejana se encuentra la frontera entre las generalizaciones que Radford (2008) denomina aritmética y algebraica. Mientras en la generalización cercana el estudiante inicia reconociendo el patrón de crecimiento, pero se limita a realizar un simple recuento, en la generalización lejana el recuento sería una tarea larga y laboriosa, por lo que debe extender el rango de aplicabilidad del patrón a cualquier término de la secuencia. De esta forma pasa de la concreción del recuento en los términos pequeños a la abstracción que supone la extensión del patrón a términos grandes. La expresión de la regla general que identifica y define el patrón se puede realizar de forma gráfica, verbal y/o algebraica. Radford (2008) considera esta etapa el punto crucial en el proceso de generalización y en la que los alumnos encuentran mayores dificultades ya que requiere una mayor capacidad de abstracción.

Las estrategias son los métodos para resolver problemas, “y suponen cualquier tipo de procedimiento que pueda ejecutarse, teniendo en cuenta las relaciones y los conceptos implicados (Rico, 1997, p. 31). Stacey (1989) observó cuatro estrategias distintas: recuento, diferencia entre términos consecutivos, función lineal y proporcionalidad directa. García Cruz (1989) estableció tres estrategias: esquema de recuento, esquema lineal y esquema de proporcionalidad directa. Lannin *et al.* (2006) definieron cinco estrategias: conteo, recursiva, múltiplo de la diferencia, razonamiento multiplicativo y correspondencia. Zapatera (2018), recopiló estas estrategias en tres grandes grupos: estrategias aditivas, estrategias funcionales y estrategias proporcionales (tabla 1).

Tabla 1. Estrategias de resolución de problemas de generalización de patrones

Autor (2018)		Stacey (1989)	García Cruz (1989)	Lannin <i>et al.</i> (2006)
E. aditivas	Recuento sobre dibujo	Recuento	Esquema de recuento	Conteo
	Recuento iterativo			Recursiva
	Recuento recursivo	Diferencia		Múltiplo de la diferencia
E. funcionales	Función local	Lineal	Esquema lineal	Correspondencia
	Función global			
E. proporcionales		Proporcional	Esquema proporcional	Raz. multiplicativo

Las estrategias aditivas se dividen en (1) recuento sobre el dibujo, si el alumno dibuja el término pedido y cuenta sus elementos, (2) recuento iterativo, si parte del primer término y suma la diferencia constante, o patrón de crecimiento, hasta llegar al término pedido y (3) recuento recursivo, si parte de un determinado término y suma la diferencia constante hasta llegar al término requerido. Las estrategias funcionales pueden ser (1) locales, si el alumno utiliza una función para hallar los elementos de un determinado término y (2) globales, si utiliza una función para hallar los elementos de un término cualquiera. Y en las estrategias proporcionales, el alumno utiliza erróneamente, la proporcionalidad directa (tabla 2).

Estrategias	EA	E. aditivas	RD	Recuento sobre dibujo	
			RI	Recuento iterativo	$f(n) = f(1) + (n-1)a$
			RR	Recuento recursivo	$f(n) = f(p) + (n-p)a$
	EF	E. funcionales	FL	Función local	$f(m) = a \cdot m + b, m \text{ determinado}$
			FG	Función global	$f(n) = a \cdot n + b, n \text{ indeterminado}$
	EP	E. proporcionales			$f(n) = a \cdot n$

Figura 1. Estrategias de resolución de generalización de patrones (Autor, 2018)

3. METODOLOGÍA

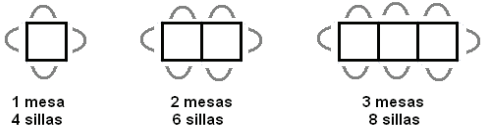
3.1. PARTICIPANTES

En esta investigación han participado 106 estudiantes de 3º, 4º, 5º y 6º de Educación Primaria (8-12 años), que no habían recibido ninguna preparación específica en problemas de generalización de patrones.

3.2. RECOGIDA DE DATOS

El problema utilizado es una adaptación del problema de “las mesas y las sillas” de Carraher *et al.* (2008) (figura 2).

Observa las siguientes figuras que representan mesas y sillas



Como puedes ver, alrededor de una mesa hay 4 sillas, alrededor de 2 mesas hay 6 sillas y alrededor de 3 mesas hay 8 sillas.

1. En un cumpleaños se han colocado 8 mesas, ¿cuántos niños pueden sentarse?
2. ¿Cuántos niños pueden sentarse si se colocan 100 mesas?
3. Explica una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas?

Figura 2. Problema de generalización de patrones

Para resolver la primera cuestión, el alumno debe descubrir el patrón de crecimiento, “añadir dos sillas”, para realizar la generalización cercana; en la segunda cuestión debe extender el rango del patrón hasta las 100 mesas, para realizar la generalización lejana; y en la tercera cuestión debe expresar una regla que permita hallar el número de sillas que se colocan alrededor de un número cualquiera de mesas.

3.3. ANÁLISIS DE DATOS

El análisis de datos se realiza en función de dos criterios: corrección de las respuestas y utilización de estrategias.

- Se considera que las dos primeras cuestiones están resueltas correctamente si calcula el número exacto de sillas que se necesitan y la tercera cuestión si expresa una regla que permita hallar el número de sillas a partir del número de mesas.
- Se consideran las estrategias recogidas en la figura 1, completadas con estrategia directa y otras. Un alumno utiliza la estrategia *directa* si escribe

el número de sillas (niños) de forma directa y utiliza *otra* estrategia si utiliza una estrategia no recogida en las anteriores. De esta forma, las posibles opciones son: D (directa), RD (recuento sobre dibujo), RI (recuento iterativo), RR (recuento recursivo), FL (función local), FG (función global) y O (Otras).

El análisis se realiza en cinco etapas:

- 1) Nivel de éxito: se analiza el éxito conseguido por los alumnos por cursos y por etapas.
- 2) Grados de desarrollo: se establece un diagrama de flujo y se clasifican los alumnos en cuatro grados de desarrollo de la generalización de patrones.
- 3) Utilización de estrategias: se analizan las estrategias utilizadas por cuestiones y por cursos y el nivel de éxito de cada estrategia.
- 4) Secuencias de estrategias: se analizan las secuencias de estrategias utilizadas por los alumnos que hayan conseguido superar todo el proceso de generalización de patrones.
- 5) Estudio de casos: se presentan y estudian las respuestas de un alumno representativo de cada uno de los grados establecidos en la etapa 2.

4. RESULTADOS

En la tabla 2 se muestran los resultados obtenidos por los 106 alumnos según los dos criterios de análisis: las respuestas correctas están sombreadas y en la cada celda aparece la estrategia utilizada por cada alumno en cada cuestión.

Tabla 2. Resultados según corrección y estrategias usadas

	3º curso			4º curso			5º curso			6º curso		
	C1	C2	C3	C1	C2	C3	C1	C2	C3	C1	C2	C3
1	RD	D	EP	RD	FL	FL	RD	EP	O	FL	FL	FG
2	RD	EP	EP	D	FL	RR	RD	FL	FG	RD	FL	FG
3	RD	EP	O	D	FL	O	RD	EP	EP	RD	FL	FL
4	RD	D	O	RD	EP	EP	RD	FL	FG	FL	FL	FG
5	FL	FL	FL	RD	EP	EP	RD	FL	O	RD	FL	FG
6	EP	EP	EP	RD	FL	FL	RD	FL	FG	RD	FL	FG
7	RD	D	B	EP	EP	EP	RD	FL	FL	RD	FL	FL
8	RD	EP	EP	RD	FL	FL	RD	FL	FL	RD	FL	FG
9	RD	EP	RI	RI	EP	EP	RD	EP	EP	FL	FL	FG
10	EP	EP	B	EP	EP	EP	RD	EP	EP	RD	FL	EP
11	RD	EP	RR	RD	O	EP	RD	EP	EP	RD	FL	FG
12	RD	EP	EP	RD	FL	FG	RD	FL	FG	RD	EP	EP
13	D	D	B	RD	D	O	RD	FL	EP	FL	FL	FG
14	RD	D	EP	RD	D	RI	RD	FL	FG	RD	EP	EP
15	RD	EP	O	RD	EP	EP	RD	EP	EP	RI	EP	RI
16	RD	D	O	RD	O	O	FL	FL	FG	RD	FL	FL
17	RD	EP	EP	RD	EP	RI	RD	O	RI	RD	EP	FG
18	EP	O	O	RD	EP	EP	RD	FL	FG	RD	EP	EP
19	D	D	O	RD	D	RD	RD	FL	FG	RD	FL	FG
20	RD	FL	FL	RD	FL	FG	RD	EP	EP	RD	EP	RI
21	RD	D	B	RD	FL	O	RD	FL	FG	RI	O	RR
22	RD	EP	O	D	EP	B	RD	EP	O	RD	FL	FG
23	RD	D	EP	RD	EP	EP	RD	FL	FL	RD	EP	RI
24	EP	EP	EP	D	D	O	FL	FL	FI	RD	FL	FL
25				RD	O	RR	FL	FL	FL	RD	EP	RI
26				FL	FL	FG	FL	FL	FG	RD	O	O
27				D	EP	EP	RD	FL	FL			
28				RD	D	RI	RD	EP	EP			
	19	2	2	24	9	7	28	18	15	26	16	15

4.1. NIVEL DE ÉXITO

En la tabla 3 se observa que 57% de las respuestas son correctas y que el nivel de éxito incrementa al aumentar el curso y disminuye al aumentar la complejidad de las cuestiones.

Tabla 3. Nivel de éxito

Curso	Alumnos	Cuestión 1	Cuestión 2	Cuestión 3	Total
3º	24	19	2	2	23 (32%)
4º	28	24	9	7	40 (48%)
5º	28	28	18	15	61 (73%)
6º	26	26	16	15	57 (73%)
Total	106	97 (92%)	45 (42%)	39 (37%)	181 (57%)

32% de las respuestas de 3º curso son correctas, 48% de las respuestas de 4º son correctas y en 5º y 6º las respuestas correctas ascienden hasta 73%. Por otra parte, 92% de las respuestas a la generalización cercana son correctas, mientras que en la generalización lejana y en la regla general las respuestas correctas descienden al 45 y 37% respectivamente.

4.2. GRADOS DE DESARROLLO

En el diagrama de flujo de la figura 3 se observa que las tres cuestiones están ordenadas por complejidad, de forma que no hay saltos entre cuestiones. De los 106 alumnos 97 realizaron correctamente la generalización cercana, de ellos 45 realizaron correctamente la generalización lejana y de estos expresaron correctamente la regla general.

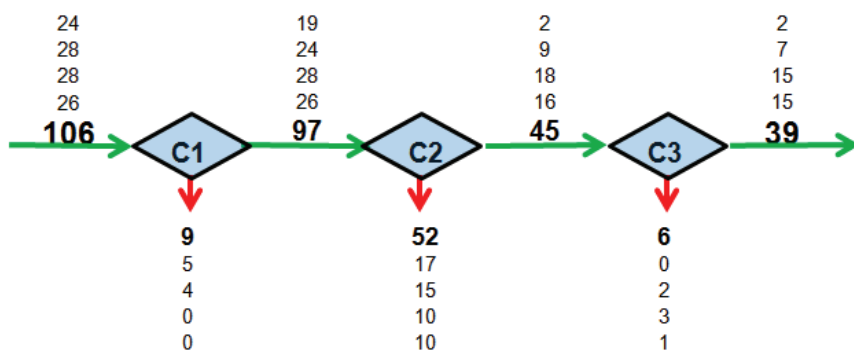


Figura 3. Diagrama de flujo

Todos los estudiantes que expresaron la regla, habían realizado previamente la generalización lejana, y todos los que habían realizado la generalización lejana también habían conseguido la generalización cercana. Esto nos permite establecer cuatro grados o estadios de desarrollo bien diferenciados: en el grado cero estarían los 9 alumnos que no resuelven bien la primera cuestión; en el grado 1, los 52 que solo resuelven la generalización cercana; en el grado 2 los 6 que resuelven bien las dos generalizaciones; y en el grado 3, los 39 que resuelven correctamente las tres cuestiones (tabla 4).

Tabla 4. Nivel de éxito

Curso	Grado 0	Grado 1	Grado 2	Grado 3
3º	5	17	0	2
4º	4	15	2	7
5º	0	10	3	15
6º	0	10	1	15
Total	9 (8%)	52 (49%)	6 (6%)	39 (37%)

De esta manera 92% de los estudiantes son capaces de realizar algún tipo de generalización y 37% son capaces de completar todo el proceso de generalización.

4.3. UTILIZACIÓN DE ESTRATEGIAS

En la tabla 5 se muestran las estrategias usadas por los alumnos de cada curso en cada una de las tres cuestiones y entre paréntesis las respuestas correctas en cada caso.

Tabla 5. Estrategias usadas y niveles de éxito, por cuestiones y cursos

Cuestión	Curso	D	EA			EF		EP	O	B	Total	
			RD	RI	RR	FL	FG					
C1	3º	2 (1)	17 (17)			1 (1)		4 (0)			24 (19)	
	4º	5 (4)	19 (18)	1 (1)		1 (1)		2 (0)			28 (24)	
	5º		24 (24)			4 (4)					28 (28)	
	6º		20 (20)	2 (2)		4 (4)					26 (26)	
	Total	7 (5)	80 (79)	3 (3)		10 (10)		6 (0)			106 (97)	
C2	3º	9 (0)				2 (2)		12 (0)		1 (0)	24 (2)	
	4º	5 (1)				9 (8)		11 (0)		3 (0)	28 (9)	
	5º					18 (18)		9 (0)		1 (0)	28 (18)	
	6º					16 (16)		8 (0)		2 (0)	26 (16)	
	Total	14 (1)				45 (44)		40 (0)		7 (0)	106 (45)	
C3	3º		1 (0)		$\frac{1}{(0)}$	2 (2)		9 (0)		7 (0)	4 (0)	24 (2)
	4º		1 (0)	3 (1)	$\frac{2}{(0)}$	3 (3)	3 (3)	10 (0)	5 (0)	1 (0)	28 (7)	
	5º		1 (0)			6 (5)	10 (10)	8 (0)	3 (0)		28 (15)	
	6º		4 (0)		$\frac{1}{(0)}$	4 (4)	12 (11)	4 (0)	1 (0)		26 (15)	
	Total		1 (0)	9 (1)	$\frac{4}{(0)}$	15 (15)	25 (25)	31 (0)	16 (0)	5 (0)	106 (40)	
Total		21 (6)	81 (79)	12 (4)	$\frac{4}{(0)}$	70 (69)	25 (24)	77 (0)	23 (0)	5 (0)	318 (182)	
			97 (83)				95 (93)					

Las estrategias más usadas han sido las aditivas, en 97 ocasiones; las funcionales, en 95 ocasiones; y las proporcionales, en 77 ocasiones; es decir en 31, 30 y 24% respectivamente. De de las estrategias aditivas, la más usada ha sido el recuento sobre el dibujo y, de las funcionales, la función local. Las estrategias con mayor nivel de éxito han sido funcionales con 98% de éxito y las aditivas con 86%, mientras que, lógicamente, el nivel de éxito de las proporcionales fue nulo.

La estrategia más usada y con mayor éxito en la generalización cercana ha sido el recuento sobre el dibujo usada en 80 ocasiones, un 75% del total, con un nivel de éxito de 99%. En la generalización lejana la estrategia más usada ha sido la funcional local, usada en 45 ocasiones, 42%, del total fue la de mayor éxito con 98%. En la expresión de la regla general la estrategia más usada ha sido la proporcional, que ha sido usada en 31 ocasiones, 29%, seguida de la función global que 25 ocasiones, 24%, y su nivel de éxito fue de 100%.

En la tabla 6 se muestran los resultados por cursos. La estrategia más usada en 3º y 4º curso ha sido la estrategia proporcional, en 25 y 23 ocasiones respectivamente, 35 y 27%; la segunda estrategia más usada, el recuento sobre el dibujo, en 17 y 20 veces, 24% en ambos cursos, y con un nivel de éxito de 100% en 3º y de 90% en 4º. En 5º y 6º curso la estrategia más usada ha sido la función local, en 28 y 24 ocasiones, 33 y 31%, con niveles de éxito de 96% y 100% respectivamente.

Tabla 6. Estrategias usadas y niveles de éxito, por cursos

Curso	D	EA			EF		EP	O	B	Total
		RD	RI	RR	FL	FG				
3º	11 (1)	17 (17)	1 (0)	1 (0)	5 (5)		25 (0)	8 (0)	4 (0)	72 (23)
4º	10 (5)	20 (18)	4 (2)	2 (0)	13 (12)	2(3)	23 (0)	8 (0)	1 (0)	84 (40)
5º		24 (24)	1 (0)		28 (27)	10 (10)	17 (0)	4 (0)		84 (61)
6º		20 (20)	6 (2)	1 (0)	24 (24)	12 (11)	12 (0)	3 (0)		78 (57)
Total	21 (6)	81 (79)	12 (4)	4 (0)	70 (69)	25 (24)	77 (0)	23 (0)	5 (0)	318 (182)

4.4. SECUENCIAS DE ESTRATEGIAS

Los 39 estudiantes del nivel 3, que han conseguido completar el proceso de generalización contestando correctamente las tres cuestiones, siguieron 5 secuencias de trayectorias distintas (tabla 7).

Tabla 7. Secuencias de estrategias con éxito

Secuencias			Nº
RD	FL	FG	18
RD	FL	FL	13
FL	FL	FG	5
FL	FL	FL	2
RD	D	RI	1
			39

La secuencia RD-FL-FG, es decir, recuento sobre dibujo en la generalización cercana, función local en la generalización lejana y función global en la regla general, ha sido usada por 18 de los 39 alumnos que han superado todo el proceso de generalización.

4.5. ESTUDIO DE CASOS

En el estudio de casos se ha seleccionado un estudiante de cada uno de los cuatro grados de desarrollo establecidos: A4-4º, A15-3º, A13-5º y A9-6º (AlumnoNúmero-Curso).

El alumno 4 de 4º curso es uno de los 9 alumnos que no han sabido realizar correctamente ninguna cuestión, por lo que pertenece al grado 0. En la generalización cercana utiliza el recuento sobre el dibujo, pero no respeta la estructura espacial al dibujar las mesas separadas, ni la estructura numérica al dibujar solo 7 mesas. El alumno arrastra el error de dibujar las mesas separadas a las otras dos cuestiones que resuelve mal utilizando en ambos casos una estrategia proporcional, multiplicando por 4 el número de mesas (figura 4).

Grado	Alumno	Cuestión	Respuesta	Estrategia
1	A4-4º	1		Estrategia aditiva Recuento sobre dibujo
		2	$\begin{array}{r} 100 \\ \times 4 \\ \hline 400 \end{array}$ se pueden sentar 400	Estrategia proporcional
		3	se multiplica por 4	Estrategia proporcional

Figura 4. Respuestas alumno A4-4º, del grado 0

El alumno 15 de 3º curso pertenece al grado 1, pues solo realiza correctamente la generalización cercana. En la generalización cercana dibuja las mesas y cuenta correctamente las sillas, pero en la generalización lejana utiliza erróneamente la estrategia proporcional, dividiendo entre 2 el número de mesas y como regla general dice que “se pueden sentar niños”, que, aunque siendo verdad, no sirve para hallar el número de sillas (figura 5).

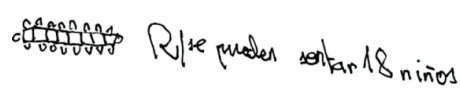
Grado	Alumno	Cuestión	Respuesta	Estrategia
2	A15-3º	1		Estrategia aditiva Recuento sobre dibujo
		2	$\begin{array}{r} 100 \\ \div 2 \\ \hline 50 \end{array}$ R/50 niños se pueden sentar	Estrategia proporcional
		3	Se pueden sentar niños	Otra

Figura 5. Respuestas alumno A15-3º, del grado 1

El alumno 13 de 5º curso resuelve bien las dos primeras cuestiones: la generalización cercana con un recuento sobre el dibujo y la generalización lejana usando una función local, $f(100) = 100 \cdot 2 + 2$, al multiplicar las 100 mesas por 2 y sumar después las dos mesas de los extremos.

Sin embargo, no es capaz de expresar bien la regla general pues aunque multiplica por 2 el número de mesas, se le olvida sumar las dos de los extremos (figura 6).

Grado	Alumno	Cuestión	Respuesta	Estrategia
3	A13-5º	1	 Se pueden sentarse 18 niños	Estrategia aditiva Recuento sobre dibujo
		2	$\begin{array}{r} 100 \\ \times 2 \\ \hline 200 \end{array} \quad \begin{array}{r} 200 \\ + 2 \\ \hline 202 \end{array} \quad 202 \text{ niños se pueden sentar}$	Estrategia funcional Función local
		3	Alas mesas que tienes multiplicas por 2 para ver cuantos niños se pueden sentarse	Estrategia proporcional

Figura 6. Respuestas alumno A13-5º, del grado 2

El alumno 9 de 6º curso pertenece al grado 3, pues es capaz de completar todo el proceso de generalización. Las respuestas son muy parecidas al alumno anterior, pero ahora sí expresa bien la regla general, utilizando una función global, $f(n) = 2n + 2$, de forma verbal al escribir "primero multiplicamos por 2 el número de mesas y después lo sumamos más 2" (figura 7).

Grado	Alumno	Cuestión	Respuesta	Estrategia
4		1	 18 niños	Estrategia aditiva Recuento sobre dibujo
		2	$\begin{array}{r} 100 \\ \times 2 \\ \hline 200 \end{array} \quad \begin{array}{r} 200 \\ + 2 \\ \hline 202 \end{array} \quad 202 \text{ niños}$	Estrategia funcional Función local
		3	Primero multiplicamos por 2 el numero de mesas i despues lo sumamos mas 2	Estrategia funcional Función global

Figura 7. Respuestas alumno A13-5º, del grado 2

5. CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo fue analizar las respuestas de alumnos de primaria a un problema de generalización de patrones, estudiando los niveles de éxito, los grados de desarrollo y las estrategias usadas por 106 alumnos de Educación Primaria.

A partir del análisis de resultados se han extraído las siguientes conclusiones:

- Los alumnos responden correctamente a más de la mitad de las cuestiones y el éxito aumenta al aumentar el curso y disminuye al aumentar la complejidad de las cuestiones.
- Casi todos los alumnos son capaces de realizar alguna tarea de generalización y más de la mitad de los alumnos de 5º y 6º de primaria son capaces de completar el proceso de generalización de patrones, lo que confirma investigaciones anteriores (Mason, 1999; Socas, 2011; Carraher *et al.*, 2003).
- Las cuestiones de generalización de patrones están interrelacionadas y jerarquizadas, de tal forma que para expresar la regla general se requiere realizar previamente la generalización lejana y para realizar la generalización lejana se requiere realizar previamente la generalización cercana identificando el patrón de crecimiento (Radford, 2008).
- La jerarquización de las tres cuestiones de la generalización de patrones permite establecer fácilmente grados de desarrollo que facultan definir los estadios de una trayectoria de aprendizaje en el proceso de generalización de patrones (Zapatera, 2018).
- Las estrategias más usadas en los cursos inferiores de Educación Primaria son las aditivas, especialmente el recuento sobre el dibujo, y en los cursos superiores las funcionales, especialmente la función local.
- Las estrategias más usadas y con mayor éxito en la generalización cercana son las aditivas, especialmente, el recuento sobre el dibujo, y en la generalización lejana y en la regla general, son las funcionales, especialmente la función local en la generalización lejana y la global en regla general.
- Las estrategias con un mayor nivel de éxito son las estrategias funcionales con 98%, seguidas de las aditivas con un 86%.
- La secuencia RD-FL-FG, es decir, recuento sobre dibujo en la generalización cercana, función local en la generalización lejana y función global en la regla general es la secuencia que proporciona mayor éxito en el proceso de generalización.
- Un aspecto importante en el desarrollo del proceso de generalización la flexibilidad, entendida como habilidad para modificar la estrategia de

resolución de un problema cuando se modifica la demanda de la tarea (Krems, 1995) es un aspecto importante en el desarrollo de la generalización de patrones (Callejo y Zapatera, 2014).

6. REFERENCIAS

- Brizuela, B. M., y Schliemann, A. D. (2003). Fourth Graders Solving Equations. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 137-144.
- Callejo, M. L., y Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28, 64-88. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04>
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.
- Carraher, D. W., Martinez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM. Mathematics Education*, 40(1), 3-22. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7>
- Carraher, D., Schliemann, A. D., y Brizuela, B. (2003). Treating operations as functions. En DW Carraher, R. Nemirovsky, y C. DiMattia, C. (eds.) *Media and Meaning*. CD-ROM issue of Monographs for the Journal of Research in Mathematics Education.
- Dreyfus, T (1991). Advanced mathematical thinking process. *Mathematics Education Library*, 11, 25-41.
- Harel G. y Tall D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 11(1), 38-42.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. Romberg (eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Erlbaum.
- Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.
- Krems, J. F. (1995). Cognitive flexibility and complex problem solving. *Complex problem solving: The European perspective*, 201-218.
- Lannin, J., Barker, D. y Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, 18(3), 3-28. <https://doi.org/10.1007/BF03217440>
- Mason, J. (1999). La incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: las secuencias de Tunja. *Revista EMA* 4(3), 232-246.
- Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. MEC-Labor.

- Mason, J., Graham, A., y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. Paul Chapman Educational Publishing.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- Piaget, J. (1977). *Recherches sur l'abstraction réfléchissante* (vol. 1). Presses Universitaires de France.
- Pólya, G. (1954). *Patterns of Plausible Inference*. Princeton University Press.
- Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, A. Méndez (eds.). *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 2-21). PME.
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM)*, 40(1), 83-96. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0061-0>
- Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 15-38). Horsori.
- Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S., y Peled, E. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman, G. Dougherty, y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME and the 25th PME-NA joined conference* (vol. 4, pp. 127-134). University of Hawaii.
- Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de las investigaciones. *Números, Revista de Didáctica de las matemáticas*, 77, 5-34.
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164. <https://doi.org/10.1007/BF00579460>
- Zapatera, A. y Callejo, M.L. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). SEIEM.
- Zapatera, A. (2018). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 21(1), 87-114. <https://dx.doi.org/10.12802/relime.18.2114>

ALBERTO ZAPATERA LINARES

Dirección: Departamento de Ciencias de la Educación, Universidad Cardenal Herrera CEU.
C/Carmelitas 1, 03203 Elche (España)
alberto.zapatera@uchceu.es

El MOOC, un entorno virtual para la resolución de problemas matemáticos

MOOC, a virtual environment for mathematical problem solving

Martha Leticia García Rodríguez,¹
William Enrique Poveda Fernández²

Resumen: Se analiza la forma en que los participantes de un Curso en Línea Masivo y Abierto (MOOC) llevan a cabo los procesos de resolución de problemas, cuando utilizan GeoGebra e interaccionan en foros de discusión. El proceso se llevó a cabo de acuerdo con la construcción de representaciones dinámicas de los problemas; la exploración de diferentes propiedades y relaciones entre los elementos que conforman la representación; y, el uso de estrategias como el arrastre de objetos, la cuantificación de sus atributos y la identificación del lugar geométrico. Se utilizó el método de la etnografía virtual para analizar la comunicación asincrónica entre los participantes en los foros. El proceso de resolución de problemas inició una conversación, es decir, una red de interacciones que condujo al uso de nuevas estrategias de solución y a la construcción de nuevo conocimiento, en donde, los participantes pudieron avanzar a su propio ritmo y romper con limitaciones espaciales y temporales. Además, las interacciones en los foros se llevaron a cabo entre personas con actividades profesionales o con grado académico diferente.

Fecha de recepción: 21 de septiembre de 2020. **Fecha de aceptación:** 11 de febrero de 2022.

¹ Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, Programa de Matemática Educativa, mlgarcia@ipn.mx, orcid.org/0000-0003-2435-1334.

² Departamento de Educación Matemática, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, william.poveda@ucr.ac.cr, orcid.org/0000-0001-5392-0036.

Palabras clave: *MOOC, Resolución de Problemas, Tecnologías digitales.*

Abstract: This study aims to analyze the way participants of a Massive Open Online Course (MOOC) accomplish the processes of problem-solving when they use GeoGebra and interacts in forum discussions. The processes were analyzed according to: the construction of dynamic representations of the problems; the exploration of different properties and relationships between its elements; and, the use of strategies such as dragging objects, quantification of its attributes and locus identification. Virtual ethnography was the used method to analyze the asynchronous communication between participants in the forums. The problem-solving process started a conversation, that is, a network of interactions that led to the use of new solution strategies and the construction of new knowledge, where the participants were able to advance at their own pace and to break with geographical and temporary limitations. The interactions in the forums took place between people with different professional activities or academic degrees.

Keywords: *MOOC, Problem-Solving, Digital Technologies*

1. INTRODUCCIÓN

Existen diversos términos para referirse a plataformas digitales con funciones específicas relacionadas con la gestión de los procesos de aprendizaje. García y López (2011) caracterizan los entornos virtuales de aprendizaje como espacios en los que tienen lugar procesos intencionales de aprendizaje, el término “entorno virtual de aprendizaje” se aplica a las plataformas digitales que las instituciones utilizan para desarrollar su oferta de formación virtual.

Diversas universidades han creado entornos virtuales de aprendizaje llamados cursos en línea masivos y abiertos (MOOC, por sus siglas en inglés) para ofrecer a sus estudiantes, y en general a cualquier persona, espacios de estudio e interacción con otros participantes, para el desarrollo de temas diversos. El primer MOOC fue un curso abierto en un tema de teoría educativa, se desarrolló en la Universidad de Prince Edward Island y se ofreció de forma gratuita en 2008, este curso rápidamente generó una demanda que se tradujo en cientos de personas registradas y en el interés de conocer lo que significaría que miles de personas hablaran sobre el mismo tema en la web abierta (McAuley *et al.*, 2010).

En la actualidad, los MOOCs siguen experimentando un aumento en su oferta y demanda. Class Central –motor de búsqueda y revisión de sitios que ofrecen MOOCs– publicó un reporte de la demanda que han tenido hasta el año 2021; 220 millones de estudiantes sin considerar a los de China, y se han agregado hasta ese año, más de 3100 cursos (Shah, 2021).

Un MOOC se caracteriza por ser un curso en línea que permite a una gran cantidad de individuos con diferentes niveles de estudios, edad, conocimientos y ubicación geográfica, un registro gratuito y abierto en los que los interesados auto gestionan su aprendizaje de acuerdo con sus propios tiempos, objetivos, conocimientos, habilidades e intereses comunes. Los MOOCs se diseñan y ofertan con la participación de instituciones educativas de prestigio y, en un gran número de ellos, no se solicita ningún requisito ni experiencia previa con los temas del curso, se imparten en un periodo de tiempo predefinido y para acceder a ellos, solo se requiere contar con conexión a Internet. Las distribuciones de los cursos por áreas de estudio muestran una fuerte orientación a temas de negocios y de tecnología con 20.9% y 20.2% del total de cursos, de acuerdo con la información publicada en 2021 (Shah, 2021).

La oferta de MOOCs relacionados con las matemáticas escolares es muy baja, Velasco y Gómez (2019) reportan que, en noviembre de 2019, el resultado de una búsqueda en el portal “MOOC List” con el término “mathematics”, arrojó una lista de 12 cursos, de los cuales solamente dos se referían a matemáticas escolares (p. 127). Al realizar una búsqueda en Class Central con el término “mathematics” se encontró que hasta diciembre de 2021 se han diseñado 1471 cursos, de ellos, 116 han sido de educación y enseñanza y 4 de ellos en progreso hasta esta fecha (Shah, 2021).

En relación con los usuarios de los MOOC, existen investigaciones que reportan que, en los países desarrollados, durante 2013, alrededor de 83% de los participantes contaban con uno o más títulos. Para 2014 esta situación cambió, ya que 33% de los inscritos, informaron tener a lo más una educación de bachillerato. Más allá del porcentaje de participantes y su nivel educativo, resulta relevante, como lo menciona Bras (2016), considerar que las personas se inscriben en un MOOC para satisfacer distintas necesidades, como las de un aspirante o de un egresado de una universidad que busca conocimientos sobre temas específicos, las de desarrollo profesional o las de una persona que no siguió estudios universitarios y que busca una forma de prepararse.

En el ámbito educativo, los MOOCs han brindado un nuevo método para el desarrollo profesional docente, en ellos, los profesores pueden acceder a

cursos de cualquier tema y en diferentes lugares y momentos. Además, pueden aprender de acuerdo con sus necesidades individuales y formar parte de una comunidad de aprendizaje con participantes de todo el mundo (Ji y Cao, 2016). Aldon *et al.* (2017) mencionan el caso particular de Italia y Francia, en donde se utilizaron MOOCs para la capacitación de profesores en el área de las tecnologías digitales.

Borba *et al.* (2016) documentan que los MOOCs, como un entorno virtual de aprendizaje, también han sido utilizados en la formación permanente de profesores de matemática. Exponen dos casos, el primero un MOOC para capacitar a profesores y estudiantes en los nuevos Common Core State Standards, en Estados Unidos; el segundo un proyecto de formación de profesores para la implementación de un nuevo currículo en Costa Rica. En Colombia, Velasco y Gómez (2019) mencionan el uso de MOOCs como un medio para ofrecer a profesores de primaria diversas herramientas conceptuales y metodológicas en aras de que las puedan aplicar con sus estudiantes y generar mejores oportunidades que les permitan desarrollar competencias matemáticas.

Por otra parte, Flotts *et al.* (2016) recomiendan propuestas didácticas para los docentes sobre los conocimientos, destrezas, capacidades, habilidades, principios, valores y acciones necesarias para que los estudiantes de la región de América Latina desarrollen procesos cognitivos que les permitan hacer frente a situaciones diversas de su entorno, como la toma de decisiones utilizando la información disponible; la resolución de problemas simples utilizando información matemática explícita en un enunciado y estableciendo relaciones directas necesarias para llegar a la solución y; la resolución de problemas complejos, en los que se requiere la reorganización de la información matemática presentada en el enunciado y el establecimiento de relaciones no explícitas para llegar a la solución.

En los Common Core State Standards (National Governors Association, 2020) se identifica un conjunto de estándares académicos propuestos para matemáticas, resumen lo que un educando debe saber y puede hacer al final de cada grado, fueron propuestos para garantizar que todos los estudiantes se gradúen del bachillerato con las habilidades y conocimientos necesarios para cursar con éxito sus estudios universitarios. El primero de ellos se refiere a un estándar de proceso de resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, representación y conexiones. Se considera que un estudiante que es competente en matemáticas explora el significado de un problema y piensa en una forma de iniciar el proceso de resolución, analiza los datos y las restricciones del problema para establecer conjeturas y planificar una estrategia, considera problemas similares eliminando

alguna restricción para comprender mejor la solución, cuenta con elementos para evaluar su progreso o cambiar la ruta si lo considera necesario.

Schoenfeld (1985) y Santos-Trigo (2014) muestran coincidencia en que el uso de resolución de problemas es un medio donde intervienen los procesos de: explorar diferentes representaciones, buscar patrones, invariantes y relaciones entre objetos matemáticos, presentar argumentos, comunicar resultados, buscar diversos métodos de solución, plantear preguntas y formular nuevos problemas.

Las aportaciones anteriores ponen de manifiesto que los MOOCs pueden brindar a sus participantes experiencias de aprendizaje sobre distintos contenidos matemáticos y conocimientos pedagógicos para desarrollar competencias matemáticas. En este sentido, los foros virtuales se convierten en una herramienta de los MOOCs para favorecer el aprendizaje a través del intercambio de ideas entre los participantes (Ramírez *et al.*, 2020).

Se identifica a la resolución de problemas como una habilidad cognitiva que permite a un sujeto hacer frente a situaciones diversas de su entorno (United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, 2015) y como un estándar de proceso que contribuye para que un estudiante sea competente en matemáticas (National Governors Association, 2020). Sin embargo, al ser los MOOCs cursos masivos, los participantes no necesariamente reciben e interpretan la información contenida en los cursos de la misma forma, por lo que ha surgido una línea de investigación en la que se analizan aspectos del aprendizaje de los participantes en los MOOCs (Liyanagunawardena *et al.*, 2013).

Es en esta línea en la que se inscribe la investigación que aquí se reporta y para la que se diseñó un MOOC basado en la resolución de problemas matemáticos y el uso de tecnologías digitales que tuvo como propósito generar un entorno virtual masivo y asincrónico en el que los participantes relacionaran aprender matemáticas con la resolución de problemas. La pregunta que guio la investigación fue: ¿en qué forma los participantes de un MOOC llevan a cabo los procesos de resolución de problemas utilizando GeoGebra y participando en foros de discusión?

El artículo consta de cinco secciones, la primera corresponde a una introducción al tema, en la segunda se presenta el marco conceptual en el que se incluyen elementos teóricos relacionados con la resolución de problemas y el uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD); en la tercera se describen los métodos y procedimientos que se emplearon para llevar a cabo la investigación; en la cuarta se presentan el análisis de datos y la discusión de resultados y la última sección corresponde a las conclusiones.

2. MARCO CONCEPTUAL

Un entorno virtual MOOC basado en resolución de problemas matemáticos y uso de tecnologías digitales, impone a sus diseñadores el desafío de motivar a los participantes para compartir sus ideas y colaborar en los foros durante la resolución de los problemas propuestos. Los foros virtuales se consideran una herramienta para promover el aprendizaje en forma colaborativa y favorecer la adquisición y desarrollo de habilidades y conocimientos (Ramírez *et al.*, 2020; Jyothi *et al.*, 2012).

En un MOOC, está documentado que los usuarios prefieren utilizar el foro propio de la plataforma donde se construyó el curso, antes que otras herramientas de comunicación externas como redes sociales, blogs o chats para plantear sus ideas (Alagic y Alagic, 2013; Breslow *et al.*, 2013).

Quinton y Allen (2014) definen el foro como un sitio de discusión en línea asincrónico, es decir, un espacio donde las personas tienen la oportunidad de escribir sus ideas o comentarios alrededor de un tema específico. Una ventaja de la comunicación asincrónica es que los participantes cuentan con mayor tiempo para reflexionar en comparación con el que brinda un medio sincrónico. Así, pueden plantear preguntas e interactuar entre ellos en la búsqueda de respuestas y estructurar y organizar sus ideas o razonamientos (Ramírez *et al.*, 2020; Llinares y Valls, 2009).

Cuando las personas acceden a un foro asincrónico llevan a cabo dos acciones principales: leer y escribir. De esta forma, pueden adoptar diferentes comportamientos en términos de estas dos acciones, definiendo distintos perfiles; en un primer grupo están aquellos que preguntan, hacen aclaraciones a otros, dan sus interpretaciones, discuten los temas, entre otros y; en un segundo grupo aquellos que se limitan a dar su respuesta o leer las participaciones o discusiones de otros (Rau *et al.*, 2008; Rabbany *et al.*, 2011).

Cuando una persona escribe sus ideas en relación con un tema específico o expone su razonamiento matemático en el foro, se inicia un ciclo al cual Ernest (2016) denomina conversación. En esta, otros participantes aceptan, modifican o niegan la idea original o bien, proponen otras a partir del comentario inicial.

El beneficio de utilizar el foro en un MOOC radica en que los razonamientos iniciales podrían ser refinados y transformados. En este proceso, los participantes contribuyen con sus opiniones o pensamientos y analizan las contribuciones de los demás (Quinton y Allen, 2014).

Según las reflexiones anteriores, los procesos asociados con la comprensión de los problemas y sus posibles soluciones se pueden favorecer a través de la

comunicación y la discusión con los demás compañeros, en las conversaciones que se dan en los foros. En el caso del MOOC que aquí se reporta, sus diseñadores tuvieron, como lo mencionan Sergis *et al.* (2017), la oportunidad de investigar en los foros sobre el proceso de aprendizaje de los participantes.

De esta forma, los foros resultan importantes en el proceso de comunicación de ideas y de resolución de problemas y a la vez rompen con ideas tradicionales que se tienen sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Esto es, concebir que hacer matemáticas significa seguir las reglas dispuestas por el profesor; conocer matemáticas está asociado con recordar y aplicar la regla correcta; y, la verdad matemática se determina solo cuando la respuesta a una pregunta es ratificada por el maestro (Schoenfeld, 1985). En contraposición, Schoenfeld (1992) argumenta que hacer matemáticas debe verse como un espacio que genere oportunidades de experimentación y comunicación en donde los estudiantes, con ayuda de sus profesores, desarrollen nuevos conocimientos y estrategias para resolver diversos problemas.

Aprender matemáticas vía resolución de problemas enfatiza que “la comprensión o el desarrollo de ideas matemáticas conllevan un proceso de reflexión donde el estudiante, constantemente, refina o transforma sus ideas y formas de pensar como resultado de participar activamente en una comunidad de práctica o aprendizaje” (Santos-Trigo, 2014, p. 21).

Moreno-Armella y Santos-Trigo (2016) argumentan que, durante el proceso de resolución de problemas matemáticos, el uso de tecnologías de la información y la comunicación y las tecnologías específicas en matemática, como un SGD, pueden llegar a convertirse en herramientas que favorecen y fomentan la curiosidad de los estudiantes hacia la comprensión de conceptos y relaciones matemáticas.

GeoGebra es un SGD que permite explorar diferentes propiedades y relaciones entre objetos matemáticos, factores que pueden potenciar los procesos de resolución de problemas que propone Schoenfeld (1992). La persona que resuelve un problema, desde un inicio, tiene el reto de representarlo en GeoGebra en términos de las propiedades de los objetos involucrados en el mismo, lo que implica el uso de conocimientos previos o la investigación de los conceptos asociados con los objetos matemáticos.

Diversos autores definen un SGD en función del arrastre (Arzarello *et al.*, 2002; Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010). Al arrastrar un objeto de una figura es necesario que se conserven sus propiedades según fue construida, esto se denomina una representación dinámica, por ejemplo, al construir un cuadrado y al arrastrar uno de sus vértices, la figura resultante debe seguir siendo un

cuadrado (Geeraerts *et al.*, 2014; Leung, 2015). En la figura 1 se muestra un cuadrado de lado 3 y área 9, al arrastrar su vértice B , la nueva figura geométrica conserva las propiedades del cuadrado. La exploración se basa en una familia de cuadrados y no solo en un cuadrado de lado n , ya que, al arrastrar A o B , se obtienen diferentes cuadrados.

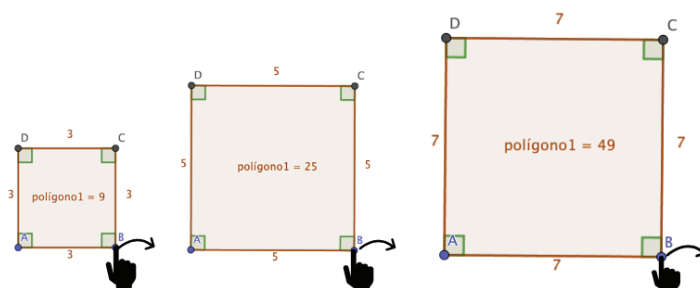


Figura 1. Arrastre de un objeto dentro de una representación dinámica.

Elaborado a partir de Geeraerts *et al.* (2014)

El arrastre de un punto se convierte en un elemento importante durante la exploración del problema, ya que, mediante la cuantificación de los atributos de los objetos matemáticos, por ejemplo, los valores de áreas, perímetros, segmentos, ángulos, pendientes, etc., es posible observar patrones o invariantes de los elementos que conforman la figura. En la figura 1, al arrastrar el punto B , se observa que GeoGebra actualiza las medidas de los lados de los cuadrados y sus áreas.

Así, una estrategia asociada con el uso de GeoGebra es la cuantificación de atributos de un objeto, que, junto con el arrastre, permiten observar variaciones instantáneas en las propiedades de los objetos matemáticos de la figura, y determinar invariantes que orienten la formulación de conjeturas hacia la solución del problema (Fahlgren y Brunström, 2014).

Otra estrategia consiste en trazar el rastro que deja un punto cuando se mueve otro elemento de la representación dinámica, lo que revela el comportamiento de los objetos matemáticos involucrados en el problema (Poveda, 2020). Por ejemplo, en la figura 2 se muestra el $\triangle ABC$ isósceles, el punto C está sobre la recta $\vec{r}$ que es mediatriz del lado $\overline{AB}$, $\vec{q}$ es mediatriz de $\overline{BC}$ y $\vec{p}$ es perpendicular a $\vec{r}$ y pasa por C . Al arrastrar el punto C se puede observar el rastro que deja D (punto de intersección de $\vec{p}$ y $\vec{q}$). Esto resulta importante en el proceso de exploración y formulación de conjeturas hacia la solución. En este caso, una conjetura basada

en argumentos visuales (rastro de D) y empíricos (ángulos rectos) es que el rastro que deja el punto D cuando se mueve C , es una parábola. Durante el proceso de resolución de problemas, la validación de conjeturas debe transitar desde el uso de argumentos empíricos o visuales hasta la presentación de una prueba o demostración matemática (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

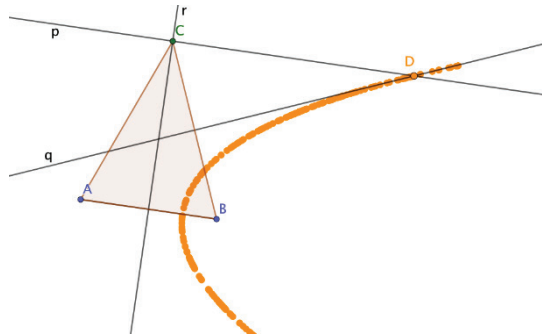


Figura 2. Rastro del punto D cuando se mueve C en la configuración dinámica.

Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011) presentan un marco en el que se organiza en cuatro etapas, el proceso que siguen las personas cuando resuelven un problema utilizando un SGD. La primera es la *comprensión del problema*, aquí la persona debe identificar las propiedades matemáticas de los objetos involucrados, lo cual es la base para crear una representación dinámica.

La segunda es la *exploración del problema*, donde la representación dinámica se convierte en un medio que permite visualizar el comportamiento de objetos y sus propiedades al arrastrar algunos elementos y efectuar exploraciones que pueden conducir a la formulación de conjeturas que pueden justificarse mediante argumentos visuales (gráficas) o empíricos (datos numéricos, tablas en la hoja de cálculo) entre otros.

La tercera se refiere a los *diferentes acercamientos para la solución del problema*, la idea central es el uso de diversas estrategias asociadas con el SGD que conduzcan a la solución. La cuarta es la *integración*, aquí se relacionan diferentes soluciones del problema con sus justificaciones. Esta etapa enfatiza la importancia de contrastar diferentes argumentos utilizados en la justificación de la solución como un medio para desarrollar conocimiento matemático.

3. EL MOOC. CONSTRUCCIÓN DE MODELOS DINÁMICOS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

El MOOC en el que se basa este estudio se implementó en la plataforma Open edx, que es parte de MéxicoX, de la Secretaría de Educación Pública de México. El objetivo fue generar un entorno virtual en el que se llevaran a cabo procesos de resolución de problemas utilizando GeoGebra y participando en foros de discusión. Los procesos de resolución de problemas analizados corresponden a los mencionados por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011).

El curso constó de cinco actividades, cada una incluyó: (1) un problema; (2) videos como una guía para que los participantes construyeran su propia representación dinámica del problema; (3) vínculos a la plataforma KhanAcademy para la consulta de conceptos o relaciones matemáticas; (4) Applets de GeoGebra; (5) dos cuestionarios; y, (6) al menos un foro.

La duración de cada actividad fue de una semana, y los estudiantes pudieron revisar o trabajar en las actividades de las semanas anteriores, la tabla 3.1 incluye las actividades y los objetivos de cada una.

Tabla 3.1. Actividades del MOOC

Actividad	Objetivos
1. Mediatriz, altura y mediana de un triángulo.	i) Construir las rectas notables del triángulo y hacer explícitos los conceptos y propiedades matemáticas de una cada. ii) Mostrar los "comandos" de GeoGebra para construir las rectas notables del triángulo.
2. Construcción de una familia de triángulos rectángulos.	i) Mostrar la estrategia del movimiento controlado y rastro de un objeto para observar invariantes en el comportamiento de otros elementos.
3. Construcción de la recta tangente a una circunferencia que pasa por un punto que no pertenece a esta.	i) Relajar las condiciones iniciales del problema como una estrategia que se potencia con el uso de GeoGebra.
4. Dado $\triangle ABC$, determinar el área del triángulo cuyos vértices son el baricentro, el ortocentro y el circuncentro de $\triangle ABC$	i) Construir y explorar una representación dinámica de un triángulo, su circuncentro, ortocentro y baricentro. ii) Formular conjeturas y, justificar su validez.
5. De todos los rectángulos que tienen un perímetro fijo, determinar las dimensiones del que tiene área máxima.	i) Relacionar diversos conceptos en un problema tradicional de variación. ii) Mostrar la importancia de la comprensión de conceptos sin recurrir a la construcción de un modelo algebraico.

Fuente: Elaboración propia.

4. MÉTODOS Y PROCEDIMIENTOS DE LA INVESTIGACIÓN

Dado que el objetivo de la investigación fue analizar el modo en que los participantes del MOOC llevan a cabo, mediante un foro, los procesos de resolución de problemas, se consideró que el método de la etnografía virtual era el más apropiado, debido a que se orienta al estudio de comunidades virtuales en las que se establecen formas de comunicación tanto sincrónicas como asincrónicas, mediante correo electrónico, wikis, redes sociales, redes de colaboración o foros así como al análisis de las relaciones interpersonales en las dimensiones sociales, afectivas y cognitivas (Ruiz y Aguirre, 2015). En la investigación que se reporta se estudió desde el dominio cognitivo, la comunicación asincrónica en los foros entre los participantes del MOOC, para determinar el qué, cómo, quién y cuándo de lo que acontece en torno a la resolución de los problemas.

La recolección de datos se llevó a cabo en los foros mediante observación no participante, se observaron los procesos de resolución: comprensión y exploración del problema, propuestas de diferentes acercamientos hacia la solución del problema e integración que fueron realizados por los participantes. La unidad de análisis de esta investigación son los procesos de resolución de problemas desarrollados por los estudiantes; la unidad de observación, las conversaciones entre los participantes en los foros en cada una de las actividades del curso.

PARTICIPANTES

En el MOOC se inscribieron 1106 personas, y en este documento se reporta la participación de los 88 que compartieron sus ideas y discutieron las de otros al menos una vez en cada uno de los seis foros de las actividades 4 y 5. La edad de estas 88 personas osciló entre 16 y 67 años y en su mayoría eran de Chile, Colombia, Costa Rica y México. Una encuesta realizada al final del MOOC permitió conocer el grado académico y la profesión de estos 88 participantes (tabla 4.1).

Tabla 4.1. Participantes en los foros de las actividades 4 y 5

Nivel académico	Cantidad	Actividad profesional
Bachillerato	8	Estudiantes de bachillerato
Licenciatura	75	68 profesores de matemática de bachillerato 7 no proporcionaron información
Maestría	3	2 son profesores universitarios 1 no proporcionó información
Doctorado	2	No proporcionaron información
Total	88	

Fuente: Encuesta realizada al finalizar el curso.

Durante el curso los participantes revisaron las actividades a realizar antes de escribir la propia en los foros. Las indicaciones para la participación en los foros fueron: leer, analizar y comentar las respuestas propuestas por otras personas, excepto la del primer participante, antes de plantear las propias. Lo anterior con el propósito de generar conversaciones entre los participantes y evitar la repetición de ideas o argumentos matemáticos sin aportar a lo mencionado en participaciones previas.

5. ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En este documento se presenta el análisis que corresponde a las actividades 4 y 5. El análisis de datos se realizó en tres etapas: i) reducción de datos, ii) organización y presentación de datos, y iii) elaboración de las conclusiones (Miles y Huberman, 1994). Para las dos primeras, se transcribieron las conversaciones y se enumeraron las participaciones del 1 al 524 (524 es el total de participaciones en los 6 foros durante las actividades 4 y 5), se utilizó la notación detallada en el Anexo 1. Cada conversación se redujo a, lo que se denominó un “extracto”, en el que se identificaron y analizaron los procesos de resolución de los problemas incluidos en las actividades 4 y 5, que fueron realizados por la mayoría de los participantes, y que se consideraron relevantes por la evidencia que proporcionaron relacionada con los objetivos de esta investigación. Cada extracto se organizó en tablas, el número que aparece en el lado izquierdo de cada tabla corresponde al orden de participación, así, 01 corresponde al comentario

realizado en la primera participación; también se incluye el día y la hora (tiempo de la Ciudad de México) de tal participación. En este documento se enumeraron los participantes que intervinieron en cada extracto, reiniciando la numeración en cada tabla, por ejemplo, participante 1, en la tabla 1 corresponde a quien brindó la primera evidencia que se reporta, el participante 1 en la tabla 2 es quien brindó la primera evidencia en el segundo extracto.

5.1. ACTIVIDAD 4 DEL MOOC. ÁREA DE UN TRIÁNGULO

Los participantes, previamente, habían trabajado en la construcción y revisión de propiedades de la mediana, la altura y la mediatriz de un triángulo. En esta actividad se presentó el enunciado del problema: dado $\triangle ABC$, determinar el área del triángulo cuyos vértices son el baricentro, el ortocentro y el circuncentro de $\triangle ABC$.

Extracto 1. Los participantes inician con la exploración del problema

Los participantes construyeron una representación dinámica del problema y la compartieron en el foro, durante la semana número cinco en que se implementó el curso. En la tabla 5.1 se presenta el primer extracto de conversación en el que se hace referencia al comando medición de áreas de GeoGebra y que permitió asociar el área de $\triangle GHO$ con cero, lo que generó una reflexión y discusión relacionada con las propiedades del triángulo; en la primera columna se presenta el número de intervención, el día y la hora en horario de la Ciudad de México (CDMX) en que estas se efectuaron.

Tabla 5.1. Una primera aproximación al problema

Intervención	Proceso de la resolución del problema	Evidencias de los participantes en el foro
03 Día 1 de la semana 5 07:31 (Hora CDMX)	Comprensión del problema: Realizan una construcción geométrica que modela el problema.	Participante 1: [...] construí un triángulo ABC y tracé los puntos G , H y O , [estos puntos corresponden al circuncentro, baricentro y ortocentro] al construir el ΔGHO se obtiene que su área es cero [...]. No entiendo por qué [el participante comparte su construcción en GeoGebra]
05 Día 1 08:02	Exploración 1 del problema: - La representación dinámica se convierte en un medio que permite visualizar el comportamiento de objetos y sus propiedades - Formulación de una conjetura	Participante 2: Un triángulo no puede tener área cero [...] si fuera así no existe el triángulo
18 Día 1 20:25		Participante 3: Al construir el ΔGHO en GeoGebra y obtener que su área es 0 significa que no es posible hacer tal construcción, noten que los puntos G , H y O son colineales [el participante comparte su construcción en GeoGebra]
36 Día 3 05:36		Participante 4: [...] al mover los vértices del triángulo de tal manera que sea equilátero, observo el caso en que los tres puntos son el mismo [...]
37 Día 3 06:00		Participante 5: [...] tienes razón [nombra al participante 4], los tres puntos son el mismo si es triángulo equilátero y también isósceles [...]

Figura 5.1. Captura de pantalla del archivo GeoGebra compartido por el participante que hizo el comentario 18

38 Día 3 10:59	Diferentes acercamientos hacia la solución del problema: El uso de GeoGebra y otros recursos como Wikipedia permiten justificar o descartar la conjetura	Participante 6: Es incorrecto lo que mencionas del triángulo isósceles, los tres puntos son el mismo solo si el triángulo es equilátero [el participante hace referencia a un vínculo de Wikipedia donde detalla lo mencionado]
51 Día 3 21:33	Integración: • Relacionan sus justificaciones, con los conceptos matemáticos utilizados • Emerge el Teorema de la recta de Euler	Participante 7: Todo indica que los puntos G , H y O son colineales, menos en el caso del triángulo equilátero. No se puede formar el ΔGHO y por eso GeoGebra indica que su área es cero [...] ¿cómo se puede justificar? [...]
54 Día 3 22:05		Participante 8: Es interesante cómo enuncian el problema ya que es el Teorema de la Recta de Euler: el baricentro, ortocentro y circuncentro de todo triángulo están alineados [...]

En este extracto de la conversación se contabilizaron 54 participaciones de los cuales se reportan ocho que promovieron la reflexión y discusión de los miembros del grupo. El participante 1 comparte su representación dinámica del problema y, así, inicia la conversación, donde otros formulan la conjetura: *no es posible construir ΔGHO* . De esta forma, cambian del proceso de comprensión del problema a la exploración de este. El arrastrar los vértices del ΔABC y observar la posición de los puntos H , G y O , permitió al participante 4 identificar el caso particular en el que los tres puntos coinciden. El participante 5 formuló una conjetura que fue refutada por el participante 6 con base en la información de Wikipedia.

Extracto 2. Los participantes encuentran una nueva relación

En el extracto que se presenta en la tabla 5.2, los participantes presentan argumentos empíricos y visuales para justificar la relación entre G , H y O .

Tabla 5.2. Justificación 1, un acercamiento basado en el concepto de linealidad

Intervención	Proceso	Evidencias de los participantes en el foro
57 Día 3 13:05	Exploración 2 del problema: Formulación de una conjetura basado en el arrastre de puntos	Participante 1: Al trazar la recta OG y la recta GH [...] se puede ver que al mover los puntos A , B o C , son la misma recta [...] [imagen]
68 Día 3 16:09	Diferentes acercamientos hacia la solución del problema: - Necesidad de justificar mediante argumentos analíticos la conjetura - Uso del concepto de puntos colineales - La retroalimentación como un medio para refinar ideas matemáticas - La representación dinámica permite visualizar el comportamiento de los objetos involucrados - Emerge la relación: G está entre H y O	Participante 2: ...recuerda que GeoGebra nos puede engañar [...], quizás parezcan ser la misma recta, pero puede suceder que no lo sean [...], necesitamos otros argumentos para comprobar que sean la misma recta [...] [nombra al participante 1]
79 Día 3 21:03		Participante 3: Tres puntos O , G y H son colineales si $d(O, G) + d(G, H) = d(O, H)$ [$d(O, H)$ significa distancia del punto O al punto H] [...]. Comprobé que $OG+GH=OH$ entonces O , G y H son colineales [el participante comparte su construcción en GeoGebra]
81 Día 4 02:26		Participante 4: Lo que dices es un caso particular, en general [nombra al participante 3] si se tienen tres puntos A , B y C ; y C está entre A y B entonces sí es válido lo que dices [...]
93 Día 4 4:56		Participante 5: Noté que G está entre H y O ¿Será siempre? [...]
104 Día 4 12:16		Participante 6: Es correcto lo que dice [nombra al participante 5], observen que al mover los vértices del triángulo $\triangle GHQ$, G está entre H y O [...] no sabía cómo justificarlo, pero lo busqué en Wikipedia, en donde se demuestra que, en la recta de Euler, G siempre está entre O y H . Además, se utiliza semejanza de triángulos para probar que HG es el doble de OG . Esto no lo sabía.

En el extracto 2 se contabilizaron 47 participaciones y se presenta la evidencia de seis participantes que realizaron aportes valiosos en la conversación del foro, durante la exploración del problema en GeoGebra. La idea inicial de trazar las rectas que pasan por O y G y por G y H , y arrastrar cualquier vértice del $\triangle ABC$ proporcionó información acerca de las propiedades de los puntos O , G y H (participante 1). El participante 3 utilizó la definición geométrica de puntos

colineales y sugirió medir segmentos en GeoGebra para comprobar que los puntos O , G y H son colineales. Durante la interacción que se llevó a cabo en el foro se refinó el concepto de puntos colineales (participante 4), surge, entonces, la necesidad de verificar que $H-G-O$ lo sean. La evidencia muestra que GeoGebra tuvo un papel importante en la identificación visual de las relaciones entre los objetos matemáticos presentes en la representación dinámica del problema.

Extracto 3. Un acercamiento basado en el concepto de pendiente

Los participantes buscan otros argumentos para justificar la colinealidad de los puntos H , G y O .

Tabla 5.3. Justificación 2, un acercamiento basado en el concepto de pendiente de una recta

Intervención	Proceso	Evidencias de los participantes en el foro
110 Día 3 07:13	Exploración 3 del problema: - Formulación de una conjetura basada en la pendiente de una recta - Uso de la medición para verificar que las pendientes son iguales	Participante 1: [...] creo que una forma de verificar que los puntos H , G y O son colineales es: trazo la recta HG y mido su pendiente, luego trazo la recta GO y mido su pendiente, si ambas pendientes son iguales entonces se trata de la misma recta [...] [imagen]
115 Día 3 11:15	Formulación de otra conjetura basada en un caso particular: Retroalimentación para refutar la conjetura	Participante 2: [nombra al participante 1] En ese caso me queda la duda ¿qué pasa si ambas rectas son paralelas? [...] quizás lo sean y no sea posible observarlo en GeoGebra [...]
123 Día 3 17:41		Participante 3: El caso que mencionas no es posible [nombra al participante 2], las dos rectas comparten el punto G y tienen la misma pendiente, por lo tanto, no pueden ser paralelas. El argumento de [nombra al participante 1] me parece acertado
137 Día 5 06:58	Integración Emerge la necesidad de utilizar un sistema de coordenadas	Participante 4: Muy buena forma de mostrar que los puntos son colineales, yo solo lo hice de forma geométrica y no se me ocurrió utilizar la pendiente de la recta. Solo recuerden para hablar de pendiente de una recta se necesita un sistema de referencia, en este caso el sistema de plano cartesiano

En el extracto 3 se registraron 27 participaciones y se presentan cuatro de ellas. El participante 1 formula y justifica una conjetura en el contexto de la Geometría Analítica. Los demás participantes contribuyen a la construcción de un argumento matemático basado en el concepto de pendiente de una recta, para concluir la colinealidad de H , G y O . La estrategia del participante 1 de medir pendientes de rectas en GeoGebra detona en el resto de sus compañeros una reflexión que se refleja en la discusión y la conexión de conceptos de geometría euclidiana y geometría analítica.

En los días 6 y 7, la conversación entre los participantes giró en torno a las ideas matemáticas relacionadas con el Teorema de la Recta de Euler y su aplicabilidad en el ámbito educativo: "la demostración no es simple para trabajarla con estudiantes de secundaria, pero cuando estudiamos rectas notables de un triángulo se puede proponer este problema para evaluar si comprendieron bien los conceptos de mediana, altura y mediatriz de un triángulo". Con esto se refuerza la idea mencionada por de (Ji y Cao, 2016) de que los MOOCs brindan a los docentes un nuevo método para su desarrollo profesional docente. Este proceso se fortaleció con el uso de Wikipedia, que sirvió para la consulta de la demostración del teorema, la cual fue el punto de partida para la construcción de nuevos aprendizajes de los participantes, como lo mencionó un participante en la conversación: "En la demostración de Wikipedia se utiliza semejanza de triángulos para probar que HG es el doble de OG ".

5.2 ACTIVIDAD 5 DEL MOOC. UNA FAMILIA DE RECTÁNGULOS DE PERÍMETRO FIJO

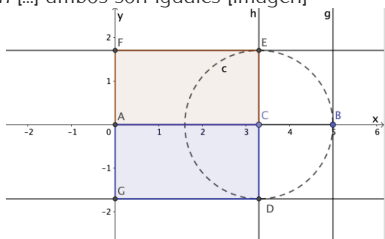
En esta actividad se presentó el enunciado del problema: De todos los rectángulos que tienen un perímetro fijo determinar las dimensiones del que tiene área máxima.

Los participantes observaron un video en el cual se realiza una representación dinámica del problema a partir del semiperímetro del rectángulo $ACDE$, donde AB es su semiperímetro y AC y CD las longitudes de sus lados, la representación dinámica se puede consultar en <https://www.geogebra.org/m/eFub-5p5g>. Posteriormente, se solicitó a los participantes realizar su propia representación, para lo cual siguieron los pasos de video.

Extracto 4. Construcción de una representación dinámica

Se muestran las ideas que surgieron en torno a la comprensión del problema apoyadas en las representaciones dinámicas que realizaron y compartieron los participantes en el foro, durante la semana número seis en que se implementó el curso. Identificaron elementos y propiedades no enfatizadas en la representación dinámica que se les mostró en el video, en su lugar, observaron que se forman dos familias de rectángulos de perímetro fijo, los detalles se muestran en la figura 5.2.

Tabla 5.4. Comprensión del problema, creación de representaciones dinámicas

Intervención	Proceso	Evidencia de los participantes en el foro
201 Día 1 de la semana 6 05:29 (Hora CDMX)	Comprensión del problema: - Se identifican propiedades matemáticas de los objetos involucrados para crear una representación dinámica del problema - Se utiliza la estrategia de arrastrar objetos para observar que las propiedades de la figura se conservan - Se utiliza la estrategia de medición para comprobar que las propiedades de la construcción se mantienen al arrastrar un punto	Participante 1: [...] seguí los pasos de la construcción [el participante hace referencia al video del MOOC] y observé que se forman dos rectángulos pues existen dos puntos de intersección de la circunferencia y la recta h [...] ambos son iguales [imagen] 
209 Día 1 07:56		Participante 2: Excelente manera de hacer la construcción [...], yo tampoco había visto que se forman dos rectángulos congruentes [nombra al participante 1], con esto [...], los estudiantes pueden observar la existencia de infinitos rectángulos que cumplen la condición de poseer el mismo perímetro con solo mover el punto C [...].
235 Día 2 20:17		Participante 3: Para comprobar que la construcción funciona [...], se pueden medir los lados del rectángulo [...] y ver que su perímetro no cambia [...].
236 Día 2 22:01		Participante 4: Las coordenadas del punto D representan las dimensiones de los lados del rectángulo [el participante comparte su construcción en GeoGebra] [...].

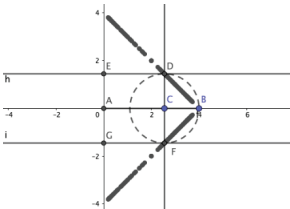
En el extracto 4 se registraron 35 participaciones y se presentan cuatro de ellas. La conversación se mantuvo activa durante dos días. A partir de la representación dinámica realizada y compartida en el foro por el participante 1, se identifican dos familias de rectángulos de perímetro fijo, esto da lugar a la conversación que continúan los participantes 2, 3 y 4. Estos últimos amplían la idea inicial siguiendo la misma línea de pensamiento, a pesar de que habían transcurrido más de 24 horas y 34 participaciones previas.

Por otro lado, se identifican de manera reiterada en la conversación palabras que aluden a la actividad docente de los participantes, como por ejemplo las del participante 2.

Extracto 5. Otra representación dinámica del problema que surge de los participantes

Los participantes representaron de otra manera el problema, para ello, se apoyaron en las aportaciones realizadas por otros en la conversación previa (extracto 5). También, utilizaron el concepto de triángulo rectángulo isósceles y parte de la información proporcionada en el video (tabla 5.5).

Tabla 5.5. Comprensión del problema, creación de otra representación dinámica

Intervención	Proceso	Evidencia de los participantes en el foro
238 Día 3 10:26 (Hora CDMX)	Exploración del problema: La representación dinámica se convierte en un medio que permite visualizar, mediante el rastro, el comportamiento de objetos y sus propiedades	Participante 1: [...] seguí los pasos de la construcción y noté que, al mover C, [...] [nombra al participante 4 del extracto 5] se mueve sobre una recta. El lugar geométrico es una recta y coincide con la hipotenusa de un triángulo isósceles cuyos lados congruentes tienen la misma medida del semiperímetro del rectángulo [...] 
251 Día 4 13:30	Exploración del problema: Usa la intervención del participante 1 para construir otra representación del problema	Participante 2: [...] yo veo que a partir de un segmento , se construye un triángulo rectángulo-isósceles de catetos de medida AB, y al seleccionar cualquier punto en la hipotenusa y trazar rectas perpendiculares a los ejes desde ese punto se obtiene un rectángulo de perímetro fijo [el participante comparte su construcción en GeoGebra] [...]

En el extracto 5 se registraron 13 participaciones y se presentan dos de ellas que resultan relevantes: (1) el inicio de la conversación surgió de una idea expresada en otro foro (extracto 5, participante 4); (2) la exploración del problema utilizando la estrategia de rastro de un punto en una representación dinámica les permitió observar el comportamiento de un vértice del rectángulo; (3) la identificación de un lugar geométrico descrito por D al mover el punto C ; y, (4) la creación de una nueva manera de representar el problema.

Extracto 6. Diferentes acercamientos hacia la solución del problema

En esta parte de la actividad, se proporcionó un video para modelar el comportamiento del área del rectángulo al arrastrar el punto C que define una de las dimensiones de este, sin emplear un modelo algebraico. En el video se definió

un punto R con coordenadas longitud de AC y área del rectángulo, luego, se activó su rastro y se movió el punto C , la representación dinámica mostrada en el video se puede consultar en <https://www.geogebra.org/m/aamfbvdf>. En el foro la pregunta fue ¿en qué momento la ordenada de R es máxima?

En la conversación un participante asoció el rastro del punto R con una parábola y esto derivó en la búsqueda de diferentes maneras de justificarlo, desde argumentos visuales y empíricos hasta modelos algebraicos, también hicieron referencia a conceptos y criterios de cálculo diferencial (tabla 5.6).

Tabla 5.6. Comprensión del problema, creación de representaciones dinámicas

Intervención	Proceso	Evidencia de los participantes en el foro
256 Día 4 08:23 (Hora CDMX)	Exploración del problema: Formulación de una conjetura basada en argumentos visuales	Participante 1: Visualmente es posible que ese lugar geométrico sea una parábola [...] ¿cómo podemos comprobarlo? [...]
259 Día 4 16:44	Diferentes acercamientos hacia la solución del problema:	Participante 2: El área del rectángulo se puede asociar con una parábola de ecuación $y = x(a - x)$ cuando $AB = a$, $x = AC$ unidades lineales [imagen]
266 Día 4 23:57	Construcción de un modelo algebraico GeoGebra proporciona argumentos visuales para la solución del problema	Participante 3: Una forma visual de justificar que existe un área máxima [...] es mover el punto C , la coordenada “y” de R aumenta desde cero y luego disminuye hasta volver a ser cero, básicamente es el criterio de la primera derivada [imagen]
301 Día 5 06:29	Integración: Se relacionan diferentes tipos de solución con conceptos matemáticos	Participante 4: [nombra al participante 3] el criterio de la primera derivada es un tema importante y muchas veces no se le da importancia, sino que solo se calcula la derivada y se encuentran los ceros de la función sin darle significado. Se puede utilizar el valor de la pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto R para justificar la existencia de un área máxima [el participante comparte su construcción en GeoGebra]
304 Día 5 14:31		Participante 5: El área máxima se obtiene cuando los lados del rectángulo tienen la misma longitud, es decir, cuando se forma un cuadrado [...]. He trabajado con mis estudiantes de bachillerato este problema y al final se sorprenden de la respuesta diciendo ¿cómo es posible que la respuesta sea un cuadrado cuando estamos hablando de rectángulos? [...] [imagen]

324 Día 6 08:49	Integración: Este participante asume como conjetura el comentario del participante 4, y utiliza el arrastre de objetos para confirmar la conjetura	Participante 6: [nombra al participante 4], gracias por la sugerencia, tracé la recta tangente a la parábola en el punto , claramente se aprecia en una parte de la gráfica la pendiente positiva y en otra, negativa [imagen] [...]
334 Día 7 12:45	Se relacionan diferentes tipos de solución con conceptos matemáticos	Participante 7: [...] El punto donde la pendiente de la recta tangente cambia de positiva a negativa es el valor asociado al rectángulo de área máxima [...]

En el extracto 6 se registraron 78 participaciones y se presentan siete de ellas. La pregunta que inició la conversación (participante 1) contribuyó a la búsqueda de diferentes argumentos empíricos, basados en el uso de GeoGebra y, posteriormente, a la construcción de argumentos algebraicos basados en conceptos y relaciones de cálculo diferencial: (1) criterio de la primera derivada (participante 3); (2) recta tangente (participante 4); y, (3) valor máximo de una función (participante 7). Aquí, se vuelven a identificar en la conversación palabras asociadas con la actividad docente, como por ejemplo las del participante 5.

5.3. Discusión de resultados

El entorno virtual del MOOC se convirtió en un espacio en el que los participantes utilizaron sus conocimientos y sus habilidades o desarrollaron nuevas para avanzar en la solución de los problemas. Utilizaron información matemática explícita o implícita en el enunciado, reorganizaron esta información y establecieron las relaciones necesarias para llegar a la solución.

Como Schoenfeld (1985) y Santos-Trigo (2014) mencionan para un ambiente presencial, en la resolución de problemas, intervienen diversos procesos: construir y explorar diferentes representaciones, buscar patrones y relaciones entre objetos matemáticos, presentar argumentos, comunicar resultados, buscar diversos métodos de solución, plantear preguntas y formular nuevos problemas. Estos también fueron identificados en el ambiente de aprendizaje virtual y asincrónico del MOOC, a través de los foros y se encuentran en los extractos de cada conversación.

En el MOOC las representaciones dinámicas favorecieron la exploración del problema y promovieron la discusión de diferentes propiedades y relaciones entre objetos matemáticos que fueron identificadas. Esto, de acuerdo con Schoenfeld

(1992), potencian los procesos de resolución de problemas. También, las estrategias asociadas con uso de GeoGebra tales como el arrastre de objetos, la cuantificación de sus atributos y el rastro, se convirtieron en elementos importantes durante la exploración del problema lo que orientó a los participantes a formular conjeturas. GeoGebra proporcionó elementos visuales y empíricos para justificar o refutar dichas conjeturas. La estrategia de medición permitió justificar empíricamente que el baricentro, el ortocentro y el circuncentro de un triángulo, excepto el equilátero, son puntos colineales (tabla 5.3). La estrategia rastro de un punto contribuyó para que los participantes: (1) modelaran un problema de variación sin necesidad de trabajar con un modelo algebraico, como tradicionalmente se presenta en los libros de texto, y (2) construyeran una nueva representación del problema a partir de observar el rastro que deja un punto (tablas 5.4 y 5.5).

También en las conversaciones en los foros, se identificó que los participantes generaron nuevo conocimiento o refinaron alguno que tenían mediante la búsqueda de diferentes argumentos para justificar las conjeturas formuladas: en la tabla 5.1 el participante 7 enuncia el Teorema de la recta de Euler, aparentemente sin conocerlo; el participante 8 relaciona el problema con este teorema que era conocido por él, sin embargo, olvida mencionar el caso particular del triángulo equilátero y, en la tabla 5.2, el participante 6 identifica dos relaciones que no conocía.

6. CONCLUSIONES

Las evidencias recabadas en esta investigación permiten identificar al MOOC como un entorno virtual en donde los participantes tienen la oportunidad de realizar un trabajo autodirigido centrando su atención en aquellos elementos que consideren de su interés. Los foros se convirtieron en espacios de interacción asincrónica y colaborativa, y, además, abrieron la posibilidad de extender la reflexión y discusión matemática. Es decir, los participantes transmitieron y conocieron las ideas de otros, a partir de esto desarrollaron, modificaron o refinaron sus conocimientos matemáticos y estrategias para resolver problemas.

La etnografía virtual resultó importante en el análisis de datos del MOOC, ya que brindó elementos para reconocer que los participantes no necesariamente pasan por los mismos procesos de resolución de problemas al mismo tiempo. Como los participantes no reciben retroalimentación personalizada por parte de un tutor o profesor, el proceso de resolución de problemas inicia con una idea

emitida por un participante que despierta el interés de otros dando respuesta o retroalimentación. De esta forma, construyen una red de interacciones que los conduce a la resolución del problema, al uso de nuevas estrategias o el desarrollo de nuevo conocimiento. Por la naturaleza del MOOC y en particular de sus foros asincrónicos, los participantes pudieron avanzar a su propio ritmo y romper con limitaciones espaciales y temporales. En los foros se diluye el nivel educativo de los participantes, esto es, una idea que inicia una conversación puede surgir de alguien con una actividad profesional o grado académico indistintos.

Un resultado adicional de la investigación es que un alto porcentaje de los participantes más activos en los foros, eran profesores de matemáticas. Donitza-Schmidt y Topaz (2018) se refieren a las actitudes positivas de los profesores en su experiencia en MOOCs, lo que puede estar relacionado con los resultados obtenidos en ese trabajo y surge como una opción más para ser investigada en el campo de la resolución de problemas y uso de tecnologías digitales.

ANEXO 1

Notación utilizada en la transcripción de los comentarios del foro

Convención	Uso
[...]	Parte del comentario que no aporta información relevante en los objetivos de la investigación.
[texto]	Observación realizada por el investigador con el objetivo de mantener el anonimato de los participantes o para aclarar notación matemática utilizada por los participantes.
[el participante comparte su construcción en GeoGebra]	Archivo GeoGebra compartido por un participante.
[imagen]	Imagen compartida por un participante.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue posible gracias al apoyo del Instituto Politécnico Nacional, a través de la Secretaría de Investigación y Posgrado en el marco de los proyectos con números 20210725 y 20201191.

Este trabajo fue posible gracias al apoyo de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica.

REFERENCIAS

- Aldon, G., Arzarello, F., Panero, M., Robutti, O., Taranto, E., y Trgalová, J. (2017, julio 3-6). MOOC for mathematics teacher training: design principles and assessment. En G. Aldon y J. Trgalova (Eds.), *The 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching-ICTMT13*, Lyon, France. https://ictmt13.sciencesconf.org/data/pages/proceedings_compressed_1.pdf
- Alagic, G., y Alagic, M. (2013). Collaborative mathematics learning in online environments. En D. Martinovic, V. Freiman, y Z. Karadag (Eds.), *Visual mathematics and cyberlearning* (pp. 23-48). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2321-4_2
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *ZDM – Mathematics Education*, 34(3), 66-72. <https://doi.org/10.1007/BF02655708>
- Baccaglioni-Frank, A., y Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 15(3), 225-253. <https://doi.org/10.1007/s10758-010-9169-3>
- Borba, M., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinares, S., y Aguilar, M. (2016). Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education*, 48(5), 589-610. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0798-4>
- Bras, I. I. (2016). Los MOOC en números: un análisis para comenzar la reflexión. *Revista Digital Universitaria* 17(1), 1-16. <http://www.revista.unam.mx/vol.17/num1/art01/art01.pdf>
- Breslow, L., Pritchard, D., DeBoer, J., Stump, G., Ho, A., y Seaton, D. (2013). Studying learning in the worldwide classroom: Research into edX's first MOOC. *Research & Practice in Assessment*, 8, 13-25.
- Donitsa-Schmidt, S., y Topaz, B. (2018). Massive open online courses as a knowledge base for teachers. *Journal of Education for Teaching*, 44(5), 608-620. <https://doi.org/10.1080/02607476.2018.1516350>

- Ernest, P. (2016). The unit of analysis in mathematics education: Bridging the political-technical divide? *Educational Studies in Mathematics*, 92(1), 37–58. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9689-4>
- Flotts, M. P., Manzi, J., Barrios, C., Saldaña, V., Mejías, N., y Abarzúa, A. (2016). El tercer estudio regional comparativo y explicativo. *Aportes para la enseñanza de la matemática* (pp. 11–16). Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000244855>
- Fahlgren, M., y Brunström, M. (2014). A model for task design with focus on exploration, explanation, and generalization in a dynamic geometry environment. *Technology, Knowledge and Learning*, 19(3), 287–315. <https://doi.org/10.1007/s10758-014-9213-9>
- García, I., y López, C. (2011). Los recursos de aprendizaje. En B. Gros (Ed.), *Evolución y retos de la educación virtual: construyendo el e-learning del siglo XXI* (pp. 93–144). Universitat Oberta de Catalunya.
- Geeraerts, L., Venant, F., y Tanguay, D. (2014). Subterranean structures of technological tools and teaching issues in geometry. En L. Gómez-Chova, A. López-Martínez y I. Candel-Torres (Eds), *Proceedings of EDULEARN 14 conference* (pp. 257–264). IATED Academy.
- Ji, Z., y Cao, Y. (2016). A prospective study on the application of MOOC in teacher professional development in China. *Universal Journal of Educational Research*, 4(9), 2061–2067. <https://doi.org/10.13189/ujer.2016.040917>
- Jyothi, S., McAvinia, C., y Keating, J. (2012). A visualization tool to aid exploration of students' interactions in asynchronous online communication. *Computers & Education*, 58(1), 30–42. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.08.026>
- Leung, A. (2015). Discernment and reasoning in dynamic geometry environments. En S. J. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 451–469). Springer.
- Liyaganunawardena, T. R., Williams, S., y Adams, A. (2013). The impact and reach of MOOCs: a developing countries' perspective. *eLearning Papers*, 33, 1–8.
- Llinares, S., y Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: Interaction and online video case studies. *Instructional Science*, 37(3), 247–271. <https://doi.org/10.1007/s11251-007-9043-4>
- McAuley, A., Stewart, B., Cormier, D., y Siemens, G. (2010). *The MOOC model for digital practice*. https://www.oerknowledgecloud.org/archive/MOOC_Final.pdf
- Miles, B. M., y Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis*. Sage.
- Moreno-Armella, L., y Santos-Trigo, M. (2016). The use of digital technologies in mathematical practices: Reconciling traditional and emerging approaches. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 595–616). Taylor & Francis.

- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- National Governors Association. (2020). *Standards for Mathematical Practice. Make sense of problems and persevere in solving them*. Common Core State Standards Initiative. <http://www.corestandards.org/Math/Practice/MP1/>
- Poveda, W. E. (2020). Resolución de problemas matemáticos en GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 9(1), 26–42. <https://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p26-42>
- Quinton, S., y Allen, M. (2014). The social processes of web 2.0 collaboration: Towards a new model for virtual learning. En M. Gosper y D. Ifenthaler (Eds.), *Curriculum models for the 21st century* (pp. 35-53). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7366-4_3
- Rabbany, R., Takaffoli, M., y Zaijane, O. (2011). Analyzing participation of students in online courses using social network analysis techniques. En M. Pechenizkiy, T. Calders, C. Conati, S. Ventura, C. Romero y J. Stamper (Eds.), *Proceedings of the fourth international conference on educational data mining* (pp. 21-30). Eindhoven University of Technology.
- Ramírez, J. A. J., Chamoso, J. M., y González, M. T. (2020). Interacción en foros virtuales al integrar modelización matemática para formar ingenieros. *Enseñanza de las Ciencias*, 38(3), 161–178. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3041>
- Rau, P., Gao, Q., y Wu, L. (2008). Using mobile communication technology in high school education: Motivation, pressure, and learning performance. *Computers & Education*, 50(1), 1–22. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2006.03.008>
- Ruiz, M. R., y Aguirre, G. (2015). Etnografía virtual, un acercamiento al método y a sus aplicaciones. *Estudios sobre las Culturas Contemporáneas*, 41(XXI), 67–96.
- Santos-Trigo, L. M. (2014). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos* (2da ed.). Trillas; Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas.
- Santos-Trigo, M., y Camacho-Machín, M. (2011). Framing a problem-solving approach based on the use of computational tools to develop mathematical thinking. En M. Pytlak, T. Rowland, y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2258–2277). Universidad de Rzeszów.
- Schoenfeld A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Schoenfeld A. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–371). Macmillan.
- Sergis, S., Sampson, D., y Pelliccione, L. (2017). Educational design for MOOCs: Design considerations for technology-supported learning at large scale. En M. Jemni,

- Kinshuk, y M. K. Khribi (Eds.), *Open education: From OERs to MOOCs* (pp. 39-71). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-52925-6_3
- Shah, D. (2021, diciembre 3). By the numbers: MOOCs in 2021. Class Central. <https://www.classcentral.com/report/mooc-stats-2021/>
- United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization. (2015). *Education 2030: Incheon Declaration and Framework for Action. Towards inclusive and equitable quality education and lifelong learning for all*. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000245656>
- Velasco, C., y Gómez, P. (2019). Calidad y dificultad de los cuestionarios de un MOOC. *Uni-pluriversidad*, 19(2), 124-143. <https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.06>

MARTHA LETICIA GARCÍA RODRÍGUEZ

Dirección postal: Calzada Legaria 694, Colonia Irrigación, Alcaldía Miguel Hidalgo,
C.P. 11500 Ciudad de México, CDMX.
mlgarcia@ipn.mx

Teléfono: (+52) 5514733104

Niveles de razonamiento algebraico en libros de texto de educación básica de Chile

Levels of algebraic reasoning in Chilean primary education textbooks

Ana Luisa Llanes Luna,¹

Luis R. Pino-Fan,²

Silvia Elena Ibarra Olmos³

Resumen: La inclusión de ideas fundamentales para el desarrollo de un razonamiento algebraico, desde etapas tempranas de la educación, es un tema que ha sido intensamente investigado a nivel internacional. Como resultado, diversos currículos de matemáticas han comenzado a incluir en sus propuestas una variedad de objetos y procesos matemáticos asociados a la introducción de este tipo de razonamiento en los primeros grados educativos. El objetivo de este artículo es caracterizar el razonamiento algebraico, en términos de niveles de algebrización, pretendido en libros de texto de educación básica en Chile. Los resultados evidencian la existencia de problemas aritméticos que promueven niveles incipientes de algebrización; además, se identifican prácticas matemáticas de naturaleza algebraica, donde la finalidad radica principalmente en generar el término general de una secuencia, resolver ecuaciones de primer grado o transformar (reducir) expresiones algebraicas. Finalmente, se propone una

Fecha de recepción: 10 de enero de 2022. **Fecha de aceptación:** 5 de mayo de 2022.

¹ Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile; analuisa.llanes@alumnos.ulagos.cl, orcid.org/0000-0001-7564-065X

² Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile; luis.pino@ulagos.cl, orcid.org/0000-0003-4060-7408

³ División de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, México; silvia.ibarra@unison.mx, orcid.org/0000-0002-1344-2516

categorización de problemas que permiten promover diversos niveles de algebraización en la educación básica.

Palabras clave: *análisis de libros de texto; educación básica; niveles de algebraización; razonamiento algebraico.*

Abstract: The inclusion of fundamental ideas for the development of algebraic reasoning, from early educational stages, is a topic that has been intensively researched internationally. As a result, various mathematics curricula have begun to include in their proposals a variety of mathematical objects and processes associated with the introduction of this type of reasoning at the first educational levels. The aim of this article is to characterize the intended algebraic reasoning, in terms of levels of algebraization, in Chilean primary education textbooks. The results show the existence of arithmetic problems that promote incipient levels of algebraization; in addition, mathematical practices of an algebraic nature are identified, where the purpose mainly lies in generating the general form of a sequence, solving first degree equations, or transforming (reducing) algebraic expressions. Finally, a categorization of problems that allow promoting different levels of algebraization in primary education is proposed.

Keywords: *textbooks analysis; primary education; levels of algebraization; algebraic reasoning.*

1. ANTECEDENTES

La investigación sobre la introducción de ideas algebraicas en los currículos de educación básica (estudiantes de 6 a 12 años), ha sido por más de dos décadas uno de los principales ejes de análisis para la comunidad educativa internacional. Lo anterior, surgió como una medida que buscaba subsanar lo que, a finales del siglo XX, un gran número de estudios revelaron sobre las dificultades involucradas cuando los estudiantes (12 – 15 años) debían pasar de una forma aritmética a una forma algebraica de razonamiento (e.g., Kieran, 1992; Linchevski, 1995; Rojano y Sutherland, 2001; Wagner y Kieran, 1989). Este movimiento, conocido actualmente como *Early Algebra* –o álgebra temprana–, tiene por objetivo introducir ideas algebraicas en el currículo escolar elemental, además

de construir una base que permita el acceso de los estudiantes a conceptos algebraicos más avanzados en los cursos siguientes (Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schliemann, 2007; Kieran *et al.*, 2016).

A partir del evento *Algebra Initiative Colloquium* (Lacampagne *et al.*, 1995), los estándares para la educación matemática del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) y los *Common Core State Standards* (CCSSI, 2010), han incluido temas y recomendaciones para fomentar la inclusión del álgebra desde los primeros niveles educativos (Carraher y Schliemann, 2019). En el año 2000, Kaput sugirió promover el álgebra como facilitadora –más que como inhibidora– de una mejor comprensión de las matemáticas, en una propuesta denominada *algebra for all*, que tiene como finalidad la algebrización del currículo elemental.

En el marco del álgebra temprana existe un gran número de investigaciones basadas en el análisis del currículo, las cuales evidencian las formas en que son introducidas algunas nociones clave tales como relaciones funcionales, generalización de patrones; además, relacionan el desarrollo del razonamiento algebraico a partir del trabajo con algunas nociones de la aritmética (Aké y Godino, 2018; Cai, 2004; Castro *et al.*, 2017; Fong, 2004; Lew, 2004; NCTM, 2000). Por ejemplo, Watanabe (2008), señala que, en Japón, “el estudio del álgebra en la escuela primaria pretende no sólo desarrollar competencia algebraica sino también promover una comprensión más profunda de otros contenidos en el currículo de matemáticas” (p. 192); para ello, dividen el contenido asociado al álgebra en tres categorías: ideas acerca de las funciones, escritura e interpretación de expresiones matemáticas.

Actualmente, las Bases Curriculares (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2018) vigentes para los niveles de primero a sexto básico en Chile, manifiestan la introducción de ideas o conceptos de naturaleza algebraica. No obstante, fue en el año 2012 que el MINEDUC hizo efectiva la integración del álgebra desde primer año básico. Mejías (2019), con base en los documentos curriculares del año 2012, identifica la manera en que los objetos algebraicos son introducidos al currículo de educación básica en Chile. No obstante, el trabajo de este autor no aborda cómo los objetos y procesos de naturaleza aritmética pueden promover algún *Nivel de Algebrización* en el currículo de educación básica.

El objetivo de este artículo es, por un lado, identificar *Niveles de Algebrización* (en términos de objetos y procesos matemáticos, aritméticos y algebraicos) pretendidos por el currículo chileno de matemáticas para enseñanza básica (1° a 6° Básico),

entendiendo currículo como la dupla <plan de estudios, libros de texto>, tal como sugieren Pino-Fan *et al.* (2013); y, por otro lado, caracterizar tipos de problemas que ponen en juego *prácticas matemáticas* que permiten promover determinados niveles del razonamiento algebraico en la enseñanza básica chilena.

2. NIVELES DE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO EN EL CONTEXTO ONTOSEMIÓTICO

La presente investigación se sustenta en nociones teóricas desarrolladas por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Godino *et al.*, 2007), específicamente en la propuesta de *Niveles de Algebrización* (Godino *et al.*, 2014). Los *Niveles* de esta herramienta teórico-metodológica “se definen teniendo en cuenta los tipos de representaciones usadas, los procesos de generalización implicados y el cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática correspondiente (Godino *et al.*, 2015, p. 117).

Actualmente, la propuesta del EOS de *Niveles de Algebrización* distingue siete niveles para el desarrollo progresivo del razonamiento algebraico, los primeros cuatro se asocian a la educación básica, y los restantes se asocian a la educación secundaria y bachillerato (Godino *et al.*, 2015).

En este trabajo se consideran los niveles propuestos para la educación básica (*Nivel 0* al *Nivel 3*). El *Nivel 0* indica ausencia de razonamiento algebraico en las prácticas desarrolladas, y los dos *Niveles* siguientes (1 y 2), considerados como proto-algebraicos, sugieren indicios de ideas algebraicas durante el desarrollo de las prácticas matemáticas. Finalmente, el *Nivel 3* indica una actividad matemática propiamente algebraica. A continuación, se presenta un resumen de estos *Niveles* y sus descriptores (Godino *et al.*, 2014):

- *Nivel 0*: Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguaje natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, obtenido como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización, el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización.
- *Nivel 1*: Intervienen objetos intensivos (generales) cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguaje natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos

reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. Se identifican propiedades, equivalencias numéricas y relaciones a partir de tareas estructurales, mientras que en tareas funcionales se reconoce la generalidad expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.

- *Nivel 2:* Intervienen cantidades indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico o simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacio-temporal. En tareas estructurales, las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.
- *Nivel 3:* Son generados objetos intensivos representados de manera simbólica-literal y se opera con ellos; se elaboran transformaciones en la forma simbólica de las expresiones, conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

En esta investigación se concibe al razonamiento algebraico como aquél que “implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas” (Godino y Font, 2003, p. 774). Para el caso de la educación básica, se puntualiza como Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), definido como el “sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas abordables en la educación primaria en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos (simbolización, relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización, modelación, etc.)” (Castro *et al.*, 2011, p. 75).

Cabe señalar que en el EOS se entiende por práctica matemática “toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 182). Por su parte, se consideran objetos algebraicos a las “relaciones binarias, operaciones y sus propiedades, funciones y estructura y sus tipos (semi grupo, monoide, semi módulo, grupo, módulo, cuerpo, espacio vectorial, etc.) propias del álgebra superior o abstracta” (Godino *et al.*, 2012, p. 493).

Todo lo que se ha descrito, permite analizar de manera pormenorizada las prácticas desarrolladas o susceptibles de desarrollarse en torno a una tipología de tareas algebraicas. Conviene subrayar que,

Si bien los niveles proponen una gradación de las características algebraicas que pueden surgir en la solución de las tareas matemáticas escolares, se ha encontrado que es posible valorar una tarea como de un nivel u otro, en función del tipo de solución que se proponga, con lo cual la posible actividad matemática, de carácter algebraico, que un estudiante puede desarrollar, se predice en un rango aproximado. (Castro *et al.*, 2017, p. 186)

3. CONTEXTO DE ESTUDIO Y METODOLOGÍA

Según lo señalado en el Art. 19 de la Ley General de Educación (N.º 20.370), la Educación Básica en Chile es el nivel orientado hacia la formación integral de los alumnos en diversas dimensiones, desarrollando sus capacidades de acuerdo a los conocimientos, habilidades y actitudes definidos en las Bases Curriculares. Estas últimas se determinan como el documento principal del currículo chileno, cuyo objetivo es que todos los estudiantes sean partícipes de una experiencia educativa similar, asentando una base cultural común (MINEDUC, 2018). Ellas establecen los Objetivos de Aprendizaje, que dan cuenta de los conocimientos, las habilidades y las actitudes que se deben aprender para satisfacer los objetivos generales de este nivel educacional. En particular, se establece para la asignatura Matemática que su propósito es

Enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en todos los estudiantes, sean cuales sean sus opciones de vida y de estudios al final de la experiencia escolar. (MINEDUC, 2018, p. 214)

La organización curricular de esta asignatura se presenta a través de: a) Habilidades, b) Ejes y c) Actitudes. Con respecto al apartado de Habilidades, se establece que cada una de estas (resolver problemas, representar, modelar, argumentar y comunicar) tiene un rol importante en la adquisición de nuevas destrezas y conceptos, así como en la aplicación de conocimientos para resolver las tareas matemáticas y de otros ámbitos. Los conceptos matemáticos se presentan en cinco ejes temáticos: Números y operaciones (Nyo), Patrones y álgebra (Pya), Geometría (Geo), Medición (Med), y Datos y probabilidades (Dyp).

En este artículo enfocamos nuestra atención en dos de los ejes, Nyo y Pya, en los cuales se presentan conceptos asociados al desarrollo del razonamiento algebraico. El eje Nyo, “abarca el desarrollo del concepto número como la destreza en el cálculo mental y el uso de algoritmos” (MINEDUC, 2018, p. 218). En el eje Pya, “se espera que los estudiantes establezcan relaciones entre números, formas, objetos y conceptos, con la finalidad de que sean capaces de indagar sobre las formas, las cantidades y el cambio de una cantidad en relación con otra” (MINEDUC, 2018, p. 219). Se señala que desarrollando una base sólida del concepto patrón se facilitaría el desarrollo de un pensamiento matemático más abstracto en los niveles superiores, como es el pensamiento algebraico.

A diferencia de las Bases Curriculares que rigen la educación de 7° básico a 2° medio (estudiantes de 12 a 15 años), donde se establece que los ejes de ‘Números’ y ‘Álgebra y funciones’ se relacionan fuertemente, en las Bases Curriculares de 1° a 6° básico no se hace alusión a ningún tipo de relación entre los ejes Nyo y Pya, lo que podría implicar que, en el caso del currículo chileno para la educación básica, la aritmética no se considere como una característica del RAE, y se considere solo a los objetos de naturaleza algebraica como elementos promotores de este.

Por otra parte, el MINEDUC pone a disposición de la comunidad educativa actividades complementarias, libros de actividades (cuadernillos de ejercicios), textos oficiales (guía didáctica del docente y texto del estudiante), imágenes, documentos interactivos, presentaciones de videos, entre otros, para cada uno de los niveles de la educación básica. En el caso de los textos del estudiante oficiales, se proponen seis (uno por cada nivel educativo) desde 1° a 6° básico (estudiantes 6 a 12 años), teniendo por objetivo exhibir los contenidos y requerimientos para cada uno de los niveles según lo planteado en las Bases Curriculares. La tabla 1 presenta algunos datos generales sobre los textos del estudiante distribuidos por el MINEDUC para seis de los ocho niveles de la Educación Básica en Chile. Cabe destacar que los textos no se estructuran en el mismo número de unidades y que estas pueden abordar más de un eje cada una.

Tabla 1. Organización de libros de texto chilenos por unidad y eje

Nivel educativo	Autor(es)	Organización del texto por unidades y ejes					
		1	2	3	4	5	6
1º básico	Cortés (2018)	Nyo	Geo Med	Nyo	Pya	Dyp	Nyo
2º básico	Ayala <i>et al.</i> (2017)	Nyo Med	Nyo Med Geo	Nyo Pya Geo Dyp	Nyo Med Dyp		
3º básico	Urra <i>et al.</i> (2017)	Nyo	Nyo Pya Med Geo	Nyo Pya Med Dyp	Nyo Geo Med		
4º básico	Rodríguez <i>et al.</i> (2018)	Nyo Pya	Geo	Nyo	Med	Dyp	
5º básico	Kheong <i>et al.</i> (2015/2017)	Nyo Pya	Geo Med	Nyo Pya	Dyp		
6º básico	Maldonado y Castro (2016)	Nyo	Pya	Geo Med	Dyp		

Fuente: Elaborado por los autores

3.1. METODOLOGÍA

La investigación se ha desarrollado bajo las características del paradigma cualitativo (Creswell, 2009; León y Montero, 2003). La técnica de investigación es el análisis de contenido (Gil, 1994), específicamente de las prácticas matemáticas institucionales (propuestas en los textos oficiales). Es pertinente señalar que, actualmente, la práctica de la enseñanza se sigue apoyando mayoritariamente en el libro de texto, teniendo una gran influencia en el aula, ya que sigue considerándose como uno de los referentes exclusivos del saber científico, influenciando las concepciones curriculares y siendo una de las principales fuentes que proporciona actividades de instrucción para los profesores (Espinoza *et al.*, 2013; García-Mateos y Caballero-García, 2005; Pino-Fan *et al.*, 2013). Asimismo, se considera que los análisis didácticos de libros de texto permiten, entre otras cosas,

caracterizar la calidad de la organización matemática textualizada, su grado de completitud, pertinencia, adecuación e idoneidad epistémica y didáctica, y en tal sentido, orientar al profesor para sostener un trabajo de gestión de la clase o rediseño de actividades científicamente sustentable y fundamentado. (Espinoza *et al*, 2013, pp. 5051-5052)

Es por lo anterior que se considera llevar a cabo un estudio didáctico a los textos de educación básica de Chile, propuestos para la asignatura de Matemática, con la finalidad de caracterizar, con base en las prácticas matemáticas de referencia (i.e., que los textos realizan y que se espera que realicen los estudiantes), los *Niveles de algebrización* pretendidos en el currículo de educación básica chileno.

Para efectos metodológicos, este trabajo adopta el modelo de *Niveles de Algebrización* (Godino *et al*, 2014) como herramienta de análisis. El análisis de los textos se desarrolla en las siguientes fases: 1) estudio preliminar y selección de los problemas asociados a los ejes Números y operaciones (Nyo) y Patrones y álgebra (Pya) del currículo escolar chileno; 2) resolución de los problemas seleccionados y análisis pormenorizado de las prácticas matemáticas de referencia; 3) generación de las categorías de problemas. Se analizan los seis textos del estudiante presentados en la tabla 1.

4. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LOS LIBROS DE TEXTO

Los análisis realizados permitieron identificar que los *Niveles de Algebrización* pretendidos en el currículo chileno de matemática para la educación básica, van desde el *Nivel 0* (ausencia del razonamiento algebraico) hasta un *Nivel consolidado de Algebrización* (*Nivel 3*). Se presentan con profundidad los análisis y resultados sobre los libros de texto utilizados en los cursos 1º (sección 4.1) y 4º año básico (sección 4.2). La elección de los libros de tales niveles se debe a que la diferencia es mínima entre 1º y 2º básico en lo que respecta al tipo de problemas y *Niveles de Algebrización* identificados y, además, porque de acuerdo al currículo de matemáticas en Chile, es en 4º básico cuando se introduce formalmente la notación algebraica. No obstante, antes de finalizar este apartado, se presentan de manera resumida los resultados para los libros de texto correspondientes a los cursos 2º, 3º, 5º y 6º básico (sección 4.3).

Para los cursos de 1º y 4º básico se describen con detalle las *prácticas matemáticas* de referencia, es decir, aquellas *prácticas* propuestas tal como

aparecen en los libros de texto. mediante la identificación de los *objetos matemáticos primarios* que emergen o intervienen en estas *prácticas*, incluyendo ejemplos significativos de la caracterización de problemas que se ha realizado. Al final de cada sección, se establecen las características principales de los *Niveles de Algebrización* identificados. Esta misma estructura se sigue, de manera más resumida, con los cursos 2º, 3º, 5º y 6º básico.

4.1. PRIMERO BÁSICO: OBJETOS MATEMÁTICOS Y NIVELES DEL ALGEBRIZACIÓN IDENTIFICADOS

En este nivel se han caracterizado 14 tipos de situaciones-problema (rotuladas como SP) asociados a prácticas matemáticas promotoras del RAE donde cada una de estas prácticas se vinculan a un solo *Nivel de Algebrización*. La tabla 2 presenta, en la primera columna, los ejes temáticos de interés (Nyo, Pya) de la asignatura Matemática; en la segunda, se asigna un número a cada SP del libro de texto de 1º básico; en la tercera, las tipologías de problemas y, en la cuarta, el número de SP presentes en el libro de texto.

Tabla 2. Categorización de tipos de problemas en 1º básico

Eje	SP	Tipo de problema	Número de SP contenidos en el texto
Números y operaciones	1	Aplicar el algoritmo de “componer y descomponer” cantidades numéricas para resolver problemas	36
	2	Comparar cantidades (mayor que, menor que o igual que, es más que, es menos que)	27
	3	Determinar la cardinalidad de conjuntos	29
	4	Identificar a la suma y la resta como operaciones inversas	4
	5	Identificar el antecesor o sucesor de un número	5
	6	Identificar la condición para saber cuándo un elemento pertenece a un conjunto	1
	7	Identificar la función ordinal de los números naturales	6
	8	Identificar y representar mediante un número la cardinalidad de un conjunto	11
	9	Operar cantidades numéricas (suma o resta)	34
	10	Utilizar el algoritmo “abreviado” para sumar y restar	7
Patrones y álgebra	11	Determinar los elementos de una secuencia dada la regla de formación	5
	12	Identificar la regla (patrón) de formación	16
	13	Identificar la regla (patrón) de formación y completar la sucesión	37
	14	Resolver (implícitamente) ecuaciones de la forma $x \pm B = C$ con x, B y $C \in \mathbb{N}$	16
Total			234

Fuente: Elaborado por los autores

4.1.1. Prácticas matemáticas asociadas al Nivel 0 de Algebrización

Los objetos matemáticos identificados en las prácticas matemáticas son:

- *Lenguaje.* Predomina el lenguaje natural y representaciones numéricas e icónicas. Intervienen símbolos, como “ $\square$ ”, que representan a un valor desconocido (por ejemplo, en la expresión $7 = \square + 2$), pero dicho valor se

obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. Los símbolos que intervienen se refieren a ejemplos o casos particulares (extensivos).

- **Definiciones-conceptos.** Las definiciones se presentan mediante lenguaje materno o natural, apoyados además por figuras o íconos (ver figura 1), o lenguaje numérico-simbólico (números o signos, como $+$, $-$, $=$, entre otros). El concepto de número se asocia a la cardinalidad de un conjunto, o bien, con definiciones expresadas en lenguaje natural, “Los números tienen diferentes funciones, una de ellas es ordenar. A estos números se les llama números ordinales. 1° , 2° , 3° , 4° , 5° , 6° , 7° , 8° , 9° , 10° ” (Cortés, 2018, p. 38).

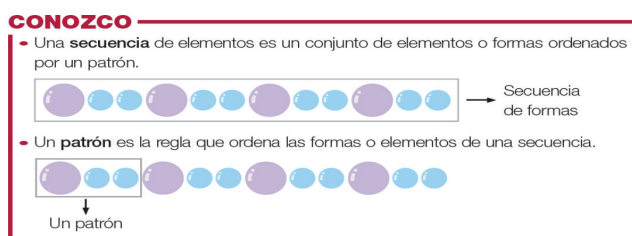


Figura 1. Ejemplo de definición-concepto (Cortés, 2018, p. 147)

- **Proposiciones.** Las proposiciones se enuncian mediante el lenguaje natural, acompañadas de representaciones icónicas que apoyan de manera visual a las proposiciones dadas (ver figura 2).

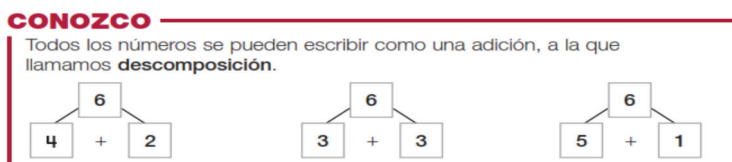


Figura 2. Ejemplo de SP1 (Cortés, 2018, p. 32)

- **Procedimientos.** Los procedimientos son de naturaleza aritmética. Para obtener un valor desconocido, por ejemplo $5 + 4 = \square$, se sugiere hacer uso de una cinta numerada y comenzar a contar, para este caso comenzando del 5 y contar 4 hacia adelante. La acción de contar es una técnica que prevalece a lo largo del libro de texto (contar los elementos en

colecciones) para establecer la cardinalidad de los conjuntos, o bien, para comparar colecciones de elementos.

- *Argumentos*. Los argumentos se valen de la observación y de la aplicación de estrategia o su verificación para establecer resultados. La figura 3 ejemplifica este tipo de argumentos.

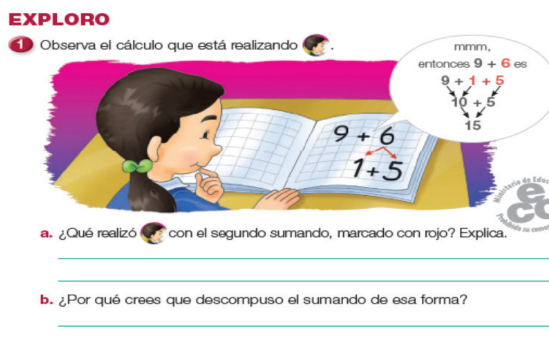


Figura 3. Ejemplo de SP1 (Cortés, 2018, p. 220)

Lo anterior permite concluir que las prácticas matemáticas son desarrolladas en un contexto puramente aritmético, donde los objetos matemáticos son expresados, principalmente, mediante los lenguajes natural, numérico e icónico y los cuales son ejemplos particulares de tipologías más amplias (por ejemplo, trabajar en el contexto de los números naturales). Además, los símbolos que refieren a valores desconocidos se obtienen como resultado de operaciones sobre objetos particulares (por ejemplo, la acción de agregar, que se traduce en lenguaje matemático como la operación $2 + 4 = \square$).

4.1.2. Prácticas matemáticas asociadas al Nivel 1 de Algebrización

Para este nivel educativo se han caracterizado 4 tipos de problemas etiquetados en la segunda columna de la tabla 2 como SP11, SP12, SP13 y SP14, e identificados en la unidad dedicada al eje Pya. Las prácticas matemáticas promovidas en el texto, asociadas a la tipología de problemas antes mencionadas, permitieron identificar aspectos característicos del *Early Algebra* tales como la generalización de patrones, el desarrollo y manipulación del simbolismo en un

lenguaje diferente al algebraico, así como el concepto de igualdad. Los objetos identificados en las prácticas matemáticas analizadas son:

- *Lenguaje*. Los patrones, secuencias y ecuaciones, se representan principalmente mediante lenguaje icónico, numérico y lenguaje natural. Los patrones y secuencias pueden encontrarse a partir de representaciones icónicas o bien representadas mediante lenguaje numérico (ver figura 4). Por otra parte, la idea de ecuación (de manera implícita) comienza a introducirse a través de representaciones icónicas, principalmente usando el concepto de balanza.

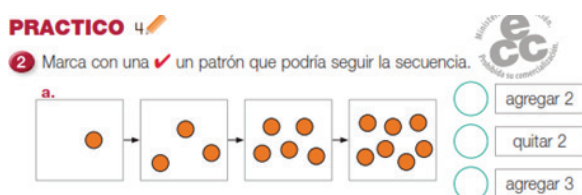


Figura 4. Ejemplo de SP12 (Cortés, 2018, p. 149)

- *Definiciones-conceptos*. Las definiciones o conceptos se enuncian a través de lenguaje natural, con apoyo de representaciones icónicas para dar explicaciones sobre estos (ver figura 5).

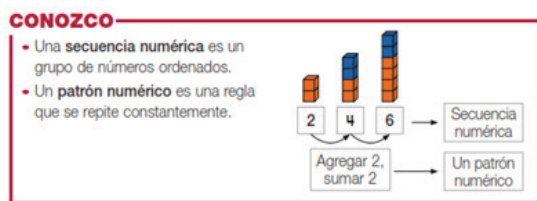


Figura 5. Definición de secuencia numérica y patrón numérico (Cortés, 2018, p. 148)

- *Proposiciones*. Las proposiciones generalmente se enuncian mediante el lenguaje natural. Por ejemplo “Para resolver problemas donde tengas que igualar cantidades, puedes representar las cantidades en barras y compararas” (Cortés, 2018, p. 160).
- *Procedimientos*. Los procedimientos permiten identificar propiedades o equivalencias numéricas. La identificación de patrones numéricos, así como la determinación de los elementos de una secuencia, dada la regla de

formación, se asocia a las acciones de agregar o quitar elementos (sumar o restar, respectivamente). El concepto de igualdad (o desigualdad) se aborda recurriendo a las técnicas de conteo (determinar la cardinalidad de conjuntos y compararlos). Implícitamente se trabaja con la noción de lo desconocido, para ello se recurre a equilibrar balanzas agregando o quitando elementos para lograr el equilibrio.

- *Argumentos*. Los argumentos se valen de la observación y la aplicación de algunas estrategias o su verificación (ver Figura 6).

EXPLORO

1 Lee la situación.

Marcos tiene una colección de 14 soldaditos, Eduardo tiene una colección de 11 soldaditos. ¿Cuántos soldaditos necesita Eduardo para igualar la cantidad de soldaditos que tiene la colección de Marcos?





CONOZCO

Para resolver problemas donde tengas que igualar cantidades, puedes representar las cantidades en barras y compararlas.

Colección de Marcos: 

Colección de Eduardo:  3

• ¿Cuál es la respuesta al problema anterior?

Figura 6. Ejemplo de SP2 (Cortés, 2018, p. 160)

Para este nivel se han identificado en las prácticas matemáticas equivalencias numéricas (que se trabajan mediante el uso de balanzas) y relaciones a partir de tareas estructurales (mediante la composición y descomposición de los números, por ejemplo, descomponer el 7 como la suma de dos números diferentes, $5 + 2$ o $2 + 5$). Para el caso de las tareas de generalización de patrones (generación de secuencias o identificación de reglas de formación) se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal, etiquetados en la tabla 2 (columna SP con los números 11, 12 y 13).

4.2. CUARTO BÁSICO: OBJETOS MATEMÁTICOS Y NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN IDENTIFICADOS

Para este nivel educativo se han caracterizado 14 tipos de situaciones-problema (SP) asociados a *prácticas matemáticas* promotoras del RAE. A diferencia del

texto para 1º básico (ver tabla 2), estas prácticas se vinculan a más de un *Nivel de Algebrización*, por ejemplo, un problema del tipo ‘identificar la regla o patrón de formación’, puede resolverse mediante prácticas del *Nivel 1* o *2* de *Algebrización*; lo mismo sucede cuando se resuelven ecuaciones de las formas $x \pm B = C$, $B \pm x = C$ (con $x, B, C \in \mathbb{N}$). Otra diferencia es que, en este libro de texto, se han agrupado algunos de los problemas en ‘grandes categorías’, referidas a aquellas SP particulares que buscan el mismo objetivo. Por ejemplo, un problema de tipo ‘aplicar estrategias de cálculo mental’, puede ser ‘aplicar e identificar las propiedades del 0 y 1 en las operaciones de multiplicación y división’, o bien, ‘aplicar el algoritmo de la división para resolver problemas’.

En la tabla 3 se presentan en una primera columna los ejes temáticos de interés (Nyo, Pya) de la asignatura Matemática; en la segunda, se asigna un número a cada SP del libro de texto de 4º básico; en la tercera, las tipologías de problema y, en la cuarta, el número de SP presentes en el libro de texto.

Tabla 3. Categorización de tipos de problemas en 4º básico

Eje	SP	Tipo de problema	Número de SP contenidos en el texto
Números y operaciones	1	Aplicar estrategias de cálculo mental	42
	2	Comparar cantidades (mayor que, menor que o igual que, es más que, es menos que $<$, $>$, $=$)	16
	3	Comparar y ordenar cantidades (mayor que, menor que o igual que, es más que, es menos que, $<$, $>$, $=$)	9
	4	Identificar y representar mediante un número la cardinalidad de un conjunto	14
	5	Operar cantidades numéricas	10
	6	Representar y resolver problemas a través de: números decimales, racionales positivos, decimales y racionales	42
	7	Resolver problemas (suma y/o resta) a través de la aproximación (redondeo) de cifras	6
	8	Resolver problemas haciendo uso de una de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división)	35
	9	Resolver problemas haciendo uso de las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y/o división)	3

Patrones y álgebra	10	Determinar los elementos de una secuencia dada la regla de formación	5
	11	Identificar la regla (patrón) de formación	3
	12	Identificar la regla (patrón) de formación y completar la secuencia	11
	13	Representar y/o resolver ecuaciones de la forma $x \pm B = C$, $B \pm x = C$, con x, B y $C \in \mathbb{N}$	25
	14	Representar y/o resolver inecuaciones de la forma $x \pm B < C$, $x \pm B > C$, con x, B y $C \in \mathbb{N}$	30
Total			251

Fuente: Elaborado por los autores

4.2.1. Prácticas matemáticas asociadas al Nivel 0 de Algebrización

Las prácticas matemáticas asociadas a este Nivel se caracterizan por el trabajo en el contexto de los números naturales y racionales positivos (fracciones o en su representación decimal). Los objetos matemáticos identificados son:

- *Lenguaje*. Predomina el lenguaje numérico (cantidades hasta el 10,000), apoyado de rectas numéricas y tablas de valor posicional, bloques multi-base, entre otros. Las fracciones (propias e impropias) se representan en la recta numérica, y por medio de lenguaje gráfico, simbólico, como la parte de un todo y mediante lenguaje natural (ver figura 7). Los números decimales se encuentran en forma numérica y apoyados por representaciones gráficas (por ejemplo, en regiones).

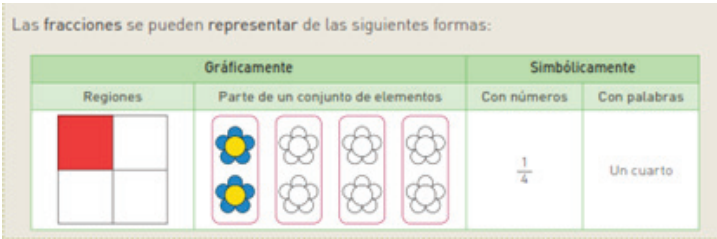


Figura 7. Representar fracciones en cuarto básico (Rodríguez et al, 2018, p. 199)

- *Definiciones-conceptos*. Algunas definiciones y conceptos de este libro se encuentran en su glosario; otros, por ejemplo el concepto de descomposición aditiva (estrategia de cálculo), se presentan como un procedimiento (ver figura 8).

Conozco y practico

Los números se pueden componer y descomponer de forma aditiva a partir de su posición o valor posicional.

	A partir de su posición	A partir de su valor posicional
Composición	$2UM + 5C + 9D + 3U = 2593$	$2000 + 500 + 90 + 3 = 2593$
Descomposición	$5427 = 5UM + 4C + 2D + 7U$	$5427 = 5000 + 400 + 20 + 7$

Figura 8. Ejemplo de descomposición aditiva (Rodríguez *et al.*, 2018, p. 36)

- *Proposiciones*. Estos objetos matemáticos se enuncian en los apartados de *Conozco y practico*, como expresiones verbales que acompañan a procedimientos o definiciones y conceptos. Por ejemplo, se afirma que "los números se pueden componer y descomponer de forma aditiva a partir de su posición o valor posicional" (Rodríguez *et al.*, 2018, p. 36).
- *Procedimientos*. Al igual que las proposiciones, estos se enuncian frecuentemente en los apartados de *Conozco y practico* a través de los lenguajes natural o numérico. En su mayoría, los procedimientos se presentan apoyados con tablas, donde se colocan los algoritmos que se espera que los estudiantes repliquen en ejercicios posteriores o bien en representaciones icónicas (pictóricas) de las operaciones a realizar (ver figura 9).

Conozco y practico

Para resolver adiciones de fracciones con igual denominador puedes representar las fracciones usando diferentes colores, y el resultado corresponderá a todo lo pintado. También puedes sumar los numeradores y conservar el denominador. Por ejemplo: $\frac{2}{6} + \frac{3}{6}$.

Representación gráfica (pictórica)

$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}$$

Representación simbólica

Figura 9. Procedimientos para la adición de fracciones con igual denominador (Rodríguez *et al.*, 2018, p. 215)

- *Argumentos.* Los argumentos también se encuentran en los apartados de *Conozco y practico*. Se enuncian como ejemplos apoyados en figuras o procedimientos de carácter pictórico. En la figura 9, el argumento que valida el procedimiento corresponde al enunciado “puedes representar las fracciones usando diferentes colores, y el resultado corresponderá a todo lo pintado”. Además, la observación es una de las principales actividades utilizada para argumentar.

Se concluye que los objetos matemáticos se expresan mediante los lenguajes natural, numérico (naturales, fracciones y números decimales), icónico y tabular. Los valores desconocidos se obtienen mediante operaciones (multiplicación y división con cantidades menores a 10,000, o sumas y restas de fracciones o decimales), es decir, operando sobre objetos particulares.

4.2.2. *Prácticas matemáticas asociadas al Nivel 1 de Algebrización*

En este caso las prácticas matemáticas asociadas al *Nivel 1 de Algebrización* para este grado educativo se identifican tanto en el eje de Nyo como en el eje de Pya. Los objetos matemáticos identificados en el texto son:

- *Lenguaje.* Se identifica el uso de los lenguajes numérico, verbal, tabular, e icónico. En las tareas de estructura donde se pide identificar o hacer uso de propiedades, los lenguajes numérico y verbal son los predominantes; por otra parte, las prácticas asociadas a SP10, SP11 y SP12 (ver tabla 3) se realizan principalmente a través de los lenguajes numérico y tabular. Las prácticas asociadas a las SP13 y SP14 se trabajan a través de lenguaje icónico (uso de balanzas) y se comienza a hacer uso de símbolos o letras (como x , y y z) para designar lo desconocido, definiéndolos como incógnitas.
- *Definiciones-conceptos.* Se presentan en los apartados de *Glosario y Conozco y practico*, generalmente mediante lenguaje natural, con apoyo en el uso de ejemplos (tablas, algoritmos, figuras, etc.). Entre las definiciones o conceptos asociados a las prácticas de SP1, se encuentran las propiedades del 0 y el 1 en la multiplicación y división, y la propiedad distributiva. Para las tareas propias del eje Pya (ver tabla 3, números 10, 11 y 12), las prácticas matemáticas movilizan los conceptos de patrón numérico de adición, patrón numérico de sustracción, patrón numérico de multiplicación, patrón

numérico de división, secuencia numérica, secuencia de figuras, crecimiento, disminución. Para las prácticas de las SP13 y SP14, los conceptos que se identifican son ecuación, incógnita, símbolo o letra (x , p , r , e , etc.), modelar, balanza equilibrada, operación inversa, lados izquierdo y derecho de la ecuación.

- *Proposiciones*. Las proposiciones se presentan en los apartados de *Conozco y practico* también mediante lenguaje natural. Generalmente, las proposiciones se enuncian al principio o al final de la sección antes mencionada. Algunas de las proposiciones que se encuentran son: “Al multiplicar cualquier número por 1, el producto es el mismo número, mientras que al multiplicar cualquier número por 0, es producto siempre es 0” (Rodríguez *et al.*, 2018, p. 85); “Para multiplicar por 4 puedes multiplicar por 2 y el resultado multiplicarlo por 2” (Rodríguez *et al.*, 2018, p. 65), entre otros.
- *Procedimientos*. Los procedimientos son numéricos, tabulares y figurales (icónicos). Para las tareas de tipo estructural se hace uso de la propiedad distributiva para obtener el resultado de una multiplicación de un número de tres dígitos (ver figura 10). En tareas funcionales los procedimientos se apoyan en el uso de tablas para determinar características como la disminución o aumento en una sucesión con el objetivo de identificar el patrón de formación, lo cual se reproduce en tareas donde se identifican patrones numéricos de adición, sustracción, división y/o multiplicación.

Conozco y practico

Para resolver una multiplicación de un número de 3 dígitos por uno de un dígito, puedes descomponer aditivamente uno de los factores según el valor posicional de cada dígito y aplicar la **propiedad distributiva**. Esta propiedad consiste en que el factor se distribuye multiplicando cada término de la multiplicación.

Por ejemplo: $332 \cdot 3$

$$\begin{aligned}
 332 \cdot 3 &= [300 + 30 + 2] \cdot 3 \\
 &= [300 \cdot 3] + [30 \cdot 3] + [2 \cdot 3] \\
 &= 900 + 90 + 6 \\
 &= 996
 \end{aligned}$$


Figura 10. Ejemplo de SP1 (Rodríguez *et al.*, 2018, p. 68)

- *Argumentos*. Estos objetos se apoyan en la observación, se presentan en lenguaje natural, auxiliándose de tablas u operaciones aritméticas, así como en figuras (iconos) que representan a los objetos matemáticos. En la figura

10 los argumentos se representan con ejemplos que afirman las proposiciones que se establecen.

En síntesis, se ha identificado que en las prácticas matemáticas intervienen símbolos (x , y y z) que refieren a ejemplos reconocidos (números, principalmente), pero no se opera con dichos objetos. Se identifican propiedades (del 0 y el 1 en la multiplicación y división, propiedad distributiva), equivalencias numéricas usando la balanza, mientras en tareas sobre generalización de patrones se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal (identificar la regla o el patrón de formación).

4.2.3. Prácticas matemáticas asociadas al Nivel 2 de Algebrización

Este *Nivel de Algebrización* se ha identificado solamente en prácticas matemáticas asociadas a las SP11, SP12, SP13 y SP14 (ver tabla 3) presentadas en el eje Pya. Se describen los objetos matemáticos identificados en el texto para este *Nivel*:

- *Lenguaje*. Se comienza a hacer uso de lenguaje simbólico-literal en situaciones-problema asociadas a la resolución y/o representación de ecuaciones ($x \pm B = C$, $B \pm x = C$ con x, B y $C \in \mathbb{N}$) e inecuaciones ($x \pm B < C$, $x \pm B > C$, con x, B y $C \in \mathbb{N}$). Predomina el lenguaje natural, seguido de los lenguajes numérico y tabular, se observa además el uso de lenguaje icónico (figural) para representar sucesiones o ecuaciones e inecuaciones (ver figura 11).



Figura 11. Ejemplo de SP13 (Rodríguez et al, 2018, p. 105)

- *Definiciones-conceptos.* Estos objetos matemáticos se encuentran en las secciones *Glosario* y *Conozco y practico*. Se presentan mediante lenguaje natural apoyados por representaciones de tipo simbólico-literal, tablas e iconos que permiten ejemplificarlas. Entre las definiciones se encuentran: ecuación, incógnita, modelar, operación inversa, patrón numérico, secuencia, valor encontrado, inecuación, balanza en desequilibrio, conjunto de números como solución. La figura 12 presenta la definición de inecuación.

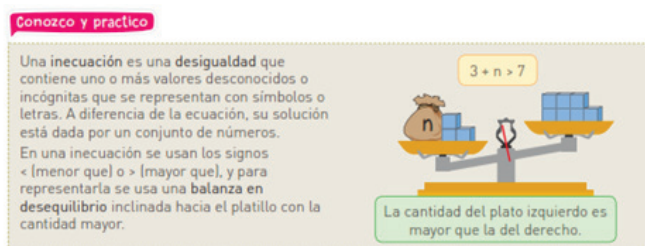


Figura 12. Definición del concepto de inecuación (Rodríguez *et al.*, 2018, p. 110)

- *Proposiciones.* Se presentan en las secciones *Conozco y practico*. Aparecen mediante lenguaje natural, y se asocian con aspectos referentes a la resolución de ecuaciones o inecuaciones, así como con la identificación de patrones. Un ejemplo asociado a la identificación de patrones es “cuando la diferencia entre 2 números consecutivos de una secuencia numérica no es siempre la misma, puedes identificar un patrón de multiplicación o división” (Rodríguez *et al.*, 2018, p. 97).
- *Procedimientos.* Aquí destacan aquellos donde las estrategias se dirigen a la manipulación de las incógnitas. Estas estrategias son aquellas donde se hace uso de la operación inversa para resolver ecuaciones de la forma $x \pm B = C$, $B \pm x = C$, con $x, B, C \in \mathbb{N}$ (ver figura 13). Otra de estas estrategias versa en la sustitución del valor encontrado para comprobar las soluciones; para el caso de las inecuaciones se encuentran los procedimientos de ensayo y error y el uso de balanzas, mientras que para la comprobación se recurre a la sustitución del conjunto de valores encontrado en la representación simbólico-literal.

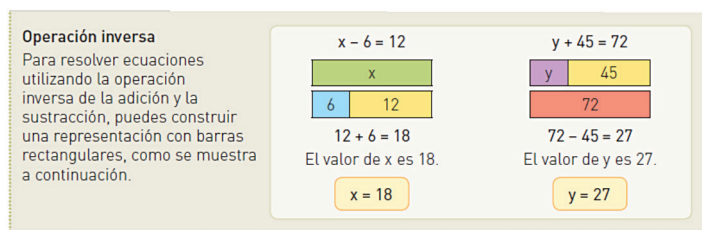


Figura 13. Operación inversa como estrategia para resolver ecuaciones (Rodríguez *et al.*, 2018, p. 103)

- *Argumentos.* Se presentan mediante los lenguajes natural, numérico e icónico. Los argumentos se basan en la observación y en las operaciones numéricas para refutar o no los resultados obtenidos. La figura 14 muestra un argumento apoyado en elementos visuales y numéricos.

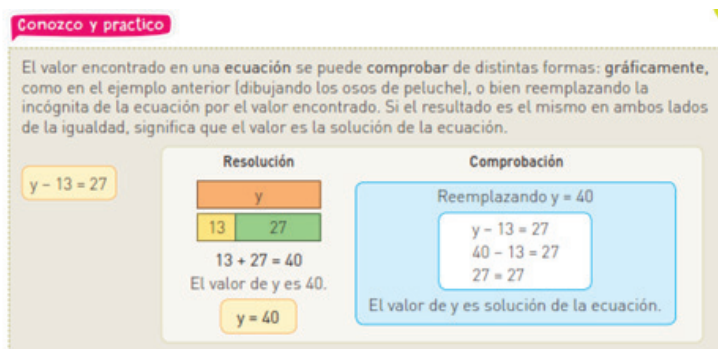


Figura 14. Ejemplo de SP13 (Rodríguez *et al.*, 2018, p. 109)

Sintéticamente, se identificó la intervención de cantidades indeterminadas (lo desconocido) expresadas mediante lenguaje simbólico (x o y) que refiere a los intensivos reconocidos, aunque ligados a contextos específicos. Los procedimientos o estrategias de resolución se comienzan a direccionar a la manipulación de tales incógnitas para resolver ecuaciones e inecuaciones de las formas $x \pm B = C$, $B \pm x = C$, $x \pm B < C$, $x \pm B > C$, con $x, B, C \in \mathbb{N}$. Se identifican tareas donde se reconoce la generalidad (patrones numéricos), aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.

4.3. RESULTADOS DE LOS ANÁLISIS REALIZADOS A LOS TEXTOS DE 2º, 3º, 5º Y 6º BÁSICO

Se presentan, grosso modo, los resultados obtenidos del análisis de los textos para los niveles educativos de 2º, 3º, 5º y 6º básico. Para el segundo básico se han identificado 12 tipos de problemas asociados al desarrollo del RAE propuestos tanto en el eje de Nyo como el de Pya. Las prácticas matemáticas analizadas se asocian solo a los *Niveles 0 y 1*; a diferencia del texto de 1º básico, en el cual existen prácticas matemáticas promovidas, en el eje Nyo, propias del *Nivel 1*. En las prácticas matemáticas asociadas al *Nivel 0*, predomina el lenguaje de tipo numérico, seguido del lenguaje natural con el cual se describen conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos; el lenguaje icónico sirve como apoyo visual, principalmente para los procedimientos. La noción de lo desconocido se vincula al trabajo aritmético (sentencias numéricas, por ejemplo, $40 + 18 = \square$) y el valor se obtiene como resultados de operaciones (sumas o restas) sobre objetos particulares (números).

Con respecto a las prácticas matemáticas asociadas al *Nivel 1*, los objetos matemáticos se presentan mediante lenguajes natural, numérico, icónico y tabular. En tareas estructurales se reconocen propiedades como la conmutativa (por ejemplo, se le solicita al estudiante que observe la sentencia $12 + 5 = 5 + 12$ y pinte V si la sentencia es verdadera o F si es falsa, argumentando su respuesta), así como equivalencias numéricas (presentadas generalmente haciendo uso del concepto de balanza). Los patrones se presentan mediante los lenguajes numérico e icónico y la generalidad se reconoce en un lenguaje diferente al simbólico-litera.

En el texto de 3º básico se caracterizaron 15 tipos de problemas, las prácticas vinculadas a éstos se asocian a los *Niveles 0, 1 y 2 de Algebrización*. Las prácticas matemáticas de los *Niveles 0 y 1* comparten características de las antes descritas, pero para este nivel educativo se amplía el estudio a las operaciones de multiplicación y división, los números naturales se trabajan hasta el 1000; se comienza a hacer uso de la recta numérica y se inicia el estudio de las fracciones (representación y comparación, respectivamente).

En las prácticas del *Nivel 2 de Algebrización* se introducen nociones como ecuación, patrón, igualdad y desigualdad. Las tareas se asocian a la descripción y registro de patrones en secuencias numéricas y figurales, así como en tablas de 100, mediante estas tareas se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-litera. Se representan ecuaciones (mediante

balanzas y sentencias del tipo $a + \square = b$, $\square + a = b$, donde a y b son números naturales) resueltas mediante la suma y la resta en contextos de resolución de problemas. Las incógnitas se representan mediante figuras (cuadrados, triángulos, círculos, entre otros).

Para 5° básico se han caracterizado 23 tipos de problemas asociados a prácticas matemáticas que movilizan objetos hasta del *Nivel 3 de Algebrización*, esto implica el trabajo en contextos algebraicos. La actividad aritmética (prácticas del *Nivel 0*) se desarrolla en contextos con números naturales (hasta el 1.000.000.000) y números racionales positivos (representados mediante fracciones y números decimales). El valor de lo desconocido se obtiene como resultado de operaciones sobre números o representaciones icónicas (para situaciones asociadas a las fracciones). En el caso de las fracciones y números decimales las operaciones se restringen a la suma y resta, mientras que en el contexto de los números naturales se recurre a las cuatro operaciones básicas.

Con respecto a los *Niveles* proto algebraicos (*Niveles 1 y 2*), se identifican en ambos ejes. Para el *Nivel 1*, las prácticas matemáticas vinculadas a tipos de problemas en el eje Nyo versan sobre el trabajo con propiedades de los números y operaciones (por ejemplo, aplicar e identificar las propiedades del 0 y 1 en las operaciones de multiplicación y división, o aplicar las propiedades asociativa y distributiva para calcular productos), y además se identifica la noción de equivalencia numérica (fracciones equivalentes). Para el eje Pya, las tareas consisten en identificar patrones, principalmente numéricos, y completar secuencias numéricas (términos muy próximos al último elemento dado de la secuencia).

El *Nivel 2* solo se identifica en prácticas matemáticas propuestas en el contexto del eje Pya. Las prácticas asociadas tratan sobre identificar patrones y completar secuencias, o bien determinar elementos de la secuencia dada la regla de formación, observándose la formulación de la regla general, expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal. Predomina el lenguaje natural, seguido de los lenguajes numérico, icónico y tabular. En tareas de tipo estructural, se identifica el uso de lenguaje simbólico-literal y se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones de la forma $x \pm B = C$, $B \pm x = C$, así como inecuaciones de la forma $x \pm B < C$, $x \pm B > C$, con x, B y $C \in \mathbb{N}$.

Finalmente, el *Nivel 3* se asocia con el eje Pya, específicamente con situaciones-problema donde la consigna es elaborar transformaciones de expresiones simbólicas, en particular reducirlas conservando la equivalencia (ver figura 15). Predominan los lenguajes simbólico e icónico, los conceptos-definiciones se vinculan con expresiones algebraicas, términos semejantes, variable. Los

procedimientos se apoyan en recursos visuales para ejemplificar, entre otros, la reducción de términos algebraicos.

2 Reduce las expresiones y completa.

a. $2a + 3a =$

Figura 15. Tipo de problema Representar y transformar expresiones algebraicas (Kheong *et al.*, 2015/2017, p. 259)

Los resultados para el 6° básico son análogos, en términos de los *Niveles 0, 1 y 2 de Algebrización*, a los obtenidos en el 5° básico. En cuanto a la caracterización de tipos de problemas, para este nivel educativo se han propuesto 28 categorías. En el contexto del eje Nyo se introducen conceptos como múltiplos y factores, números primos y compuestos, mínimo común múltiplo, razones y porcentajes; en el contexto de los números decimales se introducen las operaciones multiplicación y división; predomina el trabajo en contextos aritméticos, identificándose situaciones-problema asociadas al *Nivel 1 de Algebrización* (actividad matemática ligada a la identificación de propiedades de estructura).

En cuanto al *Nivel 3 de Algebrización*, se generan objetos intensivos representados de manera simbólico-literal, y se opera con ellos (expresiones algebraicas, principalmente) conservando la equivalencia; se generan reglas canónicas mediante lenguaje simbólico-literal y apoyados en tablas de valores, se evidencia actividad algebraica consolidada. Entre los conceptos destacan término general, regla, posición del término (n), relación, valor del término, lenguaje algebraico. Los argumentos se basan en el uso de propiedades, por ejemplo, la propiedad conmutativa ($a + b = b + a$) y en los contextos para verificar los valores obtenidos. Predomina el lenguaje algebraico, seguido de los lenguajes natural, numérico, icónico y tabular.

Resumiendo, se puede establecer que el currículo de Educación Básica en Chile, de primero a sexto básico, promueve prácticas matemáticas asociadas a los *Niveles 0, 1, 2 y 3 de Algebrización*. Como podría presuponerse, en el eje Pya se identificaron *prácticas matemáticas* en *Niveles consolidados de Algebrización*, en los cuales se establecen términos generales de una secuencia, así como la reducción de expresiones algebraicas, desarrolladas a través de lenguaje algebraico. En este eje se identificaron *prácticas* en *Niveles menores de Algebrización*

(Niveles 0, 1 y 2). En ellas no se observa la manipulación ni el uso del lenguaje algebraico, sino que se establece, por ejemplo, a través de lenguaje numérico o materno, la generalización de patrones. Uno de los hallazgos más relevantes fue determinar que algunas de las *prácticas matemáticas* del eje Nyo, también son promotoras del RAE, aunque no en *Niveles consolidados de Algebrización*, sino en *Niveles Proto-algebraicos* (Niveles 1 y 2). A pesar de que hay un esfuerzo por introducir el álgebra temprana desde los primeros cursos, el tipo de tareas y *prácticas* son mínimas en cantidad comparadas con las tareas y *prácticas* de naturaleza aritmética en este eje, siendo las prácticas de *Nivel 0* las que mayor presencia tienen en el currículo. La figura 16 muestra la cuantificación de *prácticas* de cada uno de los textos por *Nivel de Algebrización*.

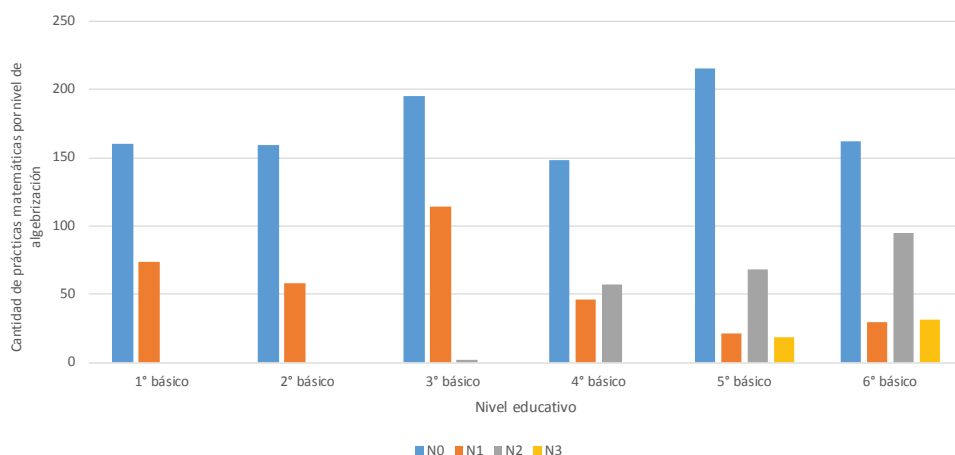


Figura 16. Distribución de prácticas matemáticas por nivel educativo y *Nivel de Algebrización*

La tabla 4 presenta la tipología de problemas identificadas en los textos de 2°, 3°, 5° y 6° básico, así como el número de prácticas matemáticas por *Nivel de Algebrización*.

Tabla 4. Prácticas matemáticas de referencia por tipo de problemas y *Nivel de Algebrización*

Eje	SP	Tipo de problemas	Nivel educativo				Total
			2º	3º	5º	6º	
Números y operaciones	1	Aplicar estrategias de cálculo mental	20 _{N0} 1 _{N1}	33 _{N0}	21 _{N0} 7 _{N1}	1 _{N1}	83
	2	Comparar cantidades (mayor que, menor que o igual que, es más que, es menos que, <, >, =).	17 _{N0}	26 _{N0} 4 _{N1}	22 _{N0}	7 _{N0}	76
	3	Comparar y ordenar cantidades (mayor que, menor que o igual que, es más que, es menos que, <, >, =)	10 _{N0}	9 _{N0}	10 _{N0}	1 _{N0}	30
	4	Descomponer cantidades numéricas en factores primos				2 _{N0}	2
	5	Determinar el mínimo común múltiplo de cantidades numéricas				3 _{N0}	3
	6	Determinar múltiplos, factores y divisores de cantidades numéricas				7 _{N0}	7
	7	Estimar cantidades por medio del redondeo de cifras			29 _{N0}		29
	8	Identificar la condición para saber cuándo un elemento pertenece a un conjunto y resolver problemas	2 _{N0}				2
	9	Identificar los múltiplos de números naturales				1 _{N0}	1
	10	Identificar propiedades de las operaciones	16 _{N1}	8 _{N1}	1 _{N1}	4 _{N1}	29
	11	Identificar reglas y/o propiedades al trabajar con conjuntos de números (decimales, primos, compuestos, razones o porcentajes)				3 _{N1}	3
	12	Identificar reglas y/o propiedades del mínimo común múltiplo				1 _{N1}	1
	13	Identificar y representar mediante un número la cardinalidad de un conjunto	21 _{N0}	4 _{N0}	1 _{N0}		26
	14	Operar cantidades numéricas (suma, resta, multiplicación y/o división)	36 _{N0}	21 _{N0}	52 _{N0}	59 _{N0} 1 _{N1}	169
	15	Realizar conversiones entre sistemas numéricos		4 _{N0}	7 _{N0}		11
	16	Representar e identificar fracciones equivalentes			6 _{N1}	10 _{N1}	12
	17	Representar problemas a través de expresiones numéricas			1 _{N0}		1
	18	Representar y resolver problemas a través de números racionales positivos (fracciones y/o decimales)			58 _{N0}	49 _{N0} 2 _{N1}	109

Números y operaciones	19	Representar y resolver problemas haciendo uso de razones y/o porcentajes				23_{N0}	23
	20	Resolver problemas a través de una de las operaciones básicas	48_{N0}	96_{N0}	26_{N0}	32_{N0} 1_{N1}	203
	21	Resolver problemas haciendo uso de dos o más de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y/o división)			13_{N0}	5_{N0} 1_{N1}	19
	22	Resolver problemas haciendo uso del mínimo común múltiplo				9_{N0}	9
Patrones y álgebra	23	Determinar los elementos de una secuencia dada la regla de formación	17_{N1}	1_{N0} 29_{N1} 2_{N2}	4_{N1} 6_{N2}	10_{N1} 3_{N3}	72
	24	Identificar expresiones algebraicas y/o numéricas				1_{N2}	1
	25	Identificar la regla (patrón) de formación	2_{N1}	12_{N1}	2_{N1}	2_{N1} 1_{N2} 5_{N3}	24
	26	Identificar la regla (patrón) de formación y completar la secuencia	12_{N1}	35_{N1}	7_{N1} 5_{N2}	7_{N1} 12_{N2} 8_{N3}	81
	27	Identificar la representación de ecuaciones de la forma $x \pm B = C$, $B \pm x = C$ con $x, B, C \in \mathbb{N}$		1_{N1}		1_{N2}	2
	28	Representar ecuaciones de la forma $x \pm B = C$, $B \pm x = C$ con $x, B, C \in \mathbb{N}$		4_{N1}		5_{N2}	9
	29	Representar y resolver ecuaciones de la forma $x \pm B < C$, $x \pm B > C$, con x, B y $C \in \mathbb{N}$		12_{N1}	18_{N2}	34_{N2}	64
	30	Representar y resolver inecuaciones de la forma $x \pm B = C$, $B \pm x = C$ con x, B y $C \in \mathbb{N}$			7_{N2}		7
	31	Representar y transformar expresiones algebraicas			19_{N3}	2_{N2}	21
	32	Representar y/o resolver problemas a través de expresiones algebraicas			11_{N2}	11_{N2} 15_{N3}	37
	33	Resolver (implícitamente) ecuaciones de la forma $x \pm B = C$ con $x, B, C \in \mathbb{N}$	11_{N1}				11
	34	Resolver ecuaciones de la forma $x \pm B = C$, $B \pm x = C$ con x, B y $C \in \mathbb{N}$		9_{N1}	3_{N2}	17_{N2}	29
	35	Resolver inecuaciones de la forma $x \pm B < C$, $x \pm B > C$, con x, B y $C \in \mathbb{N}$			2_{N2}		2
	36	Evaluar y/o comparar expresiones algebraicas			16_{N2}	8_{N2}	24

Fuente: Elaboración de los autores

5. REFLEXIONES FINALES

Los resultados de esta investigación ofrecen información interesante sobre las características del RAE en el currículo de Educación Básica en Chile. Se ha evidenciado que no sólo las *prácticas matemáticas* asociadas al eje de Pya son promotoras de este tipo de razonamiento, pues los resultados apuntan a la existencia de *prácticas matemáticas* en el contexto aritmético que podrían catalogarse como promotoras del RAE, en *Niveles incipientes de Algebrización*. Entre las características identificadas del Álgebra temprana en el currículo de Chile, destacan conceptos como generalización de patrones, el desarrollo y manipulación del lenguaje simbólico-literal, y la resolución de ecuaciones e inecuaciones de primer grado (Molina, 2009). Otro resultado versa sobre la existencia de tareas transversales (ver SP1, SP23, SP25, SP26, SP29, SP32 y SP34 en tabla 4), es decir, tipos de SP presentes en dos o más cursos, y donde sus *prácticas matemáticas* progresan de lo concreto a lo pictórico (icónico) y, de ahí, a lo simbólico (abstracto), lo que, además, muestra que existe una progresión en los *Niveles de Algebrización*.

Además, se ha observado que un tipo de problema admite una o más *prácticas matemáticas* de referencia, las cuales pueden ser catalogadas en un *Nivel* u otro de *Algebrización*. Con esto se reafirma lo señalado por Godino y colaboradores (2014), “el nivel se asigna, no a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que se realiza, por lo que dependiendo de la manera en que se resuelve una tarea, la actividad matemática puede ser clasificada en un nivel u otro” (p. 206). Si bien se ha identificado que el currículo de educación básica en Chile promueve *prácticas matemáticas* en *Niveles* consolidados de *Algebrización*, en la figura 16 se observa la poca presencia de este tipo de prácticas y el gran desequilibrio que existe entre el *Nivel 0* y el resto de los *Niveles de Algebrización*.

Se esperaría que los *Niveles 1, 2 y 3* se equilibraran de manera progresiva a lo largo de los seis niveles educativos, respecto de la cantidad de *prácticas* asociadas al *Nivel 0*. Sería conveniente aumentar en los textos el número de situaciones-problemas cuya resolución admita el uso de diversos *Niveles de Algebrización*. Asimismo, sería interesante que los libros destinados al profesor (Guía del Docente) proporcionen ejemplos sobre cómo, a partir de una determinada SP, del tipo ‘identificar la regla (patrón) de formación y completar la secuencia’ o ‘aplicar estrategias de cálculo mental’, se pueda ir variando la respuesta (i.e., uso de distintas *prácticas matemáticas* para la solución) buscando promover distintos niveles de RAE.

Como se ha planteado anteriormente, el objetivo de este estudio se centra en el análisis de las *prácticas matemáticas* de referencia (las propuestas por el MINEDUC) en los libros de texto, y no en las *prácticas matemáticas personales* de los estudiantes. Ello se justifica en que, si bien es importante conocer y analizar este último tipo de *prácticas*, el análisis de las *prácticas matemáticas* de referencia da conocimiento sobre cómo los estudiantes deberían resolver las tareas que se plantean en los textos de estudio supeditados a lo que se estipula en las Bases Curriculares para Educación Básica de Chile (MINEDUC, 2018). Además, se considera que la caracterización aquí realizada puede ser útil tanto para profesores en activo, como para futuros profesores de educación básica, ya que se considera la selección de tareas (problemas, ejercicios, actividades) propuestas en el currículo (planes de estudio, libro de texto), como una actividad característica de la práctica de enseñar matemáticas (Watson y Thompson, 2015). Se espera que esta caracterización permita a los investigadores y profesores contar con material para el diseño y desarrollo de SP vinculadas a la promoción del RAE, adecuadas al curso donde se propongan, e identificar así cuáles serían las *prácticas matemáticas* que se deberán poner en juego para promover un *Nivel* u otro de *Algebrización*.

Aunque a nivel internacional existe un gran número de investigaciones en la línea del Álgebra temprana, en el contexto chileno la realidad es distinta, ya que los estudios relacionados con este tema se circunscriben al trabajo de Mejías y colaboradores (Mejías, 2019; Mejías y Alsina, 2020), debido a la relativamente reciente integración del álgebra (desde 2012) a la Educación Básica, su adecuación curricular y posterior implementación (MINEDUC, 2018).

Los *Niveles de Algebrización* son considerados como una herramienta teórico-metodológica con gran potencial para predecir la actividad matemática asociada al desarrollo del RAE; sin embargo, el análisis desarrollado ha mostrado la necesidad de refinar los *Niveles de Algebrización* ya que existen *prácticas matemáticas* que no responden en su totalidad a las características de un *Nivel* u otro. Por ejemplo, en el estudio del objeto matemático patrón en los primeros niveles (1° y 2°, respectivamente), existen *prácticas matemáticas* en las que se trabaja vía ejemplos particulares que buscan reconocer el patrón de formación, relacionando un término con el siguiente (o con elementos cercanos al último elemento presentado en una secuencia), que permiten identificar aspectos relacionados con la generalización, expresados en un lenguaje diferente al simbólico-literal. Este ejemplo evidencia que, en respuestas esperadas o de los

estudiantes, es posible adoptar de forma articulada los elementos de los *Niveles 0 y 1 de Algebrización*.

Se desconoce si las tareas propuestas en el currículo chileno cumplen con la generación de bases sólidas para el desarrollo del pensamiento algebraico en niveles educativos superiores a los aquí analizados. Se reconoce que los resultados obtenidos en esta investigación han sido fruto del análisis de textos del estudiante propuestos por el MINEDUC, existiendo otros textos autorizados para el estudiante de distribución privada, los cuales no fueron analizados en esta investigación. Queda como posible línea de continuidad estudiar si en ellos existen otro tipo de *prácticas matemáticas* asociadas al razonamiento algebraico promovido en la Educación Básica en Chile.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo desarrollado en el marco del Proyecto Fondecyt Regular N° 1200005, financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

REFERENCIAS

- Aké, L. P. y Godino, J. D. (2018). Análisis de tareas de un libro de texto de primaria desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Educación Matemática*, 30(2), 171-201. <https://doi.org/10.24844/em3002.07>
- Ayala, C., Benavides, M. y Frías, M. (2017). *Texto del Estudiante Matemática 2º Básico*. Ediciones SM Chile.
- Cai, J. (2004). Developing algebraic thinking in the earlier grades: A case study of the Chinese elementary school curriculum. *The Mathematics Educator (Singapore)*, 8(1), 107-130.
- Cai, J. y Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early Algebrización: A Global Dialogue from Multiple Perspectives*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4>
- Carraher, D. W. y Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-705) Information Age Publishing, NCTM.
- Carraher, D. W. y Schliemann, A. L. (2019). Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5 / El pensamiento algebraico temprano y los estándares matemáticos en la educación primaria (6-12 años) en Estados Unidos.

- Journal for the Study of Education and Development: Infancia y Aprendizaje*, 42(3), 479-522. <https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638570>
- Castro, W. F., Godino, J. D. y Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 25, 73-88.
- Castro, W. F., Martínez-Escobar, J. D. y Pino-Fan, L. (2017). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar: análisis de libros de texto y dificultades de los estudiantes. *REDIMAT: Journal of Research in Mathematics Education*, 6(2), 164-191. <https://doi.org/10.4471/redimat.2017.1981>
- Common Core State Standards Initiative. (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Autor. http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf
- Cortés, C. (2018). *Matemática 1º año básico. Texto del Estudiante*. Ediciones Cal y Canto.
- Creswell, J. W. (2009) Qualitative procedures. En J. H. Creswell (Ed.), *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches* (3ra ed., pp. 173-202). SAGE.
- Espinoza, R., Pochulu, M. y Jorge, M. (2013). El análisis didáctico de textos escolares ¿qué herramientas proveen las diferentes líneas y enfoques en educación matemática? En E. Rodríguez (Ed.), *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Congreso llevado a cabo en Montevideo, Uruguay.
- Fong, N. S. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of the Singapore primary mathematics curriculum. *The Mathematics Educator (Singapore)*, 8(1), 39-59.
- García-Mateos, A. y Caballero-García, P. A. (2005). *La tecnología digital en el aula: un instrumento al servicio de los procesos de enseñanza-aprendizaje*. Universidad Camilo José Cela.
- Gil, J. F. (1994). *Análisis de Datos Cualitativos. Aplicaciones a la investigación educativa*. PPU.
- Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965>
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education*, 39(1), 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 26(42B), 483-511. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200005>

- Godino, J. D. y Font, V. (2003). *Razonamiento Algebraico y su Didáctica para Maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada.
- Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L. P., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105>
- Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. (ED441664). ERIC. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED441664.pdf>
- Kheong, F. H., Soon, G. K. y Ramakrishnan, C. (2017). *Matemática 5º Básico. Texto del Estudiante* (P. Q. Leong y R. Hidalgo, Trans.). Santillana del Pacífico. (Trabajo original publicado en 2015)
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 390-419). National Council of Teachers of Mathematics.
- Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. y Ng, S. (2016). *Early Algebra: Research into its Nature, its Learning, its Teaching*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2>
- Lacampagne, C. B., Blair, W. y Kaput, J. (Eds.). (1995). *The Algebra Initiative Colloquium Volume 1: Plenary and Reactor Papers*. Office of Educational Research and Improvement.
- León, O. G. y Montero, I. (2003). Metodologías cualitativas. En O. G. León y I. Montero (Eds.), *Métodos de Investigación en Psicología y Educación* (3ra ed., pp. 138-177). McGraw-Hill.
- Lew, H.-C. (2004). Developing algebraic thinking in early grades: Case study of Korean elementary school mathematics. *The Mathematics Educator (Singapore)*, 8(1), 88-106.
- Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: A definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 113-120. [https://doi.org/10.1016/0732-3123\(95\)90026-8](https://doi.org/10.1016/0732-3123(95)90026-8)
- Maldonado, L. y Castro, C. (2016). *Matemática 6º Básico. Texto del Estudiante*. Santillana.
- Mejías, C. A. (2019). *Evaluación de los conocimientos para la enseñanza del álgebra en profesores en ejercicio de educación primaria* (Tesis doctoral, Universidad de Girona). Repositorio Digital de la Universitat de Girona. <https://dugi-doc.udg.edu/handle/10256/17137>
- Mejías, C. y Alsina, À. (2020). La incorporación del Early Algebra en el currículo de educación primaria. *NÚMEROS: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 105, 81-102.
- Ministerio de Educación de Chile. (2018). *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico*. Autor.

- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 3(3), 135-156.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Autor.
- Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D. y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *PARADIGMA*, 34(2), 123-150. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2013.p123-150.id522>
- Rodríguez, R., García, D., Romante, M. y Verdejo, A. (2018). *Texto del Estudiante. Matemática 4º Básico*. Ediciones SM Chile.
- Rojano, T. y Sutherland, R. (2001). Arithmetic world-algebra world. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (vol. 1, pp. 515-522). The University of Melbourne.
- Urra, A., Córdova, C. y Quezada, C. (2017). *Matemática 3º Año Básico. Texto del Estudiante*. Ediciones Cal y Canto.
- Wagner, S. y Kieran, C. (1989). An agenda for research on the learning and teaching of algebra. En C. Kieran y S. Wagner (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra: The Research Agenda for Mathematics Education, Volume 4* (pp. 220-237). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315044378>
- Watanabe, T. (2008). Algebra in elementary school: A Japanese perspective. En C. E. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics: Seventieth Yearbook* (pp. 183-194). NCTM.
- Watson, A. y Thompson, D. R. (2015). Design issues related to text-based tasks. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *Task Design in Mathematics Education: An ICMI Study 22* (pp. 143-190). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_5

ANA LUISA LLANES LUNA

Dirección postal: Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos.
Lord Cochrane 1039, Osorno, Chile

Teléfono: (+56) 642333063

Conceptualizaciones de la pendiente en el currículum colombiano de matemáticas

Conceptualizations of slope in Colombian intended mathematics curriculum

Crisólogo Dolores Flores,¹
Gustavo Andrés Mosquera García²

Resumen: Este artículo da cuenta de una investigación enfocada en explorar qué conceptualizaciones de la pendiente se promueven en el currículum colombiano de matemáticas. Se utilizó el método de Análisis de Contenido a través del cual se examinaron dos documentos curriculares: Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y Los Derechos Básicos de Aprendizajes en Matemáticas. Como marco referencial se utilizaron las conceptualizaciones de la pendiente identificadas por Stump (1999) y Moore-Russo *et al.* (2011). Los resultados indican que en la primaria se enfatizan las conceptualizaciones propiedad funcional y situación del mundo real, en secundaria las del coeficiente paramétrico e indicador de comportamiento, en bachillerato la propiedad funcional, situación del mundo real y la concepción en cálculo. El currículum colombiano tiene una tendencia marcada hacia el desarrollo del pensamiento variacional. Este trabajo aporta información acerca de cómo se prevé la enseñanza de la pendiente en Colombia, resultados que son comparados con lo que prevén al respecto el currículum norteamericano y mexicano, los resultados pueden ser útiles en las

Fecha de recepción: 31 de mayo de 2021. **Fecha de aceptación:** 14 de junio de 2021.

¹ Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Chilpancingo, Guerrero, México, cdolores2@gmail.com; cdolores@uagro.mx, orcid.org/0000-0002-2748-6042

² Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Chilpancingo, Guerrero, México, gmosquera@uagro.mx, orcid.org/0000-0002-3664-3716

reformas curriculares para prever consecuencias no deseadas en el aprendizaje de este concepto.

Palabras clave: *Curriculum colombiano de matemáticas, conceptualizaciones de la pendiente, nivel primario, nivel secundario, nivel bachillerato.*

Abstract: This article reports on an investigation focused on exploring which conceptualizations of slope are promoted in the Colombian intended mathematics curriculum. The Content Analysis method was used through which two curricular documents were examined: The Basic Standards of Competence in Mathematics and The Basic Learning Rights in Mathematics. As a reference framework, the slope conceptualizations identified by Stump (1999) and Moore-Russo *et al.* (2011) were used. The results indicate that in primary school functional property and real-world situation conceptualizations are emphasized, in secondary school those of the parametric coefficient and behavior indicator, in high school functional property, real world situation and the conception in calculus. The Colombian curriculum has a marked tendency towards the development of variational thinking. This work provides information about how the teaching of slope is expected in Colombia, results that are compared with what the North American and Mexican curricula provide in this regard, the results can be useful in curricular reforms to anticipate unwanted consequences in learning of this concept.

Keywords: *Colombian intended mathematics curriculum, conceptualizations of slope, Elementary school level, Middle level, High school level.*

1. INTRODUCCIÓN

Los estudios sobre la pendiente provienen del interés por investigar qué conocimiento tienen los profesores y estudiantes acerca de este concepto. Ese conocimiento se ha condensado en once conceptualizaciones descubiertas por Stump (1999, 2001b) y enriquecidas por Moore-Russo *et al.* (2011). Investigaciones realizadas sobre esta base han puesto al descubierto, por una parte, que los profesores prefieren usar conceptualizaciones asociadas a situaciones físicas que situaciones funcionales (Stump, 1999) y, además, tienen perspectivas limitadas sobre la pendiente en

contextos del mundo real (Nagle *et al.*, 2017); por otra, que el conocimiento sobre la pendiente de estudiantes universitarios tiende a girar en torno a lo procedimental con poca relación con la covariación o la aplicación a situaciones del mundo real (Nagle y Moore-Russo, 2013a), asimismo, transfieren un conocimiento limitado de la pendiente en la resolución de tarea en contextos como de la estadística (Nagle *et al.*, 2017).

El concepto de pendiente es complejo y por tanto difícil de comprender. Complejo por la amplia variedad de significados que se le asocian en su enseñanza-aprendizaje que van desde el uso cotidiano o común (p. ej., la pendiente como una “cuesta”: “cuesta abajo”, “cuesta arriba”), pasando por sus aplicaciones, hasta sus once conceptualizaciones (Moore-Russo *et al.*, 2011; Stump, 1999). Por ello, la investigación también ha puesto atención en el estudio de las dificultades, confusiones y conceptos erróneos que tienen los estudiantes, tales como: confundir la altura con la pendiente de una recta (Leinhardt *et al.*, 1990), calcular la pendiente como “aumento en x ”/ “aumento en y ” en lugar de “aumento en y ”/ “aumento en x ” (Cho y Nagle, 2017) o, bien, considerar los términos pendiente, razón de cambio e inclinación como conceptos diferentes y sin conexión (Teuscher y Reys, 2010). En la última década, algunos investigadores (Cheng, 2010; Demir, 2018; Moore-Russo *et al.*, 2011) han enfocado la atención en el proceso de aprendizaje del concepto en cuestión, y otros han estudiado la pendiente en los libros de texto (Choy *et al.*, 2015; Dolores e Ibáñez, 2020; Hong y Choi, 2018). Sin embargo, de acuerdo con la literatura consultada, se sabe poco sobre la pendiente en el currículum. Hasta el momento se han publicado solo tres investigaciones: dos que estudian esta situación en Estados Unidos de Norteamérica (Stanton y Moore-Russo, 2012; Nagle y Moore-Russo, 2014) y una en México (Dolores *et al.*, 2020). Todas ellas toman como referente las once conceptualizaciones de la pendiente previamente identificadas (Stump, 1999; Moore-Russo *et al.*, 2011).

Para el caso de Norteamérica, Stanton y Moore-Russo (2012) examinaron los estándares matemáticos de los cincuenta estados de USA, encontraron que ocho conceptualizaciones están presentes en más de la mitad de los estados; la razón geométrica es predominante, seguida de la de indicador de comportamiento, propiedad determinante y propiedad funcional. En cambio, Nagle y Moore-Russo (2014) compararon los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (PSSM) y los Estándares Estatales Básicos Comunes para Matemáticas (CCSSM), y encontraron que el número total de referencias de pendiente en el plan de estudios de primaria y secundaria fue similar para PSSM (57) y CCSSM

(53), y que la propiedad funcional, constante lineal y situación del mundo real son las conceptualizaciones dominantes.

Por otra parte, Dolores *et al.* (2020) al examinar las conceptualizaciones de la pendiente en el currículo mexicano encontraron énfasis de la propiedad funcional, del coeficiente paramétrico y de la situación del mundo real. Descubrieron también una discontinuidad en el currículo, ya que se introduce la pendiente en el grado 9 y a pesar de que se estudian funciones lineales en el grado 10 se omite su utilización. En este trabajo se hizo notar la escasa atención de la pendiente como razón geométrica, contrario a lo que sucede en el currículo norteamericano. Además, en el currículo mexicano se enfatiza el coeficiente paramétrico muy utilizado en las manipulaciones algebraicas, hallazgo que da soporte a un enfoque más procedimental que conceptual de la pendiente en este currículo.

Las conceptualizaciones de la pendiente por ser procesos o acciones que pueden intervenir en la formación de un concepto, según la literatura consultada son parte de la enseñanza de la matemática del nivel medio básico y medio superior. De acuerdo con Nagle *et al.* (2019) y Nagle y Mooore-Russo (2013b) pueden contribuir en la formación de esquemas en los estudiantes y así desarrollar su comprensión. Estos procesos en general son previstos en el currículo, por ello en este trabajo nos proponemos dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué conceptualizaciones de la pendiente se promueven en el currículo colombiano de matemáticas y cuáles son las predominantes? Las respuestas a esta pregunta nos permitirán obtener un primer acercamiento de cómo se pretende sea enseñada la pendiente en este país sudamericano, también puede aportar información para quienes hacen estudios internacionales sobre este concepto con fines de diagnóstico, de mejora o incluso de reforma curricular.

2. MARCO REFERENCIAL

Este artículo adopta como referentes esenciales: al currículo y a las conceptualizaciones de la pendiente. El término currículo se utiliza de diferentes formas en todo el mundo, sin embargo, es posible distinguir entre elementos curriculares que están oficialmente sancionados (el currículo oficial o previsto), aquellos que están en los libros de texto o materiales para la enseñanza (currículo potencial) o los que inciden en su operacionalización mediante la práctica llamado también currículo operativo o enseñado (Dolores, 2012). En este estudio interesa el currículo oficial.

Para conceptualizar aspectos del currículum recurrimos a Remillard y Heck (2014). Ellos plantean que el currículum oficial se compone de metas y objetivos, del contenido de las evaluaciones consiguientes y el currículum diseñado. Las metas y los objetivos incluyen “expectativas para el aprendizaje o desempeño de los estudiantes y, en algunos casos, los recursos educativos o curriculares y las vías de aprendizaje que se emplearán” (p. 708). Las evaluaciones consiguientes no estipulan formalmente un alcance y una secuencia de contenidos; sin embargo, debido a lo que está en juego en estas evaluaciones, influyen en el contenido que tratan los profesores. El currículum diseñado es el “conjunto de planes de instrucción especificados por un organismo de gobierno autorizado, ya sea un ministerio de educación o una provincia local” (p. 710), puede incluir materiales de instrucción adoptados por funcionarios educativos locales y los planes de clase o de un curso diseñados por los propios profesores. Los currículos oficiales actuales suelen contener estándares, Remillard y Heck (2014) consideran que estos puede ser nacionales o regionales como parte del currículum oficial.

Al referirse a su concreción, Solís (2012) plantea que el currículum suele concebirse como cerrado o abierto, “es cerrado cuando son muy limitadas las posibilidades de innovación y concreción de la escuela y del profesor” (p. 16), es abierto cuando da un margen amplio de acción al profesor y a la escuela para que determinen parte de ese currículum considerando su propio contexto educativo. El currículum colombiano es abierto, ya que las autoridades educativas nacionales marcan los lineamientos generales pero las escuelas o los profesores diseñan su propio currículum en función de su entorno educativo.

Por otro lado, los conceptos son parte sustancial del conocimiento matemático y se construyen por mediación de concepciones y conceptualizaciones. Las concepciones son un constructo mental o representación de la realidad que contiene creencias, significados, imágenes mentales, preferencias, actitudes, etc. (Brown y Hirschfeld, 2007). Las conceptualizaciones según Vergnaud (1990) están presentes en los procesos de transformación de los conceptos como instrumento a los conceptos como objeto, por medio de una operación lingüística que es la nominalización. La conceptualización está hecha de “representaciones de objetos, propiedades, relaciones, transformaciones, circunstancias, condiciones y relaciones funcionales entre estos objetos, y entre estos objetos y la acción en cuestión” (Vergnaud, 1996, p. 275). Esto resalta la importancia del lenguaje como medio de representación de los objetos, porque a través del lenguaje las conceptualizaciones se hacen objetos visibles y comunicables. Duval (2011), al referirse a los objetos matemáticos en particular, plantea que no son otra cosa que invariantes

(operatorio o lógico-discursivo) de una multiplicidad de representaciones semióticas posibles, “son objetos, artefactos, términos lingüísticos, en general signos, que se utilizan para hacer visible una intención y para conducir a terminar una acción” (Radford, 2005, p. 203). Para los propósitos de este trabajo no interesan los procesos de transformación o de acción a los que se refiere Vergnaud (1990), sino al producto de esa transformación. Nos referimos a las representaciones lingüísticas de la pendiente, en tanto objeto de aprendizaje, expresadas mediante sus propiedades, condiciones y relaciones con otros objetos como la razón, la función, la tangente trigonométrica, la inclinación, el ángulo de inclinación, la derivada, etc. A estas representaciones llamaremos conceptualizaciones de la pendiente. Todas ellas aparecen descritas en la tabla 1.

Tabla 1. Conceptualizaciones de la pendiente.

Categoría	La pendiente como...	Código
Razón geométrica	Razón del “desplazamiento vertical sobre el desplazamiento horizontal” en la gráfica de una recta (a menudo vista como el triángulo rectángulo en la gráfica de una recta que resalta el desplazamiento horizontal y el vertical).	G
Razón algebraica	Cambio en y sobre el cambio en x ; representación de la razón con expresiones algebraicas (a menudo visto como $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ o $\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$).	A
Propiedad física	Propiedad de la recta a menudo descrita con expresiones como: grado, inclinación, ladeo, declive, empinado, “qué tan alto sube una recta”.	P
Propiedad funcional	Razón de cambio constante entre variables o cantidades (por ejemplo, cuando aumenta 2, aumenta 3) presente en varias representaciones de funciones; a veces se ve en situaciones que involucran razones relacionadas o constantes de proporcionalidad (donde la razón unitaria es la pendiente).	F
Coefficiente paramétrico	Coefficiente m (o su valor numérico) en $y = mx + b$ o en $y - y_1 = m(x_2 - x_1)$ que actúa como un parámetro.	PC
Concepción trigonométrica	Propiedad relacionada con el ángulo que una recta forma con una recta horizontal (usualmente el eje positivo); tangente del ángulo de inclinación.	T
Concepción en cálculo	Medida relacionada con la derivada como la pendiente de la tangente a una curva, de una recta secante, o cómo razón de cambio instantánea para cualquier función (incluso no lineal).	C

Situación del mundo real	Situación física (estática, por ejemplo: una rampa, escalera, etc.)	R
	Situación funcional dinámica que relaciona dos variables (p. ej., distancia vs tiempo, velocidad vs tiempo, costo vs tiempo).	
Propiedad determinante	Propiedad que determina si las rectas son paralelas o perpendiculares entre sí; propiedad con la cual una recta puede ser determinada si un punto de la recta es también dado.	D
Constante lineal	"Recta" o "plana", ausencia de curvatura de una recta que no se ve afectada por la traslación; propiedad única de las "rectas" (puede ser referenciada como lo que hace que una línea sea "recta" o la "rectitud" de una línea); mención de que cualesquiera dos puntos de una recta pueden ser utilizados para determinar la pendiente.	L
Indicador de comportamiento	Propiedad que indica el crecimiento, decrecimiento, tendencia horizontal de una recta o la propiedad que indica la cantidad (o severidad) del aumento o disminución de una recta; si no es cero, indica que la recta tiene una intersección con el eje x .	B

Nota: Adaptado de Nagle y Moore-Russo (2014, p. 44).

3. MÉTODO

El análisis de los documentos curriculares se realizó utilizando el Método de Análisis de Contenido de Bardin (2002) y las categorías de conceptualizaciones de la pendiente descritas en la tabla 1. El método consta de tres fases: primera, preanálisis; segunda, explotación del material y tercera, tratamiento de los resultados. Según Bardin (2002), la primera consiste en la elección de los documentos que se van someter a análisis y el planteamiento del objetivo; la segunda consiste en operaciones de codificación, descomposición o enumeración del contenido y la tercera, se refiere al tratamiento de los resultados mediante operaciones estadísticas simples o más complejas para darles fiabilidad y a partir de ellos proponer inferencias a propósito de los objetivos previstos.

Primera Fase. En el preanálisis se seleccionaron los documentos curriculares para su posterior análisis. Varios son los documentos que orientan a la educación colombiana, sin embargo, se eligieron aquellos que mejor reflejan el conocimiento matemático que se pretende que los estudiantes aprendan desde el grado 1 hasta el 11. Los documentos que se ajustaron a este criterio fueron: los Estándares Básicos de Competencia (EBC) (Ministerio de Educación Nacional

[MEN], 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) (MEN, 2016), los dos referidos al área de matemáticas.

En el sistema educativo colombiano los Estándares Básicos de Competencia de las áreas fundamentales del conocimiento, son documentos que establecen un conjunto de estándares para las áreas de Lenguaje, Matemáticas, Ciencias Sociales, Ciencias Naturales y Ciudadanía. “Un estándar es un criterio claro y público que permite juzgar si un estudiante, una institución o el sistema educativo en su conjunto cumplen con unas expectativas comunes de calidad” (MEN, 2006, p. 11). En particular, en los EBC en Matemáticas se declara un conjunto de estándares para ciclos de grados y se organizan en cinco tipos de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. Cada estándar pone el énfasis en uno o dos de los cinco procesos generales de la actividad matemática tales como: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Pueden referirse también a otros procesos generales utilizables en distintos contextos para contribuir a superar el nivel seleccionado como estándar.

Los DBA, son documentos que guardan concordancia con los EBC. En ellos se expone un conjunto de aprendizajes estructurantes para cada área y grado escolar que han de aprender los estudiantes y desarrollar procesos que les permitan alcanzar los EBC (MEN, 2016). En los DBA se establecen aprendizajes estructurantes para un grado y un área particular. “Aprendizajes son la conjunción de conocimientos, habilidades y actitudes que otorgan un contexto cultural e histórico a quien aprende. Son estructurantes en tanto expresan las unidades básicas y fundamentales sobre las cuales se puede edificar el desarrollo futuro del individuo” (MEN, 2016, p. 6). En particular, los DBA están compuestos de tres elementos centrales: el enunciado, las evidencias de aprendizajes y el ejemplo. El primero, se refiere al aprendizaje estructurante que los estudiantes necesitan para desenvolverse en diversos contextos sociales y culturales; en el segundo, se expresan indicios claves que muestran si los estudiantes están alcanzando el aprendizaje expresado en el enunciado y, en el tercero, se concretan y complementan las evidencias de aprendizaje.

Segunda Fase. La fase de explotación del material se centró en las operaciones de codificación, elección de las unidades de análisis, organización de la información y análisis del contenido. Se adoptaron las codificaciones de las conceptualizaciones de la pendiente ya descritas en la tabla 1. La elección de las unidades estuvo en función de las formulaciones que mejor reflejaban los aprendizajes pretendidos, los cuales están cifrados en los estándares en los EBC y los aprendizajes estructurantes

de los DBA. Para la organización de la información se elaboraron dos matrices de doble entrada, una para los EBC y otra para los DBA. Las columnas contienen las menciones explícitas o implícitas; la formulación del estándar y del aprendizaje estructurante sujeto de análisis; el código de la conceptualización de la pendiente que le corresponde y, la frecuencia entendida como la cantidad de menciones a las conceptualizaciones encontradas. Las filas fueron asignadas a los grados o grupos de grados escolares para los que se prevé el estándar o el aprendizaje estructurante a alcanzar.

Para el análisis del contenido se consideraron: los enunciados de los estándares y los aprendizajes estructurantes; la “mención explícita” o “implícita” de la pendiente; las frases o palabras clave que hacen referencia o tienen relación con alguna de las conceptualizaciones de la pendiente. La mención explícita o implícita fue necesaria, primero, porque la pendiente “es un concepto poderoso de enlace” (Leinhardt, *et al.*, 1990, p. 54) que se construye de la conexión de varios conceptos previos (p. ej., razón, variación proporcional, razón constante de proporcionalidad, etc.) que en el currículum suelen estar previstos antes de su deliberado tratamiento (Dolores *et al.*, 2020) en virtud de que son base para que el alumno comprenda el concepto de pendiente. Segundo, se suele prever su tratamiento en el currículum (explícitamente) en la educación secundaria (Stanton y Moore-Russo, 2012) y el preuniversitario a fin de proporcionar a los estudiantes un medio para describir el comportamiento de funciones básicas y de sus razones de cambio. Y tercero, porque es el fundamento de conceptos matemáticos más avanzados como la derivada (Deniz y Kabaël, 2017) y de conceptos estadísticos como la regresión lineal y la línea de mejor ajuste (Casey y Nagle, 2016; Nagle *et al.*, 2017), por lo que la pendiente puede aparecer explícita o implícitamente en el currículum. Por esto, cuando la pendiente o alguna de las expresiones claramente descritas en la tabla 1 (p. ej., la fórmula algebraica con la que se representa la pendiente, razón de cambio de una función) estaba presente en los documentos, se consideró como una mención explícita de la conceptualización correspondiente. Cuando alguna de las conceptualizaciones está presente, pero no se menciona el término pendiente o algún sinónimo, entonces se documentó como mención implícita.

El análisis del enunciado (de cada estándar y aprendizaje estructurante) incluyó la detección de las frases o palabras clave y estas, a su vez, fueron elementos fundamentales para decidir la o las conceptualizaciones de la pendiente promovidas. Las decisiones fueron soportadas por la correspondencia con las características de las conceptualizaciones descritas en la tabla 1 y puestas en la figura 1 como justificación. En la figura 1 se describen dos ejemplos de estos procedimientos.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA, VOL. 34, NÚM. 2, AGOSTO DE 2022

4. CONCEPTUALIZACIONES DE LA PENDIENTE IDENTIFICADAS EN LOS EBC

4.1. DEL GRADO 1 AL 5. PRIMARIA³

De los setenta y ocho estándares propuestos para este nivel educativo, en nueve de ellos se identificaron dos conceptualizaciones que corresponden a tres tipos de pensamiento matemático: numérico, métrico y variacional. Estas fueron: propiedad funcional y situación del mundo real (tabla 2). La propiedad funcional que induce a la idea de razón de cambio está presente en los nueve estándares en las frases “situaciones de variación proporcional”, “razones”, “situaciones de proporcionalidad directa”, “patrones de variaciones en secuencias numéricas” y “situación de variación proporcional en las ciencias económicas, sociales y naturales”. La presencia de frases como: “situaciones de variación”, “distancia, tiempo”, “rapidez”, “situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales” sugieren la presencia de la conceptualización situación del mundo real dinámica porque contienen variables vinculadas a la realidad.

4.2 DEL GRADO 6 AL 9. SECUNDARIA

Para este nivel se proponen sesenta y siete estándares, en seis de ellos se encontraron evidencias de siete conceptualizaciones de la pendiente, la mayoría implícitas (tabla 2). La presencia de las conceptualizaciones fue detectada en dos tipos de pensamiento: en el numérico y en el variacional. La propiedad funcional sigue siendo la de mayor dominio, se identificó en los estándares enlistados en este nivel educativo a través de las frases “situaciones de proporcionalidad directa e inversa”, “situaciones de cambio y variación”, “variación lineal” y “cambios en los parámetros de ciertas familias de funciones”. Las conceptualizaciones coeficiente paramétrico y razón algebraica se insinúan en la frase “representación algebraica de familia de funciones”. Las conceptualizaciones propiedad física y la concepción trigonométrica tiene relación directa con la definición analítica de pendiente, por eso fueron asociados a frase “diferentes formas de definir y medir la pendiente”. De acuerdo con los EBC, del grado 8 al 9 es la primera vez que aparece explícitamente el término

³ La primaria en Colombia comprende del grado 1 al 5; la secundaria del 6 al 9 y el bachillerato del 10 al 11.

“pendiente” (tabla 2), para precisar en qué grado se introduce revisamos dos de los textos usuales en Colombia, el de Ramírez *et al.* (2013) y el MEN (2017), donde se puede constatar que es introducida en el grado 8 a partir de la noción de razón de cambio en funciones lineales. Otras dos conceptualizaciones promovidas fueron la situación del mundo real e indicador de comportamiento, la primera fue notada en la frase “situaciones de variación”, y la segunda en las frases “correlación positiva y negativa” y “comportamiento de cambio en representaciones gráficas cartesianas”.

Tabla 2. Conceptualizaciones de la pendiente identificadas en los EBC

Grado	e- i	Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBC)	Cód.	f
1-3	i	Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional (p. 80).	F	1
	i	Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y graficas (p. 81).	F	1
4-5		Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones (p. 82).	F	1
	i	Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas (p. 82).	F	1
	i	Modelo situaciones de dependencia mediante proporcionalidad (p. 82).	F	1
	i	Reconozco el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, peso, masa, rapidez) y de unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud en situaciones aditivas y multiplicativas (p. 83).	F	1
	i	Predigo patrones de variación en secuencias numérica, geométrica o gráfica (p. 83).	F	1
	i	Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales (p. 83).	F	1
	i	Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales (p. 83).	F, R	2
6-7	i	Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa (p. 84).	F	1
	i	Reconozco el conjunto de valores de cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación) (p. 85).	F, R	2

	i	Análizo propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o proporcionalidad directa en contextos aritméticos y geométricos (p. 85).	F, B	2
8-9	e	Identifico y utilizo diferentes formas de definir y medir la pendiente de una curva que representa situaciones de variación (p. 87).	P, F, T, R	4
	i	Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en sus gráficas (p. 87).	A, F, PC	3
	i	Analizo en gráficas cartesianas el comportamiento de cambio en funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas (p. 87).	F, B	2
10-11	e	Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como velocidad media, aceleración y densidad medias (p. 89)	A, F, R	3
	e	Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos (p. 89).	F, C, R	3
	e	Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas (p. 89).	PC, F, C, B	4
	e	Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas (p. 89).	F, C, B	3
Total				37

Nota: Los estándares se obtuvieron de MEN (2006, p. 46-95). Las franjas corresponden a los niveles educativos. e = mención explícita; i = mención implícita; Cód.= Código; f= Frecuencia.

4.3 DEL GRADO 10 AL 11. BACHILLERATO

En cuatro de los veintisiete estándares de este nivel se reconocieron seis conceptualizaciones explícitas de pendiente, correspondientes a dos tipos de pensamientos: el métrico y el variacional. La propiedad funcional sigue siendo dominante (tabla 2), se promueve en las frases “velocidad media, aceleración y densidad media”, “razón de cambio” y “variación periódica con funciones”. La conceptualización de concepción en cálculo se evidenció en los tres últimos estándares, mediante las frases “derivada como razón de cambio”, “relaciones de las funciones

y sus derivadas” e “interpretación y utilización de las derivadas”. La conceptualización indicadora de comportamiento se infiere de “las propiedades de las funciones polinómicas” y de “la variación periódica” de las funciones trigonométricas. Se promueve la conceptualización de situación de mundo real en frases relativas a la variación física como “velocidad media, aceleración y densidad media” o situaciones fuera de las matemáticas como “derivadas de funciones básicas en contextos no matemáticos”. Las que poco se promueven en este nivel educativo fueron las conceptualizaciones de razón algebraica y coeficiente paramétrico asociadas a un solo estándar, en frases como “resolver problemas mediante razones como velocidad media” y “relaciones de las propiedades de expresiones algebraicas y gráficas de funciones”, respectivamente.

5. CONCEPTUALIZACIONES DE LA PENDIENTE IDENTIFICADAS EN LOS DBA

5.1 DE GRADO 1 AL 5. PRIMARIA

De los cincuenta y cinco aprendizajes estructurantes planteados para este nivel educativo, en tres de ellos se infiere la presencia de dos conceptualizaciones implícitas de pendiente: propiedad funcional y situación del mundo real (tabla 3). En la frase “situación de variación y constantes” se nota la conceptualización de propiedad funcional. Esta misma está inmersa en otros dos aprendizajes estructurantes por medio de las frases “resolución de problemas de velocidad” y “unidades para medir la rapidez”, además se deja entrever la conceptualización situación del mundo real al referirse a fenómenos físicos.

5.2 DEL GRADO 6 AL 9. SECUNDARIA

Para este nivel educativo se formulan cuarenta y cuatro aprendizajes estructurantes, en siete de ellos se infiere la presencia de cuatro conceptualizaciones implícitas de pendiente (tabla 3). La propiedad funcional estuvo presente en cada uno de los aprendizajes estructurantes, se hizo evidente a partir de las frases “resolver problemas de variación”, “covariación directa e inversa entre variables”, “representa situaciones de variación numérica o gráfica” y “relaciones geométricas entre trayectoria y desplazamiento de los cuerpos”. La conceptualización de situación de mundo real se promueve en cinco de los siete aprendizajes estructurantes,

se manifiesta en frases como “covariación entre variables en contextos cotidianos”, “variación de magnitudes en fenómenos de la vida diaria” e “interpreta el desplazamiento de los cuerpos en diferentes situaciones”. La conceptualización coeficiente paramétrico se promueve en tres aprendizajes estructurantes en frases como “modelado de ecuaciones lineales” y “modelado de funciones”, por medio de sus modelos algebraicos del tipo $y = mx + b$; la de indicador comportamiento que poco se promueve subyace de la frase “variación y covariación con los comportamientos gráficos”.

Tabla 3. Conceptualizaciones de la pendiente identificadas en los DBA

Grado	e-i	Aprendizajes estructurantes de los DBA	Cód.	f
2	i	Compara y explica características que se pueden medir, en la resolución de problemas de longitud, superficie, velocidad, peso o duración de los eventos, entre otros (p. 17).	F, R	2
3	i	Describe y representa los aspectos que cambian y permanecen constantes en secuencias y en otras situaciones de variación (p. 27).	F	1
4	i	Elige instrumentos y unidades para estimar y medir longitud, área, volumen, ..., rapidez, temperatura, y con ellos hace los cálculos para resolver problemas (p. 32).	F, R	2
6	i	Interpreta números enteros y racionales con sus operaciones, en diferentes contextos, al resolver problemas de variación, repartos, particiones, estimaciones, etc. (p. 45).	F	1
	i	Identifica y analiza propiedades de covariación directa e inversa entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa en gráficas (p. 49).	F, R	2
7	i	Representa en el plano cartesiano la variación de magnitudes y sobre esta base explica el comportamiento de situaciones y fenómenos de la vida diaria (p. 56).	F, R	2
		Plantea y resuelve ecuaciones, las describe verbalmente y representa situaciones de variación de manera numérica, simbólica o gráfica (p. 56).	F, PC	2
8	i	Identifica y analiza relaciones entre propiedades de gráficas y sus exp. algebraicas y las de variación y covariación, con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación (p. 63).	F, PC, R, B	4
	i	Propone relaciones o modelos funcionales entre variables e identifica y analiza propiedades de covariación entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (p. 64).	F, PC, R	3

9	i	Interpreta el espacio de manera analítica a partir de relaciones geométricas entre trayectorias y desplazamientos de los cuerpos en diferentes situaciones (p. 70).	F, R	2
10	e	Resuelve problemas sobre el significado de medidas de magnitudes relacionales (velocidad y aceleración medias) en tablas, gráficas y expresiones algebraicas (p. 75).	F, PC, R	3
	e	Comprende y usa la razón de cambio para estudiar el cambio promedio y el cambio en torno de un punto y lo reconoce en rep. gráficas, numéricas y algebraicas (p. 77).	F, PC, C	3
	e	Resuelve problemas mediante el uso de las propiedades de las funciones y representaciones tabulares, gráficas y algebraicas para estudiar la variación, la tendencia numérica y las razones de cambio entre magnitudes (p. 77).	F, PC, C	3
11	e	Utiliza instrumentos, unidades de medida, sus relaciones y la noción de derivada como razón de cambio, para resolver problemas, estimar cantidades y juzgar la pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto (p. 82).	F, C, R	3
	e	Interpreta y diseña técnicas para hacer mediciones (en rapidez, razón de cambio) con niveles crecientes de precisión (diferentes instrumentos para la misma medición, escalas, estimaciones, verificaciones a través de mediciones indirectas) (p. 83).	F	1
	e	Interpreta la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrolla métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos (p. 84)	F, C, R	3
	e	Usa propiedades y modelos funcionales ($\pm f'(x)$) para analizar situaciones y establecer relaciones funcionales para estudiar la variación en situaciones intra y extraescolares (p. 85).	F, C, R, B	4
	e	Encuentra derivadas de funciones, reconoce sus propiedades y las utiliza para resolver problemas (aplicando el dy/dx , variación de $f(x)$ y $f'(x)$) (p. 85).	F, C, B	3
Total				44

Nota: Los datos fueron tomados de MEN (2016), las franjas corresponden a los niveles educativos.

5.3 DEL GRADO 10 AL 11. BACHILLERATO

De los veinte aprendizajes estructurantes que se plantean para este nivel educativo, en ocho de ellos se promueve cinco conceptualizaciones explícitas de pendiente (tabla 3). Igual que en los niveles educativos anteriores la propiedad funcional sigue siendo la de mayor frecuencia, se identificó en los ocho aprendizajes estructurantes a través de las frases “velocidad y aceleración media”, “razones de cambio entre magnitudes” y “relaciones funcionales para estudiar la variación”. Predominó también en este nivel la concepción en cálculo, que se hizo visible en seis aprendizajes en las frases “razón de cambio en torno de un punto”, “nociones de derivada como razón de cambio”, “valor de la pendiente de la tangente a una curva” y “derivadas de funciones para resolver problemas”. La conceptualización de situación del mundo real se promueve en cuatro de los siete aprendizajes, se evidenció en frases como “medidas de magnitudes (velocidad y aceleración media)”, “resolver problemas de derivada como razón de cambio en diferentes contextos”, “derivadas de algunas funciones básicas en contextos no matemáticos” y “variación en situaciones extraescolares”. La conceptualización coeficiente paramétrico se infiere que se promueve en la frase “representación de magnitudes expresiones algebraicas”. Por último, la conceptualización de indicador de comportamiento fue identificada a partir de la frase “relación del signo de la derivada con características geométricas” (reconocida con el símbolo: $\pm f'(x)$) ya que el signo de la derivada tiene relación con el comportamiento de la función primitiva.

6. DISCUSIÓN

6.1 CONCEPTUALIZACIONES DE LA PENDIENTE POR NIVELES EDUCATIVOS

En los EBC y DBA de la primaria se promueven las conceptualizaciones propiedad funcional y situación el mundo real (figura 2), todas en forma implícita, referidas principalmente a situaciones de cambio y variación proporcional, medición de magnitudes y patrones de variación. Lo implícito de las conceptualizaciones es explicable porque en la primaria no se enseña este concepto, más bien se preparan las condiciones previas para su tratamiento en secundaria. Estos resultados son coincidentes con el currículum mexicano (Dolores *et al.*, 2020) y con el norteamericano (Nagle y Moore-Russo, 2014), también coinciden en considerar a la proporcionalidad como precursor del concepto de pendiente,

aunque es notable en los EBC y DBA la predominancia de la variación y el cambio, en particular la variación lineal, constatable en MEN (2006, p. 85).

En los EBC y DBA de la secundaria incrementa la cantidad de conceptualizaciones (figura 2) ya que aparece la pendiente como “pendiente de una curva que representa situaciones de variación” (MEN, 2006, p. 87), con ello sugiere el estudio de la pendiente tanto en funciones no lineales como lineales. Igual que en la primaria, en este nivel se pone énfasis en la propiedad funcional y en la situación mundo real, la primera debido a la reiterada referencia en las situaciones de variación y las razones de cambio que involucran y, en la segunda, debido a que la currícula colombiana está diseñada bajo el enfoque de competencias y estas en su acepción más general son tendientes al aprendizaje funcional y preparatorio para la vida (Fonseca y Gamboa, 2017). Además, en este nivel aparecen el coeficiente paramétrico, el indicador de comportamiento, la razón algebraica, propiedad física y concepción trigonométrica, debido, por una parte, por la introducción del lenguaje algebraico y por otra, porque se prevé la utilización de diferentes formas de definir la pendiente (que puede incluir la algebraica y la trigonométrica). En cuanto a conceptualizaciones en secundaria hay similitud con el currículum mexicano (Dolores *et al.*, 2020) y el norteamericano (Nagle y Moore-Russo, 2014), salvo que en el mexicano aparece el término “pendiente” en el grado 9 y en los otros dos en el grado 8. A diferencia del currículum el mexicano (Dolores *et al.*, 2020) y norteamericano que enfatizan el estudio de la pendiente en funciones lineales (Stump, 1999; Teuscher y Reys, 2010), en los EBC se amplía el estudio hasta las curvas que representan situaciones de variación. Es notable la ausencia en este nivel de la conceptualización razón geométrica, muy escasa en el currículum mexicano, pero significativamente presente en el norteamericano.

En los EBC y DBA del bachillerato se incrementa la cantidad y variedad de las conceptualizaciones de la pendiente respecto de la primaria y secundaria (figura 2) y aparecen vinculadas a dos conceptos centrales: razón de cambio y derivada. Privilegian la propiedad funcional, la concepción en cálculo y la situación del mundo real porque a menudo recomienda estudiar la razón de cambio en contextos de la física como la velocidad, la aceleración, la densidad, aunque no desestiman el contexto intra-matemático. En cambio, Dolores *et al.* (2020) para este nivel señalan que el currículum mexicano introduce la definición analítica de pendiente y su aplicación en cálculo como razón de cambio instantánea, por lo que se vincula a estos conceptos las conceptualizaciones situación el mundo real, coeficiente paramétrico e indicador de comportamiento, aunque la presencia de la razón

algebraica, la constante lineal y la concepción del cálculo no es despreciable. Poco se promueve la conceptualización del cálculo en el currículum norteamericano, inclusive las demás, excepto la situación funcional y la constante lineal.

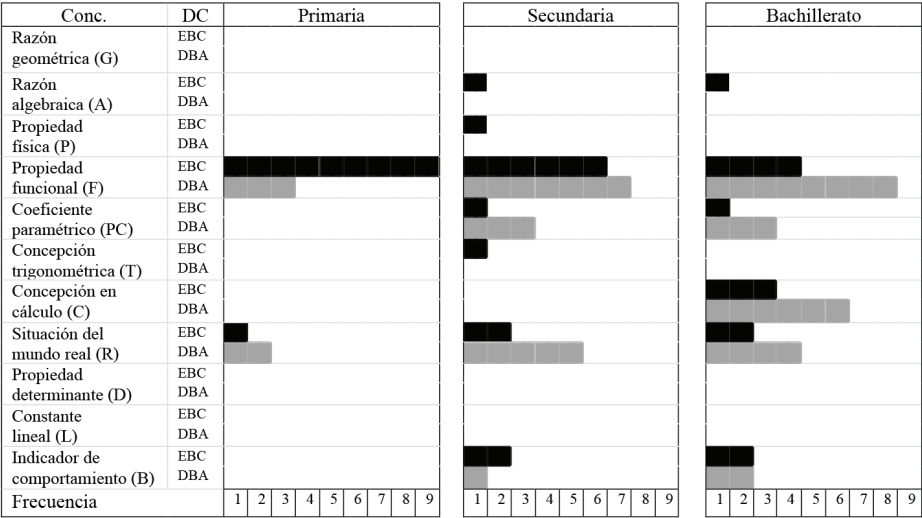


Figura 2. Conceptualizaciones de la pendiente en los EBC y DBA por niveles educativos.
Conc. =Conceptualizaciones; DC= Documentos curriculares analizados.

6.2 CONCEPTUALIZACIONES DE LA PENDIENTE ENFATIZADAS EN EL CURRÍCULO COLOMBIANO

El número total de menciones de las conceptualizaciones de la pendiente en el currículum colombiano, fueron treinta y siete en los EBC y cuarenta y cuatro en los DBA. En general las conceptualizaciones más enfatizadas fueron la propiedad funcional, situación del mundo real y la concepción en cálculo (figura 2). La propiedad funcional fue la conceptualización más común en ambos documentos, se evidenció ligeramente más en los EBC que en los DBA. Por el contrario, los DBA enfatizaron las conceptualizaciones de la pendiente de situación del mundo real, concepción en cálculo y coeficiente paramétrico. Estos resultados en conjunto son parcialmente coincidentes con el currículum mexicano (Dolores *et al.*, 2020) y el norteamericano (Nagle y Moore-Russo, 2014) ya que enfatizan

los tres, las dos primeras conceptualizaciones: propiedad funcional y situación del mundo real, sin embargo, se diferencian en la tercera de mayor énfasis, el colombiano enfatiza la concepción del cálculo, el mexicano la del coeficiente paramétrico y el norteamericano la constante lineal.

El predominio de la conceptualización situación del mundo real en los tres currículums es consistente con el desarrollo de las competencias matemáticas recomendada por la OECD (2004), en donde se enfatiza que la competencia matemática es el conocimiento matemático puesto en uso funcional en una multitud de situaciones diferentes, de donde se infiere que es esencial enseñar la pendiente (y otros tantos conceptos) en contextos del mundo real. Aquí juega un papel importante la conexión que se puede establecer entre las situaciones estáticas y dinámicas que caracterizan esta conceptualización para darle a la pendiente un significado productivo como lo señalan Byerley y Thompson (2017), en el sentido de utilizarla para comprender una amplia variedad de contextos y problemas con base en la formación de esquemas.

El énfasis, tanto en los EBC y los DBA como en el currículum mexicano y norteamericano de la conceptualización propiedad funcional, puede contribuir a la comprensión del concepto de pendiente y de la razón de cambio posibilitando las conexiones entre ambos conceptos. Sin embargo, al estudiar el currículum enseñado, Salgado *et al.* (2019) encontraron que los profesores le confieren escasa importancia a la propiedad funcional ya que prácticamente no la enseñan, probablemente esa sea la causa por la cual los estudiantes no hacen esa conexión entre pendiente y razón de cambio tal como lo evidenciaron Dolores *et al.* (2019). También la conceptualización situación del mundo real es enfatizada en los EBC y DBA y en los currículums mexicano y norteamericano, pero los futuros profesores le dan escaso énfasis en la enseñanza (Stump 2001a; Nagle y Moore-Russo, 2013b) y poco es utilizada por los estudiantes (Rivera *et al.*, 2019), quizá, en ambos casos, por las dificultades que implica la aplicación de este concepto a situaciones de la vida real o a transferirlo a otros contextos como lo afirman Susac *et al.* (2018). Estos hallazgos sugieren distanciamiento entre lo que se prevé en el currículum, lo que se enseña en las aulas y lo que aprenden los estudiantes sobre la pendiente, por lo que es necesario que las futuras reformas curriculares consideren el desarrollo de estrategias tendientes a disminuir esa distancia.

En los DBA se prevé explícitamente el desarrollo de las ideas de covariación, en cambio, en el currículum mexicano y en el norteamericano (en particular NCTM, 2000) se le confiere escasa atención. La covariación tiene fuerte presencia en las conceptualizaciones propiedad funcional y situación del mundo real, concebir la

pendiente como razón a menudo requiere considerar su propiedad funcional dentro de una situación del mundo real (Stanton y Moore-Russo, 2012), por tanto, la conexión entre ambas conceptualizaciones puede contribuir de manera importante a su comprensión. Varias investigaciones (Thompson y Carlson, 2017; Kertil *et al.*, 2019; González, 2021) destacan la importancia de desarrollar la capacidad de los estudiantes o profesores para coordinar cantidades covariantes en la comprensión de la pendiente, suele llamársele razonamiento covariacional. Los hallazgos de este trabajo indican que este tipo de razonamiento ya está considerado en el currículum colombiano por la reiterada presencia de la covariación en el estudio de situaciones de variación y cambio.

Es notable, tanto en los EBC como en los DBA, la ausencia de las conceptualizaciones razón geométrica, constante lineal y propiedad determinante. En el currículum mexicano también reciben escasa atención, particularmente la primera y la tercera (Dolores *et al.*, 2020), por el contrario, en el currículum norteamericano la constante lineal es una de las tres mayoritariamente enfatizadas (Nagle y Moore-Russo, 2014), y las conceptualizaciones razón geométrica y propiedad determinante se encuentra en los cursos obligatorios del grado 8 al 12 de más de cuarenta y tres estados de USA (Stanton y Moore-Russo, 2012). La razón geométrica permite visualizar la pendiente como desplazamientos en el plano cartesiano de “lo que sube” entre “lo que avanza” justamente por la “rectitud” de las gráficas de funciones lineales que permite tomar secciones de ellas como hipotenusas de los triángulos determinados por esos desplazamientos. Deniz y Kabaël (2017) afirman que la razón geométrica es importante para la interiorización de la pendiente como una razón constante porque se vincula con la conceptualización constante lineal. La ausencia de las conceptualizaciones razón geométrica, constante lineal en el currículum colombiano puede limitar, la visualización de la pendiente en el plano y la conexión entre esas conceptualizaciones. Con ello se dan escasas oportunidades a los estudiantes de desarrollar su comprensión sobre la pendiente. Por otro lado, la propiedad determinante quizá sea omitida en el currículum colombiano por el énfasis del estudio de situaciones de variación del mundo real, sin embargo, es necesaria para la determinación de paralelismo cuando dos situaciones de variación tienen razones de cambio iguales o incluso cuando estas son recíprocas y de signos contrarios. Esta omisión por tanto también podría estar restando oportunidades de desarrollar la comprensión del concepto en cuestión a los estudiantes de ese país.

7. CONCLUSIONES, LIMITACIONES Y FUTUROS TRABAJOS

Los resultados del análisis de los EBC y DBA aportan elementos adicionales a la investigación acerca de la pendiente y sus múltiples conceptualizaciones, dan un panorama amplio sobre cómo prevé el currículo que sea enseñada la pendiente en Colombia. Las evidencias obtenidas en este trabajo nos han permitido concluir que el currículo colombiano de matemáticas tiene una fuerte tendencia hacia lo variacional. Esto, debido al énfasis que en él tienen las conceptualizaciones con esencia variacional como la propiedad funcional, situación del mundo real y la concepción del cálculo. Además, en los EBC aparece más de cuarenta veces el término “variación” y en los DBA más de cien veces. Tanto en el currículo mexicano como en el norteamericano estas conceptualizaciones también tienen predominio (sobre todo las dos primeras), pero el término “variación” aparece con menos frecuencia, treinta veces en el currículo mexicano y en los estándares norteamericanos (NCTM, 2000) solo diez veces. Esta tendencia variacional del currículo colombiano da oportunidad a los estudiantes a desarrollar su comprensión del concepto de pendiente como razón de cambio, ya que les prepara condiciones desde la primaria considerando el estudio de la variación proporcional en situaciones de variación y cambio posibilitando que lleguen a la secundaria y estudien este concepto como tal en el marco del tratamiento de las relaciones funcionales y las propiedades de covariación, elementos que le dan sentido a este importante concepto. Con esto se sientan las bases en el currículo colombiano a partir de las cuales se posibilita el abordaje en el bachillerato de la derivada que es, en esencia, un concepto variacional y es tratado en este nivel educativo justamente como una razón de cambio y como pendiente de tangentes a curvas.

La ausencia de la conceptualización razón geométrica, propiedad determinante y constante lineal y la escasa presencia de la razón algebraica, concepción trigonométrica y la propiedad física, descubiertas en el análisis de los datos, podrían limitar las oportunidades para que los estudiantes colombianos puedan construir redes de conexiones entre ellas y así contribuir a la comprensión del concepto de pendiente. Las conexiones son piezas fundamentales en la comprensión matemática (García-García y Dolores-Flores, 2018), en particular las conexiones entre todas las conceptualizaciones de la pendiente pueden ser orientadas combinando la interpretación visual y analítica vs el conocimiento procedimental y el conceptual como lo sugieren Nagle y Moore-Russo (2013a) o bien utilizando el marco de referencia propuesto por Nagle *et al.* (2019).

Cambios curriculares que favorezcan la presencia de más conceptualizaciones de la pendiente para gestar una red rica de significados entre ellas, podrían robustecer la comprensión de los estudiantes de este importante concepto.

Este estudio nos ha permitido hacer comparaciones con las investigaciones de su tipo hechas en el continente americano, y nos permitió apreciar que el desarrollo por niveles educativos de la idea de pendiente en el currículum el colombiano es similar al desarrollo previsto en el currículum mexicano y norteamericano. Las ideas de proporcionalidad le preceden en nivel de primaria, aparece en la secundaria y se amplía en el bachillerato con énfasis en el estudio de la razón de cambio y su conexión con la derivada en todos los casos.

Los documentos analizados proporcionan orientaciones nacionales sobre las competencias y los aprendizajes, sin embargo, es necesario recordar que Colombia tiene un currículum abierto en donde cada escuela puede diseñar su propio currículum. Esto significa que las orientaciones nacionales tienen que ser adaptadas a los contextos específicos de cada escuela.

Es posible que, en Colombia igual que ocurre en varios países, el currículum previsto y el enseñado tengan divergencias, pero se sabe muy poco al respecto en Latinoamérica en general. Por tanto, es importante que investigaciones futuras arrojen luz sobre la relación entre el currículum previsto y el enseñado en relación con la pendiente. Entre el currículum previsto y el enseñado se ubica el currículum potencial plasmado en los libros de texto que son materiales que los conectan (Choppin *et al.*, 2020). Estos, juegan también un papel importante ya que, por un lado, son mediadores entre las intenciones de los diseñadores de currículum y los maestros que imparten instrucción en las aulas, por otro lado, porque proporcionan explicaciones y ejercicios para que los estudiantes completen sus tareas de enseñanza y a los profesores les ofrecen guías de instrucción para orientar este proceso (Van Steenbrugge *et al.*, 2013). Por ello, trabajos futuros podrían examinar las relaciones entre las conceptualizaciones de la pendiente previstas en el currículum, las tratadas en los libros de texto y las que se enseñan en el aula, tanto en el contexto colombiano como en el latinoamericano en general. Con ello se podría tener una mejor aproximación sobre la enseñanza y el aprendizaje de este concepto en esta región geográfica del mundo.

REFERENCIAS

- Bardin, L. (2002). *El análisis de contenido*. 3a Edición. Akal.
- Brown, T. L., y Hirschfeld, G. (2007). Students' conceptions of assessment and mathematics: Self-Regulations Raises Achievement. *Australian Journal of Education & Development Psychology*, 7, 63-74.
- Byerley, C. y Thompson, P. (2017). Secondary mathematics teachers' meanings for measure, slope, and rate of change. *The Journal of Mathematical Behavior*, 48(1), 168-193. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.09.003>
- Casey, S. y Nagle, C. (2016). Students' use of slope conceptualizations when reasoning about the line of best fit. *Educational Studies in Mathematics*, 92 (2), 163-177. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9679-y>
- Cheng, I. (2010). Fractions: A new slant on slope. *Mathematics teaching in the Middle school*, 16(1), 35-41. <https://doi.org/10.5951/MTMS.16.1.0034>
- Cho, P., y Nagle, C. (2017). Procedural and conceptual difficulties with slope: An analysis of students' mis takes on routine tasks. *International Journal of Research in Education and Science*, 3(1), 135-150.
- Choppin, J., McDuffie, A.M., Drake, C. y Davis, J. (2020). The role of instructional materials in the relationship between the official curriculum and the enacted curriculum, *Mathematical Thinking and Learning*, 1-26, <https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1855376>
- Choy, B., Lee, M., y Mizzi, A. (2015) Textbook signatures: An exploratory study of the notion of gradient in Germany, Singapore and South Korea. En K. Beswick, T. Muir, y J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 161-168). University of Tasmania.
- Clement, J. (1985). Mis conceptions in graphing. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (9th)* (vol. 1, pp. 369-375). Noordwijkerhout, The Netherlands.
- Demir, M. (2018). Effects of virtual manipulatives with different approaches on students' knowledge of slope. *Journal of Interactive Learning Research*, 29(1), 2550.
- Deniz, Ö., y Kabaal, T. (2017). 8th grade students' construction processes of the concept of slope. *Education and Science*, 42(192), 139-172. <https://doi.org/10.15390/EB.2017.6996>
- Dolores, C. (2012). ¿Hacia dónde reorientar el Currículum de Matemáticas del Bachillerato? En C. Dolores y M. S. García, (Eds.), *¿Hacia dónde reorientar el Currículum de Matemáticas del Bachillerato?* (pp. 165-181). Plaza y Valdés, UAGro.

- Dolores, C., e Ibáñez, G. (2020). Slope conceptualizations in mathematics textbooks. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 34(67), 825–846. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n67a22>
- Dolores, C., Rivera, M. I., y García, J. (2019). Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(3), 369–389. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1507050>
- Dolores, C., Rivera, M., y Moore-Russo, D. (2020). Conceptualizations of slope in Mexican intended curriculum. *School Science and Mathematics*, 120(2), 104–115. <https://doi.org/10.1111/ssm.12389>
- Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. Proem.
- Fusch, P., Fusch, G. E., y Ness, L. R. (2018). Denzin's Paradigm Shift: Revisiting Triangulation in Qualitative Research. *Journal of Social Change*, 10, 19–32. <https://doi.org/10.5590/IOSC.2018.10.1.02>
- Fonseca, J. y Gamboa, M. (2017). Aspectos teóricos sobre el diseño curricular y sus particularidades en las ciencias. *Boletín Redipe*, 6(3), 83–112.
- García-García, J. y Dolores-Flores, C. (2018). Intra-mathematical connections made by high school students in performing calculus tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(2), 227–252. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355994>
- González, D. A. (2021). The progression of preservice teachers' covariational reasoning as they model global warming, *The Journal of Mathematical Behavior*, 62, <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100859>
- Hong, D., y Choi, K. (2018). A comparative analysis of linear functions in Korean and American standards-based secondary textbooks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(7), 1025–1051.
- Kertil, M., Erbas, A. K., y Cetinkaya, B. (2019). Developing prospective teachers' covariational reasoning through a model development sequence. *Mathematical Thinking and Learning*, 1–27. <https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1576001>
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., y Stein, M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1–64. <https://doi.org/10.3102/00346543060001001>
- MEN (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En MEN (Ed.), *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadana* (pp. 46–95). Mineducación. http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

- MEN (2016). *Derechos básicos de aprendizajeV2*. Panamericana Formas e Impresos S.A http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matemáticas.pdf
- MEN (2017). *Vamos a aprender matemáticas. Libro del estudiante 8*. MEN (2017). Ministerio de Educación Nacional /Ediciones SM, S. A.
- Moore-Russo, D., Conner, A., y Rugg, K. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, 76(1), 3–21. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9277-y>
- Nagle, C., Casey, S., y Moore–Russo, D. (2017). Slope and line of best fit: A transfer of knowledge case study. *School Science and Mathematics*, 117(1–2), 13–26. <https://doi.org/10.1111/ssm.12203>
- Nagle, C., Martínez-Planell, R., y Moore–Russo, D. (2019). Using APOS theory as a framework for considering slope understanding. *Journal of Mathematical Behaviour*, 54, 100684. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.12.003>
- Nagle, C. y Moore-Russo, D. (2013b). Slope: a network of connected components. In: M. Martínez, y A. Castro (Eds.), *Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 127-135). University of Illinois at Chicago.
- Nagle, C., y Moore–Russo, D. (2013a). The concept of slope: Comparing teachers' concept images and instructional content. *Investigations in Mathematics Learning*, 6(2), 1–18. <https://doi.org/10.1080/24727466.20covariation13.11790330>
- Nagle, C., y Moore–Russo, D. (2014). Slope across the curriculum: Principles and standards for school mathematics and common core state standards. *The Mathematics Educator*, 23(2), 40–59.
- Nagle, C., Moore–Russo, D., y Styers, J. (2017). Teachers' interpretations of student statements about slope. En E. Galindo, y J. Newton (Eds.), *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 589–596). Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Organization for Economic Cooperation and Development (OECD). (2004). *The PISA 2003 assessment frame work: Mathematics, reading, science and problem-solving knowledge and skills*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/9789264101739-en>
- Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, 19(2), 191–213.

- Ramírez, M., Acosta, M., Perdomo, A., Ortíz, L., Cell, V., De Armas, R., Castaño, J., Gamboa, J., y Jiménez, J. (2013). *Los caminos del saber matemáticas* 8. Editorial Santillana S. A.
- Remillard, J. T., y Heck, D. J. (2014). Conceptualizing the curriculum enactment process in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 46(5), 705–718. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0600-4>
- Rivera, M., Salgado, G., y Dolores, C. (2019). Explorando las Conceptualizaciones de la Pendiente en Estudiantes Universitarios. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(65), 1027–1046. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a03>
- Salgado, G., Rivera, M., Dolores, C. (2019). Conceptualizaciones de pendiente: Contenido que enseñan los profesores del bachillerato. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 15(57), 41–56.
- Solís, I. (2012). Del currículum de la RIEB a un modelo curricular institucional. En J. C. Guzmán, (Coord.), *Del currículum al aula. Orientaciones y sugerencias para aplicar la RIEB* (pp. 15 -50). Graó/Colofón.
- Stanton, M., y Moore–Russo, D. (2012). Conceptualizations of slope: A review of state standards. *School Science and Mathematics*, 112(5), 270–277. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00135.x>
- Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, 11(2), 124–144. <https://doi.org/10.1007/bf03217065>
- Stump, S. (2001a). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(2), 207–227. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(01\)00071-2](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(01)00071-2)
- Stump, S. (2001b). High school precalculus students' understanding of slope as measure. *School Science and Mathematics*, 101(2), 81–89. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2001.tb18009.x>
- Susac, A., Bubic, A., Kazotti E., Planinic, M., y Palmovic, M. (2018). Student understanding of graph slope and area under a graph: A comparison of physics and non physics students, *Physical Review Physics Education Research*, 14, <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.020109>
- Thompson, P. W., y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics.
- Teuscher, D., y Reys, R. (2010). Slope, rate of change, and steepness: Do students understand the concepts? *Mathematics Teacher*, 3(7), 519–524. <https://doi.org/10.5951/MT.103.7.0519>
- Van Steenbrugge, H., Valcke, M., Desoete, A. (2013). Teachers' views of mathematics textbook series in Flanders: Does it (not) matter which mathematics textbook series

schools choose? *Journal of Curriculum Studies* 45(3), 322–353. <https://doi.org/10.1080/00220272.2012.713995>

Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'action, la conceptualisation. En J. M. Barbier (Ed.), *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (pp. 275–292). PUF.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 133–169.

CRISÓLOGO DOLORES FLORES

Dirección: Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas
cdolores2@gmail.com; cdolores@uagro.mx; <https://cdolores.mx>

La estadística y la probabilidad en los currículos de matemáticas de educación infantil y primaria de seis países representativos en el campo

Statistics and probability in early childhood and primary mathematics curricula in six countries representative of the field

Claudia Vásquez¹
Gabriela Cabrera²

Resumen: En este estudio se caracteriza, cómo algunas de las principales orientaciones curriculares a nivel internacional abordan la estadística y la probabilidad en Educación Infantil y Educación Primaria. Para ello, en primer lugar, se analiza la presencia explícita de la estadística y la probabilidad en las orientaciones curriculares; en segundo lugar, se examina el sentido que se otorga a su enseñanza y aprendizaje; y, por último, la presencia de las ideas estadísticas fundamentales. Los resultados muestran, en el caso de la Educación Infantil, una escasa presencia de los contenidos vinculados al estudio de la estadística y la probabilidad. Por su parte, en Educación Primaria, la presencia de este bloque de contenido es mayor. No obstante, es baja en comparación con otros ejes de contenido. Por otro lado, se observa la importancia otorgada al trabajo con datos en contexto y con significado para los estudiantes. Finalmente, se destaca la necesidad de abordar las ideas estadísticas fundamentales de manera progresiva, con distintos niveles de profundidad acordes a la edad del alumnado.

Fecha de recepción: 6 de enero de 2021. **Fecha de aceptación:** 18 de enero de 2022.

¹ Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile. cavasque@uc.cl, orcid.org/0000-0002-5056-5208

² Universidad Nacional de Villa María, Argentina, gcabrera@unvm.edu.ar, orcid.org/0000-0003-2234-3402

Palabras clave: *sentido estadístico, enseñanza de la estadística, enseñanza de la probabilidad, educación infantil, educación primaria.*

Abstract: This study characterises how some of the main international curriculum guidelines deal with statistics and probability in pre-primary and primary education. To do so, firstly, the explicit presence of statistics and probability in the curricular guidelines is analysed; secondly, the meaning given to their teaching and learning is examined; and finally, the presence of fundamental statistical ideas is examined. The results show, in the case of Pre-school Education, a scarce presence of contents linked to the study of statistics and probability. In Primary Education, on the other hand, the presence of this block of content is greater. However, it is low in comparison with other content areas. On the other hand, the importance given to working with data in context and with meaning for students is observed. Finally, the need to approach fundamental statistical ideas in a progressive way, with different levels of depth according to the age of the students, is highlighted.

Keywords: *statistical sense, teaching of statistics, teaching of probability, early childhood education, primary education*

1. INTRODUCCIÓN

Hoy más que nunca cobra importancia la inclusión de la estadística y la probabilidad en el currículo escolar desde temprana edad y a lo largo de los distintos niveles educativos (Vásquez y Alsina, 2014). Ahora bien, a nivel internacional, la inclusión de la estadística y de la probabilidad en el plan de estudio de la matemática escolar de la Educación Secundaria goza de larga data y se remonta por ejemplo, en el caso de los Estados Unidos, al año 1923, cuando el *National Committee on Mathematical Requirements of the Mathematical Association of America* recomienda por primera vez el estudio de la estadística en los grados 7-12 (12 a 18 años de edad) en *The Reorganization of Mathematics in Secondary Education* (MAA, 1923).

Desde entonces, numerosos han sido los esfuerzos realizados por diversos países por incorporar temáticas de estadística y probabilidad en sus currículos, cuyo foco hasta finales de la década de los años 80 del siglo pasado estaba

puesto en la Educación Secundaria. Es en marzo de 1989, cuando el Consejo Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos (*National Council Teachers of Mathematics* [NCTM]) publica los *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989). Dicho documento recomienda incorporar temas de estadística y probabilidad como una rama del currículo de Educación Matemática de los grados K-12, es decir, desde los 4 a los 18 años, con el propósito de que los estudiantes den sentido a la gran cantidad de datos a los que se ven expuestos al desenvolverse en una sociedad basada en la comunicación y la tecnología, a fin de desarrollar su conciencia social.

Algunos años más tarde, durante la década de los años 90, el NCTM revisa y actualiza su plan de estudios; obteniendo como resultado los *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2003) que proponen adelantar el estudio de la estadística y la probabilidad desde el pre-kínder (3 años), haciendo aún más explícita la necesidad de que los estudiantes requieren de conocimientos y habilidades vinculadas al análisis de datos y probabilidad “para llegar a ser ciudadanos bien informados y consumidores inteligentes” (NCTM, 2003, p. 48).

Estos lineamientos han influido en los currículos de diversos países, provocando que el estudio de la estadística y la probabilidad vaya ganando terreno en los currículos de Educación Matemática desde temprana edad, e incluso en algunos casos los contenidos de estadística y probabilidad “ocupan el mismo nivel de importancia que las áreas tradicionales de las matemáticas como aritmética, álgebra, geometría, trigonometría y cálculo” (Inzunza y Rocha, 2021, p. 2). Por consiguiente, es necesario investigar respecto del conocimiento del profesorado para la enseñanza de la estadística y de la probabilidad en los distintos niveles educativos.

En tal dirección, cobran especial importancia las orientaciones curriculares, pues estas enmarcan el conocimiento del profesorado. Esto ha provocado que el estudio del currículo de matemáticas a nivel escolar se consolide como una línea de investigación en Educación Matemática (Reys *et al.*, 2010), puesto que “atiende a las funciones de un sistema educativo y ayuda a plantear preguntas y a obtener respuestas sobre las cuestiones centrales de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de la disciplina” (Rico y Moreno, 2016, p. 44). Por otro lado, la interpretación que realiza el profesorado sobre el currículo impacta en sus prácticas de enseñanza y en su desarrollo profesional (Choppin *et al.*, 2018). Por ende, es importante que el profesorado cuente con conocimiento sobre lo que los estudiantes deben aprender, con qué nivel de profundidad y en qué momento deben aprenderlo. No obstante, en lo que respecta a la estadística y la

probabilidad, las investigaciones al respecto aún son escasas, en especial, en los primeros niveles educativos. Así y todo, la literatura comienza a reportar algunos trabajos centrados en el análisis curricular de este tema en los currículos de Educación Primaria y Educación Secundaria en diferentes países como: España, México, Brasil y Chile entre otros (e.g. Vásquez y Alsina, 2014; Batanero *et al*, 2012). Tales estudios evidencian una diversidad de perspectivas respecto de la enseñanza de la estadística y la probabilidad en el aula escolar.

En este escenario, surge la necesidad de avanzar en el desarrollo de estudios que permitan ampliar los resultados de investigación hacia los niveles de Educación Infantil (3 a 5 años) y Educación Primaria (6 a 12 años), e informar acerca de por ejemplo ¿cuáles son las grandes ideas generadoras de aprendizaje en los temas de estadística y probabilidad en Educación Infantil y Primaria? ¿cómo se organiza el currículo en torno a estas grandes ideas?

En torno a ello, y como un intento de dar respuestas a este tipo de interrogantes, nos planteamos el objetivo de caracterizar el contenido de estadística y probabilidad propuesto en las orientaciones curriculares de Educación Infantil y Educación Primaria de Australia, Chile, España, Estados Unidos, Nueva Zelanda y Singapur. Esta selección se fundamenta en que corresponden a orientaciones curriculares que tienen una fuerte influencia en los currículos de Educación Matemática a nivel internacional y, además, corresponden a países con distintos niveles de rendimiento en la prueba PISA 2018 de matemática. Somos conscientes de que las orientaciones curriculares pueden variar en su detalle y profundidad. No obstante, es importante conocer sobre el conocimiento que demandan al profesorado (Deng, 2018). En especial, considerando la fuerte influencia del currículo escolar en las prácticas de enseñanza del profesorado, en el desarrollo de la clase, y, por tanto, en las oportunidades que se ofrecen a los estudiantes para aprender estadística y probabilidad.

Para cumplir con nuestro objetivo, en primer lugar, analizamos la presencia explícita de la estadística y la probabilidad en las orientaciones curriculares de los países antes indicados; para luego, analizar el sentido u enfoque propuesto para llevar a cabo su enseñanza; y, por último, se analizan las ideas estadísticas fundamentales presentes explícitamente o de manera subyacente, desde la perspectiva de Burrill y Biehler (2011).

¿Por qué analizar las ideas estadísticas fundamentales? Porque de acuerdo con Burrill y Biehler (2011), estas debieran “enseñarse en las matemáticas escolares y todo alumno debería conocerlas al salir de la escuela secundaria” (p. 58). Se hace necesario pues, llevar su enseñanza al aula escolar de manera tal que

los niños adquieran progresivamente una comprensión en profundidad de las nociones y conceptos asociados a su estudio, en pos de desarrollar una alfabetización estadística y probabilística que les capacite para “hacer frente a una amplia gama de situaciones del mundo real que implican la interpretación o la generación de mensajes probabilísticos, así como la toma de decisiones” (Gal, 2005, p. 40).

En este sentido, es necesario indagar en la presencia de estas ideas en los currículos de Educación Infantil y Educación Primaria y, más específicamente, en cómo estas ideas se desarrollan y profundizan a lo largo del currículo escolar en tales niveles educativos.

2. EL SENTIDO ESTADÍSTICO Y LAS IDEAS ESTADÍSTICAS FUNDAMENTALES

Nos desenvolvemos en un mundo complejo e incierto, altamente tecnificado y sobrecargado de información que involucra el contar con ciudadanos capaces de proporcionar argumentos fundamentados en conocimientos de estadística y probabilidad. Por tanto, es prioritaria la incorporación del estudio de la estadística y probabilidad en el aula escolar de manera progresiva con el propósito de ayudar a los estudiantes en la adquisición del sentido estadístico, como la unión de la cultura estadística (*statistical literacy*), el pensamiento y el razonamiento estadístico (Batanero *et al.*, 2013). Tal incorporación debe darse desde temprana edad (Alsina, 2012; Vásquez *et al.*, 2018), pues los primeros años de vida son vitales para el aprendizaje matemático, y “lo que ellos saben cuando ingresan a kínder y al grado primero es un indicador de sus potenciales logros matemáticos en los años venideros – incluso a lo largo de su escolaridad” (Clements y Sarama, 2015, p. 9). Por consiguiente, es de gran importancia sentar las bases para la adquisición del sentido estadístico en las edades tempranas. A pesar de ello, las investigaciones en torno a la estadística, la probabilidad y su enseñanza, se centran mayoritariamente en estudiantes de Educación Primaria y Educación Secundaria, siendo insuficientes aquellas respecto de experiencias de enseñanza de la estadística y probabilidad en las primeras edades (Vásquez y Alsina, 2019). Sin embargo, estas escasas investigaciones indican que los niños de Educación Infantil, pese a su corta edad, cuentan con ideas intuitivas asociadas a conceptos fundamentales de estadística y probabilidad (e.g. Vásquez y Alsina, 2019; Shaughnessy, 1992; Vásquez y Pincheira, 2021). Ideas que les

servirán de base para, poco a poco, alcanzar un aprendizaje formal de tales conceptos en los niveles superiores, así como para la adquisición progresiva del sentido estadístico. Por tanto, resulta de especial interés identificar las ideas estadísticas fundamentales que deberían abordarse a lo largo de la etapa escolar.

Con este propósito en mente, encontramos que Burrill y Biehler (2011), a partir del análisis de cuatro perspectivas respecto de la enseñanza de la estadística (un marco para el pensamiento estadístico, la estadística como un proceso diferente de las matemáticas, la alfabetización estadística, y la enseñanza estocástica), de los criterios de Heymann (2003) para las ideas fundamentales en matemáticas, y los criterios de Heitele (1975) para las ideas fundamentales en estocástica, proponen un conjunto de ideas estadísticas fundamentales (figura 1) que permiten “una comprensión más profunda a lo largo del tiempo a medida que los estudiantes maduran en su conocimiento de estadística” (Burrill y Biehler, 2011, p. 62) y que todo estudiante debería comprender al finalizar la Educación Secundaria.

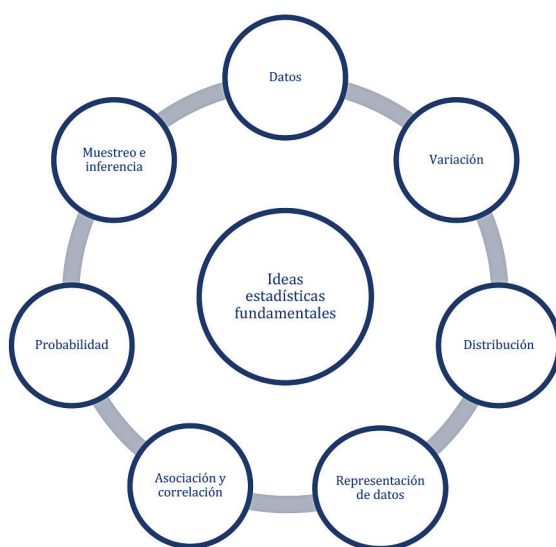


Figura 1. Ideas estadísticas fundamentales según Burrill y Biehler (2011).

Fuente: elaboración propia.

Por consiguiente, es importante que los profesores conozcan y comprendan estas ideas, para poder transmitir las adecuadamente (según la edad) en los procesos de instrucción (Burrill y Biehler, 2011).

Datos. La estadística es la ciencia de los datos cuyo propósito es el razonamiento a partir de los datos empíricos, donde el contexto desempeña un rol fundamental, pues “la estadística requiere de una forma diferente de pensar, porque los datos no son sólo números, ellos son números en un contexto. En matemáticas el contexto oscurece la estructura. En análisis de datos, el contexto proporciona significado” (Moore y Cobb, 1997, p. 801). Por tanto, es importante que los estudiantes trabajen con datos provenientes de situaciones reales, que frecuentemente requieren de interpretaciones y razonamientos de alto nivel (Batanero *et al.*, 2013).

Variación. Es una idea característica de la estadística, cuyo propósito es cuantificar, controlar y predecir la variabilidad (Batanero *et al.*, 2011); estudiándose tanto el modelo como los residuos (Engel y Sedlmeier, 2011). En este sentido, es importante que los estudiantes perciban la variabilidad de los datos, de los resultados de un experimento aleatorio, en una variable aleatoria en las muestras o distribución muestral, de manera que manejen modelos que permitan controlarla y predecirla (Reading y Shaughnessy, 2004).

Distribución. La enseñanza de la estadística se debe centrar en el desarrollo de la capacidad de leer, analizar, criticar y hacer inferencias a partir de distribuciones de datos (Shaughnessy, 2007). Lo que de acuerdo con Bakker y Gravemeijer (2004), esta idea constituye una característica esencial del análisis estadístico, tratar de describir y predecir propiedades de los agregados de datos y no de cada dato aislado.

Representación de datos. Al revisar diversos medios de comunicación podemos observar que la información se comunica principalmente a través de tablas y gráficos estadísticos que buscan presentar de manera rápida los datos. Por tanto, es importante considerar la transnumeración (Pfannkuch y Wild, 2004), componente del razonamiento estadístico, que consiste en obtener nueva información respecto de las características de un conjunto de datos a partir del uso de diferentes gráficos o representaciones que permitan identificar distintos aspectos de los mismos. Este proceso implica una transformación de los datos recolectados en diversas representaciones con el fin de promover la comprensión de una situación real.

Asociación y correlación entre dos variables. Este es un concepto importante para la toma de decisiones, frente al cual es necesario educar, pues no se

alcanza de manera espontánea (Estepa, 2004). A partir de tales conceptos es posible explorar la naturaleza de las relaciones entre variables estadística tanto para datos categóricos como numéricos, incluyendo a la regresión para modelar asociaciones estadísticas (Engel y Sedlemeier, 2011).

Probabilidad. Es una herramienta esencial para el desarrollo de conceptos estadísticos y de la estadística inferencial. Así, en el estudio de la probabilidad, es importante destacar y diferenciar su uso como un modelo matemático para predecir el comportamiento en situaciones aleatorias y su uso como herramienta para el razonamiento estadístico. Cabe señalar, que como indica Batanero (2005), la probabilidad tiene un significado polifacético que no se limita a una única perspectiva, sino que es imprescindible abordar desde su conjunto de perspectivas (significados intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático), que conforman la Teoría de la Probabilidad. Estos significados están relacionados dialécticamente, ya que la probabilidad puede contemplarse como razón de posibilidades a favor y en contra, como evidencia proporcionada por los datos, como grado de creencia personal y como modelo matemático que ayuda a comprender la realidad.

Muestreo e inferencia. Nos permiten explorar la relación entre las características de las muestras con las de la población, a fin de considerar qué datos y cómo recopilarlos hasta extraer conclusiones con un cierto grado de certeza. De acuerdo con Batanero *et al.* (2013), es en la Educación Secundaria cuando es posible una aproximación a una comprensión informal de la inferencia. Esto se alcanzaría por medio de la discriminación entre la posición central y variabilidad en las distribuciones de datos, y el uso de estas dos características para decidir cuándo dos distribuciones son iguales o diferentes (Rubin *et al.*, 2006).

Estas ideas estadísticas fundamentales deberán constituirse en un tejido de significancia que inicia gradualmente en edades tempranas, transcurre y se profundiza en la Educación Primaria y Secundaria en pos de la alfabetización estadística y probabilística, el pilar fundamental para el desarrollo del sentido estadístico.

3. METODOLOGÍA

Para alcanzar el objetivo de caracterizar el contenido de estadística y probabilidad propuesto en las orientaciones curriculares de Educación Infantil y Educación Primaria de Australia, Chile, España, Estados Unidos, Nueva Zelanda y Singapur, desarrollamos una investigación cualitativa de carácter documental (Bisquerra, 2019); utilizando como método el análisis de contenido (Krippendorff, 2013).

3.1 MUESTRA Y UNIDADES DE ANÁLISIS

La muestra se encuentra conformada por las propuestas curriculares para la Educación Matemática en Educación Infantil y Educación Primaria que se indican en la tabla 1. Respecto de las unidades de análisis, estas corresponden a los ejes temáticos vinculados al estudio de la estadística y la probabilidad en el currículo de Educación Infantil y Educación Primaria, sus respectivos descriptores y objetivos de aprendizaje.

Tabla 1. Documentos curriculares analizados

País	Referencia	Documento
Australia	ACARA (2020)	The Australian Curriculum: Mathematics.
Chile	MINEDUC (2018)	Bases Curriculares: Educación Parvularia.
	MINEDUC (2012)	Bases Curriculares: Educación Básica Matemática.
España	BOE (2007)	Orden ECI/3960/2007
	BOE (2014)	Real Decreto 126/2014
Estados Unidos	NCTM (2003)	Principles and Standards for School Mathematics.
	CCSSM (2010)	Common core state standars for mathematics.
Nueva Zelanda	MOE (2017)	Early childhood curriculum guidelines.
	MOE (2015)	The New Zealand Curriculum: Mathematics Standards for years 1–8.
Singapur	MOE (2012)	Mathematics Syllabus: Primary on to six.
	NEL (2013)	Nurturing Early Learners: A Curriculum for Kindergartens in Singapore.

Fuente: elaboración propia.

Cabe señalar que, en el caso de Estados Unidos, consideramos el análisis de las dos orientaciones curriculares que rigen el currículo escolar según el estado que se considere: los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003) y los Estándares Comunes para las Matemáticas (CCSSM, 2010).

3.2 CATEGORÍAS PARA EL ANÁLISIS

Para el análisis de las orientaciones curriculares se consideraron las siguientes categorías:

1) Presencia explícita de la estadística y la probabilidad en los currículos de Educación Matemática para Educación Infantil y Educación Primaria: esto nos informa sobre la presencia o ausencia de un eje o bloque de contenidos vinculados al estudio de la estadística y la probabilidad.

2) Sentido propuesto para llevar a cabo la enseñanza de la estadística y la probabilidad en los currículos de Educación Matemática para Educación Infantil y Educación Primaria: esta categoría se centra en indagar, en términos generales para cada una de las orientaciones curriculares, en el sentido que se propone para la enseñanza de estos temas. Para ello, se realizó un análisis de cada una de las descripciones otorgadas al eje de estadística y/o probabilidad en los distintos currículos, en busca de patrones acerca del sentido y el énfasis otorgado a su enseñanza y aprendizaje, que permitiera caracterizar dicho sentido.

3) Ideas estadísticas fundamentales presentes explícitamente o de manera subyacente en los currículos de Educación Matemática para Educación Infantil y Educación Primaria: en este aspecto se identifican y analizan las ideas estadísticas fundamentales presentes en las distintas orientaciones curriculares. Lo anterior, con el fin de dilucidar posibles caminos a seguir para la enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad.

Finalmente, a partir de estas tres categorías de análisis se espera proporcionar una caracterización de la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil y Educación Primaria desde una perspectiva internacional.

3.3 PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Se consideró un análisis de contenido, en el que participó el equipo investigador y abarcó las siguientes etapas:

- Rastreo y descarga de las orientaciones curriculares de interés.
- Lectura en profundidad de las orientaciones curriculares.
- Definición de una grilla en la cual se vaciaron los aspectos relevantes de cada uno de los documentos curriculares de los países que conforman la muestra (presencia explícita de contenidos de estadística y probabilidad

en Educación Infantil y Educación Primaria; descripciones otorgadas al eje de estadística y/o probabilidad en los distintos currículos; contenidos vinculados a las ideas estadísticas fundamentales).

- Definición de un sistema de codificación cuantitativa de la presencia o ausencia de las categorías de análisis antes indicadas, asignando puntuaciones según su presencia (1) o ausencia (0) en cada documento.
- Identificación, selección, análisis y codificación de aquellos ejes temáticos de las respectivas orientaciones curriculares que se encuentran explícitamente relacionados, ya sea a nivel de contenidos u objetivos de aprendizajes, al estudio de la estadística y/o probabilidad tanto en Educación Infantil como en Educación Primaria.
- Identificación, análisis y codificación del sentido propuesto por las respectivas orientaciones curriculares para llevar a cabo la enseñanza de la estadística y probabilidad.
- Identificación, análisis y codificación de las ideas estadísticas fundamentales presentes en los distintos currículos a partir de los descriptores curriculares presentes para cada curso.

La fiabilidad de la codificación se resguardo por medio de sesiones de codificación conjunta y discusión de los desacuerdos hasta lograr acuerdo. De esta manera se obtuvieron los datos que fueron registrados en una en una hoja de cálculo de MS Excel ® para su posterior análisis. Finalmente, se seleccionaron ejemplos específicos para cada una de las categorías de análisis.

4. RESULTADOS

En lo que sigue se dan a conocer los principales hallazgos del estudio en función de las unidades y las categorías de análisis antes indicadas.

4.1 PRESENCIA EXPLICITA DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD

A nivel general y a partir del análisis de las orientaciones curriculares de Australia, Chile, España, Estados Unidos, Nueva Zelanda y Singapur, se observa que la presencia del estudio de nociones y conceptos vinculados a estadística y

probabilidad no se da de manera continua en los currículos de infantil y primaria de todos los países considerados en este estudio (tabla 2).

Tabla 2. La estadística y la probabilidad en los currículos de infantil y primaria

Currículos	Educación Infantil		Educación Primaria	
	Estadística	Probabilidad	Estadística	Probabilidad
Australia	x		x	x
Chile			x	x
España			x	x
Estados Unidos	x	x	x	x
	x		x	
Nueva Zelanda			x	x
Singapur			x	

Fuente: elaboración propia.

Asimismo, se observa que en el caso de la Educación Infantil goza de una escasa presencia limitándose a un indicador de contenido u objetivo de aprendizaje en el caso del currículo de Australia, en el que se indica la importancia de que los estudiantes de esta etapa educativa “respondan a preguntas de sí/no para recoger información y hacer inferencias sencillas” (ACARA, 2020, p. 13). Del mismo modo, el currículo de Estados Unidos (CCSSM, 2010) señala a través del siguiente indicador de contenido la necesidad de que los estudiantes “clasifiquen y cuenten el número de objetos en categorías” (p. 10). Por su parte, el NCTM (2003), propone cinco indicadores de contenidos u objetivos de aprendizaje, en lo que se plantea la necesidad de que los estudiantes propongan preguntas estadísticas que los lleven a la recolección, organización, representación e interpretación de datos. Además de “discutir sucesos probables e improbables relacionados con las experiencias de los alumnos” (p. 112).

En lo que concierne al currículo de Educación Primaria, si bien se evidencia la presencia de la estadística en la totalidad de los currículos analizados, y en algunos casos de la probabilidad, dicha presencia es bastante descendida en relación con los demás ejes temáticos declarados para cada currículo. Tal y como se muestra en la figura 2, a excepción del currículo de Chile, en el cual el eje temático de patrones y álgebra es el que presenta la menor cantidad de indicadores u objetivos de

aprendizaje, en los demás países es el eje temático vinculado a estadística y, en algunos casos, probabilidad, el que presenta el menor porcentaje de indicadores de contenido u objetivos de aprendizaje en relación con el total.

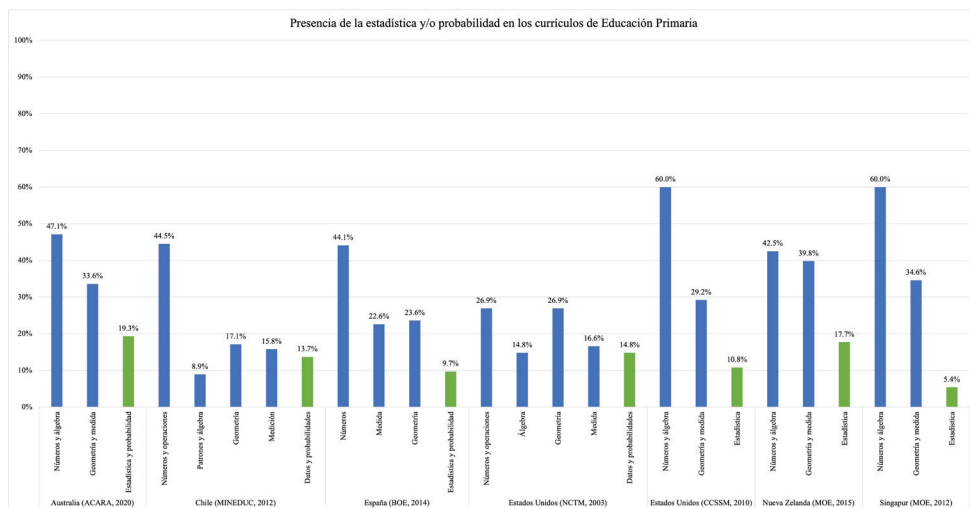


Figura 2. Porcentaje de presencia de la estadística y/o probabilidad en los currículos de Educación Primaria. Fuente: elaboración propia.

Ahora bien, de manera más concreta, en el currículo de matemáticas de Australia que abarca desde los 5 a los 18 años, se propone el eje temático de estadística y probabilidad; en el que se plantea que el estudio de la estadística y la probabilidad debe desarrollarse paralelamente e ir estableciendo progresivamente vínculos entre ellas. Para ello, los contenidos de dicho eje temático se agrupan en dos líneas de contenido que buscan dar claridad respecto de la secuencia a seguir para el desarrollo de los conceptos a través de los distintos niveles educativos: representación e interpretación de datos que va desde la etapa de infantil, y el azar que se aborda a partir de los primeros cursos de primaria.

Por su parte, en el currículo de matemáticas de Chile, se observa la presencia de la estadística y la probabilidad en Educación Primaria (6-12 años), a través del eje temático de datos y probabilidades; detallándose un conjunto de objetivos de aprendizaje asociados a dicho eje temático. Tales objetivos de aprendizaje describen los aprendizajes que deben alcanzar los estudiantes en los distintos niveles educativos. Y en el caso del eje de datos y probabilidad, van desde “recolectar y

registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas. Construir, leer e interpretar pictogramas” (MINEDUC, 2012, p. 100) en el primer curso de primaria hasta “comparar distribuciones de dos grupos, provenientes de muestras aleatorias, usando diagramas de puntos y de tallo y hojas. Conjeturar acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo. Leer e interpretar gráficos de barra doble y circulares y comunicar sus conclusiones” (MINEDUC, 2012, p. 126), en el último curso de primaria.

En lo que concierne al currículo de matemáticas de España, encontramos que se hace alusión a un conjunto de contenidos para el bloque de estadística y probabilidad, que se deben abordar de manera progresiva a lo largo de toda la Educación Primaria (6-12 años):

Gráficos y parámetros estadísticos. Recogida y clasificación de datos cualitativos y cuantitativos. Construcción de tablas de frecuencias absolutas y relativas. Iniciación intuitiva a las medidas de centralización: la media aritmética, la moda y el rango. Realización e interpretación de gráficos sencillos: diagramas de barras, poligonales y sectoriales. Análisis crítico de las informaciones que se presentan mediante gráficos estadísticos. Carácter aleatorio de algunas experiencias. Iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso. (BOE, 2014, p. 39)

En el caso de Estados Unidos, como hemos señalado anteriormente, se revisaron dos propuestas curriculares. En lo que respecta a los principios y estándares para la educación matemática (NCTM, 2003), que abarcan desde los 3 a los 18 años, en el estándar de contenido de análisis de datos y probabilidad, se afirma que:

Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para: formular preguntas que puedan abordarse con datos y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas; seleccionar y utilizar los métodos estadísticos apropiados para analizar los datos; desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos; comprender y aplicar conceptos básicos de Probabilidad. (NCTM, 2003, p. 51).

Mientras que, en los Estándares Comunes (Common Core State Standards for Mathematics [CCSM], 2010), se observa en Educación Infantil (3-6 años) y Educación Primaria (6-12 años) el eje temático de medición y datos, que incluye

contenidos vinculados únicamente a la estadística, con gran énfasis en la recolección, análisis, clasificación, organización e interpretación de datos.

En el caso de Nueva Zelanda, a diferencia de los otros países en que la estadística y/o la probabilidad es un eje temático al interior de la asignatura de matemática, aquí se da un mayor realce y protagonismo al estatus de la estadística, pues se habla de la asignatura (área de aprendizaje) de matemática y estadística. En la que se hace referencia explícita a la necesidad de que los estudiantes comprendan que:

la estadística involucra identificar problemas que se puedan explorar mediante el uso de datos, el diseño de investigaciones, la recolección y exploración de estos, con el fin de identificar patrones y relaciones, que permitan dar respuesta a tales problemas y comunicar los resultados. (MOE, 2015, p. 26)

Por último, en el currículo de matemáticas de Singapur, se observa únicamente la presencia de la estadística como un eje temático. Si bien en las orientaciones curriculares no se entra en mayor detalle respecto a dicho eje, se observa que este se enfoca, a lo largo de la Educación Primaria, en la representación e interpretación de datos.

Como se puede observar, el estudio de la estadística se encuentra como un eje temático a lo largo de la Educación Infantil y Primaria en los currículos de Australia y Estados Unidos. Mientras que, en Chile, España, Nueva Zelanda y Singapur, el estudio de la estadística es abordado a partir de los primeros cursos de Educación Primaria. No obstante, en la totalidad de los currículos, se evidencia que las secuencias de contenidos o de objetivos de aprendizaje, van desde planteamiento de preguntas de investigación estadística, hasta llegar a la recolección e interpretación de datos. Por ejemplo, en el caso de Chile se plantea que los estudiantes del primer curso de primaria deben “recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo, y el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas” (MINEDUC, 2012, p. 100). Para luego, avanzar hacia la interpretación, representación y comparación de datos cualitativos y cuantitativos, a través, por ejemplo, de la “descripción e interpretación de diferentes conjuntos de datos en contexto” (ACARA, 2020, p. 59); o bien mediante el uso de medidas de tendencia central, que lleven a “describir la forma y las características importantes de un conjunto de datos, y comparar conjuntos que tengan relación, poniendo el énfasis en cómo distribuye los datos” (NCTM, 2003, p. 180). Para así,

proponer y justificar conclusiones y predicciones basadas en datos, a medida que se avanza en los niveles de escolaridad.

En el caso de las nociones y conceptos vinculados al estudio de la probabilidad, su presencia en las orientaciones curriculares es bastante menor en comparación con las nociones y conceptos de estadística, puesto que solo se incluye desde los 3 años en el currículo de Estados Unidos (NCTM, 2003). En dicho currículo, se enfatiza en la importancia de aproximar a los alumnos desde temprana edad al estudio de la probabilidad, a partir de la discusión en torno a sucesos posibles e imposibles relacionados con sus experiencias. Para luego, transitar a la descripción de sucesos como probables o no probables, guiando la discusión en torno a la escala de probabilidad de ocurrencia, para finalizar con la comprensión de la probabilidad de un suceso como una medida que puede representarse por un número oscila entre 0 y 1.

En tanto, en los currículos de Australia, Chile, España, y Nueva Zelanda, la probabilidad es abordada desde los 6 años, a partir de una trayectoria de objetivos de aprendizaje fuertemente centrada, al igual que en el caso del NCTM (2003), en el desarrollo del lenguaje asociado a la probabilidad, a través por ejemplo, de la “identificación de sucesos familiares que involucren el azar y describirlos usando un lenguaje cotidiano como ‘sucederá’, ‘no pasará’ o ‘podría suceder’” (ACARA, 2020, p. 13). Para luego, transitar a la “investigación de situaciones sencillas que involucren el azar comparando los resultados experimentales con los teóricos, reconociendo que las muestras varían” (MOE, 2015, p. 61); de manera tal que puedan “conjeturar acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo” (MINEDUC, 2012, p. 126).

Por último, en los currículos de Singapur y en aquellos estados de Estados Unidos que adhieren a los CCSSM (2010), la probabilidad es postergada hasta la Educación Secundaria.

4.2 SENTIDO PROPUESTO PARA LLEVAR A CABO LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD

En primer lugar, se observa que cuatro de los seis currículos analizados indican explícitamente el propósito de enseñar estadística y, en su caso, probabilidad. Tal es el caso del currículo de Australia, que incorpora temas de estadística y probabilidad, con la finalidad de que los estudiantes “desarrollen una capacidad

cada vez más sofisticada para evaluar críticamente los conceptos de azar y de datos, para hacer juicios y tomar decisiones razonadas, así como para desarrollar habilidades para evaluar críticamente la información estadística y desarrollar intuiciones sobre los datos" (ACARA, 2020, p. 6). Del mismo modo, el currículo de Chile señala que el eje temático de Datos y probabilidades responde a la necesidad de que

todos los estudiantes registren, clasifiquen y lean información dispuesta en tablas y gráficos, y que se inicien en temas relacionados con las probabilidades. Estos conocimientos les permitirán reconocer gráficos y tablas en su vida cotidiana. Para lograr este aprendizaje, es necesario que conozcan y apliquen encuestas y cuestionarios por medio de la formulación de preguntas relevantes, basadas en sus experiencias e intereses, y después registren lo obtenido y hagan predicciones a partir de ellos. (MINEDUC, 2012, p. 91)

Por su parte, en el currículo de Estados Unidos (NCTM, 2003) se enfatiza en que

los estudiantes necesitan saber Análisis de datos y otros aspectos relativos a la Probabilidad para poder razonar estadísticamente. Son habilidades necesarias para llegar a ser ciudadanos bien informados y consumidores inteligentes. (NCTM, 2003, p. 51)

Asimismo, se centra la atención en que el trabajar estos temas "ofrece a los estudiantes una forma natural de conectar las matemáticas con otras asignaturas y con las experiencias de la vida cotidiana" (NCTM, 2003, p. 51).

Finalmente, en el caso del currículo de Nueva Zelanda, se pone hincapié en el potencial de aprender estadística, indicando que a través de esta

los alumnos desarrollan otras importantes habilidades de pensamiento. Aprenden a crear modelos y a predecir resultados, a conjeturar, a justificar y verificar, y a buscar patrones y generalizaciones. Aprenden a estimar con sensatez, a calcular con precisión y a entender cuándo los resultados son precisos y cuándo deben interpretarse con incertidumbre. (MOE, 2015, p. 26)

Ahora bien, al contrario de los currículos antes señalados, en el caso de los currículos de España, Singapur y Estados Unidos (CCSSM, 2010), solo se advierte una orientación general para la asignatura de matemática, que es transversal y se aplica a la estadística y, en su caso, a la probabilidad, al igual que a otras

áreas de la matemática. Así, en el caso de España, se concibe a la matemática y las distintas áreas que la componen como

un conjunto de ideas y formas que nos permiten analizar los fenómenos y situaciones que se presentan en la realidad, para obtener informaciones y conclusiones que no estaban explícitas y actuar, preguntarnos, obtener modelos e identificar relaciones y estructuras, de modo que conlleven no solo utilizar cantidades y formas geométricas sino, y sobre todo, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas. (BOE, 2014, p. 33)

En lo que concierne al currículo de Singapur, se enfatiza en el desarrollo de habilidades matemáticas, el aprendizaje continuo desde el enfoque de la resolución de problemas, que permita a los estudiantes

adquirir conceptos y habilidades matemáticas para el aprendizaje diario y continuo de las matemáticas; desarrollar el pensamiento, el razonamiento, la comunicación, la aplicación y las habilidades metacognitivas a través de un enfoque matemático centrado en la resolución de problemas; para crear confianza y fomentar el interés por las matemáticas. (MOE, 2012, p. 30)

Dicho enfoque se vincula directamente con resolución de problemas estadísticos, desde las distintas fases del ciclo de investigación estadística. Análogamente, el currículo de Estados Unidos (CCSSM, 2010), ofrece un conjunto de orientaciones para la enseñanza de la matemática, con el objeto de lograr una educación de alta calidad que permita a los estudiantes acceder a los conocimientos y habilidades necesarios para sus vidas después de la escuela, ya sea en la universidad o en el mundo laboral.

Para ello, se enfatiza en los siguientes ocho estándares que dotan de sentido a la enseñanza de la matemática: dar sentido a los problemas y perseverar en resolverlos; desarrollar un razonamiento abstracto y cuantitativo; construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros; modelar usando matemáticas; usar herramientas adecuadas de manera estratégica; reconocer la importancia de la precisión; buscar y hacer uso de una estructura; buscar y expresar regularidades en un razonamiento repetido. Tal enfoque y estándares otorgan realce al desarrollo de la competencia matemática, es decir, a la habilidad que deben desarrollar los estudiantes para comprender y usar los diversos contenidos matemáticos para la resolución de problemas provenientes de una

variedad de contextos y situaciones. A partir del análisis de las orientaciones curriculares, del sentido otorgado a la enseñanza de la estadística y, en su caso, de la probabilidad, observamos semejanzas en cuanto a la orientación que se da la enseñanza de estos temas. Concretamente, se evidencia, por ejemplo, en el caso de Chile, el énfasis en el registro y lectura de información presente tanto en gráficos como en tablas, así como en las etapas de formulación de preguntas de investigación estadística, recolección, análisis e interpretación de los datos. Por otro lado, respecto del contexto que se promueve se observa que sugiere el trabajo con preguntas relevantes acordes a las experiencias e intereses de los estudiantes. De igual manera, se destaca la importancia que se otorga a que los estudiantes aprecien el rol de la estadística respecto a sus aplicaciones prácticas en la vida cotidiana, así como en otras disciplinas y en la vida laboral. También, se explicita la necesidad de diseñar investigaciones estadísticas para resolver problemas, e interpretar datos y argumentos basados en ellos. Por último, se observa mención directa a la incertidumbre y a la variación, por ejemplo, en el documento de Nueva Zelanda se afirma que “la estadística también implica interpretar información estadística, evaluar argumentos basados en los datos y el lidiar con la incertidumbre y la variación” (MOE, 2015, p.26).

Por otra parte, a partir de lo antes expuesto para los distintos currículos, se evidencia un enfoque centrado en las distintas etapas que conforman el ciclo de investigación estadística como un elemento que vertebra la enseñanza de estos temas. Tal es el caso del currículo de Australia, en el que se afirma que los estudiantes de tercer grado de primaria deben “identificar preguntas o problemas para variables categóricas. Identificar fuentes de datos y planificar métodos de recolección y registro de datos” (ACARA, 2020, p. 39). Asimismo, se evidencia el énfasis en el uso de la estadística y la probabilidad como herramientas para dar respuesta a situaciones provenientes de un contexto real, en las que es necesario el uso del conocimiento estadístico y/o probabilístico para interpretar, evaluar críticamente, comunicar y tomar de decisiones a partir de información relacionada con datos y/o probabilidad. De modo tal que los estudiantes perciban la estadística y la probabilidad de manera conectada con distintos ámbitos de la vida real, como una herramienta útil y valiosa. Tal es el caso, por ejemplo, del currículo de Nueva Zelanda que señala que “la estadística tiene una amplia gama de aplicaciones prácticas en la vida cotidiana, en otras áreas de aprendizaje y en los lugares de trabajo” (MOE, 2015, p. 26).

4.3 LAS IDEAS ESTADÍSTICAS FUNDAMENTALES

Con el propósito de identificar cuáles son las ideas estadísticas fundamentales que están presentes en las orientaciones curriculares consideradas en este estudio, se realizó un análisis transversal de las propuestas curriculares que consideró los indicadores de contenido u objetivos de aprendizaje vinculados a estadística y probabilidad para cada uno de los cursos que conforman el nivel educativo en cuestión. Se consideraron aquellos rasgos claramente identificables, y que se pueden vincular con las ideas estadísticas fundamentales.

En lo que sigue se presentan los resultados, en primer lugar, para los currículos de infantil, y luego los de primaria.

4.3.1 Las ideas estadísticas fundamentales en los currículos de Educación Infantil

En lo que respecta a los currículos de Educación Infantil que abordan temas de estadística y/o probabilidad se analizó un total de 7 indicadores de contenidos u objetivos de aprendizaje: 6 de Estados Unidos (NCTM, 2003; CCSSM, 2010) y 1 de Australia (ACARA, 2020), en la tabla 3 se resume el recuento del número de veces que se hace alusión a ideas o conceptos que se pueden vincular con las ideas estadísticas fundamentales. Es importante tener en cuenta que un mismo indicador puede atender a una o más de dichas ideas.

Tabla 3. Presencia de las ideas estadísticas fundamentales en los currículos de infantil.

Ideas estadísticas fundamentales	Estados Unidos		Australia	Presencia global (%)
	(NCTM, 2003) n=5	(CCSSM, 2010) n=1	(ACARA, 2020) n=1	
Datos	3	1	1	100%
Variación	1	1	1	60%
Distribución	1	1	0	40%
Representación de datos	2	1	1	80%
Asociación y correlación	0	0	0	0%
Probabilidad	1	0	0	20%
Muestreo e inferencia	0	0	1	20%

Fuente: elaboración propia.

A partir de la tabla 3, se observa que los datos están presentes en la totalidad de los indicadores de los currículos analizados. Tal es el caso del indicador de aprendizaje centrado en que los estudiantes “respondan a preguntas de sí/no para recoger información y hacer inferencias sencillas” (ACARA, 2020, p. 13), a partir del cual se puede llevar a los estudiantes a que planteen preguntas sobre sí mismos, sobre objetos y eventos familiares. De esta manera, los estudiantes estarán trabajando directamente con datos provenientes de contextos cercanos, acordes a su edad y con significado para ellos. Por otro lado, no se trata de plantear cualquier tipo de pregunta, deben ser preguntas estadísticas cuya respuesta esté basada en datos, permitiendo observar la variación de estos. Tal variación debe ser observada a un nivel inicial, por ejemplo, dentro del mismo grupo curso.

De igual manera, se evidencia la presencia de la representación, pues no solo deberán plantear preguntas estadísticas, sino que también deberán representar tales datos, para si poder hacer inferencias sencillas, utilizando representaciones acordes al nivel educativo en que se encuentran.

Igualmente, en el caso del currículo de Estados Unidos (NCTM, 2003) se observa la presencia de la probabilidad en 1 de los 5 objetivos de aprendizaje que se plantean, afirmando que los estudiantes deberán “discutir sucesos probables e improbables relacionados con sus experiencias” (p. 112). Esto permitirá los estudiantes adquieran progresivamente un lenguaje probabilístico elemental para comunicar el azar. En una primera instancia dicho lenguaje será de carácter verbal para luego, en los cursos superiores, avanzar a un lenguaje numérico.

A este respecto, a partir del análisis de los descriptores que plasman los objetivos de aprendizaje en torno a la estadística y/o probabilidad para este nivel educativo (tabla 3), se evidencia –a nivel global– que las ideas estadísticas fundamentales que presentan una mayor presencia son: los datos (100%) seguidos de la representación de datos (80%), la variación (60%), la distribución (40%), la probabilidad (20%) e inferencia (20%).

Cabe señalar que, si bien estas ideas estadísticas fundamentales están presentes en el currículo de Educación Infantil, lo están a un nivel muy inicial e incipiente. No obstante, su presencia es de gran importancia, pues dan pie para comenzar a sentar las bases para el estudio de la estadística y la probabilidad en los niveles superiores.

4.3.2 Las ideas estadísticas fundamentales en los currículos de Educación Primaria

En lo que respecta a los currículos de Educación Primaria, se analizaron 112 indicadores de contenidos u objetivos de aprendizajes relativos a temas de estadística y/o probabilidad. A partir de la tabla 4, se resume el recuento del número de veces que se hace alusión a ideas o conceptos que se pueden vincular con las ideas estadísticas fundamentales; evidenciándose la presencia de la totalidad de las ideas estadísticas fundamentales en los currículos de Estados Unidos (NCTM, 2003), Australia y Nueva Zelanda. Cabe señalar, que al igual que en el análisis de los currículos de infantil, es importante tener en cuenta que un mismo indicador puede atender a una o más de dichas ideas.

Tabla 4. Presencia de las ideas estadísticas fundamentales en los currículos de primaria.

Ideas estadísticas fundamentales	Estados Unidos		Australia	Singapur	Nueva Zelanda	España	Chile	Presencia global (%)
	(NCTM, 2003) n=16	(CCSSM, 2010) n=7	(ACARA, 2020) n=27	(MOE, 2012) n=13	(MOE, 2015) n=20	(BOE, 2014) n=9	(MINEDUC, 2012) n=20	
Datos	16	7	26	13	20	3	20	94%
Variación	7	3	9	1	10	1	14	40%
Distribución	7	3	1	2	7	0	14	30%
Representación de datos	8	6	15	13	13	3	16	66%
Asociación y correlación	1	0	1	1	3	0	0	5%
Probabilidad	4	0	11	0	13	2	9	35%
Muestreo e inferencia	3	0	3	2	5	0	7	18%

Fuente: elaboración propia.

Concretamente, podemos señalar que la idea de datos es la que goza de mayor presencia entre los currículos analizados (94%), tal es el caso del currículo de Nueva Zelanda en el que se encontraron alusiones a los datos, pues se espera que los estudiantes “recopilen, clasifiquen y visualicen datos multivariados de

categorías y números enteros, y datos simples de series temporales para responder a preguntas de investigación estadística” (MOE, 2015, p. 61). Del mismo modo, encontramos un gran número de alusiones a la idea de representación de datos (66%) entre los indicadores analizados. Por ejemplo, en el currículo de Chile, se plantea que los estudiantes deben “construir, leer e interpretar pictogramas con escala y gráficos de barra simple” (MINEDUC, 2012, p. 104). Esto nos sugiere que más allá de construir distintos tipos de gráficas, los estudiantes deben ser capaces de comunicar sus hallazgos (datos), así como evaluar la efectividad o pertinencia de los distintos tipos de representaciones a utilizar. Otra idea a la que se hace alusión y que se encuentra presente en el 40% de los casos, es la de variación, esto queda de manifiesto al proponer que los estudiantes deben plantear preguntas estadísticas que permitan dar respuesta al problema planteado, que anticipe una respuesta basada en datos y la variación de estos, esto queda plasmado en el siguiente indicador “utilizar múltiples visualizaciones, y re-categorizar los datos para encontrar patrones, variaciones, relaciones y tendencias” (MOE, 2015, p. 73). Por otro lado, dentro de las ideas que gozan de una menor presencia, es decir, que muestra un menor número de alusión entre los indicadores analizados, es la probabilidad. Dicha idea esta presente, por ejemplo, en el currículo de Australia, en el que se indica que los estudiantes deben “realizar experimentos al azar con números pequeños y grandes de ensayos utilizando tecnologías digitales apropiadas” (ACARA, 2020, p. 68). A través de dicho objetivo de aprendizaje se pretende que los estudiantes exploren el concepto de probabilidad desde el enfoque frecuentista. La idea de distribución es otra cuya presencia es baja, y las alusiones en los indicadores no superan el 30%. En algunos casos, como en el currículo de Estados Unidos (NCTM, 2003) la idea de distribución aparece de manera explícita, por ejemplo, se plantea que los estudiantes deberían ser capaces de “describir la forma y las características importantes de un conjunto de datos, y comparar conjuntos que tengan relación, poniendo el énfasis en cómo se distribuyen los datos” (NCTM, 2003, p. 180). Asimismo, en el objetivo de aprendizaje antes indicado, se observa de manera subyacente la presencia de la idea de asociación, al explorar las relaciones entre el conjunto de datos. Por último, en el currículo de Singapur, se hace alusión de manera subyacente a la idea de muestreo, al señalar que los estudiantes deben contar con los conocimientos para “discutir ejemplos de datos representados en gráficos de barras simples y compuestos que se encuentran en periódicos y revistas, y en cómo se recopilaban los datos” (MOE, 2012, p. 52). Así, al analizar respecto de cómo se recopilaban los datos se pueden abordar aspectos

vinculados a las características de las muestras consideradas en el estudio y, en cómo ello influye en la representatividad de la información.

5. CONSIDERACIONES FINALES

En este estudio hemos analizado la presencia de la estadística y la probabilidad en las orientaciones curriculares de Estados Unidos, Chile, Singapur, Nueva Zelanda, Australia y España, para los niveles de Educación Infantil y Educación Primaria, es decir, desde los 3 a los 12 años. Para luego, examinar el sentido propuesto por tales documentos curriculares para la enseñanza de estos temas; por último, analizamos la presencia de las ideas estadísticas fundamentales.

Respecto de la presencia de los temas de estadística y probabilidad, en el caso de la Educación Infantil, se evidencia que el estudio de la estadística no está siempre presente en este nivel educativo, observándose su presencia solo en los currículos de Estados Unidos y Australia. Por su parte, en caso de la probabilidad, esta aparece explícitamente solo en el currículo de Estados Unidos (NCTM, 2003). Por tanto, la presencia de la estadística y probabilidad en este nivel educativo es aun muy escasa, pese a la importancia de incorporar su estudio desde temprana edad, lo cual de acuerdo con Alsina (2012) contribuiría a: garantizar una educación de alta calidad que se ajuste a los cambios sociales; al desarrollo integral de los niños; y al desarrollo de la alfabetización estadística y probabilística desde las primeras edades. Esta ausencia puede ir en desmedro de un adecuado desarrollo de la alfabetización estadística y probabilística desde edades tempranas, coartando en dichos niveles el desarrollo de oportunidades de aprendizaje enriquecedoras, que permitan iniciar y educar a los niños en estos temas desde la Educación Infantil.

En el caso de la Educación Primaria, el panorama es un poco más alentador, pues en los currículos de Estados Unidos (NCTM, 2003), España, Nueva Zelanda y Chile se observa la presencia de la estadística y la probabilidad lo que favorece el brindar ciertas oportunidades de aprendizaje a los estudiantes de esta etapa para desarrollar de manera gradual y continua la alfabetización estadística y probabilística desde los primeros años de Educación Primaria. No obstante, su presencia es aun muy limitada en relación con la presencia de los restantes ejes temáticos, pues el número de indicadores de contenido u objetivos de aprendizaje destinados a temas de estadística y probabilidad no logran superar el 19% de presencia en el mejor de los casos. Nos encontramos ante

currículos desbalanceados en cuanto a la manera de distribuir los distintos ejes temáticos, currículos que dan gran énfasis, por ejemplo, a las ideas y conceptos vinculadas a la numeración y el cálculo. Por otro lado, se observa que en los currículos de Singapur y Estados Unidos (CCSSM, 2010), el estudio de la probabilidad es postergado para la etapa de Educación Secundaria (13 a 18 años).

Por otro lado, al examinar el sentido propuesto por las orientaciones curriculares para la enseñanza de la estadística y/o probabilidad, tanto en aquellos que cuentan con un apartado específico para señalar el propósito de enseñar estadística y/o probabilidad, como en aquellos en que solo se entrega una descripción a nivel general para la asignatura de matemática, se observa que el enfoque se centra en que los estudiantes adquieran competencias y habilidades que les permitan apreciar el rol de la estadística y la probabilidad como una herramienta para comprender el mundo, y a la vez necesaria para una toma de decisiones de manera informada. Reconociendo su potencial de aplicación a diversos campos de conocimiento y a una variedad de contextos. Para ello, se resalta tanto la importancia de adquirir conocimientos matemáticos como el desarrollo de habilidades.

En definitiva, en los currículos analizados, se observa que la enseñanza de la estadística y la probabilidad es concebida como un terreno fértil para resolver problemas con sentido y significado para los estudiantes, provenientes de situaciones cotidianas. Consideramos que es un aspecto muy positivo y que favorece su enseñanza y la valoración de esta en el aula escolar, sin embargo, es necesario avanzar más y enfatizar el potencial de centrar la enseñanza de la estadística y la probabilidad como una herramienta para ayudar a los ciudadanos de hoy a tomar conciencia, comprender, reflexionar y actuar en pos de transformar la actual sociedad. Así pues, la enseñanza de la estadística y la probabilidad brinda herramientas para comprender y dar respuesta a problemas de la vida real y de otras disciplinas, permitiendo establecer conexiones entre contextos y problemáticas diversas, por ejemplo, aquellas vinculadas al desarrollo sostenible.

Finalmente, a partir del análisis de la presencia de las ideas estadísticas fundamentales en los currículos de infantil y primaria, se observa que algunas de ellas están presentes en la etapa infantil, mientras que la totalidad de estas ideas están presentes en mayor o menor medida en los currículos de primaria. Más específicamente, en el caso de la Educación Infantil, el énfasis se encuentra en los datos, la representación de datos, la variación, la distribución, la probabilidad y el muestreo e inferencia. Cabe señalar que, dada la edad de los estudiantes de esta etapa escolar, tales ideas se abordan a un nivel muy inicial y ligado a los conocimientos intuitivos y a las ideas numéricas y de conteo propias de la edad,

para luego ir progresando y enriqueciéndose a medida que los estudiantes avanzan en su etapa escolar. Mientras que, para el caso de la Educación Primaria, destacan de mayor a menor énfasis las ideas de datos, representación de datos, variación, probabilidad, distribución, muestreo e inferencia, y asociación y correlación. Cabe señalar, que al igual que en la etapa de Educación Infantil, estas ideas se abordan con distintos niveles de profundidad acorde a las edades de los estudiantes. No obstante, pese a ello, es importante que sean abordadas de manera progresiva y con distintos niveles de profundidad acordes a la edad de los niños, con el fin de sentar las bases para un desarrollo gradual de la alfabetización estadística y probabilística.

Así, a partir del análisis realizado, observamos que las ideas estadísticas fundamentales de datos y representación de datos son las que tienen una mayor presencia en los currículos estudiados, quizás esto se deba a que el sentido otorgado a la enseñanza de la estadística y la probabilidad se centra en la resolución de problemas estadísticos, así como en otorgar conocimientos y habilidades que permitan a los estudiantes interpretar información estadística presente en contextos cotidianos.

Por tanto, es necesario reflexionar en torno a la enseñanza de la estadística y la probabilidad, pues en muchas ocasiones se centra en lo procedimental por sobre la comprensión conceptual, o bien ocurre que la enseñanza de estos contenidos se omite por parte del profesorado, dada su escasa preparación, dejándole para el final de curso, con un margen de tiempo curricular insuficiente en comparación con otros bloques de contenidos dentro del currículo.

Sin duda, es necesario avanzar en el planteamiento de propuestas que permitan abordar la enseñanza de la estadística y la probabilidad con mayor fuerza y presencia en el currículo escolar de edades tempranas, de manera de responder a los desafíos del mundo actual que nos expone a diario a una avalancha de datos que debemos saber interpretar adecuadamente. Esto no hace más que posicionar a la educación estadística y probabilística desde edades tempranas como un campo de investigación que reclama atención.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo desarrollado en el marco del FONDECYT N° 1200356 financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

REFERENCIAS

- ACARA (2020). The Australian Curriculum: Mathematics. <https://www.australiancurriculum.edu.au/f-10-curriculum/mathematics/>
- Alsina, Á. (2012). La estadística y la probabilidad en Educación Infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Revista de Didácticas Específicas*, 7, 4-22.
- Bakker, A. y Gravemeijer, K. P. E. (2004). Learning to reason about distribution. En J. Garfield y D. Ben Zvi (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 147-168). Kluwer.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *RELIME*, 8(3), 247-264.
- Batanero, C., Arteaga, P. y Contreras, J. M. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. *EM-TEIA. Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 2(2), 1-20.
- Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. M. (2012). El currículo de estadística: reflexiones desde una perspectiva internacional. *UNO*, 59, 9-17.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M., y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números. Revista de didáctica de las Matemáticas*, 83, 7-18.
- Bisquerra, R. (2019). Metodología de la investigación educativa. La Muralla.
- BOE (2007). Orden ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil.
- BOE (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.
- Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study* (pp. 57-69). Springer.
- Choppin, J., McDuffie, A., Drake, C. y Davis, J. (2018). Curriculum ergonomics: Conceptualizing the interactions between curriculum design and use. *International Journal of Educational Research*, 92, 75-85. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2018.09.015>
- Clements, D., y Sarama, J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad. El enfoque de las Trayectorias de aprendizaje*. (O. León, A. Lange, M. León, y A. Toquica, Trans.) Learning Tools LLC.
- Common Core State Standards for Mathematics (2010). *Common Core State Standards Initiative*. http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf

- Deng, Z. (2018). Pedagogical content knowledge reconceived: Bringing curriculum thinking into the conversation on teachers' content knowledge. *Teach and Teach Ed*, 72, 155-164. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2017.11.021>
- Engel, J. y Sedlmeier (2011). Correlation and regression in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.). *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASSE study* (pp. 247-258). Springer.
- Estepa, A. (2004). Investigación en educación estadística. La asociación estadística. En Luengo R. (Ed.), *Líneas de investigación en educación matemática* (pp. 227-255). Servicio de Publicaciones. Universidad de Extremadura.
- Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. In G. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Kluwer Academic Publishers.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6(2), 187-205. <https://doi.org/10.1007/BF00302543>
- Heymann, H. (2003). *Why teach mathematics: A focus on general education*. Kluwer Academic Publishers.
- Inzunza, S. y Rocha, E. (2021). Los datos y el azar en el currículo de educación básica y bachillerato en México: reflexiones desde la perspectiva internacional. *Diálogos sobre educación*, 23, 1-13. <https://doi.org/10.32870/dse.v0i22.717>
- Krippendorff, K. (2013). *Metodología de análisis de contenido*. Teoría y práctica. Paidós.
- MINEDUC (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática*. Unidad de Curriculum y Evaluación.
- MINEDUC (2018). *Bases Curriculares 2018: Educación Parvularia*. Unidad de Curriculum y Evaluación.
- MOE (2012). *Mathematics Syllabus: Primary on to six*. Curriculum Planning and Development Division. Ministry of Education. Republic of Singapore.
- MOE (2015). *The New Zealand curriculum: Mathematics standards for years 1-8*. New Zealand.
- Moore, D. y Cobb, G. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *American Mathematical Monthly*, 104, 801-823. <https://doi.org/10.1080/00029890.1997.11990723>
- National Committee on Mathematical Requirements, Mathematical Association of America (MAA). (1923). *The Reorganization of Mathematics in Secondary Education*. Washington, D.C.
- NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. NCTM.
- NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

- NEL (2013). *Nurturing Early Learners: A Curriculum for Kindergartens in Singapore*. Volume 6. Ministry of Education. Republic of Singapore.
- Pfannkuch, M. y Wild, C. (2004). Towards and understanding of statistical thinking. En Dani Ben-Zvi y Joan Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 17-46). Kluwer Academic Publishers.
- Reading, C. y Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. En J. Garfield y D. Ben-Zvi (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 201-226). Kluwer.
- Reys, B., Reys, R. y Rubenstein, R. (2010). *Mathematics Curriculum Issues, Trends, and Future Directions*. NCTM. Reston, VA.
- Rico, L. y Moreno, A. (Eds.). (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. Pirámide.
- Rubin, A., Hammerman, J. K. y Konold, C. (2006). Exploring informal inference with interactive visualization software. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. International Association for Statistics Education. www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.
- Shaughnessy, J. M. (1992). *Research in probability and statistics: Reflections and directions*. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 465-494). Macmillan Publishing Co.
- Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F. K. Lester (Jr Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp 957-1009). The National Council of Teachers of Mathematics.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *Revista Números*, 85, 5-23.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2019). Conocimiento especializado del profesorado de educación básica para la enseñanza de la probabilidad. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 23(1), 393-419. <https://doi.org/10.30827/profesorado.v23i1.9160>
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2019). Intuitive ideas about chance and probability in children from 4 to 6 years old. *Revista Acta Scientiae*, 21(3), 131-154. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss3id5215>
- Vásquez, C. y Pincheira, N. (2021). ¿Qué procesos matemáticos se movilizan cuando se enseña probabilidad? Un estudio de caso en el aula de Educación Infantil. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, 6(2), 62-84. <https://doi.org/10.34179/revisem.v6i2.16007>

Vásquez, C., Díaz-Levicoy, D., Coronata, C. y Alsina, A. (2018). Alfabetización estadística y probabilística: primeros pasos para su desarrollo desde la Educación Infantil. *Cadernos Cenpec*, 8(1), 154-179. <http://dx.doi.org/10.18676/cadernoscenpec.v8i1.393>

CLAUDIA VÁSQUEZ

Dirección: O'Higgins 501, Villarrica, Región de La Araucanía, Chile.
Campus Villarrica, Pontificia Universidad Católica de Chile, cavasque@uc.cl
Teléfono: +56223547365

Capacidad de resolución de problemas matemáticos y su relación con las estrategias de enseñanza en estudiantes del primer grado de secundaria

Ability to solve mathematical problems and their relationship with teaching strategies in students of the first grade of secondary school

Clodoaldo Berrocal Ordaya,¹
Alberto Alfredo Palomino Rivera²

Resumen: Las estrategias de enseñanza deben de significar para el docente las bases más importantes en el desarrollo de las potencialidades de sus estudiantes, así el objetivo de este estudio es determinar si el estudiante percibe las estrategias de enseñanza que los docentes aplican actualmente en el área de las matemáticas y cómo se relaciona con la habilidad que generan para la resolución de problemas. Se trata de una investigación con enfoque cuantitativo, de tipo descriptivo y correlacional, aplicado en estudiantes de primer grado de educación secundaria en el Perú, para el año escolar 2018. Siendo la muestra no probabilística e intencional conformada por 60 estudiantes matriculados en las secciones A y B, a quienes se les aplicaron dos instrumentos, un cuestionario sobre la percepción de las estrategias de enseñanza y una prueba de problemas matemáticos dirigidos a primero de secundaria. Se pudo determinar una asociación significativa positiva y baja, entre la percepción

Fecha de recepción: 10 de febrero de 2021. **Fecha de aceptación:** 1 de marzo de 2021.

¹ Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, Ayacucho, Perú, clodoberrocal22@gmail.com, orcid.org/0000-0002-8414-3417

² Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, Ayacucho, Perú, autores123@yahoo.com, orcid.org/0000-0002-7579-4218

de las estrategias de enseñanza por los estudiantes y su capacidad de resolución de problemas matemáticos con valor $p=0.016$, menor al alfa de 0.05.

Palabras clave: *estrategias de enseñanza, educación en matemáticas, resolución de problemas, habilidades en matemáticas,*

Abstract: The teaching strategies should mean for the teacher the most important bases in the development of the potentialities of their students, so the objective of this study is to determine if the student perceives the teaching strategies that teachers currently apply in the area of mathematics and how it relates to the ability they generate for problem solving. This is a research with a quantitative approach, descriptive and correlational type, applied in first grade students of secondary education in Peru, for the 2018 school year. Being the sample non-probabilistic and intentional conformed by 60 students enrolled in sections A and B, to whom two instruments were applied, a questionnaire on the perception of teaching strategies and a test of mathematical problems aimed at 1st grade of secondary school. It was possible to determine a significant positive and low association between the perception of teaching strategies by the students and their ability to solve mathematical problems with a p-value of 0.016, less than the alpha of 0.05.

Keywords: *teaching strategies, math education, problem solving, math skills,*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Los métodos de enseñanza que se reconocen como tradicionales son aquellos donde los docentes exponen y el alumnado escucha, como un receptor pasivo que en el proceso de enseñanza aprendizaje, ocupa un papel secundario. Sin ánimos de desacreditar los esfuerzos que los profesores diariamente realizan para lograr llevar los conocimientos a sus alumnos, puede afirmarse que al menos en la educación básica, primaria y secundaria, no se pone el énfasis necesario en la aplicación de estrategias apropiadas, más aún en el área de las matemáticas donde los docentes en términos generales solo se presentan con un conjunto de ejercicios que explican frente a la pizarra. De hecho, la mayoría de los docentes no se preocupa por actualizarse, capacitarse e innovar sus

métodos de enseñanza, lo que eventualmente repercute en un bajo nivel de aprendizaje de los estudiantes (Gavidia, 2018; Felmer y Perdomo-Díaz, 2017).

Posada y Godino, (2017), señalan que es necesario que los docentes adopten una actitud autocrítica y reflexiva sobre el modo de enseñar, con la finalidad de identificar los puntos donde se pueden incluir cambios, a fin de conseguir una mejora gradual de la enseñanza.

Muchos autores han publicado sobre variados puntos de vista, teorías, métodos o estrategias de enseñanza-aprendizaje, sin embargo, la mayoría de los estudios coinciden en que lo más importante es promover en los estudiantes las estrategias dentro del marco cognitivo y el aprendizaje cooperativo, que en conjunto aumentan el rendimiento académico (Gasco, 2016; 2017; Felmer y Perdomo-Díaz, 2017). Estos aspectos han de ser entendidos y aplicados en todos los ámbitos de la enseñanza, para que los estudiantes expresen mejor disposición hacia el aprendizaje.

En términos generales, se puede decir que, el diseño de las estrategias de enseñanza han de estar dirigidas hacia el logro de tres aspectos, el principal, captar el interés de los estudiantes, y que este se mantenga en el tiempo que dura el acto docente; hacerles recordar los saberes previos y ofrecerles el aprendizaje nuevo, enlazado con sus conocimientos previos (Huarca *et al.*, 2006 citado en Gutiérrez, 2012), con el objetivo de que lo aprendido quede en la memoria y permita la continuidad del aprendizaje, situación más que importante para el área de las matemáticas, donde los programas curriculares son diseñados de modo que gradualmente se va estructurando la complejidad y dominio de las herramientas anteriormente aprendidas.

El profesor selecciona los contenidos que han de aprender sus estudiantes, aunado a ello, debe planificar todo el proceso que transita el acto docente, es su responsabilidad. Las estrategias de enseñanza son imprescindibles para el docente y requieren de eficacia, para lograr el desarrollo de las potencialidades de los estudiantes. Estas estrategias deben estar orientadas según los intereses o el acontecer del día a día de los estudiantes, a fin de establecer una adecuada comunicación con él (Felmer y Perdomo-Díaz, 2017). Análisis realizados a los resultados de las pruebas PISA, han determinado que las estrategias dirigidas a la repetición o memorización de conceptos en el área de las matemáticas, influyen negativamente en el rendimiento y en el aprendizaje de nuevos conocimientos (Gasco, 2016). Que un docente implemente en el aula un proceso de aprendizaje dirigido a que los alumnos solo memoricen las formas que se han enseñado para resolver un problema, debe ser modificado. Cuando los estudiantes

solo están restringidos a una sola forma de resolución del problema, no se desarrolla su capacidad de pensamiento, por lo que sus posibilidades de encontrar cómo resolverlos, se ve disminuida (Julita, 2017).

Las matemáticas son percibidas por la mayoría de las personas como una de las áreas más difíciles de aprender, pero deben de ser enseñadas porque, además de utilizarse en la vida diaria, todos los campos de estudio requieren de habilidades matemáticas. Por lo tanto, representan un medio claro y preciso en la comunicación y en la presentación de información, mejora la facultad lógica del pensamiento, precisión, conciencia espacial y genera gozo cuando del esfuerzo se logra la resolución de un problema. De aquí que la capacidad para la resolución de problemas matemáticos sea objetivo de aprendizaje en las escuelas (Surya *et al.*, 2017).

Las matemáticas no deben de verse aisladas de la resolución de problemas, y el hecho de que los estudiantes tengan dificultad para resolver problemas matemáticos, puede deberse a que no dominen los conceptos y/o no hayan sido capaces de descubrir la estrategia correcta para solucionarlos. Esto, tal vez debido a que el estudiante no capta la información al punto de comprender cómo transformar el problema, o solo ha entendido el concepto débilmente, lo que no le permite ver la solución (Akma, 2018).

Algunas de las estrategias que han sido utilizadas en estudiantes a nivel de primaria y secundaria, buscando la optimización del aprendizaje en el área de las matemáticas son: el aprendizaje basado en problemas (PBL de sus siglas en inglés), para que los estudiantes orienten sus habilidades de pensamiento jugando un rol activo en el proceso de aprendizaje, es decir, se enfoque en los estudiantes dándoles el poder de llevar a cabo investigaciones, integrar teoría y práctica, para luego comunicarse y aplicar los conocimientos (Akma, 2018; Gavidia, 2018; Surya y Syahputra 2016); estrategias de aprendizaje cuántico, en este caso se busca que los estudiantes combinen el pensamiento lógico (cerebro izquierdo) y el pensamiento creativo (cerebro derecho), se propone que el ambiente de estudio sea confortable, para que el estudiante genere confianza en sí mismo, habilidad de estudio y de comunicación (Julita, 2017); métodos heurísticos, basados en las experiencias previas con problemas similares, se favorece el desarrollo el pensamiento lógico, mediante la efectiva resolución de problemas (Mendoza 2018); modelo de enfoque científico, marco para la instrucción de modelos matemáticos (sus siglas en inglés: AFFMMI) (Fasni *et al.*, 2017); modelo del descubrimiento guiado; aprendizaje cooperativo; y más.

Actualmente el Perú, se encuentra a la mitad de un camino, por el cual busca superar una crisis educativa en la que se sumergió por varios años de conflictos políticos, sociales y económicos. Una crisis educativa, especialmente en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, donde adquieren importancia y trascendencia las estrategias, como métodos y procedimientos didácticos, que son utilizados por los profesores para mejorar la enseñanza de la matemática, y esto es valioso en cualquier nivel en que se imparte esta asignatura.

Perú, a inicios del año 2000, comenzó a participar en el Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA), que trata de una evaluación creada por las UNESCO, para valorar la capacidad de los estudiantes en exponer sus destrezas y compartir saberes frente al desafío que representa las fronteras culturales globalizadas. Esta evaluación se aplica cada tres años, a nivel mundial. En la prueba del 2015, participaron no más de 72 países, entre los cuales se encuentran, los que conforman la Organización de Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE), Latinoamérica, Asia, entre otros. Los resultados de PISA evidencian que Perú arroja resultados equivalentes a los obtenidos por países como Indonesia y Colombia. Sin embargo, los resultados para el Perú continúan indicando bajos niveles de desempeño (MINEDU, 2016).

La prueba PISA, atiende tres factores específicos: procesos, contenidos y contextos. En materia de procesos, atiende lo referido a resolución de problemas, capacidad de su representación y razonamiento (Felmer y Perdomo-Díaz, 2017). En ese orden, los resultados demuestran la persistencia de fallas en materia de resolución de problemas, dificultad para comprender y expresar matemáticamente las situaciones propuestas y eventualmente obtener la solución. Esta falla de los estudiantes en el abordaje y en la resolución de los problemas en el área de las matemáticas, puede influir negativamente en su rendimiento en todas las áreas (MINEDU, 2016).

Sin embargo, la competitividad del Perú con sus similares, representa un paso muy importante en lo que respecta a sus intenciones, en conocer la realidad e identificar las fallas, lo que permite establecer las necesidades que presenta el actual sistema educativo, dando entonces las bases para la búsqueda e implementación de los cambios que se requieren para mejorar el sistema apuntando a una educación de calidad.

Si un estudiante percibe las estrategias de enseñanza que aplica su profesor, de alguna forma directa o indirecta, implica que está interiorizando, recibiendo, una herramienta que le permite y facilita el aprendizaje. Desde este punto de vista y por lo expuesto, se considera importante valorar si los

estudiantes perciben las estrategias de enseñanza que los docentes aplican actualmente en el área de las matemáticas y si está asociado con la habilidad que pudieran generar para resolver problemas. Esta investigación tiene la finalidad de establecer si hay una relación entre la percepción de las estrategias de enseñanza y la resolución de problemas matemáticos en los estudiantes del primer grado de educación secundaria del Plantel de Aplicación “Guamán Poma de Ayala” 2018.

La población de Sondondo se encuentra dentro de la categoría de “urbano”, según los resultados del Censo del año 2017 (INEI, 2017). Orográficamente Sondondo es un valle andino caracterizado por vertientes y pendientes moderadas y cimas montañosas alomadas. Culturalmente constituye un extenso acervo histórico por el que fue declarado Patrimonio Cultural de la Nación en el año 2003 (Ministerio de la Cultura, 2017). La organización social se fundamenta en estructuras familiares denominadas *ayllus*, correspondientes a colectivos vinculados por parentescos que se remontan hasta la etapa prehispánica (Ministerio de la Cultura, 2017, 30). Las comunidades están organizadas en función a la producción agrícola y pecuaria, mediante estructuras que giran en torno al riego y la producción.

El Plantel de Aplicación “Guamán Poma de Ayala”, corresponde a un centro de educación secundaria diurno, mixto, de gestión pública directa y adscrito al Ministerio de Educación (MINEDU, 2016). Por las características de la población donde se encuentra ubicado, el entorno familiar de los estudiantes de este centro se desenvuelve en el ámbito de la producción agropecuaria tradicional y la lengua dominante es el español.

METODOLOGÍA

Este estudio se desarrolló con un enfoque cuantitativo, de tipo descriptivo y correlacional, pues busca la asociación entre las dos variables, la percepción de las estrategias de enseñanza docente y la capacidad de resolución de problemas matemáticos que presentan los estudiantes del primer grado de educación secundaria secciones A y B, del Plantel de Aplicación “Guamán Poma de Ayala” (PAGPA), que es uno de los laboratorios pedagógicos de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga del Departamento Ayacucho, Perú.

El muestreo empleado fue no probabilístico e intencionado, ya que estaba constituido por todos los estudiantes matriculados en el primer grado de secundaria del plantel PAGPA durante el periodo 2018. Así, la muestra estuvo conformada por 60 alumnos entre 12 a 13 años de edad.

INSTRUMENTOS

Se emplearon dos instrumentos, cada uno para valorar una variable. Fueron diseñados por la Unidad de Medición de Calidad Educativa del Ministerio de Educación y adaptados para estudiantes del primer grado de educación secundaria por Gutiérrez, (2012). En la prueba de validez, presentaron un índice de Aiken $V=1,00$ y $0,80$ y en las pruebas de consistencia interna o confiabilidad un índice de alfa de Cronbach de 0.758 y 0.704 , para el cuestionario de percepción de las estrategias de enseñanza y la prueba de resolución de problemas, respectivamente.

Inicialmente a los estudiantes se les aplicó el cuestionario sobre la percepción de las estrategias de enseñanza en el área de matemática, el cual está conformado por ocho ítems de respuestas cerradas, de solo tres posibilidades de respuesta a cada uno (nunca, a veces, siempre). Esta encuesta indaga la percepción del estudiante en tres aspectos: si las estrategias docentes estimulan el recuerdo de saberes previos (dos ítems), si las estrategias orientan y favorecen la atención (tres ítems) y si logran enlazar entre los conocimientos previos y el nuevo aprendizaje (tres ítems), ver tabla 1.

Tabla 1. Instrumento empleado como encuesta, detallando los aspectos de percepción e ítems de valoración

N	Aspectos de percepción	Ítem
1	Las estrategias docentes estimulan el recuerdo de saberes previos	Contexto, concepto y principio jerárquico de conocimientos previos
		Identifica las ideas principales, formulación y contestación de interrogantes
2	Las estrategias orientan y favorecen la atención	Recuerdo y selección de problemas, basados en lo almacenado en la memoria
		Emplea técnicas, operaciones o actividades, que persiguen el resultado de un problema matemático
		Evidencia la activación del conocimiento previo e infiere un algoritmo de trabajo
3	Las estrategias logran enlazar entre los conocimientos previos y el nuevo aprendizaje	Capacidad de relación deductiva y sustancial de la nueva información, con los conocimientos y experiencias vividas previamente
		Resuelve problemas en forma autónoma y autorregulada
		Reconoce la importancia de partes importante del problema, aplica estrategias de apoyo a la solución

Los ítems están expresados de forma positiva y cada escala está calificada de 1 a 3, a fin de que el puntaje refleje: baja percepción (1) percepción media (2) y estrategias de enseñanza altamente percibidas (3). En la escala de puntuación del instrumento, se asigna 2.50 puntos por ítem para una calificación de 20 puntos en total. Esta prueba evalúa la capacidad de resolución de problemas matemáticos. Luego de la revisión de cada prueba se transforma a una escala de apreciación cualitativa, para medir el nivel de logro en cada estudiante.

Los estudiantes que obtuvieron entre 0 a 10 puntos, se ubicaron en una apreciación de “en proceso”, entre 11 y 15 puntos “logro previsto” y de 16 a 20 puntos en “logro destacado”. Los datos obtenidos se analizaron mediante los estadísticos descriptivos, usándose para la ordenación de los mismos las tablas de distribución, y posteriormente se empleó el índice de estadística inferencial no paramétrica de Rho de Spearman para establecer el grado de asociación de las variables.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la figura 1, se presenta el resultado de la prueba de resolución de problemas aplicada a los estudiantes del 1er grado de secundaria secciones A y B, del Plantel de Aplicación “Guamán Poma de Ayala” (PAGPA) 2018, en la que se observa que la mayoría de los niños, 88% (53) obtuvieron las máximas calificaciones ubicándose en las categorías de logro previsto y destacado.

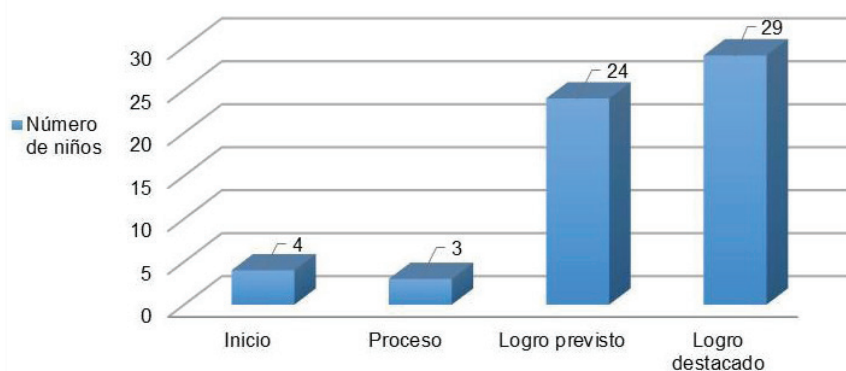


Figura 1. Nivel de logro en la resolución de problemas obtenido por los estudiantes del 1er grado de secundaria de PAGPA, 2018.

Fuente: elaboración propia basada en los datos obtenidos.

En relación a cómo perciben los estudiantes, las estrategias de enseñanza utilizadas por los docentes, en promedio se obtuvo un índice de $17,6 \pm 1,9$, el cual indica que los estudiantes perciben las estrategias en un nivel medio, en concordancia a la escala de percepción del estudiante de las estrategias docentes. En la figura 2, se explica un diagrama con cada uno de los aspectos o dimensiones en que se valoraron las estrategias de enseñanza (activar conocimientos previos, orientar la atención y enlace entre conocimientos previos y nueva información) pero tomando en cuenta el nivel de logro alcanzado por los niños en la prueba de resolución de problemas, observándose calificaciones desde 4,33 ($72\% \pm 0,6$) a 6,73 ($75,1\% \pm 0,6$) indicando que los estudiantes percibieron en un nivel medio a dichos aspectos de las estrategias.

Sin embargo, la figura 2 permite además distinguir, que independientemente del logro alcanzado por los estudiantes, las estrategias que mejor fueron percibidas por ellos, están principalmente orientadas al enlace entre los ítems de valoración 1 y 2, seguido de las estrategias de enseñanza relacionadas con la activación o generación de conocimientos previos y en último lugar las estrategias que orientan la atención de los estudiantes.

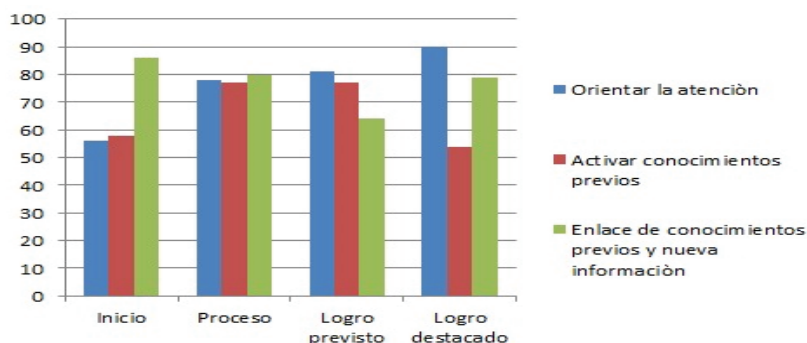


Figura 2. Nivel promedio porcentual de percepción de los estudiantes del 1er grado de secundaria de PAGPA 2018 de los diferentes aspectos que conforman las estrategias de enseñanza aplicadas al área de las matemáticas, según el nivel de logro obtenido en la prueba de resolución de problemas
Fuente: elaboración propia basada en los datos obtenidos

Las estrategias menos percibidas por los estudiantes, son aquellas dirigidas a lograr la atención de los mismos. Refieren precisamente a las técnicas o recursos que emplea el profesor para cautivar y prolongar la atención de sus alumnos durante la clase. Representando por supuesto la parte más difícil de lograr en el aula, ya que es la fase del acto docente que requiere de mucho más entrenamiento y estudio, para poder alcanzar una conexión apropiada con el estudiante que permita mantenerlo atento durante la clase (Huarca *et al.*, 2006 citado por Gutiérrez, 2012).

La figura 3, muestra la variación de los datos del nivel de percepción que tienen los estudiantes con respecto al conjunto de estrategias de enseñanza que recibieron en el área de las matemáticas, tomando en cuenta el logro alcanzado en las pruebas de resolución de problemas. Se denota, por supuesto, que los estudiantes percibieron al conjunto de estrategias en un nivel medio, como descrito anteriormente, sin embargo, en esta imagen se observa una

ligera tendencia hacia el aumento en la percepción de dichas estrategias, desde un nivel de 16,5 de percepción por los estudiantes calificados en grado de inicio en su prueba de resolución de problemas, hasta un nivel de 18,31 que percibieron los estudiantes que alcanzaron en la prueba, logro destacado. Dicha tendencia al aumento, resultó ser estadísticamente significativa, con un índice bajo del coeficiente de correlación de Rho Spearman (0,355) pero con un nivel de significancia de 0,005.

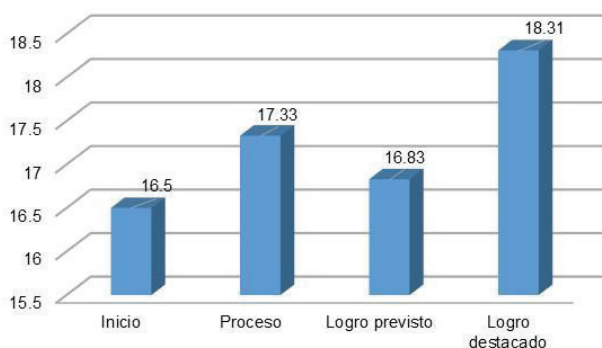


Figura 3. Nivel promedio porcentual de percepción de las estrategias de enseñanza del área de las matemáticas, por los estudiantes del 1er grado de secundaria de PAGPA 2018, según el nivel de logro obtenido en la prueba de resolución de problemas.

Fuente: elaboración propia basada en los datos obtenidos

El índice de correlación fue bajo, pero la tendencia es significativa, es decir, que las estrategias de enseñanza aplicadas por los docentes, bajo los lineamientos de la dirección del plantel; a los estudiantes del primero de secundaria del Plantel de Aplicación “Guamán Poma de Ayala” (PAGPA), si bien están siendo percibidas por los mismos en un nivel medio, no obstante, los estudiantes quienes perciben mejor las estrategias obtienen mejores resultados en la prueba.

Por otra parte, el solo hecho de sustituir las estrategias de enseñanza tradicionales (de tipo expositivo por parte del docente y de actitudes pasivas por parte del estudiante), con estrategias innovadoras (constructivas, participativas, colaborativas), en su mayoría relacionadas con la promoción de una intervención activa en el proceso de resolución de problemas; dando como resultado una mejora en la capacidad para resolverlos. En el caso de estudio se emplea una metodología propia de la institución con matices mixtas de George Polya y María Montessori.

Así, por ejemplo, Surya *et al.*, (2017) en un estudio en niños de octavo grado de Muhammadiyah 11 Pangkalan Brandan, observaron un aumento en las habilidades en la resolución de problemas matemáticos específicamente generando en los alumnos confianza en sí mismos, cuando emplearon estrategias asociadas al método contextual frente a estrategias tradicionales de tipo expositivas.

En este caso, las estrategias del método contextual se refieren a aquellas que vinculan el material de apoyo que el estudiante utiliza dentro y fuera del aula, involucra el pensamiento, construcción de conocimientos por investigación y la participación activa del estudiante (Surya *et al.*, 2017). Otro ejemplo, con resultado similar, son las estrategias de aprendizaje cuántico, métodos que ubican al estudiante en un ambiente confortable que le confiere mayor seguridad, generando autoconfianza y se observa una mejora en la capacidad de resolución de los problemas y en la habilidad de procesar y organizar el conocimiento, visualizando diferentes soluciones (Julita, 2017).

CONCLUSIONES

Las estrategias del método de aprendizaje basado en problemas (PBL), ha mostrado resultados en los cuales este favorece el desarrollo de las competencias en el área de matemática en estudiantes de secundaria, demostrando mejoras significativas de la capacidad de resolución de problemas al compararlos con el método tradicional (Surya y Syahputra, 2016; Gavidia, 2018).

Con estrategias heurísticas, Mendoza (2018) reporta igualmente un aumento de la capacidad de resolución de problemas, con el desarrollo de habilidades a nivel del lenguaje simbólico, identificación de patrones, comunicación, explicación, justificación de resultados, etc. Igualmente se observaron mejoras de las competencias, en este caso promoviendo el uso de modelaje de casos de la vida cotidiana, observándose que el mismo incentiva la creatividad y facilita la creación de suposiciones; habilidades estas que permiten al estudiante comprender y resolver problemas matemáticos (Fasni *et al.*, 2017).

Varios autores mencionan que las individualidades de los estudiantes también son factores importantes a la hora de ser exitosos en la resolución de problemas matemáticos. En la capacidad para entender y resolver los problemas, puede influir desde el sexo, el estado de ánimo, la personalidad, como percibe el aprendizaje desde el punto de vista de los canales de comunicación e información, etc. De allí que se recomiende que las estrategias también deben de

tomar en cuenta las condiciones del ambiente, las situaciones del día a día y hasta cómo se comunican, con el fin de lograr el mejor resultado en el proceso de enseñanza aprendizaje (Gasco, 2017; Sundayana *et al.*, 2017; Akma, 2018; Mendoza, 2018; Puspa *et al.*, 2019).

Es tiempo que los países de América Latina, entre ellos Perú, asuman dentro de las políticas educativas, lo importante que son las estrategias de enseñanza y aprendizaje, en este caso no solo en matemáticas, sino en todos los ámbitos, y comiencen a promover cambios curriculares que permitan la inserción de estrategias innovadoras, las cuales, favorecen el aprendizaje. Con lo que finalmente se obtiene una generación de personas mejor capacitadas que llevan al desarrollo productivo del país.

REFERENCIAS

- Akma, T. y Man, S. (2018). The Design of Student Worksheet Problem based Learning to Improve Problem Solving Ability of the Eighth-Grade Students. Junior High School in Indonesia. *International Journal of Engineering & technology*, 7(4.30), 11-15. <http://dx.doi.org/10.14419/ijet.v7i4.30.21993>
- Fasni, N., Turmudi, T. y Kusnandi, K. (2017). Mathematical Problem Solving Ability of Junior High School Students through Ang's Framework for Mathematical Modelling Instruction. *Journal of Physics, Conf. Series* 895. <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/895/1/012082>
- Felmer, P. y Perdomo, J. (2017). Un programa de desarrollo profesional docente para un currículo de matemática centrado en las habilidades: la resolución de problemas como eje articulador. *Educación Matemática*, 29(1),201-217. <http://dx.doi.org/10.24844/em2901.08>
- Gasco, J. (2016). El empleo de estrategias en el aprendizaje de las matemáticas en enseñanza secundaria obligatoria. *Revista de Investigación Educativa*, 34(2), 487-502. <http://dx.doi.org/10.6018/rie.34.2.222901>
- Gasco, J. (2017). Diferencias en el uso de estrategias en el aprendizaje de las matemáticas en enseñanza secundaria según el sexo. *Cuadernos de Investigación Educativa*, 8(1), 47-59. <https://doi.org/10.18861/cied.2017.8.1.2638>
- Gavidia, J. (2018). Método de resolución de problemas y desarrollo de competencias en el área de Matemática en estudiantes de educación secundaria. *Horizonte de la Ciencia*, 8(15),101-108. <http://revistas.uncp.edu.pe/index.php/horizontedelaciencia/article/view/267>

- Gutiérrez, J. (2012). Estrategias de enseñanza y resolución de problemas matemáticos según la percepción de estudiantes del cuarto grado de primaria de la Institución Educativa – Ventanilla. (Tesis de maestría, Universidad de San Ignacio de Loyola), <http://repositorio.usil.edu.pe/handle/123456789/1201>
- Julita, J. (2017). The enhancement of mathematical problem solving ability of senior high school students through quantum learning. *Infinity journal*, 6(1). <http://dx.doi.org/10.22460/infinity.v6i1.238>
- Mendoza, L (2018). Estrategias heurísticas para incrementar la capacidad de resolución de problemas en estudiantes de educación secundaria. *Sciéndo*, 21(2), 205-211. <http://dx.doi.org/10.17268/sciendo.2018.021>
- MINEDU, (2016). *Informe, Evaluación PISA 2015. Primeros resultados*. Ministerio de Educación del Perú. <http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2016/12/presentacion-web-PISA.pdf>
- Posada, A. y Godino, J. (2017). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae*, 1, 77-96. <http://dx.doi.org/10.1344/did.2017.1.77-96>
- Puspa, S., Riyadi, R. y Subanti, S. (2019). Profile of mathematical communication skills junior high school students in problem solving. *Journal of Physics, Conf. Series* 1157, 1-6. <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1157/3/032125>
- Sundayana, R., Tatang, H., Jarnawi, D., y Prahmana, R. (2017). Using ASSURE learning design to develop students' mathematical communication ability. *World Transactions on Engineering and Technology Education*, 15(3), 245-249. <https://www.researchgate.net/publication/321018793>
- Surya, E., Putri, F. y Mukhtar, M. (2017). Improving mathematical problem-solving ability and Self-confidence of high school students through Contextual learning model. *Journal on Mathematics Education*, 8(1), 85-94. <http://dx.doi.org/10.22342/jme.8.1.3324.85-94>
- Surya, E. y Syahputra, E. (2016). Improving high-level thinking skills by development of learning PBL approach on the learning mathematics for senior high school students. *International Education Studies*, 10(8), 12-20. <https://doi.org/10.5539/ies.v10n8p12>

Esquemas de resolución de problemas de Fermi como herramienta de diseño y gestión para el profesor

Fermi problem activity templates as a design and management tool for the teacher

Lluís Albarracín¹, Jonas B. Årleback²

Resumen: Se presenta una caracterización de las resoluciones posibles a un problema de Fermi a partir de los Esquemas de Resolución de Problemas de Fermi (ERPF). El artículo presenta la fundamentación teórica basada en investigaciones previas sobre problemas de Fermi en Educación Matemática y otros campos de investigación que permite identificar las cuatro actividades principales que pueden utilizarse al resolverlos. Estas actividades son la estimación razonada, la experimentación, la búsqueda de datos de fuentes fiables y la recogida y tratamiento estadístico de datos. A partir de estas actividades se concretan los ERPF y se discuten sus posibilidades como herramientas para la gestión y el diseño de actividades de aula. Se incluyen ejemplos concretos de propuestas de aula para sustentar tanto el trabajo de los alumnos como las opciones de diseño de actividades y gestión que habilitan los ERPF para fomentar la resolución de problemas y la modelización matemática.

Palabras clave: *Problemas de Fermi, modelización matemática, diseño de tareas*

Fecha de recepción: 27 de febrero de 2021. **Fecha de aceptación:** 6 de marzo de 2022.

¹ Universitat Autònoma de Barcelona, lluis.albarracin@uab.cat, orcid.org/0000-0002-1387-5573

² Linköping Universitet, jonas.bergman.arleback@liu.se, orcid.org/0000-0001-5013-8890

Abstract: This article presents a characterization of the possible resolutions to a Fermi problem from the Fermi problem Activity Templates (FpAT). The article presents the theoretical foundation based on previous research on Fermi problems in Mathematics Education and other fields of research that allows the identification of the four main activities that can be used when solving them. These activities are reasoned estimation, experimentation, searching for data from reliable sources, and statistical data collection and processing. From these activities, the FpAT are specified and their possibilities as tools for the management and design of classroom activities are discussed. Specific examples of classroom proposals are included to support both the work of students and the activity design and management options enabled by the FpAT to promote problem solving and mathematical modelling.

Keywords: *Fermi problems, mathematical modeling, task design*

INTRODUCCIÓN

Los problemas de Fermi deben su nombre a Enrico Fermi (1901-1954), físico italiano ganador del Premio Nobel, que utilizó este tipo de problemas en su trabajo científico y como profesor universitario. Sriraman y Knott (2009) describen los problemas de Fermi como problemas de estimación utilizados con el propósito didáctico de identificar las condiciones iniciales del problema y hacer conjeturas fundamentadas sobre las diversas cantidades o variables que surgen dentro de un problema. Aunque provienen de la enseñanza de la Física, estos problemas han ganado interés en las últimas décadas y se han utilizado en otras materias y disciplinas, incluyendo la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un ejemplo de problema de Fermi sería estimar la cantidad de coches que se acumulan en un atasco en la autopista (Peter-Koop, 2009) o el incremento de combustible fósil consumido en un país cada año por el hecho de usar vehículos de gran tamaño en lugar de pequeños utilitarios (Carlson, 1997). Se pueden encontrar más ejemplos de estos problemas, como estimar el número de latidos que da el corazón de una persona en toda su vida, y algunas motivaciones para su introducción en las aulas en García-Navarro (2013). Caracterizados como preguntas abiertas, los problemas de Fermi ofrecen poca o ninguna información específica que guíe el proceso de resolución de problemas

(Efthimiou y Llewellyn, 2007), más bien enfatizan la necesidad de pensar cuidadosamente y analizar la situación problemática en cuestión.

Diversos autores han señalado conexiones entre los problemas de Fermi y la modelización matemática (Ärlebäck, 2009; Ärlebäck y Albarracín, 2019; Czocher, 2016; Ferrando y Albarracín, 2021; Haberzettl *et al.*, 2018; Peter-Koop, 2009; Sriraman y Lesh, 2006), centrándose en el proceso de descomposición del problema original en subproblemas más sencillos que se resuelven por separado usando estimaciones razonadas. Esta forma de trabajar se conoce en la literatura como el método de Fermi (*Fermi estimates method*) y la investigación sugiere que, a partir de la instrucción directa, este método puede ser enseñado con éxito a los estudiantes para que lo usen adecuadamente para resolver un amplio rango de problemas de Fermi (Barahmeh *et al.*, 2017; Raviv *et al.*, 2016). Aunque la investigación sobre estos problemas de Fermi generalmente enfatiza la estimación, se ha sugerido que la actividad de estimación puede ser reemplazada por otras actividades en el aula para lograr la información numérica necesaria para resolverlos (Sriraman y Knott, 2009).

De esta forma, constatamos que existe suficiente evidencia empírica sobre la potencialidad de los problemas de Fermi como actividades para introducir la modelización matemática en las aulas de educación primaria y secundaria. Sin embargo, su implantación en el ámbito de la enseñanza nunca ha llegado a consolidarse como práctica educativa generalizada.

En este artículo recogemos los resultados de investigación educativa sobre problemas de Fermi relacionados con la modelización matemática, identificamos y describimos las actividades matemáticas que sustentan la resolución de un problema de Fermi y, finalmente, presentamos una propuesta didáctica basada en el uso de los Esquemas de Resolución de problemas de Fermi (ERPF) como una herramienta didáctica para diseñar y gestionar las actividades de modelización matemática. El objetivo principal de esta propuesta es proporcionar herramientas específicas que promuevan el uso de este tipo de problemas en las aulas de matemáticas.

UN MARCO GENERAL PARA LOS PROBLEMAS DE LOS FERMI: MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Existen diversas formas de entender la modelización matemática (Abasian *et al.*, 2020; Kaiser y Sriraman, 2006), pero un principio común es entenderla como un

proceso de resolución de problemas que vincula el mundo real y las matemáticas. El uso de los problemas de Fermi como actividades de modelización matemática ha sido investigado desde diversas de estas perspectivas, con lo que desde cada una de ellas se añaden elementos para determinar su potencialidad. La modelización conlleva un proceso de matematización de situaciones del mundo real y la elaboración de modelos matemáticos para describir los fenómenos estudiados, a menudo conceptualizados como resultado de haber participado en un proceso cíclico conocido como el ciclo de modelización (Blum, 2015). En un problema de Fermi, desarrollar un método de resolución puede equipararse a generar un modelo que describa la situación estudiada (Robinson, 2008). Lesh y Harel (2003) definen los modelos matemáticos como sistemas conceptuales que describen a otros sistemas, como pueden ser fenómenos naturales (el ciclo del agua o el funcionamiento interno de un volcán) o estructuras propias de la actividad humana (el sistema sanitario o el mercado de valores). Estos autores señalan que los modelos se componen de dos componentes principales. Por una parte, contienen un conjunto de conceptos para describir o explicar los objetos matemáticos relevantes para el fenómeno estudiado. Este conjunto de conceptos se complementa con los procedimientos utilizados para crear construcciones, manipulaciones o predicciones. La definición de modelo matemático de Lesh y Harel (2003) sustenta diversas investigaciones en las que se presentan herramientas para caracterizar modelos matemáticos (Gallart *et al.*, 2017; Montejo-Gámez *et al.*, 2021) que han sido usadas para estudiar los productos desarrollados por los alumnos al resolver problemas de Fermi.

En los últimos años en el campo de la investigación de la educación matemática se han estudiado los problemas de Fermi con el objetivo de identificar los procesos de modelización desarrollados por los estudiantes en los diferentes niveles educativos. Peter-Koop (2009) utilizó los problemas de Fermi con alumnos de educación primaria (de 10 a 12 años) para analizar sus estrategias de solución. Descubrió que los alumnos de esta edad resolvían los problemas utilizando un amplio abanico de estrategias, desarrollando nuevos conocimientos matemáticos. También observó que los procesos de resolución eran de naturaleza multicíclica y se podían relacionar con el ciclo de modelización (Blum, 2015; Stillman, 2011). Por su parte, Albarracín y Gorgorió (2019) corroboraron que los alumnos de educación primaria pueden resolver problemas de Fermi utilizando un gran número de estrategias distintas. Algunas de estas estrategias son la reducción del problema original a un problema más pequeño y usar proporciones para obtener el resultado final, el uso de una unidad base o de medidas de concentración, como la densidad de población.

Trabajando con estudiantes de educación secundaria, Albarracín y Gorgorió (2014) analizaron las estrategias propuestas por los estudiantes para resolver varios problemas de Fermi, y observaron un gran número de estrategias que conllevan la creación y desarrollo de un modelo matemático para obtener sus respuestas. En un contexto similar, Ferrando *et al.* (2017) compararon los modelos generados por alumnos de Secundaria con diferente nivel de experiencia previa en modelización y observaron que los estudiantes con mayor experiencia previa desarrollan modelos conceptualmente más detallados y en mayor medida utilizaron enfoques más algebraicos (en contraste con los enfoques aritméticos) que los estudiantes que carecen de experiencia en modelización. En este mismo nivel educativo, la investigación también ha demostrado que las secuencias de problemas de Fermi pueden facilitar a los estudiantes el desarrollo de sus propios modelos y apoyarlos en la adopción progresiva de estrategias conceptualmente más ricas, en las que los alumnos adaptan el modelo matemático desarrollado inicialmente a nuevas situaciones a partir de incorporar nuevos conceptos (Albarracín y Gorgorió, 2018), y que las relaciones sociales entre los estudiantes al trabajar en grupo y el conocimiento extra matemático de los estudiantes son importantes en la situación de resolución de problemas (Ärlebäck, 2009).

Por último, Czocher (2016) utilizó los problemas de Fermi para analizar el razonamiento matemático de estudiantes universitarios de ingeniería. La investigación de Czocher muestra que los procesos de modelización necesarios para resolver un problema de Fermi son complejos incluso para los estudiantes universitarios y requieren que los estudiantes regulen cuidadosamente sus procesos de modelización (en el sentido de Schoenfeld, 1992) supervisando cómo se relacionan sus objetivos o subobjetivos inmediatos con el planteamiento del problema.

Las investigaciones desarrolladas en el ámbito de la Educación Matemática son consistentes con las de otras áreas de conocimiento. Robinson (2008), desde la *Enseñanza de la física*, argumenta que para resolver un problema de Fermi los estudiantes tienen que sintetizar un modelo físico, examinar los principios físicos que están en funcionamiento, determinar otras restricciones tales como las condiciones de los límites, decidir cuán simple puede ser el modelo sin dejar de mantener algo de realismo, y solo entonces aplicar algunas estimaciones aproximadas para resolver el problema. Robinson señala que este tipo de trabajo es exactamente el conjunto de habilidades que los físicos profesionales necesitan desarrollar durante su formación, y que se ha mostrado que esta habilidad a menudo no se desarrolla completamente hasta algún momento durante estudios de postgrado posteriores.

ACTIVIDADES MATEMÁTICAS EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE FERMI

Diversos estudios han utilizado el llamado marco teórico de los diagramas de actividad de modelización (MAD por su denominación en inglés, *modelling activity diagrams*) para analizar las actividades en las que los estudiantes participan al resolver un problema de Fermi (Albarracín, Årlebäck, *et al.*, 2019; Årlebäck, 2009; Czocher, 2016). Este marco caracteriza el proceso de resolución de un problema de Fermi en las siguientes actividades de modelización: lectura del enunciado, creación de modelos, estimación, cálculo, validación y redacción del informe (Årlebäck, 2009). En este marco, la actividad de estimación es el aspecto originalmente clave para resolver un problema de Fermi, pero a continuación proponemos que esta actividad pueda ser substituida para incorporar otras formas de que los estudiantes obtengan la información numérica necesaria para responder al problema de Fermi planteado o a los subproblemas relacionados.

Nuestra revisión de la literatura sobre los problemas de Fermi nos ha permitido identificar cuatro tipos de actividades matemáticas que se utilizan para lograr los valores numéricos necesarios de las cantidades para poder proporcionar una solución y una respuesta al problema en cuestión. Estas cuatro actividades son la estimación (que es la propuesta inicial para la resolución de problemas de Fermi), la experimentación (en la que la medida tiene un papel importante), la búsqueda de datos en fuentes externas y la recogida estadística de datos. Estas actividades matemáticas forman parte de los currículos escolares, tanto en educación primaria como secundaria, y pueden ser utilizadas en contextos relevantes y significativos al trabajar en este tipo de problemas. A continuación, presentamos ejemplos de estas cuatro actividades y discutimos cómo estas se alinean con el proceso de resolución de problemas de Fermi.

Estimación. Es un proceso mental que da una solución aproximada a un problema de conteo o medición (Siegel *et al.*, 1982). Existen diferentes tipos de estimación, ya sea computacional, de medidas o la numerosidad, que se diferencian por el conjunto de habilidades necesarias para llegar al valor estimado (Hogan y Brezinski, 2003). En el contexto de la resolución de problemas de Fermi, predomina la estimación de medidas, pero añadiendo información que proviene del conocimiento del mundo real, como cuando se determina la población de un país o el presupuesto total de Educación. A este tipo de estimación se la denomina en la literatura *Guesstimation*, que es un término difícil de traducir literalmente pero que se basa en el uso de estimaciones razonadas (Carlson, 1997).

Shakerin (2006), trabajando en un entorno STEM, argumenta que parte de la práctica de un ingeniero es utilizar la estimación para determinar respuestas a problemas mal definidos o cuando no se requieren soluciones detalladas. Para Sriraman y Knott (2009), la estimación es una actividad matemática que permite conectar conocimientos matemáticos con el mundo real y ha sido subestimada en las aulas, posiblemente porque se aleja de la visión de precisión que se acostumbra a dar a las matemáticas, pero que justamente habilita trabajar en la línea de lo desconocido y evidenciar la necesidad de aprender y trabajar nuevos conocimientos matemáticos.

Un ejemplo concreto del uso de la estimación en la resolución de problemas de Fermi es el siguiente: Para el problema *¿cuántas ambulancias son necesarias en tu región para cubrir cualquier emergencia en 10 minutos?* puede ser necesario considerar la distancia que puede recorrer una ambulancia en 10 minutos. Contando que el personal de urgencias necesite un minuto para ponerse en marcha después del aviso, se puede considerar razonable una velocidad media estimada de 100 km/h para zonas no urbanas. De esta forma, estimamos que en los 9 minutos de viaje se pueden recorrer alrededor de 15 km.

Experimentación. El desarrollo de habilidades en el laboratorio o durante la experimentación física fue una de las motivaciones originales de Enrico Fermi para utilizar su método basado en romper un problema en problemas más pequeños y resolverlos usando estimaciones. Fermi lo utilizó en su propia investigación y decidió incorporarlo a sus clases. Un caso bien documentado explica cómo cuando Fermi fue testigo de la detonación de la prueba Trinity en el desierto de Alamogordo en Nuevo México, en el momento de la explosión esparció unos pequeños trozos de papel antes y durante el paso de la onda expansiva. A partir de determinar la distancia recorrida por los pedazos de papel, estimó la potencia de la explosión en unas 10.000 toneladas de TNT, que resultó ser un resultado del mismo orden de magnitud que el conseguido tras los cálculos basados en los datos proporcionados por los sensores colocados en la zona de la explosión (Allison *et al.*, 1955). En la educación matemática, se pueden hacer experiencias prácticas para obtener los valores necesarios para las cantidades consideradas relevantes para resolver un problema dado. En muchos casos, esta experimentación puede llevarse a cabo fuera del aula y vincularse a procesos de recuento o medición.

Un ejemplo de esta forma de trabajar se da en la secuencia de problemas de Fermi presentada en Albarracín y Gorgorió (2018). Los diferentes problemas tratan sobre estimaciones de objetos distribuidos en el plano (personas, árboles...), pero la

primera actividad es la estimación del número de personas que caben en el patio del instituto en una celebración. De esta forma, los alumnos pueden dirigirse al patio para determinar los elementos relevantes para la resolución del problema y hacer las mediciones que consideren oportunas. Entre los experimentos que desarrollan los alumnos están los que se centran en estimar la cantidad de personas que caben en un metro cuadrado en diferentes circunstancias (cuando se apiñan para aprovechar al máximo el espacio, cuando dejan la distancia suficiente entre ellos para bailar en la celebración, etc.)

Buscando datos. En muchos casos, algunas de las cantidades que deben determinarse para resolver adecuadamente un problema de Fermi pueden encontrarse consultando registros y fuentes externas (García-Navarro, 2013). Este sería el caso de la población de un país, donde los encargados de la resolución pueden acceder a recursos como Wikipedia o el Instituto Nacional de Estadística. Sin embargo, en otros casos, la identificación de fuentes fiables puede no ser tan fácil, ya que pueden contener errores o sesgos inducidos por razones desconocidas. En este caso, el trabajo con los problemas de Fermi puede funcionar como una herramienta de evaluación crítica de la información para repudiar o validar las fuentes públicas y los datos publicados.

En Biología, Phillips y Milo (2009) iniciaron el proyecto www.bionumbers.org que recoge valores experimentalmente fiables y validados de cantidades relevantes para la investigación. A partir de la información validada en la base de datos, proponen el uso de la aproximación cuantitativa basada en el método de estimaciones Fermi para aquellas investigaciones en las que los métodos cualitativos habituales en su área de investigación son limitados. Phillips y Milo (2009) ilustran cómo el método de Fermi permite resolver problemas científicos del más alto nivel.

Recolección de datos estadísticos. Sriraman y Knott (2009) sugieren el uso de los problemas de Fermi que involucran estimaciones del consumo de agua, consumo de gasolina, desperdicio de alimentos o la cantidad de basura producida tienen el potencial de concienciar a los alumnos sobre problemas ecológicos y ambientales, así como de provocar una postura crítica hacia las decisiones gubernamentales y corporativas. Una manera de obtener valores confiables para cantidades relevantes en tales preguntas es hacer estimaciones y verificaciones subsiguientes con datos oficiales, pero también es posible participar en la recolección de datos y en el análisis estadístico en el aula. En este último caso, los estudiantes pueden, por ejemplo, crear encuestas y decidir sobre muestras apropiadas para explorar e investigar diversos problemas relacionados con cuestiones sociales.

Un ejemplo de este enfoque es el de Blomberg (2015), que estudió el aprendizaje de conceptos estadísticos de los estudiantes de secundaria superior en una secuencia diseñada de lecciones que trabajan en la pregunta "¿Qué proporción de jóvenes caminan al menos 10.000 pasos al día? Los estudiantes abordaron esta cuestión en primer lugar como un problema de Fermi, desarrollando hipótesis que probaron mediante la recopilación de datos utilizando podómetros y realizando análisis estadísticos.

Otro ejemplo del uso de la recolección de datos estadísticos es una encuesta que pregunta cuántas fotos sube una persona a las redes sociales en una semana. Si se recoge esta información para personas estratificadas por grupos de edad, puede ser la base para estimar el número total de fotografías que deben gestionar cada semana los servidores que sustentan las diferentes redes sociales.

ESQUEMAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FERMI

En esta sección presentamos una forma de caracterizar las diferentes resoluciones de los problemas de Fermi en términos de los Esquemas de resolución de problemas de Fermi (ERPF) que ya presentamos teóricamente en Albarracín y Årlebäck (2019). En estos esquemas se representan los sub-problemas elegidos para resolver el problema, el tipo de actividad matemática que se desarrolla para determinar las cantidades necesarias y las operaciones a desarrollar para obtener el resultado final.

Los ERPF se centran en la estructura de la resolución del problema de Fermi, que puede referirse a (a) el resultado de un análisis a priori del problema de Fermi dividido en los subproblemas que deben ser resueltos; o (b) una estructura que describe las actividades desarrolladas por los estudiantes para resolver un problema de Fermi. Sin embargo, es importante destacar que cada problema de Fermi puede ser resuelto usando diferentes enfoques (Albarracín y Gorgorió, 2014), dependiendo del conocimiento extra-matemático disponible para los estudiantes en cada nivel educativo (Årlebäck, 2009) con lo que los ERPF no caracterizan al problema en sí mismo, sino a una forma concreta de resolverlo.

Parte de nuestra inspiración para definir los ERPF proviene del intento de Anderson y Sherman (2010) de establecer un enfoque sistemático para resolver los problemas de Fermi con el fin de facilitar el desarrollo de habilidades analíticas en los estudiantes universitarios de Economía y Empresa. Anderson y

Sherman (2010) propusieron una representación que estructura el proceso de resolución diferenciando explícitamente los subproblemas en los que los estudiantes deben involucrarse para resolver el problema basándose en un análisis a priori del problema. El ejemplo que discuten en gran detalle es el de estimar el número de bocadillos consumidos en los partidos de la Major League Baseball (MLB) cada temporada en los Estados Unidos. Al diferenciar entre los valores que hay que estimar (como el número de bocadillos consumidos por asistente y partido) de los valores inalterables que se pueden consultar (como el número de partidos en una temporada), Anderson y Sherman (2010) presentaron el desglose del problema tal y como se representa en la figura 1. Cada uno de los cuadrados representa un sub-problema concreto para el que debe obtenerse una estimación. El esquema también presenta las operaciones necesarias para resolver el problema.

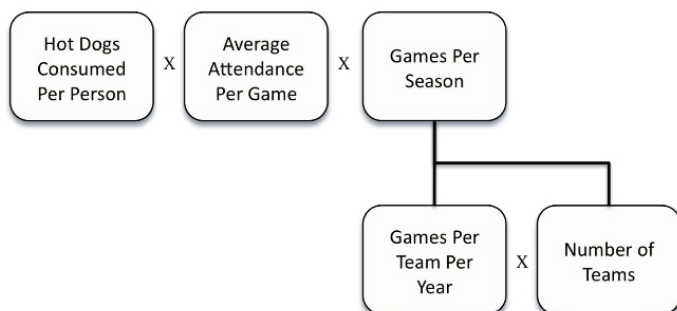


Figura 1. Propuesta de resolución para el problema de la estimación de bocadillos vendidos en la MLB presentado en Anderson y Sherman (2010, p. 37)

Aquí, uno puede considerar la posibilidad de utilizar diversas aproximaciones para lograr los valores numéricos necesarios en la resolución de los diferentes subproblemas. Por ejemplo, en lugar de utilizar una forma estándar de estimación, se puede utilizar el sitio web de la MLB para consultar el número de partidos que cada equipo juega al año. Para encontrar el número de espectadores promedio en un partido se puede recurrir a los informes de los periódicos especializados. En el caso de no encontrar en las búsquedas el número de bocadillos consumidos por persona y partido, se puede plantear una encuesta que genere datos suficientes para determinar una estimación razonable. La decisión y la razón para

usar una actividad en lugar de otra puede depender de la precisión requerida en el problema, o ser una elección consciente hecha por el profesor para trabajar ciertos contenidos o procesos matemáticos. Para visualizar explícitamente la estructura del problema y los diferentes tipos de actividades matemáticas que se pueden utilizar para resolverlo, nuestra caracterización de los ERPF utiliza diferentes representaciones gráficas de las cuatro (sub)actividades identificadas en la literatura (estimación, experimentación, búsqueda de datos, recopilación de datos estadísticos) como se ilustra en la tabla 1.

Tabla 1. Caracterización de las actividades presentes en los ERPF.

Actividad/representación	Los estudiantes obtienen la cantidad a partir de....
	...un proceso mental que da una solución aproximada a través de adivinanzas basadas en experiencias previas.
	...experimentos e investigaciones dentro y fuera de la escuela, incluyendo la realización de mediciones.
	... búsqueda de información numérica en fuentes externas.
	...formas adecuadas de seleccionar, recopilar y analizar datos estadísticos.

La figura 2 muestra la caracterización ERPF aplicada a la estructura del problema de Fermi discutido por Anderson y Sherman (2010) presentado en la figura 1, ilustrando que se usará una encuesta estadística para encontrar el número promedio

de bocadillos consumidos por persona en un partido, que el número de personas que asisten a un partido se determinará usando una estimación, y que el resto de los valores numéricos necesarios se buscarán en las fuentes apropiadas.



Figura 2. Estructura del problema de Anderson y Sherman (2010) usando ERPF

UN EJEMPLO DE USO DE LOS ERPF EN LA GESTIÓN DE AULA

En esta sección tratamos de mostrar diferentes formas en las que los ERPF pueden ser usados en el aula. Tomaremos como ejemplo uno de los problemas estudiados en Årlebäck (2009), en concreto el que pide a los alumnos que estimen el tiempo necesario para subir el Empire State Building de Nueva York, que es un edificio de 102 plantas y 381 metros de altura en su parte habitable. Si se considera necesario, este problema puede adaptarse a estudiar otros grandes edificios locales u otros todavía más altos, como el Burj Khalifa de Dubái (828 metros y 163 plantas) o la torre Shanghái en Shanghái (632 metros y 128 plantas).

En el estudio de Årlebäck (2009) se plantean dos preguntas distintas a alumnos de educación secundaria (14 años). La primera se refiere al tiempo que tardará el ascensor en subir desde la primera hasta la última planta. La segunda trata sobre el tiempo necesario para subir a pie por las escaleras. Es necesario apuntar que en el enunciado no se proporciona ninguna información numérica y que, por el formato de trabajo en el aula, los alumnos solo usan estimaciones razonadas como actividad para resolver el problema. Retomaremos el uso de distintas actividades en la siguiente sección.

La figura 3 muestra la estructura de solución de un grupo (grupo A) de alumnos para las dos preguntas expresadas en términos de ERPF. En primer lugar, observamos que el grupo A estructura los dos problemas de forma similar,

dividiéndolos en los mismos tres subproblemas, que son los siguientes: el número de plantas del edificio, la altura de cada una de ellas y la velocidad del ascensor o las personas al desplazarse. Para resolver el problema, solo plantean estimaciones razonadas, ya que no se permite a los alumnos consultar fuentes externas o experimentar de alguna forma.

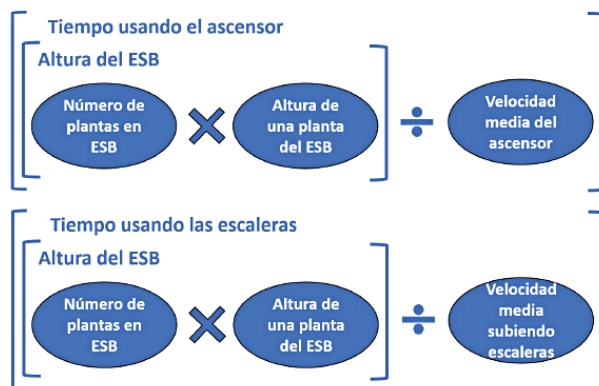


Figura 3. ERPFs para estimar el tiempo necesario para subir al ESB en ascensor (arriba) y por las escaleras (abajo) - grupo A

La figura 4 muestra el ERPF de otro grupo de trabajo (grupo B). Estos alumnos resuelven el primer problema (tiempo estimado para el ascensor) de la misma forma que el grupo A, pero difieren en su estrategia para estimar el tiempo que necesitará una persona para subir por las escaleras. La propuesta del grupo B para esta segunda tarea se basa en estimar el tiempo necesario para subir diferentes tramos de plantas. Este hecho pone de manifiesto que los alumnos crean una distinción entre los dos problemas e introducen como elemento a considerar el cansancio acumulado debido a la actividad física. Esta propuesta de clasificar los elementos a estudiar se puede aplicar a otros tipos de problemas, como aquellos que se centran en aspectos sociales (uso de redes sociales) en los que diferentes grupos de edad tienen distintos comportamientos.

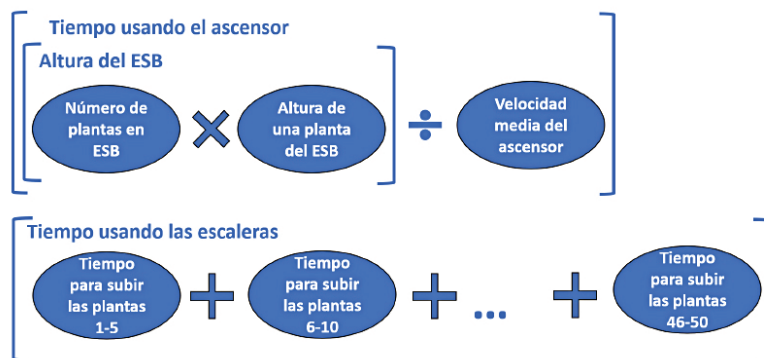


Figura 4. ERPFs para estimar el tiempo necesario para subir al ESB en ascensor (arriba) y por las escaleras (abajo) - grupo A

Estas dos representaciones de las resoluciones de los alumnos (figuras 3 y 4) ilustran que los ERPF facilitan una representación directa y compacta de las ideas y métodos de los alumnos. Entendemos que esta es una forma de hacer accesible el proceso de resolución, pero también la estructura conceptual del modelo matemático expresado en términos de los procedimientos necesarios para resolver el problema (en el sentido de Lesh y Harel, 2003). De esta forma, los ERPF permiten a los alumnos visualizar aspectos sutiles de diferenciación de los procesos (potencialmente) involucrados en la resolución del problema, como en el caso de incluir el cansancio de las personas al subir por las escaleras, así como un método específico para incluirlo en la resolución. Los ERPF se pueden utilizar esencialmente en dos etapas de la modelización, durante el proceso inicial de matematización o durante la validación final del modelo.

Al principio del proceso de modelización se produce una primera matematización del fenómeno estudiado (Blum, 2015). En este momento el profesor puede pedir a los alumnos que generen un primer modelo matemático, y que antes de seguir con el trabajo de resolución, compartan sus propuestas. De esta forma, el profesor puede traducir los modelos que le comunican los alumnos a ERPF y mostrarlos en la pizarra o la pantalla del aula, permitiendo así una discusión previa para garantizar que todos los alumnos entienden el problema y conocen los métodos para solucionar cada uno de los subproblemas. De esta forma, podemos considerar que los ERPF ayudan a generar un lenguaje común para referirse a los procesos necesarios para enfrentarse al problema.

En el ejemplo anterior, el profesor podría hacer notar a los alumnos del grupo A que la propuesta del grupo B contiene un elemento que se muestra como relevante para la resolución, como es el hecho de considerar el cansancio de quien sube el edificio por las escaleras. De esta forma, la propuesta del grupo B abre una posibilidad de discusión que puede acabar con una nueva forma de plantearse la aproximación a la resolución de ese subproblema o del problema entero.

Otra opción de uso de los ERPF es pedir a los alumnos que una vez finalizado el trabajo de modelización expliquen sus métodos y resultados en una puesta en común final, usando un ERPF e incluyendo los resultados parciales. De esta forma, se puede generar una discusión de aula sobre el modelo general utilizado, pero también sobre los resultados parciales y su influencia sobre el resultado final. Así, se pueden discutir estrategias distintas que comparten conceptos esenciales, como sería centrarse en el estudio del concepto de velocidad en el problema del Empire State Building a partir de una representación compartida. Los ERPF también permiten argumentar las comparaciones de resultados desde el punto de vista estrictamente numérico e identificar disparidades y señalar su origen en el proceso de resolución. En esta fase de discusión de resoluciones y resultados, en muchas ocasiones es sorprendente para los alumnos observar que resoluciones muy diferentes generan soluciones similares, siempre entendiendo que las estimaciones en los problemas de Fermi generan soluciones en un intervalo de valores que podemos considerar como adecuado. Al identificar estrategias distintas pero válidas, se abre la puerta a discutir la idea o concepto central que las estructura y construir conexiones entre diferentes conceptos.

ERPF COMO HERRAMIENTA PARA EL DISEÑO DE TAREAS

Los ERPF también se pueden usar como herramientas para el diseño de actividades. El profesor puede diseñar un ERPF que recoja una posible resolución que sus alumnos pudieran plantear. Los problemas de Fermi son problemas abiertos, con lo que no es posible identificar una única resolución posible, pero puede ser pertinente anticipar una resolución que incluya las ideas principales que va a ser necesario utilizar, con lo que el ERPF proporciona un soporte para la toma de decisiones del profesor antes de enfrentarse a la actividad de aula. Utilizamos aquí como ejemplo una forma alternativa de plantear la resolución del problema del Empire State Building (Figura 5).

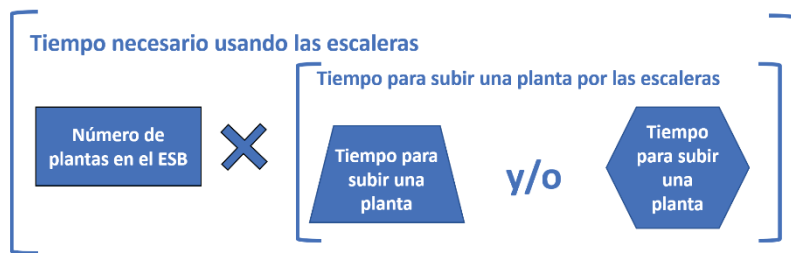


Figura 5. ERPF mostrando una anticipación al problema del ESB

Esta propuesta parte de una búsqueda de información para conocer el número de plantas del edificio. En este caso, con una búsqueda en Wikipedia se puede conocer la respuesta de forma precisa, pero para otras cantidades que puedan aparecer en otros problemas, se pueden consultar bases de datos de organismos oficiales. Una vez se conoce el número de plantas del edificio, el profesor puede plantear la pregunta de estimar el tiempo necesario para subir una planta por las escaleras. Nuevamente, este subproblema puede abordarse desde diversas perspectivas. Una opción podría ser hacer una encuesta a los alumnos del centro escolar y gestionar los datos para descartar aquellos valores inadecuados y conseguir un valor medio. Esta sería una estrategia basada en el análisis estadístico de datos. Pero el profesor también puede promover una alternativa orientada a la experimentación, midiendo el tiempo necesario para diferentes alumnos para subir un piso. En el caso de que se quiera introducir la influencia del cansancio, se puede plantear una experimentación en la que los alumnos suben una o diversas plantas del centro escolar varias veces de forma consecutiva.

También es posible usar los ERPF para anticipar la necesidad de disponer en el aula de materiales concretos necesarios para poder efectuar el trabajo de aula. Proporcionamos aquí un ejemplo extraído de la literatura. Taggart *et al.* (2007) preguntaron a estudiantes de educación secundaria ¿Cuántas cargas de agua embotellada transportadas en camiones fueron necesarias para abastecer a los refugiados de Nueva Orleans en la semana siguiente al huracán Katrina? Estos autores identifican los sub-problemas principales: determinar la cantidad total de agua necesaria y la cantidad de agua que puede transportar un camión. Sin embargo, estas dos cantidades deben determinarse a partir de una sucesión de estimaciones y cálculos. En este caso, la concreción de estos sub-problemas es la que permite al profesor decidir el tipo de actividad (estimación, experimentación, búsqueda de datos, recogida de datos estadísticos) para crear el ERPF

del problema. Con ello, el profesor puede anticiparse a los recursos que los alumnos van a necesitar. Por ejemplo, este análisis a priori podría incitar al profesor a buscar fuentes de información fiables para que los estudiantes encuentren la cantidad de agua que una persona necesita beber en un día o cuál es la capacidad de carga de un camión. El profesor también podría decidir qué materiales concretos van a necesitar los alumnos en su trabajo y llevar al aula diversos tipos de botellas de agua e instrumentos para determinar su capacidad a partir de la medición como forma de experimentación.

REFLEXIONES FINALES

Los problemas de Fermi tienen una larga tradición en ciertos contextos educativos, como las aulas de ingeniería de las universidades de los Estados Unidos de América (Efthimiou y Llewellyn, 2007; Robinson, 2009). Sin embargo, a pesar de varias recomendaciones en la literatura de la educación matemática (Carlson, 1997; García-Navarro, 2013; Sriraman y Knott, 2009) y de los avances en la investigación relativa a la modelización matemática (Årlebäck, 2009; Czocher, 2016; Haberzettl *et al.*, 2018; Peter-Koop, 2009), los problemas de Fermi no han incrementado su presencia en las aulas de matemáticas de los niveles de la enseñanza obligatoria. Tampoco se han generado materiales de soporte a los profesores o se han incluido en los libros de texto, con lo que no se ha explotado aún todo su potencial.

Dependiendo del conocimiento matemático de los estudiantes, de sus habilidades para resolver problemas y de sus experiencias de la vida fuera de la escuela, los problemas de Fermi facilitan que los estudiantes desarrollen soluciones a problemas complejos que pueden ser utilizados para introducir o explorar conceptos matemáticos relevantes. Si bien es cierto que los problemas de Fermi ofrecen diferentes oportunidades de aprendizaje para los estudiantes, también plantean desafíos docentes a los profesores, que pueden provocar que estos sean reticentes a utilizarlos. Nos encontramos con situaciones en las que los maestros de Educación Primaria, al no ser especialistas en la docencia de las matemáticas, prefieren trabajar con actividades más cerradas. En los niveles educativos superiores, donde el alcance y profundidad de los posibles problemas que pueden surgir es mucho mayor en comparación con los de los niveles elementales, los ERPF pueden ser una herramienta que facilite la gestión de la actividad, ya que permite establecer un lenguaje común para presentar las resoluciones de los alumnos.

La caracterización de los ERPF, en este artículo se presenta como una herramienta versátil. Por una parte, puede dar soporte a los alumnos durante su trabajo en el aula o en las discusiones grupales, como herramienta para explicitar ideas complejas. Por otro lado, hemos mostrado ejemplos de la forma en la que los ERPF proporcionan un soporte para las decisiones de diseño didáctico para trabajar en las aulas basadas en el análisis previo de la estructura de un problema de Fermi. Los ERPF pueden ayudar a los profesores de los diferentes niveles educativos a diseñar tareas del aula relacionadas con conocimientos o procedimientos curriculares concretos, a comparar métodos y así trabajar aspectos siempre complejos de resolución de problemas y modelización matemática, que son grandes retos para tratar en las clases de matemáticas.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo desarrollado en el marco del Proyecto PID2021-126707NB-I00 financiado por MCIN/ AEI /10.13039/501100011033/ y por FEDER Una manera de hacer Europa

REFERENCIAS

- Albarracín, L., y Årlebäck, J. (2019). Characterising mathematical activities promoted by Albarracín, L., y Årlebäck, J. (2019). Characterising mathematical activities promoted by Fermi problems. *For the Learning of Mathematics*, 39(3), 10-13.
- Albarracín, L., Årlebäck, J., Civil, E., y Gorgorió, N. (2018). Extending Modelling Activity Diagrams as a tool to characterise mathematical modelling processes. *The Mathematics Enthusiast*, 16(1), 211-230. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1455>
- Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), 79-96. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9528-9>
- Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2018). Students Estimating Large Quantities: From Simple Strategies to the Population Density Model. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(10), em1579. <https://doi.org/10.29333/ejmste/92285>
- Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2019). Using large number estimation problems in primary education classrooms to introduce mathematical modelling. *International Journal of*

- Innovation in Science and Mathematics Education*, 27(2), 45-57. <https://doi.org/10.30722/IJISME.27.02.004>
- Abassian, A., Safi, F., Bush, S., y Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning*, 12(1), 53-65. <https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360>
- Allison, S. K., Segrè, E., y Anderson, H. L. (1955). Enrico Fermi 1901-1954. *Physics Today*, 8, 9-13.
- Anderson, P., y Sherman, C. (2010). Applying the Fermi estimation technique to business problems. *Journal of Applied Business and Economics*, 10(5), 33-42.
- Ärleback, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Mathematics Enthusiast*, 6(3), 331-364. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1157>
- Ärleback, J., y Albarracín, L. (2019). The use and potential of Fermi problems in the STEM disciplines to support the development of twenty-first century competencies. *ZDM*, 51(6), 979-990. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01075-3>
- Barahmeh, H. M., Hamad, A. M. B., y Barahmeh, N. M. (2017). The Effect of Fermi Questions in the Development of Science Processes Skills in Physics among Jordanian Ninth Graders. *Journal of Education and Practice*, 8(3), 186-194.
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? En S. J. Cho (Ed.), *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education: Intellectual and attitudinal changes*. (pp. 73-96). Springer International Publishing.
- Blomberg, P. (2015). *Informal Statistical Inference in modelling situations – A study of developing a framework for analysing how students express inferences*. Linnaeus University, Departments of the Faculty of Technology, Thesis No 36/2015. ISBN: 978-91-87925-69-6.
- Carlson, J. E. (1997). Fermi problems on gasoline consumption. *The Physics Teacher*, 35(5), 308-309. <https://doi.org/10.1119/1.2344696>
- Czocher, J. A. (2016). Introducing Modeling Transition Diagrams as a tool to connect mathematical modeling to mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 18(2), 77-106. <https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1148530>
- Efthimiou, C. J., y Llewellyn, R. A. (2007). Cinema, Fermi problems and general education. *Physics Education*, 42(3), 253. <https://doi.org/10.1088/0031-9120/42/3/003>
- Ferrando, I., y Albarracín, L. (2021). Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: analysis of emerging models. *Mathematics Education Research Journal*, 33(1), 61-78. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00292-z>

- Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M., y Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de Fermi. *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 220-242. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a11>
- Gallart, C., Ferrando, I., García-Raffi, L. M., Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2017). Design and implementation of a tool for analysing student products when they solve fermi problems. En G. A. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications. Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education*, (pp. 265-275). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_23
- García-Navarro, J. M. (2013). Problemas de Fermi. Suposición, estimación y aproximación. *Epsilon*, 84, 57-68.
- Hogan, T. P., y Brezinski, K. L. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, 5(4), 259-280. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0504_02
- Haberzettl, N., Klett, S., y Schukajlow, S. (2018). Mathematik rund um die Schule–Modellieren mit Fermi-Aufgaben. En K. Eilerts, K. Skutella (Eds.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* 5 (pp. 31-41). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-21042-7_3
- Kaiser, G., y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38(3), 302-310. <https://doi.org/10.1007/BF02652813>
- Lesh, R., y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2), 157-189. <https://doi.org/10.1080/10986065.2003.9679998>
- Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., y Adamuz-Povedano, N. (2021). A Tool for the Analysis and Characterization of School Mathematical Models. *Mathematics*, 9(13), 1569. <https://doi.org/10.3390/math9131569>
- Peter-Koop, A. (2009). Teaching and Understanding Mathematical Modelling through Fermi-Problems. En B. Clarke, B. Grevholm y R. Millman (Eds.), *Tasks in primary mathematics teacher education* (pp. 131-146). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8_10
- Pólya, G. (1945). *How to solve it*. University Press.
- Phillips, R., y Milo, R. (2009). A feeling for the numbers in biology. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106(51), 21465-21471. <https://doi.org/10.1073/pnas.0907732106>

- Raviv, D., Harris, A., y Dezotti, T. (2016). Estimation as an essential skill in entrepreneurial thinking. En *Proceedings 123rd ASEE Annual Conference and Exposition*. American Society for Engineering Education.
- Robinson, A. W. (2008). Don't just stand there—teach Fermi problems! *Physics Education*, 43(1), 83-87. <https://doi.org/10.1088/0031-9120/43/01/009>
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). Macmillan Publishing Company.
- Shakerin, S. (2006). The art of estimation. *International Journal of Engineering Education*, 22(2), 273-278.
- Siegel, A. W., Goldsmith, L. T., y Madson, C. R. (1982). Skill in estimation problems of extent and numerosity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(3), 211-232. <https://doi.org/10.2307/748557>
- Sriraman, B., y Lesh, R. A. (2006). Modeling conceptions revisited. *ZDM*, 38(3), 247-254. <https://doi.org/10.1007/BF02652808>
- Sriraman, B., y Knott, L. (2009). The Mathematics of Estimation: Possibilities for Interdisciplinary Pedagogy and Social Consciousness. *Interchange*, 40(2), 205-223. <https://doi.org/10.1007/s10780-009-9090-7>
- Stillman, G. (2011). Applying metacognitive knowledge and strategies in applications and modelling tasks at secondary school. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 165–180). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_18
- Weinstein, L., y Adam, J. A. (2009). *Guesstimation: Solving the world's problems on the back of a cocktail napkin*. Princeton University Press.

LLUÍS ALBARRACÍN

Dirección: Edificio G5, Despacho 140 - 08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallès)
Barcelona, España. lluís.albarracin@uab.cat

Conversatorio SOMIDEM: Rediseño del marco curricular de educación media superior

SOMIDEM dialogue: Redesign of the high school curriculum

María S. García González,¹

Carlos Valenzuela García²

En México se ha trabajado en una nueva reforma educativa, a la que se ha denominado la “Nueva Escuela Mexicana”. Como parte de ello se ha comenzado la elaboración de nuevos Planes y Programas de Estudio para la educación obligatoria. Los avances de ese trabajo empezaron a difundirse de forma masiva en 2022, ante esta situación la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C. (SOMIDEM, A.C.) ha discutido estos avances con la comunidad de especialistas en la enseñanza de las matemáticas, a fin de entablar un diálogo que permita entender los cambios de esta nueva propuesta curricular, así como su impacto en la educación mexicana. Para tal efecto se desarrollaron dos conversatorios virtuales el 15 y el 24 de marzo de 2022; el primero de ellos se enfocó en la educación básica (ver Valenzuela y García, 2022) y el segundo correspondió a la educación media superior. El tema de la presente reseña se centra en las principales ideas que emergieron durante el segundo conversatorio, Rediseño del marco curricular: educación media superior (SOMIDEM, 26 de junio, 2022).

¹ Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A. C., SOMIDEM, A.C.; Universidad Autónoma de Guerrero, msgarcia@uagro.mx, orcid.org/0000-0001-7088-1075

² Universidad de Guadalajara, carlos.valenzuela@academicos.udg.mx, orcid.org/0000-0002-0776-5757

El conversatorio contó con la participación de dos asociados SOMIDEM, la Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez, profesora de la Universidad Autónoma de Zacatecas, y el Dr. Crisólogo Dolores Flores, profesor de la Universidad Autónoma de Guerrero. Ambos investigadores cuentan con experiencia en el ámbito curricular y han orientado sus investigaciones hacia el diseño y estudio del currículum de matemáticas. En el conversatorio, ellos dieron a conocer su punto de vista sobre la nueva propuesta educativa y motivaron el diálogo entre los asistentes. En las siguientes líneas, los autores de esta reseña rescatamos tres puntos álgidos del conversatorio con fines de comunicar al lector lo acontecido. A saber, exponemos un esquema general sobre: 1) Las reformas curriculares para el nivel medio superior. 2) Las matemáticas en los planes de estudio 2022 para el nivel medio superior, y 3) Hacia dónde reorientar el currículum del nivel medio superior.

LAS REFORMAS CURRICULARES PARA EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

El nivel medio superior, o bachillerato, es un parteaguas en la vida académica de los alumnos, para muchos representa la culminación de sus estudios, y para otros el inicio de sus carreras profesionales. En este sentido, en México se ofrecen principalmente tres tipos de bachillerato, el general, el tecnológico, y el técnico profesional. Esta idea había diversificado, por ejemplo, los contenidos y orientaciones que deben contemplarse en un plan y programa de estudios para este nivel educativo según el subsistema, lo cual ha derivado grandes retos para las autoridades educativas, y en particular, al momento de plantear reformas educativas.

En términos de reformas educativas para el bachillerato, podemos nombrar la del 2008, conocida como Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), en la que se creó el Sistema Nacional de Bachillerato (SNB), el cuál fue un mecanismo de la Secretaría de Educación Pública (SEP) para evaluar y elevar la calidad de los planteles del nivel medio superior mexicanos. Además, se pretendía que los diferentes subsistemas del bachillerato unificaran sus criterios de formación académica, conservando sus programas y planes de estudio, mediante el Marco Curricular Común (MCC) basado en competencias genéricas, disciplinares y profesionales.

Tiempo después, el 9 de febrero de 2012 se publicó en el Diario Oficial de la Federación la declaración del Congreso de la Unión que reformó los artículos Tercero y Trigésimo Primero de la Constitución para dar lugar a la obligatoriedad de la educación media superior en México (SEGOB, 2012), siendo un evento

importante para la educación mexicana. En consecuencia y en aras de impulsar la calidad de la educación de este nivel escolar, en 2018 se creó el Sistema Nacional de Educación Media Superior (SEGOB, 2018).

En 2022, la Nueva Escuela Mexicana conserva las consignas de las reformas anteriores respecto a lograr la excelencia y equidad de la educación, pero desde una propuesta denominada *Plan SEP 0 a 23 años*. Se trata de una trayectoria integrada en las distintas etapas de formación, desde educación inicial hasta la universidad, lo que implica que niñas, niños, adolescentes y jóvenes, hasta el término de la educación superior o su incorporación al trabajo, cuenten con un servicio educativo de excelencia en condiciones de equidad. Meta que puede ser alcanzada mediante un buen diseño e implementación del Plan y Programas de Estudio. Sin embargo, al momento en que se escribe esta reseña solo existen dos documentos que hablan de la nueva propuesta, a saber, el Seminario de Revisión del Marco Curricular, y el documento de trabajo y de consulta para propiciar el diálogo y el intercambio de ideas y puntos de vista con las comunidades educativas de la educación media superior en México, por lo que, con esa información, no es suficiente para proyectar el alcance de la meta que se propone.

LAS MATEMÁTICAS EN LOS PLANES 2022 PARA EL NIVEL MEDIO SUPERIOR

La nueva propuesta curricular reformula el MCC del 2008. Ahora se habla del Nuevo Marco Curricular Común, NMCC, que deja atrás el modelo de competencias, y en su lugar propone el aprendizaje de trayectorias y metas de aprendizaje con un enfoque pedagógico en el que ya no se habla de “las matemáticas”, sino del “pensamiento matemático”. Dicho pensamiento es entendido como un recurso sociocognitivo que moviliza aprendizajes, amplía y consolida el conocimiento producto de la experiencia para aprovechar y aplicar los conocimientos de otras tres áreas, las Ciencias experimentales, las Ciencias Sociales y las Humanidades, al tiempo que promueve la formación socioemocional, la autoestima, la autocrítica, el trabajo colectivo, y los valores.

Hasta ahora no hay planes de estudio culminados, pero sí se anuncia ya su estructura. El pensamiento matemático se encuentra dividido en categorías, subcategorías y temáticas, desde las que se pretende hacer relaciones con las otras tres áreas mencionadas. Las categorías resultan ser procesos, como los

procedimientos, el razonamiento, la resolución de problemas, y la modelación. Las subcategorías se corresponden con las ramas de la matemática, como la aritmética, el álgebra, la geometría, la probabilidad, y la estadística. Las temáticas son en realidad, subtemas de las áreas, como números, operaciones y registro numérico en el caso de la aritmética. Parece que solo se le ha puesto un nuevo nombre a la organización curricular.

A decir de la Dra. Judith, los planes de estudio de 2017 seguían ceñidos al MCC de 2008, y se fundamentaban en una teoría de la Educación Matemática, la Socioepistemología. Bajo estos fundamentos el plan de estudios de 2017 centraba la atención en las prácticas y no los objetos matemáticos, y se promovía una enseñanza realista, activa y crítica, mismas que la Dra. Judith sigue viendo presentes en la nueva propuesta de 2022.

¿HACIA DÓNDE REORIENTAR EL CURRÍCULUM DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR?

Terminamos esta reseña con una de las preguntas planteadas durante el conversatorio. El Dr. Crisólogo planteó: ¿Hacia dónde reorientar el currículum del bachillerato? A decir de él, para dar respuesta a la pregunta, se necesitan tres acciones: 1) analizar si los cambios curriculares son necesarios, 2) conocer hacia dónde orientar estos cambios, y 3) materializar y valorar los alcances y logros de los cambios curriculares. También agregó en su intervención que los cambios curriculares requieren de procesos de capacitación y actualización permanentes y continuos, y deben involucrar a los padres de familia y a la sociedad en su conjunto para que sean vigilantes y coadyuvantes de la aplicación de esas reformas. Todo esto, requiere de procesos de difusión y transparencia que informen a la sociedad acerca de las reformas, y que la eduque acerca de lo sustancial de las reformas.

Finalmente, informamos a los lectores que los diálogos propiciados en los dos conversatorios culminarán en un pronunciamiento que refleja las voces de los asociados SOMIDEM, dicho pronunciamiento es coordinado por tres de nuestros asociados: el Dr. Ulises Xolocotzin, la Dra. Rubí Real y el Dr. Jesús Salinas. En meses próximos será difundido mediante los canales oficiales de la SOMIDEM.

AGRADECIMIENTOS

A nombre de la SOMIDEM damos las gracias a los ponentes del conversatorio, Dra. Judith Alejandra Hernández Sánchez, y Dr. Crisólogo Dolores Flores, así como a los miembros SOMIDEM y público en general que participaron en el mismo.

REFERENCIAS

- Secretaría de Gobernación. SEGOB. (2012). DECRETO por el que se declara reformado el párrafo primero; el inciso c) de la fracción II y la fracción V del artículo 3o., y la fracción I del artículo 31 de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos. *Diario Oficial de la Federación*. https://www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5233070&fecha=09/02/2012#gsc.tab=0
- Secretaría de Gobernación. SEGOB. (2018). ACUERDO número 01/01/18 por el que se establece y regula el Sistema Nacional de Educación Media Superior. *Diario Oficial de la Federación*. https://www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5510587&fecha=15/01/2018#gsc.tab=0
- Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C., SOMIDEM, A.C. (26 de junio, 2022). Rediseño del Marco Curricular: educación media superior. <https://somidem.org.mx/>
- Valenzuela, C. y García, M. S. (2022). Las matemáticas en el Plan y Programas de Estudio 2022 para la educación básica en México: ideas emergentes en un conversatorio. *Revista Educación Matemática*. 34(1), 335-340 <https://doi.org/10.24844/EM3401.12>

CARLOS VALENZUELA GARCÍA

Dirección: Blvd. Marcelino García Barragán #1421, esq Calzada Olímpica,
C.P. 44430, Guadalajara, Jalisco, México.
Edificio V, tercer nivel Cubículo 9

Teléfono: +52 (33) 1378 5900 ext. 27759

Ed Dubinsky: Una leyenda y un pionero en Educación Matemática

Ed Dubinsky: A legend and pioneer in undergraduate mathematics education

Asuman Oktaç¹

En el año 1995, recién graduada de doctorado y contratada en una universidad estatal en Estados Unidos, participé en un congreso de Matemáticas. Me interesaba mucho la educación y el proceso de enseñanza-aprendizaje, así que asistía a las charlas sobre el tema, buscando mejorar mi práctica como docente y entender cómo se daba la comprensión de diferentes conceptos matemáticos.

En una de las pláticas sobre la enseñanza de álgebra abstracta, el presentador mostró un software que usaba en sus clases; los estudiantes ponían cierta información y obtenían estructuras como subgrupos con ciertas propiedades. Cuando inició la sesión de discusión, pregunté al expositor cómo se podría utilizar la tecnología para el aprendizaje de conceptos y no solamente como apoyo para realizar cálculos. Respondió que estas actividades ayudaban a aprender conceptos de álgebra abstracta, la cual obviamente era una respuesta evasiva.



¹ Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, orcid.org/0000-0003-2531-6418

Después de que terminó la sesión, un hombre se acercó a mí con una sonrisa en su cara y dijo: “Hola, me presento, soy Ed Dubinsky. Escuché tu pregunta y entiendo perfectamente a qué te refieres. Más, tengo la respuesta que buscas. Si tienes unos minutos, me gustaría hablar contigo”. Después de que me presenté, nos sentamos, me platicó brevemente sobre teoría (que después se conocería como la teoría APOE (acrónimo de Acción-Proceso-Objeto-Esquema), explicó cómo usaba la programación para el aprendizaje de conceptos matemáticos, comentó que había formado un grupo de investigadores (RUMEC–Research in Undergraduate Mathematics Education) y dijo que me enviaría un artículo que estaban escribiendo (que posteriormente se conocería como el artículo de ‘Framework’–Asiala *et al.*, 1996) y que le gustaría conocer mi opinión sobre él. Me invitaba a formar parte de RUMEC, si las ideas presentadas en el artículo me convencían de este acercamiento. En ese momento yo no estaba consciente de que me estaba ofreciendo el privilegio de mi vida académica.

Poco después de nuestro encuentro en ese congreso me uní a RUMEC; en mi primera reunión como miembro del grupo me impresionó la calidad humana, la inteligencia y la habilidad con la que dirigía las sesiones. Era una persona muy disciplinada y eficiente, tenía una personalidad fuerte; se notaba la convicción con la que trabajaba para ayudar a los estudiantes a construir conceptos matemáticos. El acercamiento que creó a partir de las ideas de Piaget (Dubinsky, 1996) ligaba estrechamente la teoría, la metodología de la investigación y la pedagogía. Ed siempre pensaba en cómo mejorar y optimizar el proceso de construcción del conocimiento matemático en los estudiantes. En cuanto a la investigación, siempre nos advertía: sin evidencia empírica no podemos afirmar nada, las cosas quedan como hipótesis.

Dubinsky era matemático de formación; después de realizar su tesis en análisis funcional había trabajado en varias partes del mundo. En Dubinsky (2000) relata cómo fue su transición de la matemática a la matemática educativa. Desde su propia experiencia como docente y estudiante de las matemáticas, había llegado a la conclusión de que los métodos tradicionales no llevaban a un aprendizaje satisfactorio para la mayoría de los estudiantes. A principios de los años 80, después de experimentar con diferentes métodos de enseñanza y observar que no cambiaban la situación, decidió empezar a estudiar epistemología y psicología de las matemáticas con el afán de encontrar maneras de ayudar a sus estudiantes a aprender. Al mismo tiempo, su interés en la informática lo llevó a la idea de usar la programación para el aprendizaje de los

conceptos matemáticos, explorando también la posibilidad de diseñar cursos alrededor de este modelo.

Cuando Ed descubrió los trabajos de Piaget, se le abrió un mundo; le fascinó la manera con que Piaget describía el trabajo de los matemáticos, aunque muchas veces Ed encontraba errores en sus explicaciones matemáticas (Dubinsky, 2000). Decidió dedicarse a leer y tratar de entender la obra de Piaget. Aunque ya era un matemático conocido a nivel internacional, tomó la decisión de dejar su investigación en matemáticas y enfocar su atención en la línea pedagógica. Después de años de inmersión en el trabajo de Piaget y a través de las respectivas reflexiones e interpretaciones, Ed Dubinsky empezó a presentar sus ideas alrededor de la comprensión de un concepto matemático como proceso y como objeto. A través de años esta teoría creció y evolucionó. En 2014 se publicó el libro de APOS Theory (Arnon *et al.*, 2014) con la intención de informar a la comunidad de los avances más recientes hasta ese momento y proporcionar una referencia a las personas que querían aprender este marco.

Un aspecto menos conocido de Ed Dubinsky es su activismo dentro del movimiento de los derechos civiles (Civil Rights Movement) en los años 60. Después de su estancia en África en los años 50, Ed estaba convencido que no importa si consideras que tus acciones puedan llevar a algún resultado o no, debes intentarlo (entrevista a Ed Dubinsky, The radio Buzz, 2019). De hecho esta postura formaba parte de su personalidad, tratándose de cualquier asunto que consideraba importante, político o académico. Estuvo al lado de los afroamericanos defendiendo sus derechos a votar y a favor de la soberanía de los pueblos nativos de los Estados Unidos. Decía que aunque a veces jugó un papel de líder, la mayoría del tiempo era un “foot soldier” y que era importante para uno seguir el camino que consideraba correcto aun cuando haya implicaciones negativas.

Ed era un personaje increíble; su fallecimiento es una gran pérdida para la comunidad. Era generoso; siempre tenía tiempo para las personas que querían conocer su teoría. Lo voy a recordar con su sonrisa, con sus coloridas gorras y calcetines, con su energía; tenía la esperanza de volver a verlo. Ahora nos toca avanzar con el legado que nos deja, contribuyendo a la teoría a través de nuestra investigación. Que descance en paz, querido Ed.

REFERENCIAS

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory – A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En A. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education II*, CBMS issues in mathematics education (pp. 1–32). American Mathematical Society.
- Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(1), 47-70.
- Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8(3), 24-41.
- The radio Buzz (2019). Professor Ed Dubinsky civil rights pioneer. <https://www.mixcloud.com/theradiobuzz/professor-ed-dubinsky-civil-rights-pioneer/>

ASUMAN OKTAÇ

Dirección: Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN,
Av. IPN 2508, Col. San Pedro Zacatenco, 07360, Ciudad de México