Educación Matemática

Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C.

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

Red Universitaria e Institución Benemérita de Jalisco

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías

Educación Matemática *vol. 35 • núm. 1• abril de 2023*

© Educación Matemática, abril de 2023, vol. 35, núm. 1, es una publicación cuatrimestral editada por la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C., con domicilio en Adolfo Prieto 1734, Col. Del Valle centro, 03100, Benito Juárez, Ciudad de México, correo electrónico somidem2023@gmail.com y la Universidad de Guadalajara a través del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, dirección Blvd. Marcelino García Barragán #1421, esq Calzada Olímpica, C.P. 44430, Guadalajara, Jalisco, México, correo electrónico educacion.matematica@administrativos.udg.mx

Editor responsable: Ernesto A. Sánchez Sánchez. Reserva de derechos al Uso Exclusivo del Título: 04-2015-10163264600-203, ISSN (web) 2448-8089, ambos otorgados por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor.

Diagramación y corrección de estilo: Formas e Imágenes, S.A. de C.V., Av. Universidad 1953, edif. 2, loc. E, Copilco el Bajo, Coyoacán, 04330, Ciudad de México, formaseimagenes@gmail.com

Fecha de la última actualización 1 de abril de 2023.

https://www.revista-educacion-matematica.org.mx

Contenido

 https://doi.org/10.24844/EM3501.00

Educación Matemática: Conectando a investigadores y educadores por 35 años

Educación Matemática: Connecting researchers and educators for 35 years

Ernesto Sánchez[1]
José Luis López[2]

Este año celebramos el 35 aniversario de la revista *Educación Matemática* (rEM), la cual se ha dedicado a publicar y divulgar, sin interrupción, artículos de investigación, ensayos, contribuciones a la docencia y reseñas de libros y de eventos en el campo de la educación matemática. La rEM es un proyecto editorial mexicano que conecta a investigadores y educadores de todo el mundo, principalmente de Hispanoamérica. En la revista se abordan temas de educación matemática tales como: la enseñanza y el aprendizaje, la formación y desarrollo profesional de profesores, perspectivas teóricas, el afecto y las actitudes, el análisis de programas de estudio y libros de texto, así como experiencias de enseñanza, entre otros.

Un proceso importante relacionado con la revista ha sido la creación, difusión y posterior crecimiento de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM), asociación civil creada formalmente en octubre de 2013 con los siguientes propósitos:

- Propiciar la formación y desarrollo de grupos de investigación en el campo de la educación matemática.

[1] Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, esanchez@cinvestav.mx, https://orcid.org/0000-0002-8995-7962.

[2] Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, joseluis.lopez@cinvestav.mx, https://orcid.org/0000-0003-0110-8956.

- Promover la elaboración, distribución y difusión de publicaciones con resultados de las investigaciones en el campo.
- Sumar un foro académico internacional en lengua española en el que se discutan problemáticas y hallazgos en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en diferentes contextos.
- Dotar de un marco legal a la revista Educación Matemática.

En el año 2021 se inició un proceso abierto de afiliación a la SOMIDEM y actualmente cuenta con más de 150 afiliados. Además, nos complace informar que la SOMIDEM ha logrado importantes avances en la consecución de sus objetivos, incluyendo la realización exitosa del primer Congreso de la sociedad, llamado SOMIDEM1, el cual, dedicó su primer día a una jornada para los jóvenes investigadores. En este número, se incluye una reseña detallada de este evento para ofrecer información acerca de su contenido y resultados.

En este 35 aniversario, es importante reflexionar sobre la presencia de la rEM en la Web of Science (WoS) y el desarrollo que ha experimentado en esta plataforma. La cantidad de registros en WoS ofrece otra perspectiva de su impacto en la comunidad académica. Desde el año 2007 hasta mediados del 2022, se encontraron 387 registros, de los cuales 345 corresponden a artículos de investigación, reseñas, ensayos o contribuciones a la docencia publicados en la rEM, mientras que los 42 restantes son secciones editoriales.

Se identificaron alrededor de 200 afiliaciones distintas de los autores en los 345 artículos analizados. Por ejemplo, las primeras cinco instituciones listadas por WoS son: Instituto Politécnico Nacional (49 registros, 14%), Universidad Pedagógica Nacional (30 registros, 8.7%), Universidad de Granada (18 registros, 5.2%), Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (13 registros, 3.7%) y Universidad Autónoma de Guerrero (12 registros, 3.5%). Estos datos sugieren que la producción de los artículos analizados está distribuida entre varias instituciones y que los autores tienen afiliaciones diversas.

La distribución geográfica de los autores de los 345 artículos examinados en WoS abarca al menos 23 países. A continuación, se muestra la lista de los países con mayor frecuencia:

- México con 143 autores
- España con 90
- Colombia con 37

- Chile con 36
- Argentina con 31

Se observa una fuerte colaboración internacional en la autoría de los contenidos. Por ejemplo, en los primeros cinco lugares, el promedio de artículos en que participan autores de diferentes nacionalidades es de 37%.

En relación con los 345 artículos de investigación analizados en WoS, se identificaron 564 citas provenientes de 423 artículos, libros o memorias registrados en la base de datos. La distribución geográfica de los autores que realizaron estas citas abarca un total de 27 países, siendo los de mayor frecuencia los siguientes:

- España con 155 autores
- México con 134
- Colombia con 64
- Chile con 60
- Argentina con 20

En la base de datos WoS, se han registrado al menos 1,579 citas provenientes de 1,117 artículos, que abarcan un total de 446 artículos publicados en la rEM a lo largo de su historia. Estos datos nos permiten comprender el impacto de la revista en la comunidad académica. Esperamos que esta influencia siga fortaleciéndose.

Este número contiene un total de 10 artículos y dos reseñas. Los dos primeros, uno de Alicia Ávila Storer y otro de Bruno D'Amore y Raymond Duval, son contribuciones especiales en respuesta a una invitación del consejo directivo para conmemorar nuestro 35 aniversario. Los artículos restantes abordan una variedad de temas, niveles y ubicaciones, lo que probablemente permitirá al lector encontrar al menos uno que sea afín a sus intereses.

 https://doi.org/10.24844/EM3501.01

Educación matemática en pandemia: los efectos de la distancia

Mathematics education in a pandemic: the effects of distance

Alicia Ávila[1]

> Yo creo que *mate* fue la más difícil (se queda pensativo), sí, yo creo que sí, porque era como más complicado entenderle, por lo mismo que no sentías que alguien te esté explicando, y no te respondían dudas. Sientes como que estuvieras viendo otro video de YouTube y ya, sientes como que no hay una conexión. Por más mal que te caiga el maestro la necesitas.
>
> *Jair, 14 años, segundo de secundaria.*

Resumen: Se analizan los efectos que tuvo en México la distancia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas durante los casi 250 días de confinamiento debido a la llegada del SARS-Cov2. Sobre la base de un estudio sustentado en entrevistas virtuales con maestros, padres de familia y estudiantes de educación básica, se muestran los efectos de la distancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel de primaria y secundaria. Los esfuerzos de docentes y familias desplegados para llevar a cabo la enseñanza y el aprendizaje, así como las valoraciones que hacen de los procesos vividos son parte de lo que se comunica en el escrito. Se identifican modificaciones en las relaciones didácticas previamente establecidas y el afianzamiento de la enseñanza ostensiva, la exclusión de muchos contenidos matemáticos y la simplificación de los trabajados. Se identifica también la emergencia de la *maestra-sombra* y los tutoriales de YouTube como corresponsables del compromiso de enseñar. Se observa que una capacitación de

[1] Universidad Pedagógica Nacional, aliavi@prodigy.net.mx, orcid.org/0000-0003-0872-572X.
Agradezco a María García su cuidadosa lectura y comentarios a la versión preliminar de este artículo, a Salvador Llinares las pertinentes observaciones y sugerencias realizadas a dicha versión y al profesor Juan Antonio Barrera Ángeles su colaboración en la investigación que dio pie al artículo.

docentes más amplia, oportuna y pertinente muy probablemente hubiese llevado a los alumnos a "otras matemáticas".

Palabras clave: *educación a distancia, educación básica, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, poder de los medios, México.*

Abstract: The effects that distance had on the teaching and learning of mathematics in Mexico during the almost 250 days of confinement due to the arrival of SARS-Cov2 are analyzed. From a virtual interview-based study the effects of distance in the teaching and learning processes of mathematics at the primary and secondary level are shown. Modifications in previously established didactic relationships and the strengthening of a normative teaching model, the exclusion of many mathematical contents and the simplification of the worked are identified. The emergence of the *shadow-teacher* and YouTube tutorials are also identified as co-responsible for the commitment to teach. The efforts of teachers and families deployed to carry out teaching and learning, as well as the assessments made by the actors of the processes experienced are also communicated in the writing. It is observed that a more extensive, timely and relevant teacher training would very likely have led students to "other mathematics".

Keywords: *distance education, basic education, teaching and learning of mathematics, power of the media, Mexico.*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza vía remota para enfrentar el confinamiento no fue algo planeado. En México, como en general en el mundo, fue una respuesta emergente a la crisis con todo lo que esto significó: profesores poco preparados o sin preparación para enfrentar el compromiso; sin políticas educativas claras y vigorosas para dar una formación pertinente a los maestros; estudiantes con escasos recursos tecnológicos al alcance y, por lo mismo, con poca o ninguna habilidad para utilizar con fines educativos aquellos con los que ya contaban.

Habría que preguntarse, entonces, si las formas que tomaron los procesos educativos sustentados en estos medios (los que se hayan utilizado) condujeron a diferentes matemáticas como afirma Borba, o si la pregunta es, simplemente,

¿a qué matemáticas condujeron? Esa es la pregunta que se trata de responder en este escrito. Es una cuestión fundamental para entender lo ocurrido y su impacto en la educación básica en países donde el confinamiento, debido al SARS-Cov2, se prolongó por meses e incluso por años. Tal fue el caso de México, que se constituyó en el país de la OCDE que cerró por más tiempo sus escuelas, alcanzando casi 250 días al finalizar el ciclo escolar 2020-2021 (OECD, 2021).

Borba (2021, p. 5) señaló recientemente la "urgente necesidad de estudiar cómo ocurre la educación matemática online en los niños". Engelbretch *et al.* (2021), reiteran la relevancia de analizar dicho fenómeno con los estudiantes de educación básica y los niños pequeños. Pero si el tema es esencial, es necesario considerar que la enseñanza durante la pandemia, como se señaló antes, fue una acción de emergencia, ni planeada ni impartida por expertos en tecnología educativa. Los autores recién mencionados incluso llegan a afirmar que en realidad solo se gestionó la crisis para sobrevivir. Si bien esta afirmación no tiene validez universal, sí la tiene para gran parte de las escuelas de México donde, como se verá adelante, las situaciones educativas se vieron "en el límite".

Engelbretch *et al.* (2021) consideran que el período de pandemia trajo algunos beneficios, como el rápido crecimiento de software y modelos de *blended learning*, de juegos y materiales para utilizar en línea y de planes de estudio útiles para apoyar el aprendizaje a distancia. Pero no todos comparten ese optimismo, por ejemplo, Oliver (2020) señala que: "El aprendizaje en línea autoguiado está condenado al fracaso". Las razones que Oliver esgrime, entre otras, son que "los estudiantes simplemente no tienen ningún incentivo para mantenerse en sus estudios sin presión del grupo, un profesor a mano o un ambiente de aprendizaje estructurado" (citado por Engelbretch *et al.*, 2021, p. 822).

Sin duda son válidas las razones planteadas por unos y otros, pero conforme a lo que nos enseñó la pandemia en México, es importante considerar diversos factores para ponderar los alcances de las afirmaciones: ¿Qué condiciones para aprender los contenidos escolares tuvieron los estudiantes? ¿Con qué apoyos contaron para hacerlo? ¿Qué herramientas tecnológicas tenían para vincularse con la escuela? ¿Qué calidad tenía la conectividad de la que dispusieron? ¿Qué contenidos constituyeron la materia de aprendizaje? ¿Cómo les enseñaron?, ¿Alguien acompañó su proceso?

En este artículo, sustentado en un estudio exploratorio realizado a través de entrevistas vía internet, y complementado con la revisión de trabajos realizados sobre el terreno en México, se busca aportar elementos para contribuir a colmar el vacío mencionado: la necesidad de entender qué ocurrió con la enseñanza y el aprendizaje de los niños y jóvenes de educación básica durante la pandemia, especialmente en matemáticas. Las condiciones del aislamiento –que hicieron de estudiantes y maestros una población de muy difícil acceso– obligaron a una cierta metodología de indagación a la que dedico el siguiente apartado.

ESTRATEGIA DE INDAGACIÓN: LO POSIBLE EN MEDIO DEL CONFINAMIENTO

En México, el confinamiento total debido a la pandemia producida por el SARS-Cov2, convirtió a profesores, padres y madres de familia, así como a estudiantes, en una población de muy difícil acceso. Gracias a la técnica denominada Snow Ball sampling (muestreo por "bola de nieve") (Goodman, 1961) logré conversar con 28 de ellos. Esta técnica proporciona formas de contacto con grupos o poblaciones caracterizadas como difícilmente accesibles o, conocidas en la literatura como *hard-to-reach populations* (Alloatti, 2014).

La técnica "bola de nieve" –dadas las condiciones del confinamiento– posibilitó que un contacto llevara a otros, de manera tal que, si al inicio se tenía acceso a unos cuantos participantes, estos contribuyeron contactando a nuevos participantes que accedieron a colaborar en el trabajo. De este modo se amplió el grupo de estudio hasta resultar conveniente para los objetivos de la indagación, es decir, "hasta el momento en el que [el investigador] considere que puede decir algo importante y novedoso sobre el fenómeno que lo ocupa" (Martínez-Salgado, 2012, p. 617).

Con base en esa metodología, lo que aquí se presenta se basa en 18 conversaciones en las que se abordó el tema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con cierta amplitud. En general, las entrevistas tuvieron una duración de entre 60 y 80 minutos. Los participantes en el estudio residen en ciudades del centro del país: Aguascalientes, Ciudad de México, Guadalajara y Querétaro y, en algunas zonas indígenas del este y sureste de México: Oaxaca, Chiapas y San Luis Potosí. Es decir que las conversaciones corresponden a actores de distintos contextos sociales, económicos y geográficos contactados vía remota en medio del confinamiento. Nuestros interlocutores fueron: madres y padres de familia de clase media y trabajadora; profesores de escuelas privadas, públicas urbanas ubicadas en zonas desfavorecidas y no desfavorecidas y de escuelas de zonas indígenas, así como alumnos de primaria y secundaria de escuelas privadas (el cuadro 1 muestra los datos específicos).

Se trata, entonces, de una muestra que no intenta tener representatividad, pero sí aportar conocimiento en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar en el período de confinamiento. Con ello, se espera contribuir a la construcción de la historia de la educación matemática durante la pandemia provocada por el SARS-Cov2.

Cuadro 1. Número de actores entrevistados que abordaron con detenimiento procesos vinculados a las matemáticas escolares durante la pandemia.

Rol de participación	Primaria	Secundaria
Profesores	4	4
Alumnos	3	3
Padres/madres de familia	3	1
Totales	10	8

Una parte de las conversaciones tuvo lugar entre julio y septiembre de 2020, otra fue realizada entre septiembre y diciembre de 2021; a fines de 2022 se agregó una entrevista más. Esta temporalidad permitió captar dos momentos distintos del confinamiento: las inquietudes y sorpresas de los primeros meses y las experiencias vividas durante un año de tal circunstancia.

Una cuestión constatada desde el inicio fueron las condiciones desiguales en que se realizaron las actividades escolares durante este período. Dichas condiciones están fuertemente vinculadas a la desigualdad económica y educativa existente en el país. Esta realidad se reflejó en la calidad de la interconexión, en los dispositivos electrónicos disponibles, en las condiciones materiales y de espacio en las que se trató de aprender; también en el apoyo de una persona adulta conocedora (o no) de los contenidos escolares (Ávila, 2022). Todo lo anterior, como también ha señalado Borba (2021) en referencia a Brasil, repercutió en el tipo de aprendizajes logrados en torno a las matemáticas escolares.

ELEMENTOS PARA EL ANÁLISIS DE LA ENSEÑANZA

Para realizar el análisis de la información recogida, desde la perspectiva específica de la enseñanza, utilizaré dos conceptos emanados de la didáctica francesa: el de triángulo didáctico y la noción de ostensión. Es de todos conocido que el triángulo esquematiza la relación didáctica mediante tres elementos: a) *el maestro*; b) *el alumno*; y c) el *saber escolar*, así como las interacciones que se dan entre ellos con el fin de hacer que los alumnos adquieran (o construyan) el conocimiento objeto de la relación (Chevallard.1991). La noción de ostensión, en la formulación de Ratsimba-Rajohn (1977), alude a una presentación de los contenidos de enseñanza caracterizada porque: todos los elementos y relaciones constitutivos de la noción matemática prevista son proporcionados de un solo golpe por el profesor o el libro de texto. En la ostensión se utilizan apoyos objetivos, imágenes y ejemplos para lograr que los alumnos capten la idea deseada.

Para dimensionar la relevancia de estos conceptos, conviene recordar que la Secretaría de Educación Pública promueve, desde 1993, un enfoque de enseñanza de las matemáticas de tipo constructivista, conforme al cual el saber no es directamente trasmitido por el profesor a través de imágenes, definiciones o ejemplos. Por el contrario, el alumno interactúa con dicho saber a través de las situaciones problemáticas que lo implican; lo hace en interacción con los compañeros, el intercambio de ideas y estrategias y la discusión de resultados (SEP, 2011a). Bajo esta orientación, contrapuesta a la comunicación directa de los saberes escolares, "el conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones solo es importante en la medida en que los alumnos lo puedan utilizar hábilmente para solucionar problemas y que lo puedan reconstruir en caso de olvido" (SEP, 2011b, p. 48). No obstante estas recomendaciones, que otorgan un lugar secundario a las reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones, se sabe que muchos docentes aún privilegian la introducción ostensiva de las nociones y procedimientos como forma de enseñanza.

Por último, respecto de la ostensión cabe enfatizar que las exposiciones discursivas, las formulaciones y los ejercicios en el nivel simbólico son formas de ostensión que se ofrecen a los alumnos con cierta experiencia matemática. Se trata de poner ante su intelecto (que ya no ante sus ojos) los conceptos, los procedimientos, las fórmulas y las soluciones (Ávila, 2006, p. 63).

Ahora bien, era esperable que las relaciones didácticas establecidas en las escuelas –cualesquiera que estas fueran– se alterarían debido a la distancia. En lo que sigue se da cuenta de cómo y en qué medida esto ocurrió.

En primer término, es necesario enfatizar que el contexto físico, socioeconómico y cultural del aprendizaje tomó una relevancia que en la escuela presencial no había tenido (Borba, 2021; Ávila, 2022). Esta relevancia se concretó en elementos que afectaban al estudiante y su relación con el conocimiento matemático escolar:

- El lugar físico donde se conectaba para realizar las tareas de aprendizaje.
- La calidad de la conexión.
- El tipo y número de recursos tecnológicos disponibles en la familia.
- El apoyo dado por la madre del estudiante o algún otro miembro de la familia.

Los profesores también se vieron afectados. Hasta entonces considerados competentes para realizar su labor, se convirtieron en profesionales sin preparación para gestionar el nuevo formato de enseñanza a que los obligó la pandemia. ¿Qué pasaría entonces con las relaciones didácticas preexistentes?, ¿cómo se haría llegar el conocimiento a los alumnos?

En México, las propuestas constructivistas, desde su introducción en 1993, han tenido dificultades para desplazar a la enseñanza ostensiva. Es razonable entonces preguntarse si tales dificultades se agudizaron con la distancia; si la resolución de problemas matemáticos, las búsquedas personales y la argumentación se mantuvieron en el período, aun con las dificultades que ya experimentaban; o si se dio paso franco a la ostensión de contenidos, procedimientos y definiciones que la SEP considera útiles solo como herramientas para la resolución de problemas.

En síntesis, teniendo como base lo hasta aquí dicho, a continuación se tratará de responder las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles fueron los efectos del contexto y de los medios en las relaciones didácticas y en los aprendizajes matemáticos logrados con la enseñanza remota?
- ¿Qué tipo de aprendizajes matemáticos se alcanzaron a la distancia?

RESULTADOS

ESTRATEGIAS DE COMUNICACIÓN CONFIGURADAS POR LOS MEDIOS DISPONIBLES

Durante el confinamiento, la actividad matemática escolar se dio a través de dos grandes modalidades de comunicación:

a) *La enseñanza cara a cara*: sincrónica, a través de plataformas y computadoras o tabletas, con un profesor en la pantalla en tiempo real y la realización de sesiones de clase, una, dos o tres veces por semana.

b) *La enseñanza diferida*, asincrónica, a través de hojas de trabajo, *cuadernillos* y tareas que los profesores hacían llegar con mayor o menor oportunidad a los alumnos, ya fuera físicamente, o bien por WhatsApp.

En el primer caso, el de la enseñanza con un profesor en la pantalla, estuvieron principalmente las escuelas privadas, cuyo estudiantado contaba con una computadora o una tableta, una plataforma para "correr" las actividades (Zoom o Meet como las principales) y un espacio para realizar las tareas escolares en relativo silencio (un estudio, una recámara, un comedor o una terraza). Se contaba también con el Classroom para recibir y entregar tareas y un profesor que intentaba, en los horarios habituales, que los alumnos aprendieran matemáticas en las nuevas circunstancias. Algunas escuelas públicas cuyos alumnos tenían buenas condiciones económicas tuvieron circunstancias, si no iguales porque generalmente los alumnos tenían celulares y no tabletas o computadoras, sí parecidas a las recién descritas.

En el caso en el que prevaleció el uso de hojas de trabajo y cuadernillos la relación educativa se volvió incierta. La comunicación (siempre diferida) generalmente era solo entre el profesor y un bajo porcentaje de sus alumnos, que además no contaban con un espacio aislado para trabajar y, la mayor parte de las veces, tampoco con una persona con conocimientos suficientes para apoyar el trabajo escolar en matemáticas o en cualquier otra materia (Ávila, 2022).

La realidad de esta desigual condición fue consignada por distintas instituciones y de diferentes maneras; anoto dos de ellas:

a) Con conexión a internet solo contaba 72% de la población de 6 años o más, pero el servicio estaba distribuido de una manera muy desigual, ya que en la población rural únicamente 50.4% contaba con él; (INEGI, 2020 y 2021)
b) En algunas zonas indígenas el problema era mayor. Ahí se intentó subsanar la falta de internet mediante un programa televisivo de cobertura nacional titulado *Aprende en casa*, pero, según las quejas de algunas profesoras de escuelas indígenas de Oaxaca: "¡A las comunidades ni siquiera llega la señal de televisión!" (FPEI-UPN, Salinas *et al.*, 24 de febrero de 2021).

LA ENSEÑANZA A TRAVÉS DE LA PANTALLA: INTRODUCCIÓN OSTENSIVA DE LOS CONTENIDOS COMO ESTRATEGIA DOMINANTE

La estrategia más frecuente en esta modalidad fue que los profesores –tanto de primaria como de secundaria– intentaron replicar lo que hacían en su salón de clase: exponían los temas, en general apoyados en diapositivas que contenían definiciones y procedimientos, y luego se enviaban a los estudiantes ejercicios por WhatsApp o Classroom para aplicar o practicar el contenido recién comunicado.

Así lo contó un profesor de primaria:

> Hacía presentaciones en Power Point y con eso me guiaba, las sesiones que más trabajé fueron de matemáticas (...) los Powers me ayudaron mucho para dar la clase... Sí fue una enseñanza muy explicativa, sinceramente no se planteaban retos ni problemas como en la escuela con los *Desafíos Matemáticos*[2]. (Maestro José Luis, primaria pública)

Una profesora de secundaria expuso su forma del trabajo durante la pandemia; se identifica en ella una estructura similar a la recién descrita:

> En el tema veo, si necesito darles algo de teoría, yo lo resumo, les pongo un breve resumen de lo que necesito realmente que sepan, porque no me gusta decirles "vete a investigar", porque luego me ponen cosas que no... después ven el YouTube, hacen ejercicios y me los mandan. (Maestra Mónica, secundaria pública)

También los alumnos refieren esta forma de enseñanza:

> El maestro explica en la pantalla los procedimientos, pone PDF's, casi nomás de álgebra, y deja tareas con base en las explicaciones que da basado con las diapositivas. (Santiago, 11 años, 1° de secundaria privada)

En general, los profesores completaban el ciclo enviando al Classroom o por WhatsApp ejercicios donde se aplicaba el conocimiento recién comunicado. Una vez hecha la tarea, se regresaba al maestro, por la misma vía, para su registro o su evaluación casi siempre superficial. Cabe señalar que, eventualmente, se incorporaron recursos visuales para presentar los números negativos, ya que existe una

[2] *Desafíos Matemáticos* es el nombre de los libros de matemáticas para los alumnos distribuidos por la Secretaría de Educación Pública para todos los niños que cursan educación primaria.

tradición de poner un color a los positivos y otro a los negativos. No obstante tal incorporación, la enseñanza conservaba el formato: los alumnos veían en la pantalla lo que su maestra hacía manipulando "stikers" y luego lo replicaban a la distancia.

Introducción del pizarrón y una mejor vinculación con el contenido

Las diapositivas eran el medio más común para la presentación de las nociones a estudiar. Siempre eran presentadas con la idea ya formulada –básicamente algún algoritmo, fórmula o definición–. Su contenido expresaba un conocimiento institucionalizado y supuestamente libre de errores, ya que el profesor o profesora la habían elaborado. Eran finalmente, presentaciones ostensivas donde todos los elementos del concepto que se quería hacer aprender se presentaban a la vez y, si el maestro lo consideraba, se ejemplificaban varias veces para una mejor comprensión.

En algunos casos, las diapositivas fueron sustituidas por el desarrollo "paso por paso" de algún procedimiento de resolución escrito y oralizado en paralelo por el profesor. Esto fue posible al contar con un pizarrón frente a la pantalla.

Me detengo en esto porque, según los estudiantes entrevistados, el pizarrón introduce un cambio: si el profesor va mostrando paso a paso el desarrollo del procedimiento, y lo hace acompañado del discurso oral correspondiente, esta progresión le imprime cierto dinamismo y la ostensión resulta más amigable y comprensible. Así es como lo perciben los estudiantes de escuelas privadas y públicas:

> No es lo mismo sus diapositivas a que te vayan explicando y apuntando en el pizarrón, como hacen en clase, ahí vas viendo en el pizarrón lo que el maestro hace. (Jair, alumno 2° de secundaria, escuela privada)
>
> . . .
>
> Maestra: necesito que me lo escriba en el pizarrón, no que solamente me lo enseñe en diapositivas. (Información proporcionada por la maestra Fernanda, de escuela pública, en entrevista)

También las madres de familia reconocían la importancia de este recurso y se lo hacían saber a los profesores:

> Los alumnos me agradecían el detalle del pizarrón, y yo dije: ¿por qué me agradecen? ... y las mamás me lo dijeron: maestra es que la única que tiene pizarrón es usted, las otras maestras nada más les ponen ahí los ejercicios, les dicen que hacer y ya, el pizarrón les ayudó mucho. (Maestra Mónica, secundaria, en tono de orgullo)

Los tutoriales, importante apoyo en la presentación del contenido

Varias de las docentes entrevistadas mencionan haber localizado y utilizado tutoriales de YouTube para presentar los contenidos. La inclinación por la ostensión de procedimientos y definiciones observada hasta aquí, se refleja en la preferencia por ciertas páginas de YouTube, cuya claridad (aplaudida por los docentes) se enfoca a una descripción paso a paso de los procedimientos aritméticos o algebraicos que se enseñan en secundaria y que los alumnos tanto valoran. Por ejemplo, la siguiente imagen (figura 1), tomada de un sitio muy apreciado por todos los docentes de secundaria entrevistados (https://www.youtube.com/watch?v=8rT0DZbYGEs) se va integrando renglón a renglón y cada uno se introduce acompañado de la oralización anotada a la derecha:

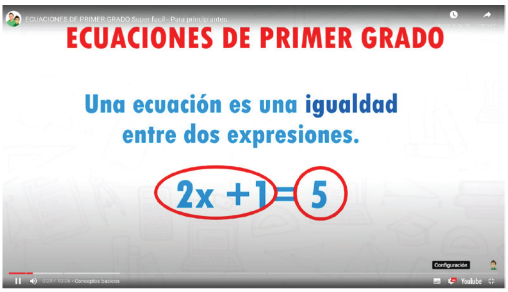
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>¿Qué onda?, espero que estén muy bien, hoy vamos a tratar uno de mis temas favoritos:
Ecuaciones de primer grado
Pero antes vamos a repasar algunos conceptos básicos
Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones
Eso quiere decir que esto de aquí (aparece la curva roja de la izquierda) vale lo mismo que esto de acá (aparece el círculo encerrando el 5)
Por eso en medio tienen un signo de igual
Además, tienen una variable o incógnita,[3] que viene siendo una letra cuyo valor desconocemos (aparece una flecha verde señalando la X a la vez que desaparecen las curvas rojas).
Además, sus incógnitas estarán siempre elevadas a la primera potencia, esto quiere decir que no aparecerán términos cuadráticos o cúbicos. (Carreón, 25 de febrero de 2021).</td>
</tr>
</table>

Figura 1. Página de YouTube donde se introduce la idea de ecuación de primer grado mediante un tutorial.

[3] El personaje que aparece en el tutorial únicamente debería haber hecho mención a la incógnita, y no a la variable, ya que se trata de una ecuación.

A continuación, el tutorial presenta bloques de ejercicios para practicar lo que se ha comunicado de forma escrita y oral. Otros tutoriales utilizados tienen la misma estructura. También la tienen diversas planeaciones a las que tuve acceso.

Es decir que, si bien en ocasiones complementadas con un tutorial tomado de internet, las clases de secundaria –cuando tienen como medio de trasmisión la pantalla– se parecen. Se presentan diapositivas o un pizarrón con alguna definición, un resumen, o el desarrollo de un procedimiento. Luego se repasa lo comunicado, se asignan y resuelven ejercicios y, finalmente, se envían resueltos al profesor. Estas acciones giran casi siempre alrededor del álgebra. Y, en todos los casos, muestran la intención docente de hacer comprender, mediante la ostensión, el procedimiento de su interés.

Esta forma de enseñanza, sustentada en la ostensión de los contenidos, utilizada con el álgebra, sirvió también para trabajar con la aritmética en primaria, aunque, con ciertas variaciones. Algunas relacionadas con la edad de los estudiantes.

La actividad con los más pequeños: la aritmética en la pantalla

Una similitud entre la enseñanza del álgebra y de la aritmética fue el modelo de comunicación basado en la ostensión. El profesor José Luis (al inicio de este acápite) nos habló de las formas explicativas utilizadas en la primaria. También los padres de familia lo refieren:

> La maestra hacía presentaciones en Power Point, las explicaba, después hacían ejercicios en sus cuadernos y al final la maestra tomaba evidencia fotográfica de las actividades que habían realizado los niños [...] Yo le ayudaba a mi hija sobre todo en matemáticas, que era lo que se le dificultaba. En segundo, a lo que más le dieron importancia fue a las tablas de multiplicar. (Emanuel, padre de una niña de segundo/tercer grado durante la pandemia, escuela privada)

En algunas escuelas públicas había conexión semanal para recibir clase de matemáticas; aunque la recepción era por celular y muchos alumnos no se conectaban. En estos casos, la guía de la actividad era el libro de texto.

> De 30 niños se conectaban unos 16, con el celular. Lo que más les enseñaron en cuarto fueron las tablas de multiplicar y las divisiones en sexto. Las maestras tenían el libro en la mano, iban página por página. La maestra explicaba, ponía el libro en la pantalla, leía y les pedía a los niños que lo contestaran. Los que sabían levantaban la mano

> para contestar, y les decían que lo enviaran contestado por WhatsApp. (Iván, padre de dos niños de primaria pública)

En otros casos, sobre todo con los niños más pequeños, la presentación de los contenidos se acompañó de actividades con imágenes o material manipulable que ayudaban a una mejor comunicación de la aritmética.

El juego como estrategia para practicar lo aprendido

Con la reforma a las matemáticas que tuvo lugar en 1993, el juego se incorporó a la actividad matemática en la escuela primaria, dicha innovación ha perdurado en algunos salones de clase. Una pequeña de tercer grado, de una *escuela activa* refiere también a la enseñanza de la aritmética. La situación que relata tiene por objetivo ejercitar la adición con dígitos y muestra una manera mucho más dinámica de hacerlo (mediante el juego), probablemente debido al enfoque *activo* de la escuela y a las excelentes condiciones que se ofrecían ahí para la actividad vía remota:

> En matemáticas jugábamos a una cosa que a mí no me gusta que se llama el banco[4]... Sí me gustaba, pero es que Danilo mi compañero siempre hacía trampa para ganar [...] Es que jugábamos con dos dados y la maestra decía que tiráramos, y a Danilo por alguna razón (hace tono de sospecha) siempre le salía tirar doble y entonces no era divertido porque siempre sabías quién iba a ganar. (Leonor, 8 años, tercer grado en una escuela privada *activa*, ciudad de México)

Apertura a la geometría a través del Jamboard

Para muchos maestros, la medición y la geometría fueron temas difíciles (hasta imposibles) de trabajar por las dificultades de medición, de elaboración de trazos precisos, de falta de materiales para realizar las actividades y por la imposibilidad de ayudar o corregir lo que los niños hacían. Probablemente por ello es que, de

[4] El banco, o banquito, como también se le llama, es un juego conocido en gran cantidad de países y popular en México para que los niños realicen agrupamientos recursivos de 10 con objetos que se ponen a su disposición y de este modo formen decenas, centenas o millares, conforme los dados indiquen una cantidad igual o mayor que 10.

entre nuestros entrevistados, solo una profesora persistió en su enseñanza y, para poder hacerlo, aprendió a utilizar el *Jamboard*.[5]

> Sí, porque mis hijos me enseñaron a rayar en la Tablet con ese Jamboard que al principio yo decía: ¿Qué es eso? Escribía como en un pizarrón: "Las fracciones comunes" (hace un ademán, como si escribiera la frase) y ya comenzaba a explicar [...] También hacía las figuras, las cuadriculaba, escribía las fórmulas. Pude trabajar geometría. (Maestra Miriam, sexto de primaria pública urbana)

Fue la ayuda de los hijos la que cambió tanto la forma inicial de enseñanza (a través de WhatsApp) como los contenidos posibles de trabajar. El cambio fue posible por la colaboración intergeneracional. Pero el caso muestra además cómo la preparación docente cambió sustancialmente los contenidos trabajados.

Como se ve hasta aquí, las actividades que maestros, padres y alumnos refieren en los distintos grados de primaria se centraron en cuestiones vinculadas al sistema decimal de numeración, a los algoritmos de las operaciones y a las tablas de multiplicar. En grados más avanzados, también se estudiaban las fracciones. En general, se trataba de presentar los conocimientos a través de explicaciones y ejemplos para que luego los alumnos los practicaran.

La forma de vincular a los alumnos con la aritmética fue similar a la utilizada con el álgebra. Sin embargo, dos elementos diferencian la actividad en los grados iniciales de primaria: la incorporación de manipulables para hacer las presentaciones o para ejercitar lo aprendido. También el tinte lúdico que a veces se da a la actividad.

Solo en casos excepcionales, donde las maestras buscaron una preparación específica, se incluyeron temas de geometría.

[5] Jamboard es una pizarra digital que permite colaborar en tiempo real por medio del propio dispositivo, un navegador web o la aplicación móvil. Si se usa Jamboard en un ordenador, se puede utilizar un navegador web para: escribir y dibujar con un ratón o un panel táctil y buscar en Google e insertar imágenes y arrastrar y cambiar el tamaño del texto y de las imágenes. https://support.google.com/jamboard/answer/7424836?hl=es

LA ENSEÑANZA DIFERIDA: A TRAVÉS DE CUADERNILLOS Y WHATSAPP

Los cuadernillos y el WhatsApp, recursos que salvaron del aislamiento

La estrategia de comunicación dominante durante el confinamiento fue el uso (exclusivo) del WhatsApp, implementado sobre todo (pero no únicamente) en escuelas primarias y secundarias de zonas desfavorecidas, tanto urbanas como rurales o indígenas. Aun en las etapas más avanzadas del confinamiento, a través de este medio se hacían llegar a los estudiantes las tareas que habrían de realizar. Lo anterior, aunque un porcentaje importante de estudiantes de zonas desfavorecidas no se conectaba.

Un caso que ilustra dicha situación es el de una secundaria ubicada en una zona urbana desfavorecida. Ahí, la mayoría de los estudiantes contaba con tabletas o teléfonos inteligentes por lo que se intentó trabajar en pantalla. Sin embargo, la condición familiar de los alumnos (en su mayoría de familia monoparental) se tradujo en falta de supervisión en casa, y en que muy pocos entregaran evidencias del trabajo realizado. El subdirector lo contó de la siguiente manera:

> Los grupos son más o menos de 40, y de cada grupo, solo se conectaban unos 17, además, había que enviar *link* para las *sesiones presenciales*, y había personas mal intencionadas que se metían y hacían mal uso de la pantalla por lo que el director decidió suspender este trabajo. Entonces –continúa el profesor– se ha optado por generar documentos, en matemáticas y en español, en el PDF se compilan actividades y las enviamos a los padres vía WhatsApp, y ellos [los alumnos] las van contestando. (Maestro Arturo, secundaria pública, zona marginada, Ciudad de México)

Esta forma de vinculación –con todos sus alcances y limitaciones– permitió a la gran mayoría de los profesores de escuelas públicas continuar el contacto con los estudiantes durante todo el ciclo escolar 2020-2021.

Actividades con tinte lúdico posibles por la participación de una *maestra-sombra*

En una primaria también de zona urbana desfavorecida, solo se tenía el WhatsApp para enviar los cuadernillos o las hojas de trabajo. Sin embargo, un docente de primer grado enviaba actividades que implicaban uso de materiales manipulables y un tinte lúdico en su realización, como los sugeridos para trabajar los agrupamientos recursivos que sustentan el sistema decimal de numeración:

> Elaboré un juego con vasos [le tomé fotografía y la mandé a las mamás por WhatsApp], para que los niños se interesaran, que no fuera solo como viene en el libro. Eran tres vasos: el de unidades, de decenas y de centenas, con fichas de colores, ahí los niños iban poniendo las fichas y haciendo los intercambios cuando era requerido, y estaban aprendiendo sin darse cuenta, jugando. (Maestro Juan, profesor de segundo grado en una escuela desfavorecida)

En casos como este, los maestros no hacían directamente las actividades con los niños ya que el único medio de comunicación con ellos eran los envíos por WhatsApp. Recurrían a las madres de familia para que ellas hicieran materiales y actividades y, mediante fotografía también vía WhatsApp, les mostraran que el niño había realizado la actividad.

Cuando los maestros sugerían este tipo de actividades, la participación de las madres de familia tomaba una relevancia mayor. De hecho, la madre se volvía imprescindible, a un grado tal que su inactividad impedía iniciar y desplegar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Esta cuestión la enfatizó la maestra Elena, que atendía primero de primaria. Pero cuando las madres participaban, jugando el papel que llamaré maestras-sombra realizaron muchas tareas de enseñanza y acompañaron a los niños en su proceso de aprendizaje, de hecho, se corresponsabilizaron de él.

Una acción excepcional: enviar el contenido por WhatsApp para aprender en pantalla

La profesora que ideó y desarrolló esta estrategia trabajaba en una escuela pública con buenas condiciones socioeconómicas y nos explica:

> Preparaba mi clase, la grababa con el celular, si me equivocaba la volvía a grabar y la enviaba por el WhatsApp. Afortunadamente, cuando inició la pandemia, tenía materiales en casa (como cubos y regletas) con los que preparaba las clases que videograbababa. (Maestra Elena, 6° y 1° de primaria durante la pandemia)

La maestra no buscaba la conexión sincrónica, "solo que tuvieran muchas dudas aceptaba llamadas por el celular, si no, nada más mensajitos".

La propuesta de los tutoriales, sin embargo, tuvo límites, principalmente con la geometría, como en una ocasión en la que se intentó explicar la relación *Pi*, y que no resultó por las dificultades de manipulación y medición implicadas.

> Había temas más complejos, por ejemplo el círculo, recuerdo que tuve que explicar de dónde viene **π** (*pi*) ... lo traté de hacer a la distancia... pero no resultó, [...] se supone que el objetivo es que perciban que es 3.14 y me ponían hasta 4 trozos o pedazos de cuerda, o los dejaban separados, o decían ya no me cupo y yo dije ¡"híjole" esto como que no me salió!, ya cuando regresemos se los explico pero ¡pues ya no regresamos! (Maestra Elena)

LAS ESCUELAS INDÍGENAS: LOS PROBLEMAS DE CONEXIÓN Y APOYO A LOS ESTUDIANTES AUMENTAN

En muchas escuelas indígenas había graves problemas de interconexión, pero las dificultades con la enseñanza remota se expresaban de diversas maneras. Un profesor de cuarto grado comentó las dificultades para trabajar con sus alumnos:

> En los primeros meses del confinamiento, las autoridades no nos orientaron, el director no nos dio indicaciones, nos dijo: "A ver qué se les ocurre", y el colectivo docente convino en hacer cuadernillos que se dejaban semanal o quincenalmente en la papelería de la comunidad [...] Yo tenía cuarto año, y les ponía cosas fáciles, como de tercero, para que las pudieran hacer, porque las mamás me decían, sobre todo al principio: "¡Si yo no sé, ¿cómo le voy a ayudar a mi niño?!" (Maestro Nicolás, escuela indígena)

A pesar de la previsión docente respecto de la dificultad, y que las madres de familia ayudaban a sus hijos como podían, hubo problemas de comunicación, por ejemplo confusiones con el sistema de numeración decimal o con las fracciones:

> En la tabla de posiciones (se refiere a un cuadro con columnas y nombres de las posiciones correspondientes al sistema decimal), la habían aprendido por colores; cuando abordo el tema, pongo un cuadro y en ese cuadro los colores no coincidían con los que ellos sabían, y la mayoría tuvo una confusión tremenda, y las mamás: "¿Qué hago?, es que mi niño aprendió con otros colores", "¿qué le digo, cuál color vale?" [...] También hubo problema en las fracciones, no las conocían del todo, y yo tenía la idea de que sí, pero no fue así, y fue muy difícil acompañar a las mamás para que les ayudaran a los niños en este tema.

Los problemas de comunicación y las dificultades para el asesoramiento a los niños y jóvenes por parte de las madres se reiteran en las escuelas indígenas.

Los profesores mencionan una y otra vez, no solo la mala conexión sino incluso la falta de esta, por lo que, lo más común era entregar los cuadernillos y tareas quincenalmente en las escuelas. En estos casos, a veces la relación didáctica se daba únicamente por el intercambio de ida y vuelta de cuadernillos sin que mediase palabra entre maestro y alumnos. A veces también había sesiones presenciales para revisar las tareas y dar las explicaciones más necesarias cada dos semanas. Los docentes llamaban en distintos horarios a grupos pequeños de niños, para protegerlos de los contagios, o trabajaban al aire libre. Los contenidos privilegiados para el trabajo son nuevamente: los números naturales, el sistema de numeración decimal y las operaciones aritméticas.

Una maestra de Chiapas relata:

> Para los primeros grados preparamos actividades que ayuden a que niñas y niños desarrollen [..] el conteo, la lectura y escritura de los números naturales, la resolución de problemas matemáticos con grado de dificultad de acuerdo a su desarrollo. En mi caso, actualmente trabajo con los alumnos de segundo grado. Estos alumnos no culminaron primero, y no todos aprendieron a leer y escribir, entonces continué con el método que estaba utilizando de manera presencial, adaptando las actividades para que a madres y padres se les facilite entender y así poder ayudar a sus hijos. (Relato de la maestra Fermina Ramírez Rosalez, citada en Salinas *et al.*, 2021, p. 100)

Y no obstante la preocupación docente por trabajar los números en el primer grado, las dificultades de aprendizaje fueron muchas. Una profesora de Morelos cuenta hacia el final del ciclo escolar:

> Los contenidos parten de la base de que todos los alumnos, sin excepción, ya supieran leer y escribir de manera convencional. Pero la realidad no es esta. Especialmente los alumnos de primer grado aún no identifican todas las letras del abecedario; con relación a los números, pocos son quienes ya identifican los números del 1 al 50. (Maestra Lourdes Ortiz, citada en Salinas *et al.*, 2021, p. 35)

En las secundarias no escapaban de estas dificultades. Marín-Che y Pinto-Sosa (2020) recuperan las experiencias de profesores de telesecundaria en el sureste del país, donde se vivían las dificultades ya descritas:

> Algunas mamás nos decían: "No puedo hacer esa tarea", sobre todo en matemáticas, que es la materia que es el "coco" de los alumnos. Por lo consiguiente, tomamos la

> decisión de visitarlos en sus casas para darles asesorías o explicarles brevemente [...]. (Maestro Raúl, tercer grado, citado en Marin-Che y Pinto-Sosa, 2020, p. 233)

Testimonios como estos se repiten por parte de los profesores de escuelas indígenas. Se ve en ellos la falta de conectividad, de encuentros más frecuentes entre maestros y alumnos, así como la escasez de resultados a pesar de los esfuerzos.

LA RELACIÓN CON LOS CONTENIDOS: INTERACCIÓN Y RETROALIMENTACIÓN (LIMITADAS) AL APRENDER MATEMÁTICAS

La interacción y retroalimentación en el aprendizaje fue un punto especialmente débil en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas durante el confinamiento. Lo más común era que los profesores se conformaran con presentar los conceptos, definiciones y procedimientos y esperar que los alumnos los ejercitaran para lograr destreza y memorización. Con el tipo de enseñanza a la que empujó la distancia, la interacción entre los compañeros, el intercambio de respuestas y soluciones, o las argumentaciones no se hacían posibles. Ni siquiera el diálogo con el profesor era fácil.

La falta de retroalimentación se expresa de distintas maneras. Algunos padres afirman que a sus hijos "no les revisaban, no les decían si estaba bien o mal, solo contaban que lo hubieran mandado". Padres y madres de familia lamentan que esto haya ocurrido. Pero son los alumnos quienes parecen haberlo resentido más, ya sea por la lentitud del proceso, por su falta de oportunidad, porque nunca se les retroalimentó, o de plano porque esta situación dificultó explícitamente los aprendizajes. Hay voces que expresan todo esto.

> Yo creo que aprendía más en el salón, porque le llevas tu trabajo a tu maestro e instantáneamente te puede decir qué tienes que volver a hacer y ahora tienes que esperar a que te conteste el mensaje, que te mande los errores... y volver a hacerlo si es con lápiz, y si no es con lápiz, hacerlo todo, y tomar de nuevo la foto, y volver a mandarla... y si no queda bien, te tienen que volver a contestar, ¡es un ciclo muchísimo más largo! (se ríe) (Valeria, alumna de 6° grado, con clases en pantalla)
>
> ...
>
> No había mucha retroalimentación, más bien nos evaluaron con la participación y la entrega de tareas. La maestra nos decía que le mandáramos mensajes, pero los enviábamos de maneras diferentes (por Classroom, por WhatsApp, o por chat) y

> muchas veces ni se enteraba de que se los habíamos mandado. (Miguel, alumno de segundo de secundaria también con clases en pantalla)
>
> ...
>
> A veces sucede que le decías: "¡No entiendo cómo se resuelve esto!", pero el maestro en realidad no explicaba, solo decía: "Esto es lo que van a hacer", y presentaba el ejercicio, la ecuación, y decía que la había mandado por Classroom, pero si le decías que no habías entendido, te decía: "Lee en el PDF, ya lo mandé". (Santiago, 1° de secundaria privada)

Estas opiniones denotan limitaciones (a veces enormes) en la retroalimentación que se dio (o que no se dio) en la distancia. También la molestia generada porque, a pesar de múltiples peticiones, el docente no respondía. En este contexto toma valor explicativo el comentario de Jair, el chico que citamos en el epígrafe, cuando nos dijo: "Sientes como que estuvieras viendo otro video de YouTube y ya, sientes como que no hay una conexión. Por más mal que te caiga el maestro la necesitas".

Una profesora de secundaria, que ve el problema "desde el otro lado" describe razones técnicas impuestas por la distancia que dificultaban la retroalimentación:

> Sí fue más trabajo, era más complicado, [especialmente la retroalimentación] sobre todo estar abriendo imagen por imagen y editar... es mucho más trabajo que lo que hacemos en clase. Ahí vas cuaderno por cuaderno y ya. Y aquí, aparte de abrir la imagen, era editar la imagen, aumentar el tamaño de la imagen también, empezar a revisar con base en eso y luego cargar la imagen para volvérselas a mandar a ellos, y luego que me vuelvan a mandar su corrección... (Maestra Fernanda. Secundaria)

Ciertamente se percibe en las palabras de la docente lo difícil que fue señalar a los alumnos sus avances y tropiezos al tratar de aprender. Algunos lo hicieron a pesar de la dificultad. Pero esos fueron pocos. La mayoría, como señaló un padre de familia, "nunca calificó" o solo registró la recepción de las tareas.

¿CON QUÉ CONTENIDOS SE RELACIONARON LOS ALUMNOS DURANTE EL CONFINAMIENTO?

Otro de los efectos de la distancia se dejó sentir en la cantidad y tipo de contenidos trabajados, así como en su nivel de dificultad. En secundaria, los contenidos estuvieron centrados en el eje titulado *Número, Álgebra y Variación* y que los maestros refieren simplemente como álgebra. Según los propios alumnos, y según las narraciones de los docentes, la centralidad la tuvieron algunos conceptos y procedimientos propios de este eje curricular: las ecuaciones de primer y segundo grado, los números negativos y la proporcionalidad directa entre los principales.

En la primaria, la enseñanza se orientó a la aritmética. El conteo, los números naturales, el sistema decimal, las operaciones y las tablas de multiplicar fueron temas recurrentes. En los últimos grados también se trató de que los niños aprendieran algo sobre las fracciones.

LOS (ESCASOS) LOGROS DE APRENDIZAJE EN MATEMÁTICAS

La relación didáctica se establece con el fin de que los alumnos adquieran o construyan el conocimiento escolar que ha motivado la relación. La percepción de los estudiantes respecto de la enseñanza y el aprendizaje no siempre fue positiva ni refleja grandes logros.

> De matemáticas aprendí poquito porque nos ponían puras cosas fáciles, o que ya conocías (proporciones, áreas y perímetros, de álgebra ecuaciones fáciles). Pero, mi mamá tuvo que ayudarme en los temas de álgebra, porque a pesar de lo fácil, a veces no sabía. (Miguel, segundo de secundaria, con clases en pantalla)

Los profesores, por su parte, reconocen la simplificación de los conocimientos que trataron de comunicar a sus alumnos.

> Como subdirector académico les pedía a los maestros que fuéramos muy claros, que fuera muy fácil [lo que enviábamos], y por ejemplo en álgebra, colocábamos información [en la hoja de trabajo que enviábamos] para que ellos vieran cuál es el proceso. (Maestro Arturo, secundaria en zona desfavorecida)
>
> ...
>
> [...] Tratando de no afectar tanto el bolsillo de ellos, recurrí a actividades un poco más simples [que pudieran presentarse en pocas hojas] pero que cumplieran el objetivo señalado en los *aprendizajes esperados*. (Maestro Nicolás, primaria indígena)

Estas opiniones y muchas otras similares, permiten pensar que tenía razón la madre de un chico de secundaria, que en una conversación incidental dijo: "¡Les ponen actividades francamente de puro trámite!"

CONCLUSIONES

La pandemia sorprendió a México sin preparación suficiente para trabajar a distancia. La infraestructura escolar, la capacitación de los docentes y las condiciones para estudiar fuera de la escuela entraron en crisis. Durante los casi 250 días de confinamiento, en la mayoría de las escuelas se vivió al límite.

El contexto socioeconómico y cultural de los estudiantes acrecentó su impacto sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Este contexto, hasta hoy poco considerado en los estudios didácticos, tomó una relevancia que, desafortunadamente contribuyó a ampliar la brecha educativa. Los más favorecidos –en general asistentes a escuelas privadas– contaron con enseñanza sincrónica, un espacio adecuado para el estudio, exposiciones por parte de los profesores, acompañamiento de la madre o algún otro familiar y una retroalimentación mínimamente aceptable para el aprendizaje. En cambio, los más desfavorecidos tuvieron que conformarse con una enseñanza asincrónica basada en envíos por WhatsApp. Pero en muchas comunidades indígenas ni siquiera se pudo utilizar esta aplicación, condiciones extremas de aislamiento obligaron al uso exclusivo de cuadernillos en papel (distribuidos cada quince días) y a sesiones presenciales de asesoramiento y revisión, también cada dos semanas.

Las relaciones didácticas establecidas en torno a los contenidos matemáticos resintieron el fuerte efecto de la distancia. Las estrategias de enseñanza, cualquiera que fuese el medio de conexión, muestran la prevalencia de una relación en la que dominó la ostensión. El maestro ponía ante los estudiantes las definiciones, fórmulas y procedimientos usando ejemplos y explicaciones. La enseñanza constructiva propuesta por la Secretaría de Educación quedó prácticamente en el olvido.

El docente tuvo siempre el control de los contenidos matemáticos. Sin embargo, las actividades que seguían a su introducción ostensiva se hacían en casa y ese control se desvanecía. En tal contexto, los niños de primaria trabajaban apoyados por una maestra-sombra, quien jugó un papel fundamental en la relación con los contenidos que esos niños establecieron. Entre más pequeños eran, más relevante se tornaba el papel de la maestra-sombra.

Cuando la enseñanza era sincrónica, la maestra-sombra preparaba el escenario para el proceso (insertando claves y códigos, organizando un espacio para el estudio, asegurándose de que los materiales estuvieran disponibles). Una vez hecho lo anterior, vigilaba que se pusiese atención a la pantalla, ayudaba a aprender lo no aprendido, cuidaba que se realizaran los ejercicios previstos y que se enviaran al profesor las evidencias de aprendizaje. Cuando la enseñanza era asincrónica, había de recoger o imprimir cuadernillos, cuidar que se hiciese la tarea, que esta estuviese bien hecha o, de no ser así, ayudar a corregirla. También tenía que regresar el cuadernillo ya resuelto, o tomar y enviar fotos como evidencias del trabajo al profesor.

Desafortunadamente hubo maestras-sombra poco preparadas, cuyo apoyo a los niños, en cuanto a la comprensión de las tareas era muy precaria. Así ocurrió en muchas escuelas indígenas, donde algunas madres no habían cursado ni la primaria completa y solían decir a los maestros: "¡¿Cómo le voy a ayudar a mi niño, si yo no sé?!"

Un segundo "agente" que compartió el espacio con el profesor, fueron los videos tutoriales, casi siempre con un profesor simulado mediante animación en la pantalla. Y también organizados para trasmitir procedimientos y definiciones, parecido a como hacía el docente frente a la pantalla. Estos videos tuvieron uso intenso en secundaria.

Los alumnos, bajo esta forma de enseñanza, vieron empobrecida su relación con el contenido matemático, con sus compañeros e incluso con el profesor. Las más de las veces tuvieron que conformarse con jugar el papel de receptores de los contenidos que el profesor les presentaba. Fue casi igual en la enseñanza sincrónica que en la asincrónica. Y es que la retroalimentación proporcionada durante el proceso constituyó un punto muy débil en las relaciones didácticas establecidas. En general la retroalimentación fue superficial, siempre diferida, no siempre oportuna, o simplemente no existió.

Durante la pandemia, se observó centralidad en la aritmética y el álgebra. Los docentes exponen dificultades técnicas para argumentar la ausencia de la geometría. Y, efectivamente, la enseñanza de esta rama de la matemática enfrenta dificultades de ese tipo que hacen necesarias ciertas aplicaciones y softwares. Pero su escasa presencia en realidad refleja la falta de preparación de los maestros para manejar recursos tecnológicos y enseñarla a distancia.

El nivel de dificultad de los contenidos programáticos también se vio afectado. Los cuadernillos y el WhatsApp fueron generalmente preparados con temas fáciles, correspondientes a grados escolares previos al que se cursaba. Aunque en las pantallas el problema fue menos agudo, el uso de este medio no escapó de tal afectación.

En mi opinión, tres criterios determinaron los contenidos matemáticos trabajados durante el confinamiento: a) los contenidos que los profesores consideran importantes para la formación de los alumnos; b) el tipo de contenidos que se pueden exponer y gestionar a la distancia y c) los contenidos que resulten fáciles de aprender, para que los alumnos puedan prescindir del profesor.

Pero la distancia mostró sus efectos en dos sentidos más profundos:

1) al constreñir muchos elementos favorables al aprendizaje que formaban parte de la enseñanza presencial: la incorporación de problemas matemáticos, la interacción entre alumnos, las explicaciones dialogadas con los profesores, una retroalimentación más oportuna y precisa;
2) al amplificar otros elementos menos favorables al aprendizaje: la trasmisión directa de los contenidos (la ostensión), la disminución y empobrecimiento de estos, la memorización de lo aprendido y el trabajo exclusivamente individual.

La mirada de los estudiantes sobre lo ocurrido va mucho más allá de la queja por la escasa retroalimentación recibida o los pocos aprendizajes matemáticos logrados y arroja luz sobre cómo se vivió el período. Ellos hacen una diferencia entre la presencialidad y la vía remota en diversos sentidos: la falta de interacción con sus compañeros, la falta de explicaciones más amplias e interactivas por parte del profesor y la ausencia de una retroalimentación oportuna. Los chicos de secundaria también hablan de haber estudiado cosas demasiado simples y, por ello, haber aprendido poco.

Ahora bien, recuperando los objetivos y las preguntas principales que guiaron este trabajo, es posible afirmar que en México la distancia dejó sentir fuertes efectos (en general no benéficos) en la matemática escolar a la que se guió a los estudiantes durante la pandemia. Esta matemática fue limitada, tanto en términos de contenidos, como en términos del significado y la dificultad de las tareas propuestas. También se vio afectada la forma en que se vinculó a los estudiantes con la materia: básicamente a través de un modelo de comunicación directa, claramente ostensivo, aunque a veces apoyado en materiales manipulables y acompañado de actividades lúdicas que hacían agradables las tareas pero que no tocaban su sentido profundo. Las consecuencias de esta condición, vivida por un largo tiempo, se constatan hoy de distintas maneras. Puede afirmarse que hubo aprendizajes valiosos por parte de algunos docentes, y seguramente los chicos de secundaria avanzaron en su manejo de algunas herramientas tecnológicas. Empero, el deterioro de la relación con las matemáticas escolares se refleja en las pérdidas de aprendizaje que en el regreso a clases han identificado con preocupación los profesores.

REFLEXIONES ADICIONALES

A lo largo del escrito, puede entenderse que haber tenido la oportunidad de estudiar en pantalla traería muchas ventajas en el aprendizaje. Las condiciones que rodearon este tipo de conexión sin duda implicaron beneficios. No obstante, cabe preguntarse: ¿la enseñanza ostensiva que en general sustentó el acercamiento a las matemáticas trajo aprendizajes de calidad?, o, ¿qué tipo de aprendizajes conseguirían niños y jóvenes mediante las presentaciones ostensivas de sus profesores?, ¿realizar ejercicios aplicando el modelo o los modelos recién comunicados agregaría algo al aprendizaje adquirido frente a la pantalla?

Cualquiera que sea la respuesta a estas preguntas, hay otra que es válido plantear: ¿qué hará la Secretaría de Educación para enfrentar las consecuencias de la pandemia? Las posibilidades de acción son muchas. En Kenia, por ejemplo –según un artículo aparecido en la revista *Estado Abierto* (Katz, 2020, 25)– se tomó una postura radical pero probablemente sabia: todos los estudiantes estarán obligados a repetir el año escolar, hayan o no participado en el aprendizaje en línea.

México es tierra de contrastes, de desigualdades puestas en relieve con la enseñanza remota, pero no es tierra de decisiones radicales en educación. No habrá ninguna política ni remotamente parecida a la que definieron los kenianos. Sin embargo, quienes vemos lo educativo desde la investigación, podemos preguntarnos:

- ¿Acaso no sería deseable que la escuela considere que, en un futuro cercano, los medios serán herramientas esenciales en la relación didáctica y que la distancia no debería ser factor de empobrecimiento de las matemáticas que los alumnos puedan aprender?
- ¿No sería obligado que los profesores fueran preparados para gestionar una educación remota de calidad, que permitiera ir más allá de sobrevivir a la crisis provocada por la distancia?

Porque el encierro llevó a los alumnos hacia una matemática hiper-seleccionada y simplificada. El empobrecimiento es evidente y tal vez brutal. Muy probablemente, otra formación docente hubiese conducido a "otras matemáticas" a los niños y jóvenes que hoy ya resienten las limitaciones de la matemática a la que fueron guiados durante el confinamiento. Pero ya que esta preparación no se dio y las consecuencias están aquí, la Secretaría de Educación podría convertir en retos los argumentos que los trabajos de investigación le ofrecen para que los alumnos se acerquen un poco más a las "matemáticas deseables", de las cuales se alejaron demasiado debido al encierro por el COVID.

REFERENCIAS

Alloatti, M. N. (2014, 27-29 de agosto). *Una discusión sobre la técnica de bola de nieve a partir de la experiencia de investigación en migraciones internacionales* [ponencia]. IV Encuentro Latinoamericano de Metodología de las Ciencias Sociales. Memoria Académica. Costa Rica. http://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.8286/ev.8286.pdf

Ávila, A. (2022). *Pandemia y desigualdad educativa en México. De plataformas y pantallas a cuadernillos y WhatsApp* (reporte de investigación no publicado). Universidad Pedagógica Nacional

Ávila, A. (2006). *Transformaciones y costumbres en la matemática escolar*. Paidós.

Borba, M. (2021). El futuro de la educación matemática a partir del Covid 19: Humanos con medios o humanos con cosas no vivientes. *Revista de Educación Matemática. 36*(3), 5-27.

Carreón, D. (25 de febrero de 2021). ECUACIONES LINEALES Súper fácil para principiantes [Archivo de vídeo]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=8rT0DZbYGEs

Chevallard. Y (1991*). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina. Aique.

Díaz Ortíz, L. (2021). Experiencia docente en una escuela CONAFE del estado de Morelos. En *Relatos docentes de educación indígena en tiempos de COVID-19* (pp. 31-40). Universidad Pedagógica Nacional.

Engelbrecht, J., Llinares, S., y Borba, M. C. (2020). Transformation of the mathematics classroom with the Internet. *ZDM. Mathematics Education. 52*, 825-841. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01176-4.

Engelbrecht, J., Borba, M., Llinares, S. y Kaiser, G. (2020). Will 2020 be remembered as the year in which education was changed. *ZDM. Mathematics Education. 52*, 821-824. https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-020-01185-3

FPEI-UPN, Salinas, G., Czarny, G., y Navia, C. (Coords.). (24 de febrero de 2021). Docentes indígenas frente a la pandemia por COVID. 18 ª Sesión del Seminario Docencia Universitaria y Formación de profesionales indígenas. Retos para una descolonización académica [Archivo de vídeo]. https://www.youtube.com/watch?v=8H5d1btzM8I

Goodman, L. A. (1961). Snowball Sampling. *The Annals of Mathematical Statistics. 32*(1), 148-170. http://www.jstor.org/stable/2237615

Instituto Nacional de Estadística y Geografía. (23 de junio de 2021). *Encuesta para la medición del impacto covid-19 en la educación* (ECOVID-ED) 2020. Nota técnica. http//:www.Inegi.gob.mx/investigacion/ecovided/2020

Instituto Nacional de Estadística y Geografía. (2020). *Encuesta nacional sobre disponibilidad y uso de tecnologías de la información en los hogares*, 2020. https://www.inegi.org.mx/programas/dutih/2020/

Katz, R. L. (2020). Impacto económico del COVID-19 sobre la infraestructura digital. *Estado abierto. Revista sobre el Estado, la administración y las política públicas. 4*(3), 13-42. https://www.argentina.gob.ar/inap/investigaciones/estadoabierto

Marín Che, A. J. y Pinto Sosa, J. E. (2021). Escuelas cerradas, aulas abiertas: estrategias de enseñanza remota en una comunidad rural de Yucatán. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos. LI*(Especial), 215-250. https://doi.org/10.48102/rlee.2021.51.ESPECIAL.463

Martínez-Salgado, C. (2012). El muestreo en investigación cualitativa: principios básicos y algunas controversias. *Ciência & saúde colectiva 17*(3), 613-619. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=63023334008

OECD. (2021). *Education at a Glance México—Nota País*. OECD. https://www.oecd.org/centrodemexico/medios/EAG2021_CN_MEX_ES

Ratsima-Rajohn, H. (1977). *Étude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques.* Memoria del Diplomado de Estudios a Profundidad en Didáctica de Matemáticas. Francia. Université de Bourdeaux I.

Ramírez -Rosalez, F. (2021). Mi experiencia como docente en tiempos de pandemia COVID 19. En G. V. Salinas S., G. V. Czarny K. y C. S. Navia A. (Coords.) 2021. *Relatos docentes de educación indígena en tiempos de COVID-19* (pp. 97-105). Universidad Pedagógica Nacional.

Salinas, G. Czarny, G. y Navia C. (Coords.) 2021. *Relatos docentes de educación indígena en tiempos de COVID-19*. Universidad Pedagógica Nacional. https://doi.org/10.47380/UPNMX.LIBGVSS000098

Secretaría de Educación Pública (2011a*). Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Primaria. Sexto grado*.

Secretaría de Educación Pública. (2011b). Plan de estudios 2011. Educación Básica. México.

Correspondencia

Dirección: Universidad Pedagógica Nacional. Unidad Ajusco
Área Académica Diversidad e Interculturalidad.
Carretera al Ajusco Núm. 24
Alcaldía Tlalpan, C.P. 14200. Ciudad de México

ARTÍCULO DE INVITADO https://doi.org/10.24844/EM3501.02

Similitudes y diferencias entre la educación de la mirada en geometría elemental y en arte figurativo

Similarities and differences between gaze education in elementary geometry and figurative art

Bruno D'Amore,[1] Raymond Duval[2]

Resumen: Un acto espontaneo y aparentemente inmediato y simple, como la mirada, que se usa para observar las figuras en geometría o las pinturas en el arte figurativo, revela por el contrario una complejidad notable no esperada en el aprendizaje de la geometría. En este estudio se sugieren modalidades didácticas para ayudar a educar esta mirada. Se proponen analogías entre el "ver" figuras geométricas y el "ver" obras del arte figurativo. Se analiza el fenómeno del reconocimiento de las figuras así llamadas imposibles y se proponen algunos ejemplos de obras de arte para la interpretación de las cuales no es suficiente la mirada, sino que es necesario un análisis de tipo semiótico.

Palabras clave: *geometría elemental, didáctica de la geometría, mirada, ver en geometría – ver en el arte figurativo.*

Abstract. An apparently immediate and simple spontaneous act, as the sight, that we use to look at figures in geometry and at pictures in figurative art, reveals on

[1] Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. NRD, Departamento de Matematica, Università di Bologna, Italia, bruno.damore@unibo.it, orcid.org.0000-0002-5834-9438.

[2] Université du Littoral Côte d'Opale, Francia, duval.ray@wanadoo.fr

Nota. Este artículo ha sido publicado en italiano [D'Amore, B., y Duval, R, (2019)].

the contrary unexpected complexities with remarkable consequences on the learning of geometry. In this study we suggest didactical ways to educate it. We suggest several analogies between "seeing" geometrical figures and "seeing" in figurative art. We analyse the recognition of the so-called impossible figures and we provide some examples of works of art for whose interpretation sight is not enough, but it requires a semiotic analysis (suggested by the author).

Keywords: *elementary geometry, geometry education, sight, to see in geometry – to see in figurative art.*

1. PRÓLOGO

Este artículo aborda diversas cuestiones relacionadas con la mirada que se activa en los bocetos o dibujos que representan figuras del mundo de la geometría o de las obras de arte. Se trata tanto de comprender su funcionamiento como de estudiar su necesidad desde un punto de vista didáctico.

Duval (2018) afirma que ante una figura geométrica "construida" con instrumentos, y no dibujada a mano alzada, o ante una obra pictórica, "ver" y "reconocer" es lo mismo, pues son los mismos procesos cognitivos de reconocimiento visual los que controlan la mirada. Así, ante una figura geométrica, no basta con saber qué propiedad tiene, o tener conocimiento de lo que representa, para "verla" y poderla utilizar. Primero se requiere reconocer visualmente todas las configuraciones posibles que la figura ofrece a la mirada ya que, en matemática, reconocer implica que se pueda convertir espontáneamente una representación de un registro en otro.

Ante una figura geométrica o un cuadro, los procesos de reconocimiento que controlan la mirada son cognitivamente complejos. Estos procesos no son los de la percepción de los objetos de nuestro entorno, ni los relacionados con la coordinación de los registros. Pero requieren el despliegue de transformaciones semióticas específicas de los registros de representaciones bidimensionales. El análisis comparativo necesario en geometría para "ver" las formas de una figura y las habilidades que se requieren para ver una pintura han permitido distinguir operaciones cognitivas comunes que se basan en las formas percibidas, es decir, en las unidades figurales que surgen de la estructura geométrica de la figura o de la composición de la pintura. Las transformaciones puramente figurales son como metamorfosis del reconocimiento a las cuales las unidades figurales pueden dar lugar en la mirada, sin necesidad de distinguir lo que se vea en el papel, en el lienzo o en la pantalla.

Para permitir que los alumnos entren en el mundo de la geometría (todos, sin ninguna excepción), deben empezar por la educación de la mirada, antes de cualquier adquisición de conocimientos, antes de cualquier exigencia de razonamiento o, de cualquier uso de instrumentos de medida y de fórmulas para calcular. Sin esto, seguirá existiendo una incomunicación insuperable entre alumnos y profesores. Porque, ante una figura, los alumnos no ven en absoluto lo mismo que ven los profesores o los matemáticos.

En la primera parte del texto se esboza el esquema programático de una enseñanza de la geometría elemental, en el cual, es la educación de la mirada es la que introduce al mundo de la geometría.

La segunda parte del texto profundiza más decididamente en el mundo del arte. En Duval (2018), se destacó el problema del reconocimiento de la imposibilidad en la observación de una figura o de una obra de arte.

Aquí nos preguntamos: ¿Qué caracteriza esa imposibilidad?, ¿Cómo se percibe con la mirada? A través de ejemplos apropiados, se intenta responder a estas preguntas.

A continuación, se evidencia cómo el análisis semiótico es necesario en la interpretación de ciertas obras de arte, tomadas como modelo; y cómo la mera mirada o la simple observación, sin indicaciones semióticas interpretativas precisas dadas por el autor, permiten captar solo la imagen, pero no el significado. Esto se trata de una debilidad de la sola mirada que, sin dejar de ser la protagonista de este estudio, debe ir acompañada del conocimiento, al menos en ciertas ocasiones, como las que se toman como ejemplo.

En el texto ponemos en evidencias similitudes y diferencias entre la educación de la mirada en geometría elemental y en arte figurativo y contestamos a las siguientes preguntas: ¿Qué variables cognitivas y didácticas intervienen en estas miradas? ¿Cómo se representa la imposibilidad en el arte? ¿Qué elementos semióticos pueden intervenir en el arte?

2. EL CONFLICTO COGNITIVO RELATIVO A LA GEOMETRÍA ELEMENTAL EN LA ESCUELA PRIMARIA Y SECUNDARIA

Desde un punto de vista matemático, la especificidad de la geometría elemental no es la de introducir figuras que vemos y podemos construir, sino utilizar términos definidos para saber qué representan y poder recurrir a ellos para nombrar y describir. En otras palabras, en la geometría elemental no se tendrían que ver las figuras a simple vista, al contrario, hay que usar lentes especiales para mirarlas. Estos lentes son las hipótesis dadas junto a la figura, a veces sin ella, que enuncian sus propiedades. En este sentido, la forma en que tenemos que mirar las figuras en la geometría elemental está en las antípodas respecto de la forma en que miramos un cuadro en un museo. Un cuadro a menudo no necesita palabras: lo que ofrece para ser visto es autosuficiente y habla su propio lenguaje específico a los ojos. En realidad, no siempre es así, como mostraremos más adelante.

La enseñanza de la geometría elemental en la escuela primaria y en los primeros años de la secundaria se enfrenta a esta inversión de la relación cognitiva entre el ver y el decir, donde las palabras ya no designan lo que se ve. Las columnas (A) y (B) del cuadro siguiente representan este conflicto cognitivo inherente a la actividad geométrica. Y las tres flechas entre estas dos columnas representan el dilema pedagógico que implica este conflicto cognitivo para la organización de las actividades de aprendizaje. Se parte de lo que interesa en matemática, y que solo se puede entender y no ver: pero entonces todo se vuelve ininteligible, como fue el caso de la enseñanza de la geometría en el período de la llamada "matemática moderna" en los años 70-80; o bien, se parte de figuras que se pueden ver, construir, medir y clasificar, por ejemplo los polígonos regulares, pero entonces se abre una brecha entre una geometría empírica concreta y una geometría en la cual se resuelven problemas mediante micro demostraciones.

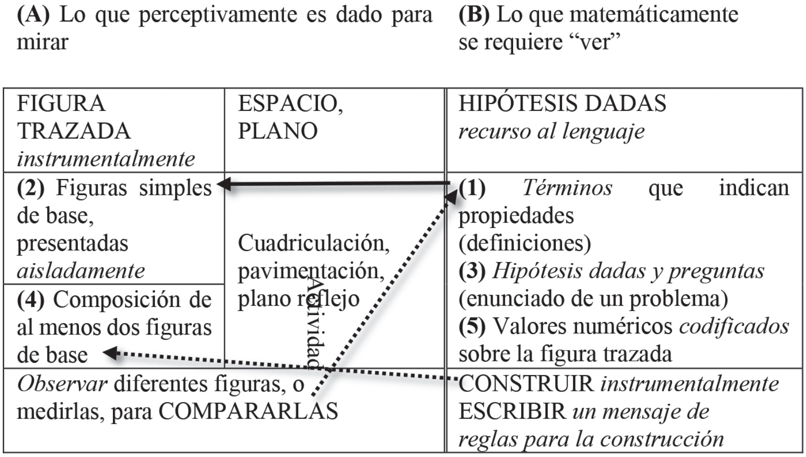


Figura 1. Esquema del problema didáctico de la enseñanza de la geometría.

Tanto si se adopta el enfoque experimental e inductivo, como si se adopta el directamente vinculado con el descubrimiento de propiedades a partir de las restricciones que toda construcción de figuras requiere, la enseñanza de la geometría en primaria y en los primeros años de secundaria resulta conducir a un callejón sin salida. Los estudiantes, en su gran mayoría:

(1) Permanecen con la percepción de figuras trazadas y un conocimiento "botánico" (Duval, 2008, p. 55) de las figuras geométricas básicas: triángulo, paralelogramo, cuadrado, círculo...
(2) No pueden salir del contorno cerrado de la figura, ni siquiera para prolongar uno de sus lados.
(3) No pueden, en el proceso de resolución de un problema, añadir nuevas líneas en la figura para resaltar otras figuras básicas, es decir descomponerla y reconfigurarla.
(4) No adquieren o confunden los términos necesarios para el uso de hipótesis y la comprensión de enunciados, como se pone de manifiesto en el desfase, a menudo considerable, entre las producciones de los alumnos en las tareas de construcción de figuras y en las de escritura o explicación verbal de las instrucciones para que se construyan las figuras. (Asenova, 2018)
(5) No pueden utilizar las figuras sino tomando medidas en el dibujo o utilizando valores numéricos dados, pero no siempre reconocen las fórmulas de cálculo que deberían utilizar, excepto las del perímetro y el área de los cuadriláteros.

Estos cinco obstáculos persisten a lo largo de todo el camino hasta la escuela secundaria.

> *El bloqueo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la escuela primaria y en los primeros años de secundaria proviene de ignorar o descuidar el conflicto cognitivo entre el "decir" y el "ver" el cual es inherente a la geometría elemental.*

Dos preguntas son esenciales para aclarar los procesos cognitivos de comprensión específicos de la geometría elemental:

- ¿En qué consiste este acto cognitivo, y no matemático, que llamamos "ver"?;
- ¿Cómo puede una figura dibujada visualizar propiedades geométricas que no pueden percibirse visualmente en una figura?

3. ANÁLISIS DEL PROCESO DE RECONOCIMIENTO VISUAL COMO PRERREQUISITO PARA "COMPRENDER" EN GEOMETRÍA ELEMENTAL

Desde un punto de vista cognitivo, *"ver" es reconocer una forma de un vistazo* gracias a su contorno cerrado o por el color que la resalta, como "figura", desde un fondo en relación con otras formas. Este reconocimiento visual se funde con el reconocimiento cognitivo del objeto cuyo perfil es su contorno característico. Pero ambos son independientes el uno del otro. Por lo tanto, al mirar un cuadro en un museo, el reconocimiento cognitivo de lo que está pintado allí es a menudo inútil: puede incluso ser un obstáculo para la "escucha visual" del cuadro.

Ver es, en general, un proceso automático que no implica los aparatos cognitivos, un acto puramente sensorial; pero, en geometría, este proceso adquiere un papel determinante en el aprendizaje o en la acción escolar: no solo hay que "ver", sino "saber ver" gracias a un entrenamiento cognitivo adecuado, lo cual significa distinguir, reconocer, establecer, relacionar, ...; mientras que en el mundo del arte figurativo "ver" puede coincidir con reconocer ciertas expresiones, pero sobre todo interpretar, a partir de conocimientos específicos, otros modos artísticos (arte abstracto, informal, surrealismo, arte analítico, arte cinético...).

Las columnas I, II y III del diagrama siguiente (figura 2) representan el proceso cognitivo del acto de reconocimiento visual de los contornos cerrados en 2D, a simple vista, independientemente de cualquier hipótesis, es decir, antes de cualquier reconocimiento cognitivo de los objetos que representan.

La columna I recuerda el análisis gestáltico del proceso cognitivo del reconocimiento visual.

La columna II introduce la noción central para analizar este proceso, la de "unidad figural". Una unidad figural se caracteriza por su número de dimensiones *n*D, y por el número de dimensiones de su soporte material, 2D o 3D, lo que permite distinguir las figuras y los patrones. Son las unidades figurales que se ven y se reconocen a simple vista.

Por último, la columna III muestra un salto entre las unidades figurales *n*D inmediatamente reconocidas y *todas las posibles unidades figurales nD* que se pueden reconocer visualmente.

Para la geometría plana y para la pintura, todas las unidades figurales son obviamente unidades 2D/2D. Este proceso cognitivo de reconocimiento visual es el mismo tanto si se mira una figura geométrica como si se mira un cuadro. *El poder heurístico de las figuras y la creación de las pinturas residen en la actividad de la mirada que las explora o contempla, y no en el ensamblaje de contornos cerrados o de superficies que conforman la figura trazada o la pintura.*

PRIMERA MIRADA sobre lo que se da para ver →		LA MIRADA	DENOMINAR PARA DEDUCIR
I. FORMA TRAZADA Y PERCIBIDA Un contorno cerrado *que se destaca de un fondo* (neutro o cuadriculado) o de un conjunto de otras formas	II. UNIDAD FIGURAL *n*D/(2D o 3D) *n*D: *número de dimensiones de la unidad figural* (2D): *dimensión del soporte* pantalla o papel, y (3D): modelos (maquetas)	III. TODAS LAS UNIDADES FIGURALES *n*D POSIBLES (1) *Muchas más unidades figurales posibles* que las unidades figurales reconocidas en una primera mirada (2) Posibilidad de mirar por *yuxtaposición* o *sobreposición*	IV LENGUAJE MATEMÁTICO (3) *Términos* (definiciones) (4) *Hipótesis dadas* *Razonamiento* (no deductivo ni de cálculo)
		(1) Y (2) **DESCOMPOSICIÓN** *de las formas percibidas 2D* reconfiguraciones (3) **DESCONSTRUCCIÓN DIMENSIONAL** *de todas las unidades figurales posibles* 3D 2D 2D 1D	SUSTITUCIÓN de enunciados de uno a otro *en función de teoremas* y no de asociación de palabras, de ideas o de imágenes

Figura 2. Esquema del proceso cognitivo de comprensión en geometría elemental.

La comparación de los dos esquemas muestra las diferencias entre el punto de vista matemático y el cognitivo para analizar la adquisición de conocimientos en geometría.

La columna A del diagrama didáctico (figura 1) se sustituye aquí por las columnas I y II, que hacen hincapié en el salto cognitivo que deben dar los alumnos para entrar en la *modalidad matemática de mirar una figura, independientemente de las hipótesis dadas*. La columna IV se basa en la columna B del diagrama anterior, salvo por una diferencia: ya no se trata de decir o de nombrar para "ver" lo que la figura representa, sino de nombrar para deducir nuevas propiedades a partir de hipótesis. Pero lo importante es la relación, en cada uno de los dos esquemas, entre la última columna, la del lenguaje matemático, que no cambia pasando de un esquema a otro, y las columnas correspondientes a la forma en que se ven las figuras. Esta relación está marcada por las flechas.

El esquema de la problemática didáctica (figura 1) enfatiza al mismo tiempo la reducción del "ver" como su subordinación al lenguaje y a las magnitudes, sin las cuales no es posible acceder a las propiedades y a los objetos matemáticos (flecha con línea continua de B a A). Pero las figuras, a pesar de todas las actividades de construcción, no ayudan a entenderlas (flecha punteada de B a A); estas figuras subsisten como una figura-tipo asociada a una palabra matemática (flecha punteada de A a B).

En el esquema del proceso cognitivo (figura 2) no hay conflicto cognitivo entre el ver y el decir. En primer lugar, el descubrimiento de la forma matemática de ver se produce independientemente del lenguaje y de cualquier hipótesis. Las actividades deben basarse principalmente en el reconocimiento visual de las diferentes unidades 2D que forman una configuración (flecha horizontal con trazo continuo). Esto porque cada figura, incluso las denominadas "simples" o "de base", son configuraciones de unidades figurales *n*D. Ya no se trata de construir figuras, sino de descomponerlas para reconfigurar de otra manera las unidades figurales reconocidas (flecha de la columna IV a la III). Se observará que ninguna flecha parte de las columnas II y III para llegar a la columna IV.

Para comprender en geometría elemental y poder utilizar sus conocimientos, tenemos que aprender a ver y mirar todas las configuraciones *n*D/2D en el juego de transformaciones visuales que permiten (Duval, 2005). Tenemos que ser capaces de reconocer espontáneamente las unidades *n*D/2D para poder adquirir conceptos geométricos y resolver problemas. "Comprender" en geometría elemental es, por tanto, sinónimo de un conjunto de otros verbos: captar signos y rasgos específicos, ser capaz de distinguir elementos de signos, reconocer elementos específicos del dibujo o de la representación, a veces captar el significado progresivo de una figura que se presenta como una unidad estructural, saber referirse a figuras análogas, ser capaz de captar informaciones específicas,.

4. LOS TRES TIPOS DE VISUALIZACIÓN GEOMÉTRICA Y PICTÓRICA

Aquí queremos destacar tres tipos de visualización que se despliegan tanto en la geometría como en la pintura. Los dos primeros se basan en el reconocimiento de formas, es decir, de contornos cerrados, comunes a la geometría elemental, a la pintura y al mosaico; se distinguen entre sí por la ausencia (2D/2D) o la presencia de la tercera dimensión (3D/2D). El tercer tipo de visualización es específico de la geometría. El primer tipo de visualización es el necesario para introducir la geometría en la escuela primaria y en los primeros años de la secundaria.

Al comparar las figuras geométricas con las pinturas, se pueden identificar cinco variables cognitivas para la visualización inicial (Duval, 2018, pp. 216-219). Son las mismas que controlan la mirada y la exploración visual ante una figura o un cuadro. Y, en geometría, esto es heurísticamente decisivo para la resolución de problemas (Duval, 2008, p. 55, figura 12; Duval, 2015, p. 152, figura 2).

El objetivo de la educación de la mirada en este primer tipo de visualización es lograr que los alumnos puedan *reconocer todos los posibles contornos cerrados de una configuración*, los reconocibles por yuxtaposición y los reconocibles por superposición, *y que puedan recombinarlos para obtener diferentes configuraciones. Y esto debe hacerse casi por reflejo, en menos de uno o dos minutos*. Naturalmente, todas las actividades encaminadas a este objetivo *excluyen la consideración de las dimensiones* y, por tanto, las actividades de medición y todas las indicaciones de longitud relativas a unidades figuradas reconocidas.

El proceso de reconocimiento visual de las unidades figurales es el mismo para las configuraciones B y C de la figura 1 (Duval, 2018, p. 216). El trabajo de observación de las figuras es, en efecto, irrelevante, salvo desde la perspectiva de la heurística puramente visual; de lo contrario, la percepción seguirá siendo la principal fuente de bloqueo o error en la resolución de problemas, incluido el reconocimiento de las fórmulas que deben aplicarse para calcular una longitud o un área.

El segundo tipo de visualización impone tomar en consideración la tercera dimensión, se asocia a la invención de la perspectiva. Se trata de una construcción matemática que organiza el campo de visualización subordinando todos los contornos cerrados reunidos en la misma configuración a relaciones de magnitud (Duval, 2018, p. 236, figura 10). Pero el segundo tipo de visualización es mucho más amplio, abarca cualquier composición de formas 2D/2D permitiendo la visualización de una superficie en relieve o cavidad, sólidos en 3D/2D (Duval, 2018, p. 233, figura 8). En otras palabras, incluye cualquier visualización de un objeto *en el espacio* en función del lado desde el cual se mira, e independientemente de su posición con respecto a todos los demás objetos vistos al mismo tiempo.

La visualización propia de la geometría en el espacio es independiente de la basada en la perspectiva. Esta da lugar, para los sólidos, a la fabricación de modelos 3D/3D manipulables o en cuyas caras se pueden dibujar las intersecciones de un plano de sección, ya que el razonamiento exige volver a las unidades figurales 2D/2D y 1D/2D. Pero la visualización de un sólido en el espacio puede llevar a la visualización de un objeto imposible (Duval, 2018, p. 237, figura 11).[3]

Por último, la visualización del relieve de una superficie moviliza una construcción matemática menos compleja, se basa en la reiteración de ciertas unidades figurales 2D jugando tanto con sus combinaciones como con su deformación progresiva (Duval, 2018, p. 220, figura 3; y p. 235, figura 9). Aquí, en última instancia, lo decisivo es la mirada del artista (por ejemplo, los colores pueden ser cruciales).

El tercer tipo de visualización es el que nos permite responder a la pregunta clave para entrar en la geometría: En una figura trazada, ¿cómo pueden visualizarse propiedades geométricas que no se pueden percibir visualmente en una figura? Esta cuestión da un vuelco al problema didáctico de la enseñanza de la geometría. No se trata de construir figuras, ni siquiera con herramientas que exigen tener en cuenta las propiedades geométricas de la figura a construir (como la regla, la escuadra, el compás, ...). Se trata de deconstruir las configuraciones 2D/2D en una red de líneas rectas 1D/2D subyacentes. Para dibujar esta red de rectas, es necesario no solo prolongar todos los lados de la figura, sino también enriquecerla con nuevas rectas (Duval, 2015, p. 162, figuras 6 y 7).

En otras palabras, la actividad de deconstrucción dimensional permite superar inmediatamente los obstáculos (2) y (3) mencionados anteriormente, mientras que la actividad de construcción conduce, por el contrario, a reforzarlos cognitivamente e institucionalizarlos. Solo en una red de rectas deconstruidas

[3] Mas adelante regresaremos en este punto de una forma mas explicita.

dimensionalmente podemos ver las propiedades geométricas; todas estas se destacan visualmente como la relación entre dos unidades figurales, ya sean de la misma o diferentes dimensiones (Duval, 2015, p. 164, figura 8).

Estos tres tipos de visualización son no icónicas. Se oponen a la *visualización icónica*, con la cual la pintura, desde el arte parietal de los Salones de los nobles del siglo XIX, se ha confundido durante mucho tiempo. Aquí, "ver" una imagen significa reconocer de un vistazo el tipo de objeto que representa: un rostro, un animal, una flor, etc. En otras palabras, el criterio de la iconicidad es la posibilidad de yuxtaponer el modelo con la representación que la reproduce a partir de trazos o manchas, y no "imitándolo".

Pero este reconocimiento solo puede producirse con una doble condición: hay que conocer tanto el objeto representado, es decir, haber visto uno en precedencia; como también "ver" *la similitud entre el contorno cerrado que se ha trazado y el contorno del objeto*. El grado de particularización e información de la imagen, o del cuadro, depende entonces de la correspondencia que pueda establecerse entre los trazos internos al contorno cerrado y los detalles observables del objeto representado.

La superposición intuitiva de los respectivos contornos y el grado de particularización de la imagen son los dos criterios de similitud entre un dibujo o una pintura y lo que estos representan. Estos dos criterios permiten así distinguir *grados de iconicidad* entre la iconicidad perfecta de algunos cuadros que muestran a la "persona misma", por ejemplo en el caso de un retrato, y la generalidad extrema de un esquema que reduce el objeto a unos pocos rasgos (Duval, 2018, pp. 223-225, figuras 4 y 5).

En pintura, el tipo de visualización basado exclusivamente en el reconocimiento de unidades figurales en 2D condujo a la revolución de la llamada pintura "abstracta". Las formas de los objetos 3D/3D, tal y como las ve la mirada, se descomponen en fragmentos, geometrizados o relevantes desde diferentes puntos de vista posibles sobre el objeto, y los fragmentos elegidos se ensamblan en una reconfiguración no icónica (Duval, 2018, p. 225, figuras 6 y 7).

5. ¿CÓMO EL VER UNA FIGURA, UNA IMAGEN O UN DIAGRAMA TRAE A LA MENTE PALABRAS?

La respuesta a esta pregunta cambia radicalmente según el tipo de visualización y según la función que llena la producción verbal. Nos limitaremos aquí a considerar solo las figuras geométricas construidas instrumentalmente.

Las herramientas imponen, en el momento de la construcción de las figuras, la restricción de ciertas propiedades que las distinguen unas de otras (regla y compás o las instrucciones de un programa informático) y, por tanto, términos geométricos. En cualquier caso, cuando se mira una figura para resolver un problema, poco importa el tipo de herramienta que se utilizó para construirla, regla y compás o instrucciones de un "menú", lo que cuenta es la forma en la cual se mira esa figura, independientemente de cualquier dimensión y de cualquier relación entre dimensiones. Entre los diferentes tipos de visualización que acabamos de distinguir, desde el punto de vista de su funcionamiento cognitivo, solo dos son esenciales en lo que tiene que ver con la educación de la mirada en geometría.

El primer tipo de visualización matemática se refiere a la exploración visual heurística de las figuras a través de la descomposición y reconfiguración de unidades figuradas en 2D. La exploración visual de una figura es previa a cualquier formulación e independiente de las distintas propiedades que puedan tomarse como hipótesis.[4] Esta exploración puramente visual es más intuitiva y menos exigente que cualquier descripción o explicación verbal; por otra parte, descripciones o explicaciones verbales nunca han enseñado a mirar las figuras de forma matemática. Esta exploración visual es la que permite *reconocer el teorema, la definición o la fórmula pertinente para resolver un problema asignado*. Sin embargo, como por toda actividad intencional, mirar requiere una verbalización silenciosa que controle la gestión de esta exploración puramente visual y condense el resultado. La característica de esta verbalización silenciosa, como señaló Vygotsky, es que no necesita palabras para designar o calificar las unidades figurales 2D que han sido descompuestas y reconfiguradas por la mirada.

Por el contrario, el segundo tipo de visualización, es decir la deconstrucción dimensional de las formas, requiere una formulación explícita de las diferentes relaciones entre dos unidades figurales de menor dimensión que las unidades figurales 2D que han sido deconstruidas dimensionalmente. Es la deconstrucción

[4] Para una misma figura construida, solo se pueden cambiar los problemas planteados cambiando las hipótesis dadas. ¿Tendremos que concluir que hay tantas figuras como posibles opciones de hipótesis?

dimensional la que permite comprender todo el vocabulario geométrico básico: esta excluye toda verbalización silenciosa. Y el uso del vocabulario, a diferencia de las palabras del lenguaje común, no se pueden utilizar más que en el razonamiento que funciona por sustitución de enunciados y no por acumulación de "razones" como pasa en una argumentación (figura 2, IV: denominar para deducir). *Y, para que tenga sentido, nunca es necesaria una figura. ¡Solo hay que indicar las hipótesis!* Eso, al menos para los matemáticos y los profesores. Y este es el espejismo que lleva a la enseñanza de la matemática a un callejón sin salida. Para los matemáticos y los profesores, esta formulación explícita basada en la deconstrucción dimensional de las formas detecta una verbalización silenciosa, tanto que se les ha hecho evidente y familiar. Y esta se proyecta en la exploración heurística visual de las formas, como si la visualización y el lenguaje matemático fueran cognitivamente la misma cosa.

Estos dos tipos de visualización se basan en el principio de separación de formas y dimensiones. En cambio, la visualización de la tercera dimensión subordina la construcción de unidades figurales en 2D a las igualdades de relaciones entre cantidades determinadas a partir de un punto de fuga. La construcción matemática es la de una red de rectas que convergen hacia un punto de fuga, y la construcción de formas 2D se realiza sobre esta red de rectas en función de las relaciones de magnitudes elegidas desde este punto de fuga para marcar su mayor o menor distancia. Ver una figura en este caso significa discernir esta red de rectas, que no evoca palabras sino números y cálculos. La visualización icónica de los edificios en el espacio (3D/3D) se basa en la estructuración previa de su campo mediante una red de rectas que convergen hacia un punto situado por encima de una recta, la línea del horizonte.

En geometría, por tanto, ver y entender son operaciones fuertemente conectadas estructuralmente; si entender sin ver (en cualquier forma de visión) se presenta como imposible, lo contrario es, en cambio, un fenómeno muy presente: un constructo geométrico es visto como una acción sensorial, pero su sentido, su mensaje, no puede ser interpretado, y por tanto no es entendido; cognitivamente hablando, ese constructo no tiene el sentido que su creador-hacedor pretendía darle. Ver y comprender no son en absoluto sinónimos, es más, es precisamente en su dicotomía donde se crean situaciones de aprendizaje negativas. En el arte, a veces se puede crear una ilusión de comprensión, ligada al ver; pero la mayoría de las veces, esto es solo una ilusión; un inexperto en arte figurativo ve una obra de Jackson Pollock, pero no tiene ningún apoyo en lo cognitivo que posee: ve, pero no puede entender el significado de la operación pictórica, ni siquiera si recurre a un nombre, un título o una leyenda. Pero aquí, a diferencia que en geometría, la palabra no suele designar lo que el cuadro representa, sino lo que inspiró al pintor o la resonancia de las cosas y la luz en la mirada de quien mira (Duval, 2018, pp. 227-228), a menudo con referencia a la historia del arte, cuyo conocimiento reside en lo cognitivo y no solo en la visión.

6. ¿CÓMO PERCIBIR, RECONOCER Y EVALUAR LAS FIGURAS IMPOSIBLES EN EL ARTE FIGURATIVO? DE LA MIRADA AL ANÁLISIS VISUAL

Como ya habíamos anticipado, continuando el estudio iniciado por Duval (2018), abordamos ahora el problema del reconocimiento de la imposibilidad (estructural) de una imagen 3D representada en perspectiva en una superficie 2D. En este caso, la mera mirada ya no parece ser suficiente, ni sirven comparaciones en tres dimensiones, definiciones o conocimiento de términos.

Para hacer más efectivo el estudio, recurriremos a ejemplos del arte figurativo contemporáneo; otros ejemplos, incluso más antiguos, pueden encontrarse en D'Amore (2015a).

A partir de 1934, el entonces joven pintor sueco Oscar Reutersvärd se dedicó a dibujar "figuras imposibles" (este era el nombre original), entre las que destaca desde el principio, es decir, mucho antes de 1958, el llamado "triángulo de Penrose" (D'Amore, 2000, 2002, 2015a). Esto no quita que, mientras el artista representaba lo imposible geométrico por puro gusto estético y para refinar una sensibilidad de perspectiva personal, los Penrose fueron los primeros en estudiar la psicología relacionada con la visión humana de esta forma 2D que alude a una 3D imposible (Penrose y Penrose, 1958). Sin embargo, el artista sueco se dedicó sobre todo a una versión asombrosamente diferente y muy famosa que consiste en cubos de perspectiva (D'Amore, 2005).

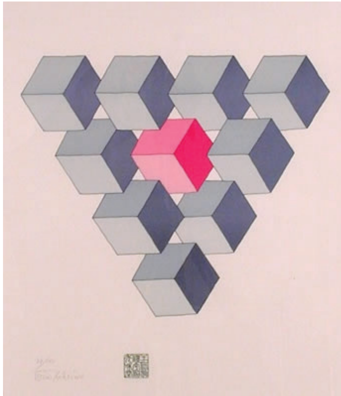


Figura 3. *Opus 1*, Oscar Reutersvärd, 1934.

La mirada capta la imposibilidad global con mayor dificultad que en el clásico triángulo imposible de los Penrose, quizá debido a la fragmentación de los componentes y a la dificultad de coordinar la mirada sometida a múltiples sugerencias visuales; los tres componentes laterales, lo que en el triángulo imposible serían los tres "lados", cada uno de los cuales (aisladamente) es posible, están aquí constituidos por cuatro pequeños cubos, cada uno de los cuales está correctamente representado desde un punto de vista perspectivo. Se puede eliminar el cubo central y estudiar lo que queda de la propuesta del artista.

Figura 4. Elaboración de *Opus 1*, Oscar Reutersvärd.

La mirada queda como atrapada por la ilusoria estrella de 6 puntas que parece aparecer en el centro y el lenguaje silencioso la comenta mentalmente, describiéndola; en el transcurso de una segunda mirada, esta imagen se impone, como señaló el mismo artista.

A este momento se puede realizar una operación gráfica muy interesante: eliminar los dos cubos centrales de cada lado del triángulo, un lado a la vez, con el fin de restaurar una consistencia aceptable de la perspectiva de los tres componentes diferentes del diseño (D'Amore, 2015a, p. 458).

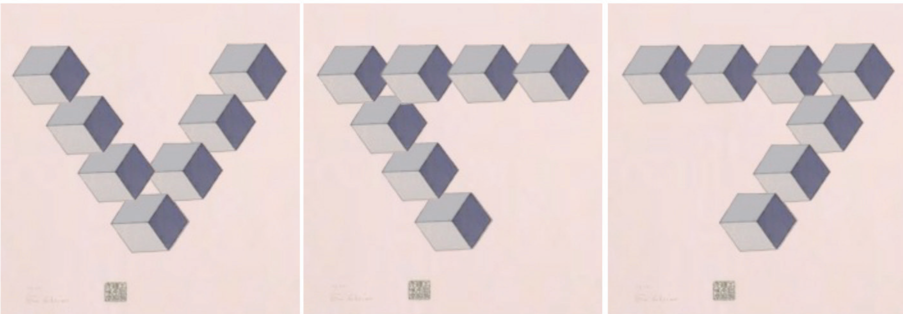


Figura 5. Elaboraciones de *Opus 1*, Oscar Reutersvärd: cada una de ellas es perspectivamente aceptablemente correcta.

La "yuxtaposición gráfica" de tres figuras aceptablemente correctas desde el punto de vista perspectivo (aunque no perfectas) es una figura perspectivamente imposible.

En este análisis de una obra de arte, queda claro el papel que juegan las miradas, o, dicho de otra forma, su concatenación; y la importancia del llamado "diálogo silencioso".

7. EL PAPEL EXPLÍCITO DE LA SEMIÓTICA EN EL ANÁLISIS DE UNA OBRA DE ARTE, SEGÚN LA PRETENDE EL AUTOR: CUANDO LA MIRADA YA NO ES SUFICIENTE PARA ENTENDER LO QUE SE VE

Recordemos la muy célebre obra *Ceci n'est pas une pipe* (*Esta no es una pipa*) que el genial pintor belga, a menudo calificado como "surrealista", René Magritte, creó en varias versiones entre 1929 y 1946.[5]

[5] Para un análisis histórico, crítico, semiótico y artístico de esta operación pictórica, véase D'Amore (2010; 2015a).

Figura 6. *La trahison des images*, René Magritte, 1928-1929.
Los Ángeles County Museum of Art, Los Ángeles.

En cuanto al título, destinado a sorprender al visitante, aunque la imagen de la pipa es icónicamente perfecta, no hay coincidencia entre el objeto 3D representado, inmediatamente perceptible y reconocible a primera vista, y su representación 2D casi fotográfica. Sin embargo, el discurso interior se vuelve interesante cuando, después de haber identificado imagen y objeto representado, al segundo vistazo el observador lee la frase subyacente y entra así en el juego semiótico 2D/3D deseado por el autor. Este es un ejemplo perfecto de una obra en la cual no solo hay que mirar, sino también leer; sin embargo, incluso la combinación mirada/lectura no es suficiente para entender el significado de la operación pictórica, si no hay más informaciones históricas-críticas-semióticas, estas últimas proporcionadas por el estudio de las intenciones del autor.

En otras obras del mismo autor, en las cuales se proponen situaciones que solo parecen reales pero que en realidad son imposibles, tiene sentido la denominación "surrealismo" (que, en arte, tiene mil facetas diferentes); pero aquí el discurso, potente y culto, es sobre la interpretación semiótica del lenguaje del arte, un rebote continuo entre lo representado, lo representante, la percepción visual, la experiencia y la semiótica subyacente. Rebote en el cual juega un papel decisivo aquel lenguaje silencioso (y personal) mencionado varias veces.

Como prueba de esto, citemos un verdadero estudio teórico de Magritte, el dibujo/manifiesto *Les mots et les images* (*Las palabras y las imágenes*)

(Magritte, 1929) que, aunque, como hemos dicho, es un estudio teórico, también fue expuesto como obra de arte.[6]

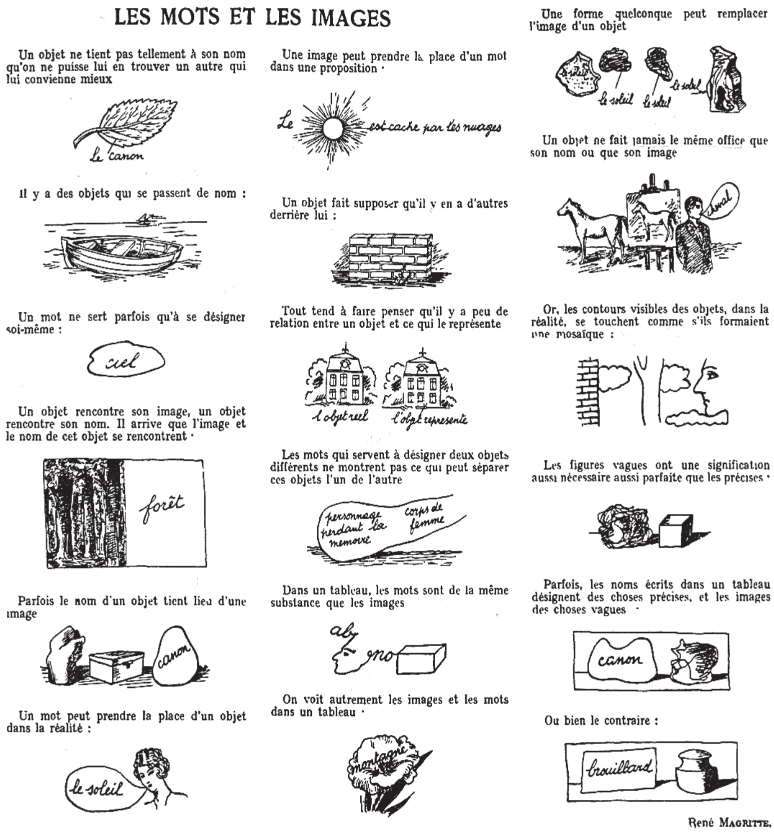


Figura 7. *Les mots et les images*, René Magritte.
Imagen tomada de la revista: *La Révolution Surréaliste*, diciembre de 1929.

Dentro de este estudio, el detalle más famoso y perennemente discutido por su evidente referencia a una de las muchas versiones del llamado "triángulo semiótico" (Eco, 1975) es el relativo a la imagen del caballo. Aparece un caballo (obviamente

[6] Un análisis profundo de este famoso dibujo de Magritte, con reproducciones de otras obras del propio pintor belga y con la reedición de los escritos teóricos de Magritte, puede encontrarse en Lageira (2003).

dibujado, pero el significado es claro), una representación pictórica del mismo (en un lienzo apoyado en un caballete), una enunciación verbal del mismo.

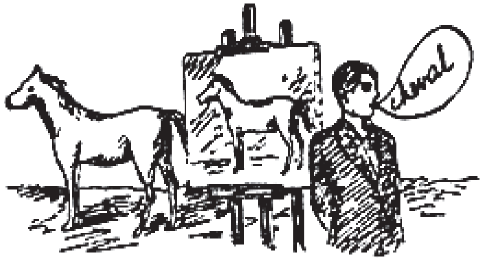


Figura 8. *Les mots et les images*, René Magritte, 1929. Particular.

Este análisis del lenguaje pictórico mediante una tríada de referencias semióticas y sus relaciones nos lleva a recordar los trabajos del lógico matemático alemán Gottlob Frege (1892) que analizó el lenguaje lógico de la matemática. Pero sobre este punto glosamos, remitiéndonos a D'Amore (2010, 2015a).

La idea de Magritte tuvo un largo seguimiento (que aún continúa) entre los artistas de todo el mundo, especialmente entre los que, en los años 60-80, fueron los creadores de la llamada corriente "conceptual científica", aunque con sus múltiples facetas (D'Amore y Menna, 1974; Menna, 1975; Di Genova, 1993). Entre los principales intérpretes no solo de la vertiente analítica, sino precisamente de esta coincidencia entre el arte figurativo expuesto y el análisis semiótico de la pareja objeto-representación, mencionamos por orden cronológico al estadounidense Joseph Kosuth y al francés Bernar Venet.

El objeto de arte (el que se expone) no es ni el tubo metálico real colocado en el suelo, ni su representación axonométrica, dibujada en una hoja de dibujo y colocada en un marco, colgada en la pared del fondo de una galería de arte. La obra de arte es puramente semiótica: la emergencia de un sistema de representaciones y transformaciones que llevan de una representación a otra (D'Amore, 2015b).

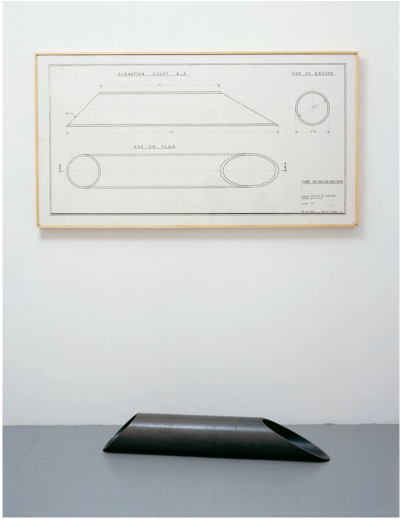


Figura 9. *Tube n° 150/45/60/1000*, Bernar Venet, 1966.

La misma operación semiótica es realizada simultáneamente por Kosuth.

Figura 10. *One and three chairs*, Joseph Kosuth, 1965.

La misma obra ha sido recreada por Kosuth decenas de veces, con diferentes sillas, por tanto con diferentes fotografías, pero siempre en la tríada semiótica: objeto real, fotografía que reproduce el objeto, definición de silla tomada de un diccionario. Representaciones (fotografía y definición del objeto) en registros semióticos distintos, conversiones semióticas en curso. La obra de arte no es la tríada visual que cae bajo nuestro sentido de la vista, captada por la mirada, ni ninguno de estos objetos por separado: es la relación semiótica que emerge de estos, el forzar al observador a percibir cada elemento de la tríada con su mirada, distinguiendo sus funciones recíprocas, desencadenando un discurso silencioso que conecta cada uno de los elementos con los demás.

Sobre la interpretación de estas obras desde el punto de vista semiótico, véase también Duval (2008).

Otra obra de Joseph Kosuth que encaja perfectamente en nuestro discurso es *Neon electrical light English glass letters white eight*, 1966, que representa, como dice su título, "ocho letras blancas de vidrio inglesas en vidrio de luz eléctrica de neón" (Museo Salomon Guggenheim, Nueva York); y también la obra *Painting*, 1966, que representa en una pintura la definición de "pintura" en un cuadro. Estas obras también se han producido multitud de veces, en distintas versiones. Kosuth representa perfectamente el espíritu de esta investigación artística, jugando con la univocidad de la referencia semántica, una especie de mono-semía que se opone a la típica poli-semía que siempre ha caracterizado al arte en su sentido romántico. El conjunto de su obra de este período puede resumirse en su proyecto: *El arte como idea, como idea* (D'Amore, 2015a).

Desde nuestro punto de vista, se trata de ejemplos, tomados del mundo del arte, que muestran cómo son decisivas las relaciones (a veces opuestas entre sí) entre lo que se ofrece a la vista, la aparición objetual, la compleja referencia semiótica, el profundo y silencioso discurso interno personal y la interpretación de los distintos componentes entre sí, y luego de estos con la obra en su conjunto.

Esta complejidad no es tan diferente de ciertas situaciones determinadas en las aulas, durante las clases de geometría, cuando chocan entre ellos diferentes registros y componentes interpretativos. Así como en la obra de Kosuth, relativa a las sillas, hay implícitas transformaciones semióticas de conversión, cada una de las cuales reúne dos representaciones en registros diferentes que requieren interpretaciones específicas, lo mismo sucede al descifrar, comprender, deconstruir figuras que describen una situación, por ejemplo en relación con los diferentes pasos de una demostración o al pasar de una escritura algebraica a una analítica-gráfica cartesiana, como parece sugerir también esta obra de Venet, estudiada en detalle en D'Amore (2015b).

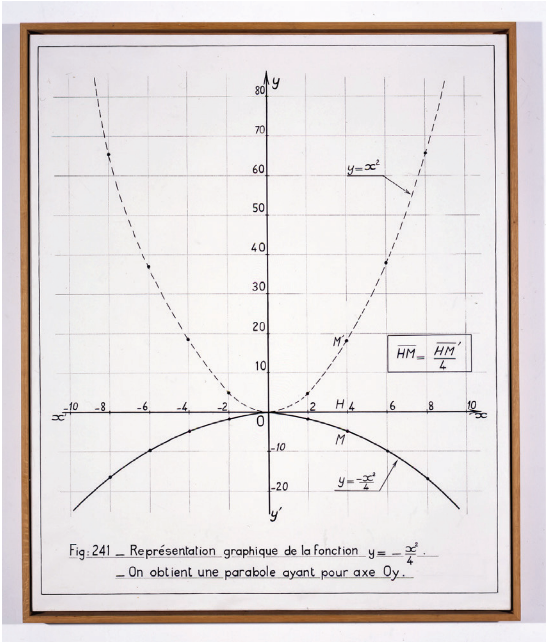


Figura 11. *Representación gráfica de la función y = -x²/4*, Bernar Venet, 1966. Acrílico sobre lienzo, 146×121 cm. Museo Nacional de Arte Moderno, Centro Pompidou, París, Francia.

En esta obra se destacan tres representaciones semióticas de un mismo objeto matemático:

- En el registro analítico-gráfico (un dibujo en el plano cartesiano).
- En el registro algebraico (una fórmula).
- En el registro del lenguaje natural: una descripción en palabras: "Se obtiene una parábola que tiene como eje Oy".

Pero el campo de la creación es el artístico, no una lección de geometría, y en los años en los cuales las reflexiones semióticas (al menos en matemáticas) estaban aún por llegar.

REFERENCIAS

Asenova, M. (2018). Vedere geometricamente: La percezione non iconica nella scuola primaria. *La matematica e la sua didattica*, *26*(2), 173–210.

D'Amore, B. (2000). Oscar Reutersvärd. En A. Bonfiglioli y C. Valentini (Eds.), *Matematica, arte e tecnologia: da Escher alla computer* graphics (pp. xix–xxi). Aspasia.

D'Amore, B. (2002). L'opera di Oscar Reutersvärd. *La matematica e la sua didattica*, *16*(3), 240–245.

D'Amore, B. (2005). Oscar Reutersvärd. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*RELIME*), *8*(3), 379–382.

D'Amore, B. (2010). Figurative arts and mathematics: Pipes, horses and meanings. En V. Capecchi, M. Buscema, P. Contucci, & B. D'Amore (Eds.), *Applications of Mathematics in Models, Artificial Neural Networks and Arts: Mathematics and Society* (pp. 491–504). Springer.

D'Amore, B. (2015a). *Arte e matematica: Metafore, analogie, rappresentazioni, identità tra due mondi possibili.* Edizioni Dedalo.

D'Amore, B. (2015b). Bernar Venet: Elogio del processo razionale. *Nuova Meta*, 37, 30–41. www.rivistaartenuovameta.it

D'Amore, B., y Duval, R, (2019). L'educazione dello sguardo in geometria elementare e in arte figurativa. Quali variabili cognitive e didattiche sono coinvolte? Come si rappresenta in arte l'impossibilità? Quali elementi semiotici possono essere coinvolti nell'arte? The education of the gaze in elementary geometry and in figurative art. What are the cognitive and educational variables involved? How does art represent impossibility? What semiotic elements can we take into account be in art? *La matematica e la sua didattica*, *27*(1), 47-67. http://www.incontriconlamatematica.net/portale/rivista/88-rivista-la-matematica-e-la-sua-didattica-anno-27-aprile-2019-numero-1

D'Amore, B., y Menna, F. (1974). *De mathematica.* [Catalogo de la exhibición internacional homónima]. Galleria dell'Obelisco.

Di Genova, G. (1993). *Storia dell'arte italiana del '900.* Bora.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5–53.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En L. Radford, G. Schubring, y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom and Culture* (pp. 39–61). Sense Publishers.

Duval, R. (2015). Figures et visualisation géométrique: «voir» en géométrie. En J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Figure* (pp. 147–182). Presses Universitaires.

Duval, R. (2018). Per l'educazione allo sguardo in geometria elementare e in pittura. *La matematica e la sua didattica, 26*(2), 211–245.

Eco, U. (1975). *Trattato di semiotica generale*. Bompiani.

Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 100, 25–50.

Lageira, J. (2003). *Magritte: Mots et images*. Gallimard.

Magritte, R. (1929). Les mots et les images. *La Révolution surréaliste, 5*(1), 32–33.

Menna, F. (1975). *La linea analitica dell'arte moderna*. Einaudi.

Penrose, L. S., y Penrose, R. (1958). Impossible objects: A special type of visual illusion. *British Journal of Psychology, 49*(1), 31–33.

Autor de correspondencia:
Bruno D'amore
Correo electrónico: bruno.damore@unibo.it

 https://doi.org/10.24844/EM3501.03

La influencia de las características diagramáticas de los dibujos de los estudiantes en la matematización para la resolución de problemas geométricos

The influence of the schematic characteristics of the students' drawings on mathematization for solving geometry problems

Manuel Ponce de León Palacios,[1] José Antonio Juárez López[2]

Resumen: Un número significativo de estudios ha encontrado que el uso de las representaciones gráficas tiene el potencial de contribuir al éxito en la resolución de problemas de matemáticas. Sin embargo, los resultados de las investigaciones también apuntan a que el uso efectivo de estas representaciones depende de ciertas condiciones específicas. A partir de ello, se establece como un campo de oportunidad para la investigación el conocer más sobre estas condiciones particulares. El objetivo de esta investigación fue analizar la influencia que tienen las características de las representaciones gráficas producidas por los estudiantes en su desempeño al resolver problemas de modelización matemática. Para llevar a cabo la indagación se analizaron los dibujos realizados por 63 estudiantes de primero de secundaria de una escuela en México al resolver problemas geométricos de modelización. En el estudio se aplicaron un conjunto de herramientas de análisis dirigidas a la clasificación de las representaciones gráficas y su implicación en las estrategias y procesos de solución. Los resultados mostraron evidencia de una relación relevante entre

Fecha de recepción: 13 de junio de 2020. **Fecha de aceptación**: 5 de mayo de 2022.

[1] Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla, manuel.poncedeleon@upaep.mx, orcid.org/0000-0002-3937-5147

[2] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, jajul@fcfm.buap.mx, orcid.org/0000-0003-2501-943X

las características de los dibujos de los estudiantes y la planeación y ejecución de métodos para la solución del problema.

Palabras clave: *Educación matemática, representaciones, geometría, problemas verbales, modelización matemática*

Abstract: A significant number of studies have found that the use of graphical representations can contribute to success in solving math problems. However, research results also suggest that the effective use of these representations depends on certain specific conditions. From this, it is established as a field of opportunity for research to learn more about these particular conditions. This research's objective was to analyze the influence that the characteristics of the students' graphic representations have on their performance when solving mathematical modelling problems. To carry out the investigation, we analyzed the drawings made by 63 seventh grade students from a school in Mexico when solving geometric modelling problems. In the study, we applied a set of analysis tools to classify graphic representations and their involvement in solution strategies and processes. The results showed evidence of a relevant relationship between the characteristics of the students' drawings and the planning and execution of solving methods.

Keywords: *Mathematics Education, representations, geometry, word problems, mathematical modeling*

INTRODUCCIÓN

Resolver problemas de matemáticas es un proceso de etapas (Polya, 1965) donde comprender el problema y establecer un plan de acción son elementos clave para el éxito. La comprensión del problema se refleja en la construcción de un modelo mental sobre la situación (comprender lo que el enunciado del problema describe) paso que es fundamental para los procesos posteriores de solución (Leiss *et al.*, 2010). Este modelo mental sobre la situación facilita la transición hacia la matematización, donde se llevará a cabo la traducción de esta realidad en términos matemáticos.

Ahora bien, cabe resaltar que la matematización y los procesos asociados requieren de un conjunto de competencias específicas por parte de los estudiantes para completarse de manera efectiva. Entre estas competencias específicas para resolver problemas verbales con éxito a través de este proceso de comprensión se encuentran las relacionadas con la representación. Las competencias de representación se manifiestan en la capacidad de construirlas con ciertas características que las hacen efectivas (Rellensmann *et al.*, 2016) así como transitar entre diferentes clases o registros (Duval, 2006) considerando las condiciones del problema.

La capacidad que el estudiante tenga de construir modelos adecuados y de expresarlos a través de sus respectivas representaciones tendrá una influencia importante en su proceso de matematización. Entre las diferentes formas que tiene el estudiante de representar gráficamente se encuentran los dibujos (a diferencia de otro tipo de representaciones como símbolos, letras y numerales). Los dibujos, como representaciones gráficas realizadas por el estudiante, pueden ser de gran ayuda para comprender y resolver problemas verbales de matemáticas. Sin embargo, los estudiantes deben poseer un conjunto de conocimientos específicos para sacar el máximo provecho del uso de los dibujos como una herramienta de apoyo en la resolución de problemas (Schnotz, 2002).

A pesar de que los dibujos tienen el potencial de ser útiles para los procesos de solución de problemas verbales de matemáticas, un gran número de estudiantes tiene dificultades para hacer un uso eficaz de estos en el contexto de la resolución de problemas matemáticos, principalmente debido a la falta de conocimientos específicos (Schnotz, 2002). De igual forma, la costumbre de trabajar con modelos de naturaleza mecanicista (Dewolf *et al.*, 2014) y el peso del contrato didáctico en la solución de problemas de matemáticas (Brousseau, 1988; D'Amore, 2011) que se enfoca en la capacidad de resolver operaciones, dificulta el uso práctico de las representaciones gráficas.

Por lo anterior, se presenta como relevante desarrollar estrategias de procesamiento de información derivadas de la integración de textos e imágenes. Este desarrollo debe producirse sistemáticamente en la educación matemática, ya que a veces, los estudiantes carecen de las estrategias pertinentes para la integración de la información textual y gráfica (Hochpöchler *et al.*, 2013).

ANTECEDENTES TEÓRICOS

De acuerdo con Borromeo Ferri (2015) la modelización matemática es un proceso por el cual se conecta el mundo real y las matemáticas en ambas direcciones: consiste en traducir la realidad en términos matemáticos y finalmente llevar los resultados de regreso a la realidad para darles sentido. El proceso de modelización es una actividad cognitivamente demandante ya que involucra un conjunto amplio de competencias (Niss y Højgaard, 2011). Al llevar a cabo esta tarea los estudiantes ponen en juego conocimientos, tanto sobre el mundo real como sobre las matemáticas (Blum, 2014), y requieren habilidades como comprensión lectora y representación efectiva.

Según Leiss *et al*. (2010) el ciclo de modelización matemática, desde el punto de vista cognitivo, tiene siete transiciones: (1) comprensión de la tarea, (2) simplificación y estructuración, (3) matematización, (4) trabajo matemático, (5) interpretación, (6) validación y (7) presentación. En este modelo del ciclo de modelización matemática, el puente que conecta el dominio real con el matemático es la transición llamada matematización, que se produce entre lo que se ha llamado el modelo real y el modelo matemático.

El modelo real es el resultado de un proceso de simplificación y estructuración, que incluye la aplicación de supuestos y la selección de datos relevantes (Borromeo Ferri, 2006). Por lo tanto, esta transición es un momento crucial en la resolución de problemas matemáticos. Si los estudiantes no cruzan este puente correctamente, tendrán problemas para poder hacer matemáticas de manera efectiva. Es por la relevancia de este momento en la secuencia del proceso de modelización, que resulta útil estudiar los procesos, elementos y condiciones que operan en este cambio de fase y que permiten construir un modelo matemático sólido a partir de la elaboración del modelo real (Galbraith y Stillman, 2006; Juárez *et al*., 2014; Maaß, 2006).

Como observa Borromeo Ferri (2006) la transición de la matematización y sus procesos previos requieren un dominio mínimo de conocimientos extramatemáticos (CEM), es decir, aquellos conocimientos que van más allá de las matemáticas, pero que resultan necesarios para construir un modelo real y por lo tanto matemático del problema.

Este requisito implica que los CEM y sus respectivos productos sean esenciales para la construcción del modelo matemático. Dependiendo de la tarea, algunos CEM serán más útiles o necesarios que otros. Por ejemplo, en problemas donde se pide encontrar el área de figuras geométricas, parece haber beneficios importantes en la aplicación de representaciones gráficas (dibujos), particularmente cuando estas permiten observar claramente la información que es matemáticamente relevante para hallar la solución.

En el contexto de la resolución de problemas verbales, el realizar dibujos puede ejercer una función mediadora que permite a los estudiantes "observar" objetos matemáticos que de otro modo permanecen ocultos (Arcavi, 2003). Esta capacidad de observar en el contexto de los problemas de matemáticas permite comprender mejor la situación y la tarea, así como identificar los objetos y conceptos matemáticos implicados.

La construcción de dibujos que resulten efectivos en el contexto de la resolución de problemas de matemáticas implica poner en juego un conjunto de conocimientos y herramientas cognitivas específicas (Schnotz, 2014). La aplicación efectiva de representaciones gráficas generadas por estudiantes para la resolución de un problema complejo requiere cumplir con ciertas condiciones mínimas de relación con el mundo, con la situación y con las matemáticas; en términos específicos, un dibujo será efectivo para hacer matemáticas en tanto corresponda con el enunciado del problema, represente de manera adecuada la estructura matemática de los objetos y sus relaciones y, cuente con un grado de abstracción mínimo para visualizar únicamente información que es matemáticamente relevante (Ott, 2016).

El uso de representaciones gráficas para la resolución de problemas matemáticos no siempre se relaciona con un mejor desempeño. Como se muestra en los estudios, es importante considerar el tipo de problema y el tipo de representaciones que se utilizan (Hegarty y Kozhevnikov, 1999; Ott, 2017; Rellensmann *et al.*, 2016). En este sentido, las representaciones diagramáticas han demostrado ser más útiles ya que presentan selectivamente información que es relevante para resolver problemas y omiten detalles que no contribuyen a la matematización (Hegarty y Kozhevnikov, 1999). Las representaciones diagramáticas permiten al estudiante identificar más fácilmente la información que es relevante y cómo usarla; es decir, tienen una contribución más directa en la comprensión y resolución del problema.

Con el apoyo de representaciones diagramáticas gráficas, el estudiante debería ser capaz de avanzar hacia una interpretación más profunda y precisa del problema. En el caso específico de la geometría, este ejercicio debe llevar a los estudiantes desde la identificación de objetos solo por su forma, (Nivel 1 de van Hiele), hasta el reconocimiento de sus propiedades (Clements y Battista, 1992). Es decir, en la tarea de resolver problemas el uso de representaciones gráficas adecuadas permitiría establecer una relación con los procesos de matematización y no únicamente con los de identificación.

MÉTODO

Pregunta principal

La pregunta principal de este estudio fue: ¿Cómo influyen las características de los dibujos que producen los estudiantes en los procesos de matematización cuando resuelven problemas geométricos de modelización? Para responder se realizó un estudio cualitativo analizando los dibujos realizados por estudiantes al resolver un problema de área y su desempeño en el proceso de modelización matemática mediante la aplicación de una hoja de trabajo.

Participantes

Fueron 63 estudiantes de primero de secundaria (7o grado) de una escuela privada en México en el último mes del año escolar. Los sujetos tenían cierta experiencia con el uso de dibujos ya que, al resolver problemas matemáticos, los maestros suelen recomendar que hagan un dibujo para comprender la situación del problema. Del mismo modo, la escuela utiliza un modelo para la enseñanza que establece que los pasos para resolver un problema son: (1) obtener los datos de un texto y resolver, (2) utilizar un diagrama o un dibujo para resolver un problema gráficamente y (3) obtener los datos del dibujo para resolver un problema. Los estudiantes conocen la fórmula del área de un círculo y han trabajado problemas en este tema, tanto en la clase como en los exámenes.

Material

La hoja de trabajo

Con el fin de diseñar un instrumento que fuera adecuado y útil para la investigación, se revisaron previamente los materiales de clase con los que han trabajado los participantes. En el análisis se tomaron en cuenta los conceptos que manejan los estudiantes, el tipo de problemas que resuelven en clase y la demanda cognitiva con la que están habituados a trabajar.

Para la recolección de los datos, se diseñó y aplicó a los participantes una hoja de trabajo con un problema de área. La hoja contenía el enunciado del problema, un espacio para anotaciones y dibujos, y otro espacio para las operaciones y la solución. Las instrucciones escritas indicaban tres cosas: (1) leer el problema cuidadosamente, (2) resaltar la respuesta correcta y (3) escribir la validación de su respuesta.

El problema aplicado en la investigación es una versión adaptada del enunciado "el chivo atado" (Boaler, 2016). Este problema fue seleccionado a partir de sus características, ya que su resolución requiere que el estudiante ponga a trabajar su razonamiento y aplique estrategias.

El planteamiento del problema no presenta la figura geométrica de manera explícita, sino que esta resulta de la interacción entre los elementos enlistados en el enunciado. En estos casos, el estudiante debe completar la estructura de la situación haciendo uso de una combinación de conocimientos matemáticos y extramatemáticos. Con conocimientos extramatemáticos nos referimos a aquellos que van más allá de la disciplina matemática, por ejemplo, el saber de qué forma se mueve un animal cuando está atado a un punto fijo. Este tipo de problemas resultan particularmente útiles para observar el uso estratégico que los estudiantes hacen de las representaciones gráficas.

A partir de este proceso de recolección de datos se obtuvieron las representaciones gráficas de la situación (dibujos y sus etiquetas), el modelo matemático construido, las operaciones realizadas y la redacción de validación de respuesta.

El problema

El enunciado del problema incluido en la hoja de trabajo es el siguiente:

> Un borrego está atado a la esquina de un granero cuadrado de 4 x 4 metros. ¿Cuál es el área máxima que el borrego puede pastar si la cuerda tiene una longitud de 3 metros? Nota: el borrego únicamente puede moverse fuera del granero y no sobre él.

Para la respuesta se utilizó un formato de opción múltiple. La hoja de trabajo presentaba cuatro opciones de respuesta: una correcta y tres distractores.

Procedimiento

La escuela cuenta con tres grupos de tercero de secundaria (7º grado). La hoja de trabajo se aplicó sin un proceso de intervención previo a 63 estudiantes en tres sesiones (una por cada grupo). Los estudiantes tuvieron un total de 28 minutos para completar la resolución del problema.

Estrategia de análisis

Para observar evidencias de la relación entre las características de los dibujos y el desempeño en modelización matemática se utilizaron un conjunto de herramientas de análisis, prestando especial atención a los procesos de representación y matematización.

En el proceso de análisis de los datos, se delimitaron cinco componentes para la revisión de las respuestas en las hojas de trabajo: (1) respuesta elegida, (2) validación por escrito, (3) uso explícito de la fórmula, (4) operaciones realizadas, (5) dibujos y sus características. Posteriormente, se aplicaron las herramientas de análisis para el proceso de categorización.

Categorías de análisis

Para este estudio, se definieron cuatro categorías de análisis agrupadas en dos dimensiones. Las dos grandes dimensiones son las características de los dibujos y la modelización matemática. La dimensión de las características de los dibujos se centró en describir las características de los dibujos y sus relaciones a través de tres categorías: la estructura matemática, la correspondencia informacional y el grado de abstracción. Con la dimensión de modelización matemática se buscó evaluar el desempeño de los estudiantes en este proceso a través de la categoría correspondiente. Es importante mencionar que después del análisis individual por categoría se llevó a cabo un análisis cruzado para observar las relaciones entre las categorías. En la tabla 1 se presenta la organización de las dimensiones de análisis, sus respectivas categorías, indicadores e instrumentos.

Tabla 1. Categorías de análisis (Ott, 2017; Rellensmann, 2016)

Dimensión	Categoría	Indicador	Instrumento / ítem
Características de los dibujos	Estructura matemática	Clasificación de los dibujos con respecto a sus características a partir de los niveles jerárquicos de Ott (2017)	Hoja de trabajo / sección de dibujos
	Correspondencia informacional	Nivel de relación entre los dibujos y la información del enunciado verbal del problema en cuanto a valores, unidades y operaciones.	Hoja de trabajo / sección de dibujos
	Grado de abstracción	Nivel de abstracción de a) los objetos representados y b) las relaciones representadas	Hoja de trabajo / sección de dibujos
Modelización matemática	Desempeño en la modelización matemática	Nivel de desempeño en modelización matemática considerando la construcción correcta del modelo matemático y la respuesta correcta a partir de la herramienta de Rellensmann (2016)	Hoja de trabajo / sección de operaciones

Herramientas de análisis

Los dibujos generados por los estudiantes se procesaron aplicando las herramientas de análisis propuestas por Ott (2017) y Rellensmann *et al.* (2016). La propuesta de clasificación de representaciones gráficas de Ott (2017) se compone de tres categorías de análisis: la estructura matemática, la correspondencia informacional y el grado de abstracción.

Las herramientas de clasificación de Ott (2017) se centran en las características de los dibujos de los objetos y la relación que guardan con la estructura matemática y la información del problema. La clasificación de la estructura matemática se propone a través de una revisión de seis niveles jerárquicos que se determinan de acuerdo con las características de los dibujos: cuando no se trata de una representación gráfica se clasifica como (1) no gráfico (figura 2), cuando el dibujo no guarda relación con el texto del enunciado del problema verbal se clasifica como (2) fuera del texto (por ejemplo, que el dibujo incluyera un automóvil cuando el problema trata de un borrego); cuando tiene relación con el enunciado del problema, pero no incluye los elementos estructuralmente relevantes para la resolución del problema se clasifica como (3) ilustrativo (figura 3), cuando incluye objetos estructuralmente relevantes, pero no sus relaciones, se clasifica como (4) orientado a objetos (figura 4); si incluye los objetos estructuralmente relevantes y sus relaciones se trata de un dibujo diagramático, que a su vez se clasifica considerando la inclusión explícita de información sobre estas relaciones en forma de indicaciones o texto, si no las incluye es clasificado como (5) implícitamente diagramático (figura 5), y si las incluye se trata de un dibujo (6) explícitamente diagramático.

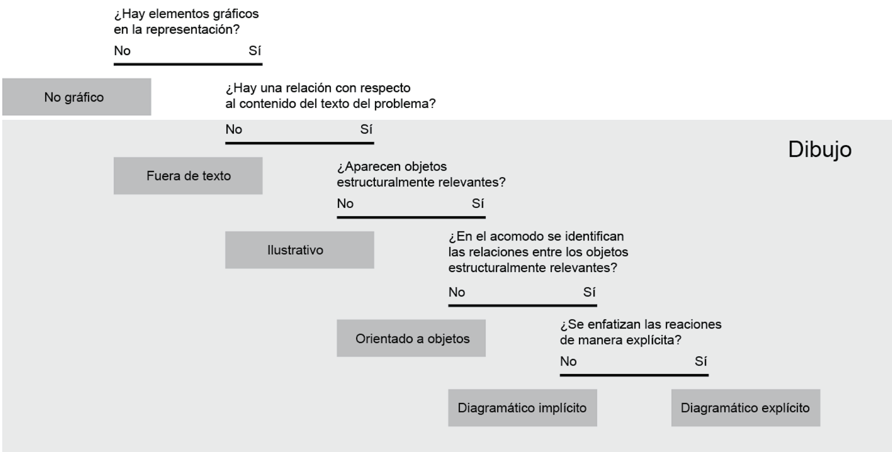


Figura 1. Clasificación de las representaciones de acuerdo con la estructura matemática (Ott, 2017).

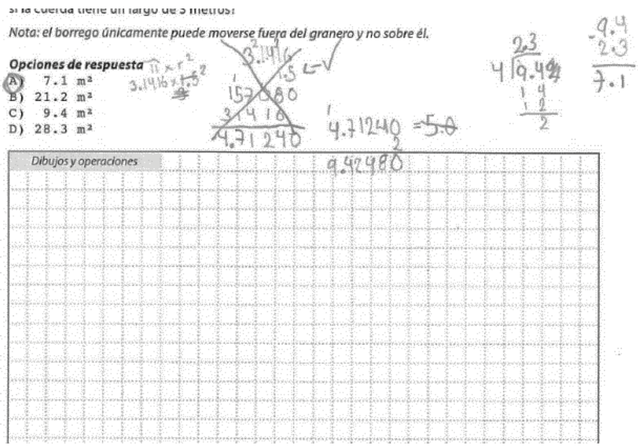


Figura 2. Ejemplo de trabajo de participante clasificado como no gráfico. Se puede notar que la estudiante únicamente realizó operaciones y no aparece ningún dibujo en el área de trabajo.

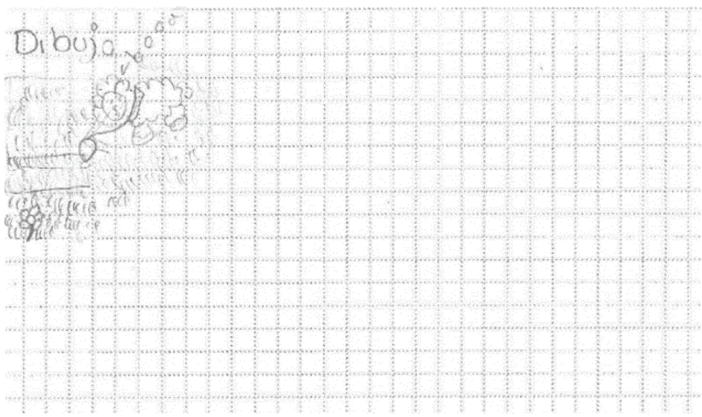


Figura 3. Ejemplo de dibujo clasificado como ilustrativo. El único que realizó la participante en el área de trabajo, solo dibuja objetos que no son matemáticamente relevantes.

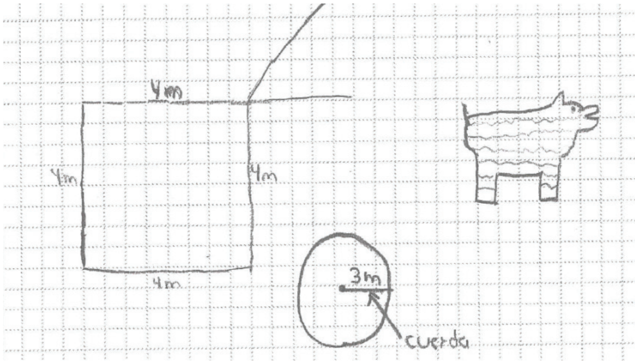


Figura 4. Ejemplo de dibujo clasificado como orientado a objetos ya que solo aparecen los objetos estructuralmente relevantes del problema por separado, sin sus relaciones.

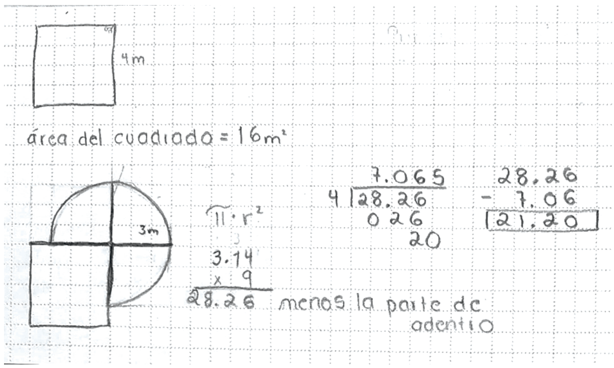


Figura 5. Ejemplo de dibujo diagramático implícito. En él aparecen representados claramente los objetos estructuralmente relevantes y sus relaciones.

Para el análisis de la correspondencia informacional, es decir, qué tanto corresponden los dibujos con la información que se presenta en el enunciado verbal del problema, se revisaron tres variables: correspondencia del valor, correspondencia de las unidades de medida y correspondencia de las operaciones. La correspondencia de valor se refiere a que las cantidades del problema corresponden a las que se representan en el dibujo. La correspondencia de las unidades de medida está relacionada con que se utilicen en los dibujos las unidades correspondientes, por ejemplo: metros cuadrados. Esto es, que, si el enunciado dice que una cuerda mide tres metros, en el dibujo se señale el objeto que representa a la cuerda con una etiqueta que diga "3 metros" o "3 m." La correspondencia de operaciones quiere decir que el estudiante plantea las operaciones correspondientes a lo que se describe en el enunciado. Por ejemplo, cuando un problema verbal dice en su redacción "gasta", el estudiante lo plantee en su área de trabajo como una resta. Para la valoración de esta categoría se utilizan cuatro posibles opciones. Tres de estas opciones corresponden al nivel de correspondencia entre el dibujo y el texto con el enunciado del problema. Estas tres opciones son: "completa" (si corresponde totalmente con el enunciado), "parcial" (si corresponde únicamente parcialmente), e "inexistente" (si es que no hay correspondencia con la información del enunciado). La cuarta opción, "no se cumple", se utiliza en caso de que no haya un dibujo con el cual realizar esta valoración de correspondencia.

El grado de abstracción se determina a partir de dos indicadores: el foco en los objetos que son estructuralmente relevantes en el dibujo, es decir, dibujos de objetos que aportan información matemáticamente relevante para la resolución del problema, y el foco en las cualidades matemáticamente relevantes de estos objetos. Ambos indicadores del grado de abstracción se valoran con un nivel de bajo o alto. Un ejemplo de grado de abstracción bajo se aprecia en la figura 3, donde se dibujaron objetos concretos con su apariencia real como el borrego y el pasto. A diferencia de esto, un ejemplo de nivel de abstracción alto se puede apreciar en la figura 5, donde aparecen objetos matemáticos abstractos como cuadrado, círculo, radio, en lugar del borrego y el pasto.

Para evaluar el desempeño en modelización se utilizó la escala propuesta por Rellensmann *et al*, (2016). Esta herramienta analítica estima la precisión de las soluciones de los participantes en una escala de tres puntos. La codificación del desempeño de evaluación de los autores considera la corrección de la respuesta y las causas de las que derivan respuestas incorrectas. La puntuación se establece de la siguiente manera: dos (2) puntos para una solución correcta del problema, un (1) punto para soluciones incorrectas derivadas únicamente de errores de cómputo y cero (0) puntos para soluciones incorrectas que resultaron de una matematización incorrecta.

RESULTADOS

A partir de la aplicación de la herramienta de análisis para evaluar el desempeño en modelización matemática propuesto por Rellensmann *et al.* (2016), 18 de los

63 estudiantes obtuvieron una puntuación máxima de dos (implicando una modelización y respuesta correctas), 23 obtuvieron una puntuación de uno y 22 obtuvieron la puntuación mínima de cero. Aunque más de 18 estudiantes seleccionaron la respuesta correcta, solo se consideraron para la puntuación máxima aquellas que incluyeron un modelo matemático u operaciones que la validaran. No se consideraron como desempeño alto en modelización los casos que obtuvieron una respuesta correcta pero que (1) no realizaron un modelo correcto, (2) llevaron a cabo estrategias alternativas que no implicaban la construcción de un modelo matemático (como la estrategia de conteo que se menciona en la sección de discusión), (3) ni los casos en los que no se incluyeron modelos ni operaciones (tabla 2).

Aunque se pidió a todos los estudiantes que argumentaran la respuesta, solo un porcentaje menor presentó una validación explícita de su estrategia de solución. Entre los 18 estudiantes que respondieron correctamente hubo quienes utilizaron diferentes estrategias en las operaciones. Una vez que aplicaron la fórmula tomaron distintos caminos para obtener las tres cuartas partes del área total del círculo. Algunos dividieron y restaron, mientras que otros dividieron y multiplicaron. Todos estos casos se consideraron en la clasificación de respuesta correcta.

Tabla 2. Desempeño en modelización

Respuesta	Total
Correcta (2 puntos)	18
Incorrecta (errores en la construcción del modelo o en las operaciones (1 punto)	22
Incorrecta (0 puntos)	23

La mayoría de las representaciones muestran características diagramáticas y aportan, al menos de manera parcial, información que es matemáticamente relevante (12 orientadas a objetos y 46 diagramáticas). En los tipos de dibujo *fuera de texto* y *no gráfico* se presentó un caso en cada una y la categoría de *dibujo explícitamente diagramático* quedó vacía con cero incidencias (tabla 3). De acuerdo con Ott (2017), el diagrama explícito debe incluir información clara sobre las relaciones entre los objetos estructuralmente relevantes. Aunque los estudiantes trabajen eficazmente, suelen omitir la escritura con la explicación de la relación entre los objetos. En el caso de los participantes del estudio, aquellos que la comprendieron y la aplicaron, no la registraron en la hoja de trabajo.

Tabla 3. Clasificación a partir del análisis de la estructura matemática

Estructura matemática	Total
No gráfico	1
Fuera de texto	0
Ilustrativo	4
Orientado a objetos	12
Implícitamente diagramático	46
Explícitamente diagramático	0

En cuanto a la correspondencia informacional, se destaca que el resultado de la medición es, en su mayoría, una correspondencia completa en términos de valores y unidades, sin embargo, únicamente parcial en términos de la apariencia de las operaciones asociadas con el dibujo (tabla 4). Esto es, los dibujos que construyeron los estudiantes se relacionaron con el enunciado del problema, pero no con las operaciones. Es importante recordar que estas categorías de análisis se aplican a los dibujos. En la tabla 4, la correspondencia con respecto a las operaciones no se refiere a que estas se hayan realizado correctamente, sino a qué tanto corresponden con lo que se construye en el dibujo. Algunos estudiantes no construyen una relación de representación entre el dibujo y las operaciones, sin embargo, realizan una modelización adecuada y resuelven correctamente las operaciones.

Tabla 4. Correspondencia informacional

	Correspondencia completa	Correspondencia parcial	No existente	No se cumple
Valor	21	14	27	1
Unidad medida	21	9	32	1
Operaciones	7	3	52	1

Sobre el grado de abstracción, un número considerable de los dibujos (36) fue evaluado con un alto puntaje. De los dibujos identificados con bajo nivel de abstracción, la mayoría se encontraban combinados con representaciones de nivel alto. Es decir, se encontraron muy pocas representaciones gráficas que fueran totalmente de bajo nivel de abstracción (tabla 5). El nivel bajo-bajo se puede observar en la figura 3, donde no se dibujan los objetos estructuralmente relevantes ni sus relaciones. El nivel bajo-alto se ejemplifica en la figura 4, donde aparecen en el dibujo objetos que no son estructuralmente relevantes (en este caso el borrego), pero también las cualidades estructuralmente relevantes. El nivel alto-bajo se puede observar en la figura 6, donde aparecen solo los objetos estructuralmente relevantes, sin embargo, sus cualidades se encuentran "decoradas" con detalles ilustrativos. En el nivel alto-alto, se encuentra el dibujo de la figura 5, donde únicamente aparecen en el dibujo los objetos estructuralmente relevantes y sus cualidades.

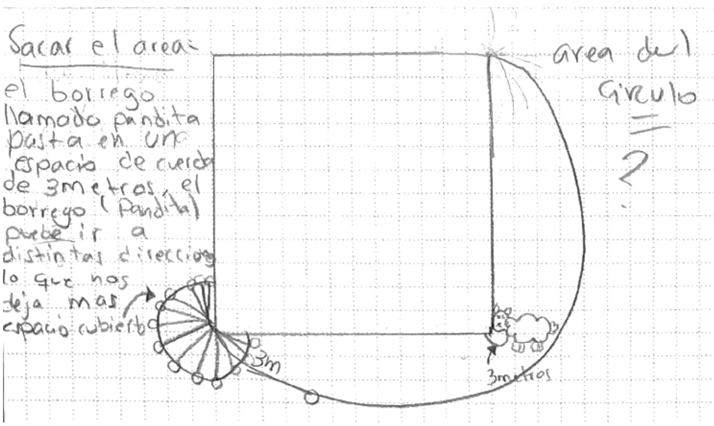


Figura 6. Ejemplo de dibujo con un nivel de abstracción alto-bajo. A pesar de que aparecen los objetos estructuralmente relevantes el énfasis está en la decoración de las relaciones en lugar de sus cualidades matemáticamente relevantes.

El producto de uno de los participantes no se evaluó en cuanto a su grado de abstracción ya que se clasificó previamente como no gráfico.

Tabla 5. Grado de abstracción

Grado de abstracción Objetos-Relaciones	Casos
Alto – Alto	36
Alto – Bajo	15
Bajo – Alto	6
Bajo – Bajo	5
No aplica (No gráfico)	1

En la mayoría de los casos se apreció una relación entre la información que provee el texto y lo que se representa en el dibujo. Al final, se presentó un número significativo de dibujos con características diagramáticas, sin embargo, solo algunos de ellos contenían información matemáticamente relevante y mostraron tener impacto en el proceso de modelación matemática. Los dibujos diagramáticos y las notas sobre las hojas de trabajo muestran que, a partir de este tipo de representación gráfica, los estudiantes fueron capaces de identificar la figura, tomar decisiones y seleccionar la fórmula necesaria.

Clasificación de los dibujos por sus características

La figura 5 es un ejemplo de dibujo diagramático implícito, ya que contiene elementos estructuralmente relevantes (se identifica la figura circular y su radio), y se puede apreciar la relación entre estos objetos a partir del acomodo en el área de trabajo. En este caso, se observa claramente en el dibujo la división de la figura en cuartos, aspecto que es clave para establecer el modelo matemático y llegar a la respuesta correcta.

En la figura 7 se presenta también un dibujo diagramático implícito (pues aparecen los objetos estructuralmente relevantes y sus relaciones) con nivel de abstracción alto, sin embargo, no aparece ninguna etiqueta y la correspondencia informacional es parcial. En este caso no se construyó un modelo matemático a partir de fórmulas y operaciones, sino que el participante resolvió el problema aplicando una estrategia de conteo de cuadrados. Lo anterior dio como resultado que su desempeño en modelización se evaluara como cero (0), ya que, aunque es una estrategia que se podría considerar válida para la solución del problema, no incluye el proceso de construcción de un modelo matemático. Como este caso, se presentaron varios que mostraron que, aun cuando el dibujo tenga características diagramáticas, la falta de correspondencia informacional y la carencia de conocimientos específicos para lograr la matematización a partir del dibujo impiden que se lleve a cabo una modelización matemática adecuada.

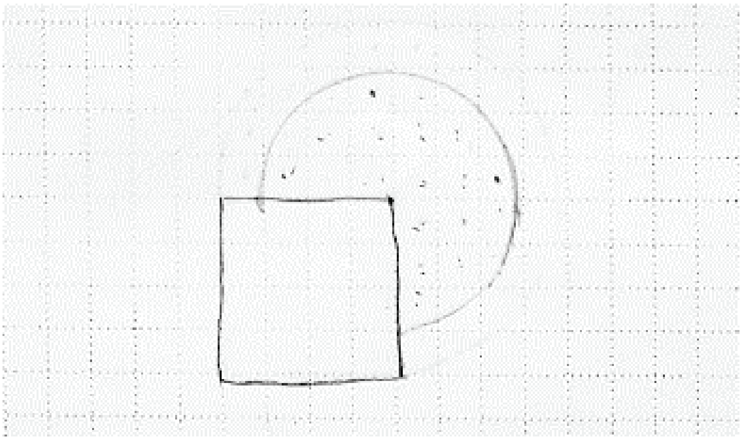


Figura 7. Dibujo que presenta la evidencia de la estrategia de conteo de cuadrados. Se pueden apreciar claramente los puntos marcados sobre el sector circular

Es importante destacar que el hecho de que los dibujos se clasifiquen como diagramáticos no significa que la información que representan es correcta o guarde relación con el texto del enunciado del problema. De acuerdo con la clasificación de Ott (2017), un dibujo se considera diagramático si contiene objetos que son matemáticamente relevantes y sus relaciones, pero no lo condiciona a su corrección o relación con el texto del problema ya que eso se evalúa con las herramientas de grado de abstracción y correspondencia informacional. Algunos casos de dibujo se clasificaron como diagramático implícito pues corresponden con la representación de objetos con sus respectivas relaciones, sin embargo, su dibujo es incorrecto, ya sea porque no corresponde completamente con el texto (correspondencia informacional parcial) o por errores con respecto a la figura y sus características (esto se aprecia en la figura 8 en la que a pesar de tener características de diagrama representa una figura cuadrada en lugar de circular). Ambos casos derivaron en una calificación de desempeño en modelización de cero (0), porque presentaron dificultades para construir un modelo matemático adecuado y no llegaron a la respuesta correcta.

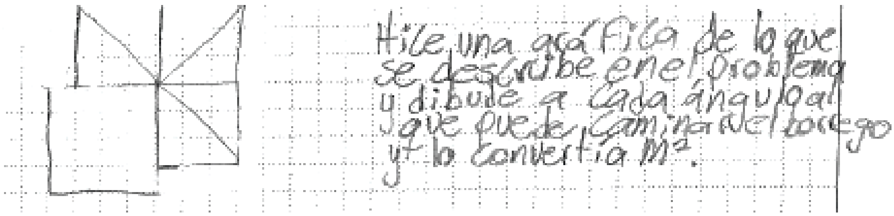


Figura 8. Ejemplo de error en la identificación de la figura que describe el movimiento del animal. En este caso se identifica una figura cuadrada en lugar de circular.

Relación entre la clasificación de las representaciones y el desempeño

Con respecto del desempeño de modelización, todos los participantes que construyeron un modelo adecuado y llegaron a la respuesta correcta realizaron un dibujo clasificado como diagramático con una correspondencia informacional completa. Es decir, no todos los estudiantes que realizaron un dibujo diagramático lograron un buen desempeño en la resolución del problema, sino solo aquellos que además de esto cumplían con la correspondencia informacional o congruencia del dibujo con respecto del planteamiento del problema. En todos los casos de éxito en modelización matemática se presentó en el dibujo una correspondencia completa con el texto del problema y un manejo correcto de los objetos, sus dimensiones y proporciones (tabla 6). Se interpreta que, la condición para que el dibujo contribuyera al éxito en la tarea de matematizar es la realización de un dibujo diagramático, con un grado de abstracción alto y una correspondencia informacional al menos parcial.

Tabla 6. Relación entre características del dibujo – desempeño en modelización

Desempeño en modelización	Clasificación del dibujo	Correspondencia informacional del dibujo	Cantidad de participantes
0	No gráfico	N/A	1
0	Ilustrativo	Parcial	2
0	Orientado a objetos	Parcial	7
0	Diagramático implícito	Parcial	13
1	Ilustrativo	Parcial	2
1	Orientado a objetos	Completa	5
1	Diagramático implícito	Completa	15
2	Diagramático implícito	Parcial	8
2	Diagramático implícito	Completa	10

Precisión del trazo y herramientas de dibujo

Es importante aclarar que la precisión del trazo del dibujo no entra dentro de las categorías de análisis de este trabajo de investigación, sin embargo, surgió como un aspecto emergente que fue llamativo durante el proceso. En el caso del nivel de precisión del trazo del dibujo, no se relaciona con las categorías de análisis, ya que no hay una herramienta aplicada que la considere. Más bien, se refiere a una característica de los dibujos. La cuadrícula y el uso del compás contribuyeron a la precisión del trazo del dibujo en términos de su forma y dimensiones. En algunos casos, la precisión del trazo del dibujo derivada del uso del compás y la cuadrícula ayudó a los estudiantes a identificar el objeto matemático y sus características. Sin embargo, algunos estudiantes demostraron ser capaces de llevar a cabo un proceso de matematización adecuado sin necesidad de una precisión alta en el trazo (figura 5). Aunque el uso de representaciones gráficas con características diagramáticas y la correspondencia informacional mostraron una relación con un mejor desempeño en modelización, la precisión del trazo no parece desempeñar un papel tan importante. Esto es, siempre y cuando el dibujo presente de manera correcta y coherente a los objetos relevantes y sus relaciones.

Recordar la fórmula

En cuanto a la resolución del problema, se observaron dos categorías entre los estudiantes: aquellos que recordaban la fórmula para el área del círculo y aquellos que no.

Algunos de los estudiantes lograron matematizar de manera exitosa gracias a que el dibujo les permitió identificar la figura y recordaban la fórmula de área de figura circular. Sin embargo, no todos los que recordaban la fórmula pudieron realizar una matematización adecuada. Se dio el caso de estudiantes que aun cuando recordaban la fórmula del área del círculo no respondieron correctamente, pues no identificaron que se trataba de un sector circular y lo consideraron como un círculo completo. En estos casos los estudiantes aplicaron la fórmula e hicieron la multiplicación correcta, pero no llevaron a cabo las operaciones correspondientes para obtener el área del sector circular (3/4 del círculo).

Muchos de los estudiantes tuvieron problemas para dar el paso a la matematización ya que no recordaron la fórmula para obtener el área de un círculo (πr^2). En esta situación, se presentaron tres casos:

Primer caso: aquellos estudiantes que abandonaron el ejercicio hasta el dibujo. Estos solo llegaron al dibujo y desde allí, al no encontrar un vínculo con la matematización, renunciaron a la resolución del problema. De ellos, algunos no dieron respuesta y otros seleccionaron una respuesta de manera aleatoria.

Segundo caso: aquellos que configuraron y resolvieron operaciones sin una conexión lógica con el dibujo, haciendo diferentes combinaciones de operaciones básicas (especialmente multiplicación y división) con las cantidades dadas en el problema. Según los datos obtenidos, los estudiantes tendieron a relacionar los cálculos de área con la multiplicación. Es posible que esto se deba a que la mayoría de las fórmulas de área incluyen esta operación.

Tercer caso: aquellos que eligieron utilizar un método alternativo para determinar el área; gracias a la presencia de la cuadrícula en la hoja de trabajo, los estudiantes fueron capaces de aplicar la estrategia alternativa de contar los cuadrados dentro del sector circular y a partir de eso, hacer una estimación, como se aprecia en la figura 7.

Características de los dibujos

Contrario a lo que se esperaba, hubo pocos casos de estudiantes que se quedaron estancados en la fase del dibujo ilustrativo sin avanzar a uno diagramático o a la propuesta de un modelo matemático. La mayoría fueron directamente de la lectura a un dibujo con características diagramáticas. Solo un par de casos que utilizaron dibujos ilustrativos se quedaron atascados en esa fase del proceso y no pudieron resolver el problema con éxito. En los otros casos, los estudiantes complementaron los dibujos ilustrativos con dibujos diagramáticos y lograron la solución correcta o al menos acercarse a ella.

A manera de sumario, entre los estudiantes que utilizaron representaciones gráficas, se observó una relación significativa entre las características de los dibujos y su desempeño en modelización matemática. La combinación de dibujos diagramáticos con alto grado de abstracción y con completa correspondencia informacional resultó en un mejor desempeño de modelización. Cabe resaltar que no resultan igualmente efectivos si solo cuentan con una de estas tres características. Los dibujos diagramáticos contienen información que es matemáticamente relevante, por lo que ayudaron a los estudiantes a identificar al objeto matemático, sus respectivas características y propiedades, y por lo tanto a dar el paso hacia los procedimientos matemáticos, es decir en la transición de la matematización (figura 9). En este sentido el dibujo con características diagramáticas que corresponde con la información que se presenta en el enunciado del problema parece hacer la función de un puente más efectivo hacia la matematización.

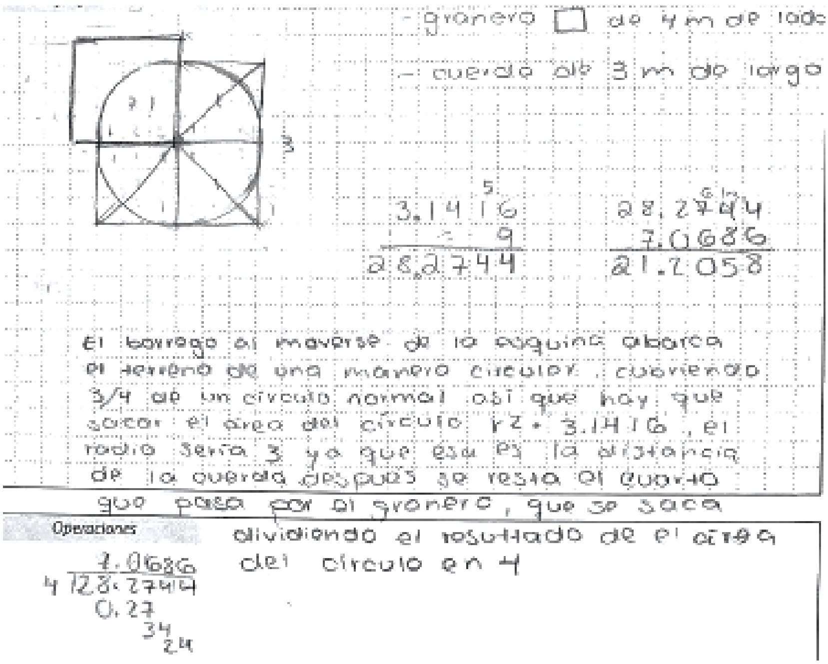


Figura 9. Ejemplo de dibujo diagramático implícito con modelo matemático correcto. Se aprecia la relación entre el dibujo, el modelo y la validación de la respuesta.

DISCUSIÓN

A partir de los hallazgos de este estudio se refuerza la idea de que las representaciones con características diagramáticas (al contrario de las ilustrativas) contribuyen a un mejor desempeño en la resolución de problemas matemáticos que implican razonamiento (Hegarty y Kozhevnikov, 1999; Rellensmann *et al.*, 2016). En el proceso de construir un modelo matemático, la transición hacia la matemática, es decir la matematización implica el procesamiento de información. Es por ello, por lo que parece que las representaciones gráficas que incluyen información que es matemáticamente relevante son particularmente útiles para este propósito.

Por los resultados en la relación entre la clasificación del dibujo realizado por el participante y el desempeño en modelización se puede inferir que la realización del dibujo diagramático (con alto grado de abstracción y correspondencia informacional completa) es un requisito, mas no una garantía de éxito para el subproceso de matematización. Conforme se alejan los estudiantes de la realización de dibujos con características diagramáticas, la probabilidad de tener éxito en el proceso de modelización disminuye considerablemente, como lo evidencian los resultados concentrados en la tabla 6.

En cuanto a las herramientas de análisis, a diferencia de las clasificaciones dicotómicas, la herramienta analítica de representaciones gráficas de Ott (2017) funciona como un predictor más preciso, ya que no solo considera las características diagramáticas o ilustrativas (dependiendo del grado de abstracción), sino también otros factores involucrados en el éxito del proceso de modelización matemática en problemas matemáticos, como lo son: la relación con el texto, la presencia de elementos estructuralmente relevantes, la correspondencia informacional con el texto del problema, y la relación visible de los elementos entre sí a partir de su acomodo.

Sobre las principales dificultades y barreras que presentaron los estudiantes para resolver el problema exitosamente se dieron diferentes casos. Algunas dificultades tuvieron que ver con la falta de modelos o representaciones adecuados, otras con la falta de conocimientos matemáticos, como la fórmula de área, y algunas más con la ausencia de una relación correcta del movimiento del animal. Sobre este último punto, a pesar de no ser claro, esta situación de relación incorrecta sobre el movimiento del animal llama la atención y podría deberse a limitaciones del conocimiento matemático o del mundo real. Ya sea por un modelo equivocado que establece una relación fija entre el concepto de área y las figuras exclusivamente cuadradas o por la ausencia de conocimiento real sobre el comportamiento del movimiento que describe un animal cuando está atado. Un ejemplo de tal comportamiento se puede apreciar en la figura 8.

El formato de opción múltiple para la respuesta pareció influir en los procesos de los estudiantes, especialmente en la verificación de la respuesta. Los estudiantes aceptaron o descartaron las posibilidades de respuesta obtenidas a partir de la comparación con las cuatro opciones. Algunos de ellos incluso lo expresaron por escrito, como lo mencionó un participante: "Conté las casillas y obtuve 22, así que elegí la que se acercó más". La aplicación de entrevistas podría ayudar a hacer interpretaciones más profundas sobre la influencia del formato de opción múltiple en los problemas verbales de área.

Dado el potencial mediador de las representaciones gráficas, es importante analizar cómo el proceso de dominio del uso de dibujos puede llevar a los estudiantes hacia la formalización donde sean capaces de marcar la diferencia entre el dibujo y la figura representada (Duval, 2006), entre las características del trazo y la propiedades del objeto matemático. De manera que el uso abstracto del dibujo no solo está dado porque contiene características de diagrama, sino porque puede ser utilizado como un medio de relación de propiedades geométricas con posibles estrategias aplicables a su solución.

CONCLUSIONES

La aportación de este estudio consiste en recabar más información sobre la influencia de las características y uso de las representaciones gráficas en el desempeño de modelización matemática. De manera específica, en esta investigación se buscó abordar los resultados del análisis del uso de representaciones gráficas con tipos de problemas y contextos culturales diferentes. Otra aportación del estudio está dada por la revisión de algunos aspectos implicados en el uso efectivo de las representaciones gráficas que no han sido abordados en otras indagaciones, como el uso de estrategias alternativas de solución a partir del ejercicio del dibujo y las condiciones de su construcción.

Algunos autores sostienen que el uso de representaciones gráficas tienen el potencial de impedir que los estudiantes obedezcan ciegamente el contrato didáctico (Deliyianni *et al*., 2009). Sin embargo, las investigaciones también apuntan a que la utilidad de las representaciones en la resolución de problemas matemáticos depende de sus características y de cómo se utilicen. Como se observó en el estudio de Dewolf *et al*. (2014) la inclusión de representaciones en el enunciado del problema no impidió que los estudiantes hicieran a un lado el sentido común y, por lo tanto, dieran respuestas poco realistas. A partir de esto, se puede concluir que el simple hecho de incluir representaciones gráficas no elimina la carga del contrato didáctico que propicia una tendencia a la simple mecanización. Hay más trabajo de investigación por hacer para determinar si el uso de las representaciones gráficas incide de manera positiva en la solución exitosa de problemas de modelización.

Esto podría estar relacionado con que un gran número de estudiantes no conciben la resolución de los problemas como una oportunidad para pensar, sino como un proceso mecanizado de operar las cantidades que presentan los enunciados del problema. El uso estratégico del dibujo tiende a surgir cuando hay una necesidad de comprender la situación para construir un modelo matemático. La concepción de la resolución de problemas como un proceso mecanizado reduce la definición de dibujo como una herramienta útil para hacer matemáticas, mientras que asociar la resolución de problemas con el proceso de exploración la fomenta.

En el contexto de la resolución de problemas geométricos de modelización, la acción de dibujar se puede dar en dos posibles escenarios. Por un lado están los dibujos que hacen los estudiantes cuando el texto del problema lo solicita y los dibujos que los estudiantes deciden hacer por iniciativa propia a partir de las características del problema, es decir los dibujos espontáneos (Cuoco y Curcio, 2001; Kamii *et al.*, 2001). El escenario de los dibujos espontáneos implica que los estudiantes consideran que las representaciones gráficas forman parte del repertorio de estrategias de las que cuentan para la resolución de problemas matemáticos; por lo tanto, es posible definir su uso como deliberado y estratégico (Rellensmann *et al.*, 2019).

Futuras investigaciones podrían profundizar en el conocimiento que los estudiantes ponen en juego cuando se enfrentan a problemas matemáticos. Del mismo modo, se necesita más investigación sobre el papel que desempeña el dibujo como centro de actividad e información en las estrategias de resolución de problemas. Algunas preguntas clave que quedan abiertas son: ¿Cuál es el propósito de los dibujos que hacen los estudiantes ante un problema de modelización matemática?, ¿qué función dan los estudiantes a los dibujos? y ¿de qué dependen estas decisiones?

Los hallazgos de esta investigación muestran que los estudiantes reconocen la utilidad de los dibujos como una herramienta para entender la situación del problema, identificar los objetos matemáticos en cuestión y proponer el modelo matemático para su solución. Sin embargo, la falta de habilidades específicas en la representación y de conocimientos matemáticos impide que algunos de ellos aprovechen al máximo la actividad de dibujo. La información que se acumula sobre el tema parece apuntar a que una formación más sólida en el uso efectivo de representaciones gráficas en el contexto matemático, llevaría a los estudiantes a obtener mejores resultados en la comprensión y resolución de problemas geométricos de modelización.

REFERENCIAS

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215–241. https://doi.org/ED419696

Blum, W. (2014). Mathematical Modeling: How Can Students Learn to Model? *Conference on Mathematical Modeling*, 54–61.

Boaler, J. (2916). *Mathematical Mindsets*. Josey-Bass.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theorical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 86–95.

Borromeo Ferri, R. (2015). Learning and teaching of Mathematical Modeling chances and challenges for a broad Mathematics Education in school. En L. A. Hernández, J. A. Juárez, y J. Slisko (Eds.), *Tendencias en la educación matemática basada en la investigación* (pp. 39–52). Benemerita Universidad Autónoma de Puebla.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *9*(3), 309–336.

Clements, D. H., y Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420–464). Macmillan.

Cuoco, A. A., y Curcio, F. R. (2001). *The roles of representation in School Mathematics* (A. A. Cuoco y F. R. Curcio (eds.)). National Council of Teachers of Mathematics.

D'Amore, B. (2011). *Didáctica de la Matemática*. Magisterio.

Deliyianni, E., Monoyiou, A., Elia, I., Georgiou, C., y Zannettou, E. (2009). Pupils' visual representations in standard and problematic problem solving in mathematics: their role in the breach of the didactical contract. *European Early Childhood Education Research Journal*, *17*(1), 95–110. https://doi.org/10.1080/13502930802689079

Dewolf, T., Van Dooren, W., Ev Cimen, E., y Verschaffel, L. (2014). The impact of illustrations and warnings on solving mathematical word problems realistically. *Journal of Experimental Education*, *82*(1), 103–120. https://doi.org/10.1080/00220973.2012.745468

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(103–2), 103–131.

Galbraith, P. L., y Stillman, G. A. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 143–162. https://doi.org/10.1007/BF02655886

Hegarty, M., y Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, *91*(4), 684–689. https://doi.org/10.1037/0022-0663.91.4.684

Hochpöchler, U., Schnotz, W., Rasch, T., Ullrich, M., Horz, H., McElvany, N., y Baumert, J. (2013). Dynamics of mental model construction from text and graphics. *European Journal of Psychology of Education*, *28*(4), 1105-1126. https://doi.org/10.1007/s10212-012-0156-z

Juárez, J. A., Slisko, J., y Hernández, L. A. (2014). La construcción del modelo situacional de un problema matemático: El análisis basado en el marco del Experimentador inmerso. *Números*, *87*, 165–173.

Kamii, C., Kirkland, L., y Lewis, B. A. (2001). Representation and abstraction in young children's numerical reasoning. En A. A. Cuoco y F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in School Mathematics* (pp. 24–34). NCTM.

Leiss, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R., y Pekrun, R. (2010). The Role of the Situation Model in Mathematical Modelling–Task Analyses, Student Competencies, and Teacher Interventions. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*, 119–141.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 113–142. https://doi.org/10.1007/BF02655885

Ott, B. (2016). *Textaufgaben grafisch darstellen. Entwicklung eines Analyse- instruments und Evaluation einer Interventionsmaßnahme*. Waxmann.

Ott, B. (2017). Children's drawings for word problems – design of a theory and an analysis tool. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of European Research in Mathematics Education*.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas. https://doaj.org/article/33627bd287174c2c9cba12eaca324ee2

Rellensmann, J., Schukajlow, S., y Leopold, C. (2016). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(1), 53–78. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9736-1

Rellensmann, J., Schukajlow, S., y Leopold, C. (2019). Measuring and investigating strategic knowledge about drawing to solve geometry modelling problems. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *August*. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01085-1

Schnotz, W. (2002). Towards an integrated view of learning from text and visual displays. *Educational psychology review*, *14*(1), 101–120. https://doi.org/10.1023/A:1013136727916

Schnotz, W. (2014). Visuelle kognitive Werkzeuge beim Mathematikverstehen. En J. Roth y J. Ames (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 48. Tagung für Didaktik der Mathematik* (pp. 45–52). WTM.

Autor de correspondencia

José Antonio Juárez López

Dirección: Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel, Edificio FM1-101B, Ciudad Universitaria, C.P. 72570, Puebla, México. jajul@fcfm.buap.mx

 https://doi.org/10.24844/EM3501.04

Efectos de la riqueza perceptual de imágenes y objetos en la comprensión de la palabra número tres en niños en la etapa preescolar

Effects of perceptual richness of pictures and objects on preschoolers' comprehension of the number word three

Jimena Rodríguez,[1] Eduardo Martí,[2] Analía Salsa[3]

Resumen: Este estudio analiza los efectos de la riqueza perceptual de colecciones de objetos e imágenes en la comprensión de la palabra número "tres". Participaron 80 niños de 3 años distribuidos aleatoriamente a una de cinco condiciones (cuatro de intervención y una de control). Durante cinco encuentros se realizaron el pretest (tarea Dame un Número), tres sesiones de intervención y evaluaciones parciales (tarea Señala X) y el postest (Dame un Número). Los resultados muestran que la condición imágenes sin riqueza perceptual (colecciones de círculos negros) fue la que impactó más positivamente en el desempeño infantil. Además, las imágenes y los objetos (tapas negras de botella) sin riqueza perceptual, en comparación con las condiciones con riqueza perceptual (imágenes coloridas de animales y bloques de construcción), permitieron un avance más rápido y significativo en el desempeño en el transcurso de las sesiones de intervención. Estos hallazgos señalan que, para esta edad y en relación con la comprensión cardinal de la palabra número tres, la riqueza

Fecha de recepción: 5 de noviembre de 2020. **Fecha de aceptación:** 5 de diciembre de 2022.

[1] Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina. orcid.org/0000-0002-8215-9554.

[2] Universidad de Barcelona, España. orcid.org/0000-0003-0000-4688.

[3] Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). orcid.org/0000-0003-4253-7562.

perceptual de imágenes y objetos tendría efectos disruptivos. Se discuten las implicaciones educativas de estos resultados.

Palabras clave: *comprensión cardinal, palabras número, imágenes, objetos, riqueza perceptual*

Abstract: This study analyzed the effects of perceptual richness of collections of objects and pictures on the comprehension of the number word "three". Eighty 3-year-old children, distributed randomly to one of five conditions (four interventions and a control condition), participated. A pretest (Give a Number task), three intervention sessions and partial evaluations (Point to X task), and a posttest (Give-N) were carried out over five sessions. The results show that the condition of pictures without perceptual richness (black circles) was the one that had the most positive impact on children's performance. In addition, pictures and objects (black bottle caps) without perceptual richness, in comparison to the conditions with perceptual richness (colorful pictures of animals and building blocks), allowed for a faster and more significant advance in performance during the intervention sessions. These findings indicate that, at this age and in relation to the number word three, perceptual richness of pictures and objects has disruptive effects on cardinal comprehension. The educational implications of these results are discussed.

Keywords: *cardinal comprehension, number words, pictures, objects, perceptual richness*

INTRODUCCIÓN

La comprensión numérica en niños[4] preescolares ha sido abordada en numerosas investigaciones, siendo el aspecto cardinal del número el que más atención ha recibido. Entre estas investigaciones se destacan especialmente las centradas en la adquisición de las palabras número (Condry y Spelke, 2008; Gelman y Gallistel, 1978; Sarnecka y Lee, 2009; Wynn, 1990, 1992; Wagner *et al.*, 2019). En

[4] A los efectos de facilitar la lectura del artículo, utilizamos el masculino genérico "niños" para referirnos a niñas y niños.

estos estudios, el conocimiento cardinal ha sido examinado usando una variedad de pruebas, entre las cuales la tarea *Dame un Número* (Wynn, 1990, 1992) ha sido la más utilizada. Esta tarea consiste en ofrecer a los niños una colección de objetos (por ejemplo, 16 peces de juguete) y solicitarles que construyan colecciones de cantidades específicas enunciando diferentes palabras número (e.g., "¿Podrías poner tres peces en la pecera?"). Los resultados muestran que los niños aprenden el significado de las palabras número lentamente y en orden, transcurriendo aproximadamente 18 meses, entre los 2 y los 4 años, desde que producen colecciones de tamaño 1 hasta que pueden hacerlo con colecciones de 4 o más elementos. En ese momento, se sostiene que los niños demuestran haber adquirido el principio de cardinalidad (comprenden que la última palabra número que alcanzan al contar una colección representa la cantidad de elementos de esa colección).

Desde la propuesta de los niveles de conocimiento (Carey, 2009; Sarnecka y Lee, 2009; Wynn, 1992) se acuñaron las expresiones "conocedores de uno", "conocedores de dos" y "conocedores de tres" para referirse a los niños que son exitosos en la tarea Dame un Número con las cantidades 1, 2 y 3, "conocedores cardinales" para los niños que construyen colecciones de 4 y más elementos y "no conocedores" para aquellos que no relacionan ninguna palabra número con su valor cardinal. Más allá de distintas objeciones que este modelo ha recibido, en función del papel de la subitización (Benoit *et al.*, 2004), del conteo (Davidson *et al.*, 2012) y de variaciones de la tarea (Krajcsi, 2021; Marchand *et al.*, 2022) en la comprensión de las primeras palabras número, todas estas investigaciones ponen el énfasis en las representaciones verbales. Sin embargo, el conocimiento cardinal no se expresa y comunica únicamente mediante palabras número.

Desde muy temprano en sus vidas, los niños interactúan en su ambiente sociocultural con diversas representaciones numéricas (gestos con los dedos, palabras número, notaciones, y en determinadas situaciones, colecciones de objetos y colecciones representadas en imágenes) que implican demandas cognitivas y simbólicas diferentes a la hora de su comprensión, producción y/o uso. Estas representaciones externas no solo sirven de soporte a los procesos cognitivos, sino que crean nuevos modos de pensar, actuar y comunicar con y sobre los números (Martí, 2003; Pérez-Echeverría y Scheuer, 2009; Tolchinsky, 2007).

De acuerdo al modo de representar un valor cardinal, se puede distinguir entre representaciones icónicas y arbitrarias. Las icónicas son aquellas que representan iterativamente un valor cardinal (por ejemplo, 5 dedos, 5 tapas o 5 marcas en un papel para el valor cardinal 5). Los gestos numéricos, las colecciones de objetos y en imágenes están compuestas por el mismo número de elementos que el valor cardinal referenciado. En cambio, las palabras número en el registro oral o escrito (cinco) y los numerales arábigos (5) establecen una relación arbitraria con su referente: un único signo representa un valor cardinal y no existe ninguna correspondencia entre las características perceptuales de la palabra o el numeral y el valor cardinal referenciado.

Estas diferencias pueden ser importantes si se consideran las situaciones educativas en las que los niños en el nivel preescolar construyen conocimientos numéricos. Las colecciones de objetos y las colecciones en imágenes son empleadas frecuentemente por padres y educadores para comunicar y reflexionar sobre los números. Bloques, fichas, palillos, imágenes coloreadas son utilizadas por los docentes para que los niños los clasifiquen de acuerdo a sus propiedades, cuenten cuántos elementos hay en una colección y construyan o comparen colecciones de distintos valores cardinales. El empleo de estos materiales se fundamenta en la idea, con una tradición fuerte en enfoques constructivistas de la psicología y de la educación, de que es más sencillo para los niños comprender conceptos abstractos y apropiarse de procedimientos específicos con el apoyo de recursos concretos que hacerlo sin un apoyo material (Bruner, 1986; Montessori, 1917; Piaget, 1970).

Ahora bien, es posible preguntarse si el uso de objetos con determinadas características podría tener alguna influencia en la comprensión cardinal. De hecho, la mayor parte de las investigaciones hasta aquí revisadas utilizaron colecciones de objetos y en imágenes en sus tareas, pero con la atención puesta en las palabras número como representaciones del valor cardinal de las colecciones y sin interrogarse sobre las particularidades físicas y semióticas de los objetos y las imágenes (Le Corre y Carey, 2007; Sarnecka, 2015; Spaepen *et al.*, 2018; vanMarle *et al.*, 2014). Estas limitaciones aparecen en un estudio llevado a cabo por Huang *et al.* (2010), quienes emplearon un diseño pre- y post-test para examinar la comprensión de las palabras número tres y cuatro por parte de niños de 3 años y medio de edad. En el pre-test usaron la tarea Dame un Número para evaluar en qué nivel de conocimiento se situaban los niños. Los "conocedores de dos" participaron de una intervención en la que se presentaban tarjetas con una colección de 3 animales (cuantificando oralmente, "Aquí hay 3 vacas"), apareadas con tarjetas con una colección de otro valor cardinal ("Aquí no hay 3 vacas"). Los "conocedores de tres" recibieron la misma intervención, apareando colecciones de 4 con otras de distintas cantidades. En el post-test, las investigadoras evaluaron a ambos grupos con la tarea *Señala X* (Wynn, 1992), que consistió en ofrecer dos colecciones y solicitar a los niños que señalen la que tenía 3 (o 4) elementos. Las colecciones eran imágenes de animales distintos a los utilizados en la intervención y objetos pegados en tarjetas.

Los resultados mostraron que aunque algunos niños lograron comprender el significado cardinal de las palabras número en relación a las colecciones usadas en la intervención (por ejemplo, relacionar la palabra tres con una colección de 3 vacas), pocos pudieron transferir este conocimiento a colecciones de elementos diferentes (por ejemplo, a imágenes de colecciones de 3 perros o de 3 lápices pegados en una tarjeta). Esta transferencia es relevante en la medida en que la cardinalidad es un conocimiento abstracto que puede ser aplicado a cualquier conjunto de unidades, independientemente de la naturaleza y las características físicas de los elementos.

El presente estudio cuestiona precisamente el uso indistinto de colecciones de objetos e imágenes sin problematizar su influencia en las demandas de las tareas numéricas. Se parte de la idea de que las propiedades específicas de cada tipo de representación podrían tener efectos en la comprensión cardinal, además de la intervención de otros factores como la edad y la magnitud de los valores cardinales en juego. Una diferencia crucial es que, en una colección de objetos, sus elementos pueden ser explorados uno a uno: los niños pueden separar los elementos, formar colecciones más pequeñas y volver a unirlos en una colección mayor. Las imágenes no permiten este tipo de manipulación de sus unidades; sí pueden ser señaladas, pero en definitiva tienen que ser observadas como un todo.

En un estudio reciente (Rodríguez *et al.*, 2018) se comparó el impacto de colecciones en imágenes (círculos negros), colecciones de objetos (tapas negras de botella) y palabras número en el desempeño de niños de 3, 3 años y medio y 4 años en una adaptación de la tarea Dame un Número, en la que debían construir colecciones de 1 a 6 objetos (galletas) usando las distintas representaciones como fuente de información sobre el valor cardinal. Los resultados mostraron que las colecciones de objetos y en imágenes, en comparación con las palabras número, facilitaron la resolución de la tarea en los tres grupos de edad. Específicamente, los objetos y las imágenes posibilitaron la construcción de colecciones de tamaño 3 por parte de los niños de 3 años y medio y de tamaño 4 a los 4 años; en el grupo de 3 años, solo las imágenes facilitaron la construcción de colecciones de 3 elementos.

Ahora bien, no todas las imágenes ni todos los objetos tienen las mismas propiedades. Por ejemplo, las imágenes de los libros infantiles con contenido numérico suelen ser dibujos coloridos de personas, animales y objetos. Muchas veces estos libros tienen solapas desplegables o distintas texturas con la intención de estimular el interés y focalizar la atención de los niños. En cuanto a las colecciones de objetos que se utilizan en los juegos cotidianos o en las salas del jardín de niños, se destacan los autos, ladrillos de construcción, elementos para enhebrar, bloques, entre otros, que por regla general son de diferentes formas, tamaños, texturas y colores. En otras palabras, las imágenes y las colecciones de objetos disponibles en muchos hogares y jardines de niños suelen tener características físicas salientes (colores intensos, texturas, variadas dimensiones), un conjunto de rasgos que algunos autores denominan *riqueza perceptual* (Kaminski *et al.*, 2009; Petersen y McNeil, 2012) debido a la intensidad y variedad de las propiedades físicas de los materiales.

En un principio, se podría argumentar que la riqueza perceptual es una dimensión que, al focalizar la atención y estimular el interés, favorecería la resolución de las tareas. No obstante, algunas investigaciones que abordaron la comprensión de objetos e imágenes encontraron que las representaciones con riqueza perceptual centran la atención de los niños en su materialidad, dificultando la comprensión de su función simbólica (Chiong y DeLoache, 2012; DeLoache, 1995; Strouse *et al.*, 2018). Más aún, se ha demostrado que, si se acentúan las propiedades físicas de una imagen, por ejemplo, en un libro con ilustraciones desplegables con texturas, niños de 2 y 3 años tienen dificultades para relacionar las representaciones con sus referentes (Tare *et al.*, 2010). Consecuencias disruptivas de la riqueza perceptual de los objetos se observaron también en estudios sobre el aprendizaje de conceptos matemáticos en estudiantes de nivel primario (Kaminski y Sloutsky, 2020) y universitario (Carbonneau *et al.*, 2020).

Son escasos los estudios que examinaron las consecuencias de la riqueza perceptual en tareas numéricas y en el nivel preescolar. Petersen y McNeil (2012) emplearon las tareas Dame un Número y Títere Contando (Gelman y Meck, 1983) para estudiar las relaciones entre la riqueza perceptual y el conocimiento previo de los objetos. La tarea Títere Contando consistía en observar ensayos de conteo realizados por un títere, de colecciones de 5, 7 y 9 elementos, solicitando luego a niños que identificaran si el conteo había sido correcto o incorrecto. Dos condiciones incluyeron objetos familiares con y sin riqueza perceptual (animales y frutas, palitos de helado y lápices, respectivamente), y otras dos condiciones objetos no conocidos (formas con nombres inventados) que variaban en la presencia o ausencia de atributos perceptuales llamativos. La condición con mayores dificultades de resolución de las tareas de conteo y Dame un Número fue con los objetos que combinaban ambas variables, riqueza perceptual y conocimiento previo; con los objetos desconocidos para los niños, la riqueza perceptual no tuvo un efecto disruptivo.

El estudio que aquí se presenta indaga la influencia de la riqueza perceptual en la comprensión cardinal, examinando además diferencias en la naturaleza de los objetos: colecciones de objetos tridimensionales e imágenes. Para ello, se realizó una adaptación del diseño pre- y post-test empleado en Huang *et al.* (2010) para la enseñanza de la palabra número tres. Con este fin, se comparó el desempeño de niños de 3 años en cuatro condiciones experimentales (con intervención) y en una condición control (sin intervención). Las condiciones con intervención se diferenciaron por el tipo y las características de la representación empleada para transmitir la información cuantitativa. En la condición *imágenes con riqueza perceptual* se usaron imágenes coloridas de colecciones de distintas clases de animales; en la condición *imágenes sin riqueza perceptual*, colecciones de círculos del mismo color. La condición *objetos con riqueza perceptual* consistió en colecciones de bloques de construcción de diferente forma, tamaño y color; la condición *objetos sin riqueza perceptual,* colecciones de tapas de botella de igual forma, tamaño y color. La comprensión de la palabra número tres se evaluó en distintos momentos y con diferentes tareas: en el pre- y post-test con la prueba Dame un Número y durante la intervención con Señala X. En base a los antecedentes que se acaban de exponer, la primera hipótesis del estudio fue que las imágenes, en comparación con los objetos, facilitarían la comprensión del significado cardinal de la palabra número tres. En cuanto a la riqueza perceptual, la segunda hipótesis fue que su presencia dificultaría la comprensión cardinal, aunque está por ver si esta dificultad se presentará tanto en el caso de las imágenes como en el de los objetos.

MÉTODO

Diseño y participantes

El muestreo fue intencionado, en tanto la situación experimental requería que los participantes se desempeñaran como "conocedores de dos" (y no de "tres") en el pre-test y que contaran correctamente una colección de hasta 10 elementos. En el pre-test se solicitó el conteo de 10 galletas y se administró la tarea Dame un Número a un total de 96 niños de 3 años, de los cuales 83 cumplieron con los criterios establecidos. Además, se buscó que la distribución por género fuese similar. Se excluyeron tres niños por extinción experimental, de modo que la muestra definitiva quedó conformada por 80 niños (M_{edad} = 39.02 meses, *DE* = 2.61), 40 de género femenino (M_{edad} = 38.86 meses, *DE* = 2.41) y 40 de género masculino (M_{edad} = 38.47 meses, *DE* = 2.90).

El nivel socioeconómico de los niños era medio y asistían a cuatro instituciones de nivel preescolar de gestión privada de la ciudad de (*a completar luego del proceso de revisión*), que tenían convenios de colaboración preexistentes con el equipo de investigación. Los niños no contaban con antecedentes de trastornos en su desarrollo cognitivo y/o del lenguaje, de acuerdo con los registros de las instituciones educativas. La planificación docente no incluía la enseñanza de conocimientos numéricos durante el período que los niños participaron en el estudio.

De cada grupo de 40 niños y 40 niñas se seleccionaron al azar 8 para incluir en cada una de las cinco condiciones (*n* = 16 en cada una): imágenes sin riqueza perceptual (M_{edad} = 39.93 meses, *DE* = 2.45), imágenes con riqueza perceptual (M_{edad} = 38.53 meses, *DE* = 2.73), objetos sin riqueza perceptual (M_{edad} = 39.04 meses, *DE* = 2.54), objetos con riqueza perceptual (M_{edad} = 38.58 meses, *DE* = 2.73) y control (M_{edad} = 37.26 meses, *DE* = 2.51).

Se realizaron cinco encuentros con cada niño o niña. El primer día se administró el pret-test (conteo y Dame un Número). En caso de ingresar a la muestra, el segundo, tercer y cuarto encuentro correspondieron a la primera, segunda y tercera sesiones de intervención, cada una seguida de una evaluación aplicando la tarea Señala X. Finalmente, en el quinto encuentro se administró el post-test con la tarea Dame un Número. De este modo, se obtuvieron cuatro evaluaciones el desempeño de cada niño, tres inmediatamente después de cada sesión de intervención para examinar si y cómo la comprensión cardinal de la palabra número tres se iba desplegando durante la intervención, y una evaluación final de los efectos de la intervención. Es importante destacar que la demanda de la tarea Señala X es de menor exigencia que Dame un Número, ya que solicita el reconocimiento de un valor cardinal en comparación con otro distinto, en lugar de la construcción de un conjunto de un valor cardinal específico. Asimismo, como se indica más adelante, los procedimientos puestos en juego durante la intervención fueron similares a los de la tarea Señala X.

A los participantes del grupo control solo se les administró el pre-test y el post-test.

Materiales

Para el conteo y la tarea Dame un Número se utilizaron 16 galletas, un peluche de Winnie Pooh y un plato de plástico. En los ensayos de la intervención y en la tarea Señala X se emplearon distintos materiales en función de la condición (figura 1). Para la condición imágenes sin riqueza perceptual, se emplearon tarjetas (20 cm x 15 cm) con imágenes de colecciones de círculos (2 cm de diámetro) de color negro. Para la condición imágenes con riqueza perceptual, se utilizaron tarjetas de las mismas dimensiones, con imágenes de distintos tipos de animales (perros, gatos, cerdos, entre otros); los animales tenían la misma medida aproximada que los círculos y su forma y color no variaba al interior de las tarjetas sino entre tarjetas. Para la condición objetos sin riqueza perceptual, se usaron tapas de botella de color negro (1.2 cm de altura, 3.8 cm de diámetro) y, para la condición objetos con riqueza perceptual, se emplearon bloques de construcción de distintas formas y colores (entre 1.5 y 2 cm de altura, 2 cm de ancho y entre 2 y 4 cm de largo de acuerdo a la forma cuadrada o rectangular). Los bloques no variaban al interior de cada colección, sino entre colecciones.

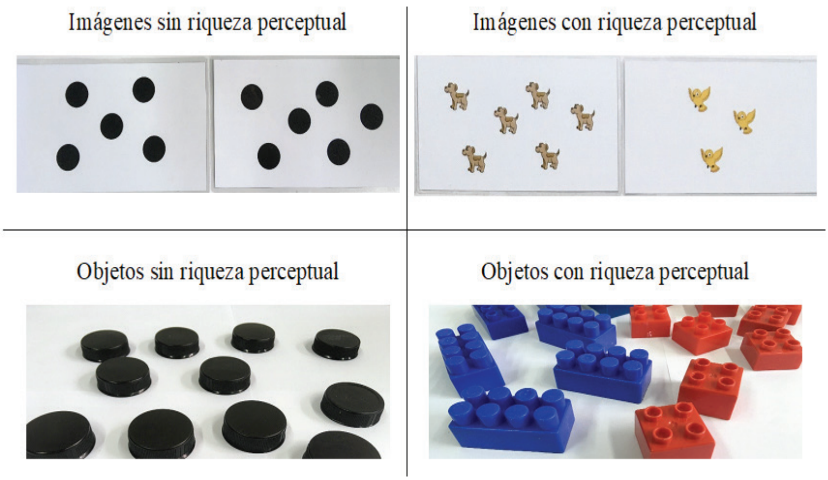


Figura 1. Imágenes y objetos empleados en las condiciones con intervención

Procedimiento

Se obtuvo por escrito el consentimiento informado de participación de las autoridades de los establecimientos educativos y de los padres y las madres de los niños, comunicando los detalles y requerimientos del estudio, así como la confidencialidad de los datos obtenidos. La investigadora que llevó adelante el estudio fue la primera autora de este trabajo. Una diferencia fundamental con la investigación reportada por Huang *et al.* (2010) es la cantidad de encuentros con los niños, una única sesión de trabajo en ese estudio y cinco encuentros seguidos (lunes a viernes) en el presente estudio. Las sesiones de trabajo se realizaron en una sala disponible de la institución educativa a la que el niño asistía.

Pretest

Conteo. La investigadora invitaba individualmente a cada niño a jugar a merendar con Winnie Pooh. Una vez sentados, ella explicaba que Winnie todavía no sabía los números y necesitaba ayuda para saber cuántas galletas había sobre la mesa, señalando una colección de 10 galletas. Si el niño comenzaba a contar espontáneamente, se registraba su respuesta. Si el niño no comenzaba a contar se decía "¿Puedes contar estas galletas en voz alta?" y se registraba su respuesta. Si el niño contaba correctamente hasta 10 con orden estable y correspondencia uno a uno, se procedía a administrar seguidamente la tarea Dame un Número.
Dame un Número. La entrevistadora ofrecía a los niños la colección de 16 galletas pidiendo que colocaran en un plato distintas cantidades de 1 a 6 ("¿Puedes poner en el plato tres galletas para Winnie?"). Se comenzaba siempre pidiendo 1 galleta y se continuaba con las otras cantidades en un orden ni ascendente ni descendente. Cuando los niños no construían correctamente la colección de n valor cardinal (por ejemplo, de 3), se les solicitaba la cantidad anterior (2) antes de pedir nuevamente la cantidad incorrecta. Si los niños construían una colección en forma correcta una vez y en forma incorrecta otra, se los evaluaba una tercera vez. Ingresaron a la muestra los niños que construyeron correctamente, al menos en dos oportunidades, una colección de tamaño 2, pero incorrectamente, también en al menos dos oportunidades, colecciones de tamaño 3.

Intervención

El procedimiento es una adaptación del diseñado en Huang *et al.* (2010). En todas las condiciones, la entrevistadora iniciaba la primera sesión presentando a los niños colecciones en imágenes u objetos: "Traje unos dibujos (o tapas/bloques), ¿quieres que juguemos con ellos?". La entrevistadora colocaba el material sobre la mesa y los niños eran libres de explorarlos. Si bien la exploración física del material no era un requisito y quedaba librada a la voluntad de cada niño, todos los niños realizaron algún tipo de exploración manual de las colecciones, tanto de las imágenes como de los objetos. Una vez que los niños se familiarizaban con el material, se realizaba la primera sesión de la intervención. A continuación, se describe el procedimiento de cada una de las cuatro condiciones.

Imágenes con riqueza perceptual (en adelante: *animales*). Se realizaron ocho ensayos con cada niño, en cada ensayo se presentaban tarjetas con una clase de animal distinta. En primer lugar, se realizaban dos ensayos de demostración en los que se presentaba una tarjeta diciendo "Esta tarjeta tiene tres gatos" (mientras se señalaba, uno a uno, cada dibujo), "Esta tarjeta tiene tres perros" (señalando también cada dibujo). En estos ensayos la colección de 3 animales no se comparaba con otra de diferente valor cardinal. Luego, se llevaban a cabo seis ensayos en los que una tarjeta con una colección de tamaño 3 se comparaba con una tarjeta con una colección de otro tamaño: "Esta tarjeta tiene tres vacas (señalando cada dibujo); esta tarjeta no tiene tres vacas (sin señalar cada elemento)". Siguiendo el procedimiento propuesto en Huang *et al.* (2010), se optó por señalar los diferentes elementos para enfatizar la correspondencia entre la palabra número tres y el número de elementos de la colección.

Las comparaciones incluían cantidades que los niños comprendían (3 *versus* 1 o 2) y otras que no (3 *versus* 4, 5, 6 y 10), en todas las condiciones y en las tres sesiones de intervención.

Imágenes sin riqueza perceptual (en adelante: *círculos*). Se emplearon los procedimientos de la condición animales, pero utilizando las tarjetas con círculos en todos los ensayos. La entrevistadora decía: "Esta tarjeta tiene tres círculos (mientras señalaba cada dibujo), esta tarjeta no tiene tres círculos (sin señalar cada elemento)".

Objetos con riqueza perceptual (en adelante: *bloques*) Se emplearon los procedimientos de la condición animales, pero utilizando los bloques de construcción para cada ensayo. La entrevistadora decía: "Aquí hay tres bloques (mientras señalaba cada elemento), aquí no hay tres bloques (sin señalar)".

Objetos sin riqueza perceptual (en adelante: *tapas*). Se emplearon los procedimientos de la condición animales, pero utilizando las tapas de botella. La entrevistadora decía: "Aquí hay tres tapas (señalando cada elemento), aquí no hay tres tapas (sin señalar)".

Evaluaciones parciales

Señala X. Se administró una adaptación de esta tarea tres veces, luego de cada sesión de intervención. La tarea consistía en cinco ensayos en los que se ofrecían nuevamente los materiales empleados en los ensayos de demostración presentando a los niños una colección de tamaño 3 apareada con una colección de otro valor cardinal y solicitando que indicara dónde había 3. La entrevistadora preguntaba: "¿Puedes mostrarme dónde hay tres gatos?" (círculos, bloques o tapas según la condición). De estos cinco ensayos, dos fueron enseñado *versus* conocido, donde los niños tenían que elegir entre 3 y 1 y entre 3 y 2, y tres ensayos fueron enseñado *versus* desconocido, donde elegían entre 3 y 4, 3 y 5, y 3 y 6. Si bien en las sesiones de intervención se utilizó la cantidad 10 durante las comparaciones, para esta instancia de evaluación se trabajó hasta el 6, que es el valor cardinal máximo solicitado en la tarea Dame un Número (pre- y post-test).

Grupo control

Entre la administración del pre- y del post-test los niños realizaron tres sesiones de juego libre con el juguete usado en el pre-test (Winnie Pooh), que duraban aproximadamente el mismo tiempo que las sesiones de la intervención (5 minutos). En este grupo no se administró la tarea Señala X.

Postest

Dame un Número. Se administró esta tarea del mismo modo que en el pre-test a las cuatro condiciones con intervención y al grupo control.

Codificación y análisis de los datos

Las sesiones fueron videograbadas y se transcribió textualmente su contenido para la codificación y el análisis. En la tarea Señala X, se codificó la respuesta de los niños en cada uno de los cinco ensayos como correcta (si seleccionaban la colección de 3 elementos) o incorrecta. En la tarea Dame un Número se codificó como correcto el desempeño de los niños con cada valor cardinal (1 a 6) si colocaban en el plato el número solicitado de galletas dos veces.

Para los análisis estadísticos se utilizó el programa estadístico SPSS® versión 20. Se aplicaron pruebas no paramétricas dado que el estadístico Kolgomorov-Smirnov mostró que la distribución de contraste no se ajustaba a la normal ($p < 0.05$ en todas las condiciones). Las pruebas utilizadas fueron Kruskal-Wallis, Mann-Whitney, Friedman y Wilcoxon. Análisis realizados con la prueba *U* de Mann-Whitney indicaron la ausencia de efectos de la variable sexo en el desempeño en Dame un Número y Señala X ($p > 0.05$ en todos los casos); por lo tanto, no se consideró esta variable en el resto de los análisis.

RESULTADOS

El reporte de resultados se presenta en dos secciones. En la primera sección se consideran los efectos finales de la intervención en la comprensión cardinal de la palabra tres; para ello, se exponen los resultados del análisis del desempeño en el post-test (Dame un Número) en función de la condición. En la segunda sección se presentan los análisis efectuados para la tarea Señala X en función de la sesión de trabajo (1 a 3), la condición y, finalmente, los ensayos donde los niños debían elegir entre 3 y un valor cardinal conocido (2) y uno desconocido (4).

Desempeño en el post-test: Dame un Número

El desempeño del grupo control, en el que ningún niño o niña evidenció comprender la palabra número tres (figura 2) indicó la ausencia de efectos de aprendizaje por la administración de la tarea en dos oportunidades (pre- y post-test).

En primer lugar, se comparó el desempeño entre las cinco condiciones (cuatro de intervención y la condición control) empleando la prueba Kruskal-Wallis, cuyo resultado arrojó diferencias significativas ($\chi^2(4) = 14.92$, $p = .005$). Las comparaciones de a pares (prueba *U* de Mann-Whitney) reflejaron dos patrones de resultados interesantes. Por un lado, al comparar el desempeño de cada condición de intervención con el desempeño de la condición control (0%), se hallaron diferencias en las condiciones círculos (56%) ($U = 56$, $p < .001$), tapas (31%) ($U = 88$, $p = .017$) y animales (31%) ($U = 88$, $p = .017$). El desempeño de la condición bloques (13%) no se diferenció estadísticamente del desempeño de la condición control (*U* = 112, *p* = .151).

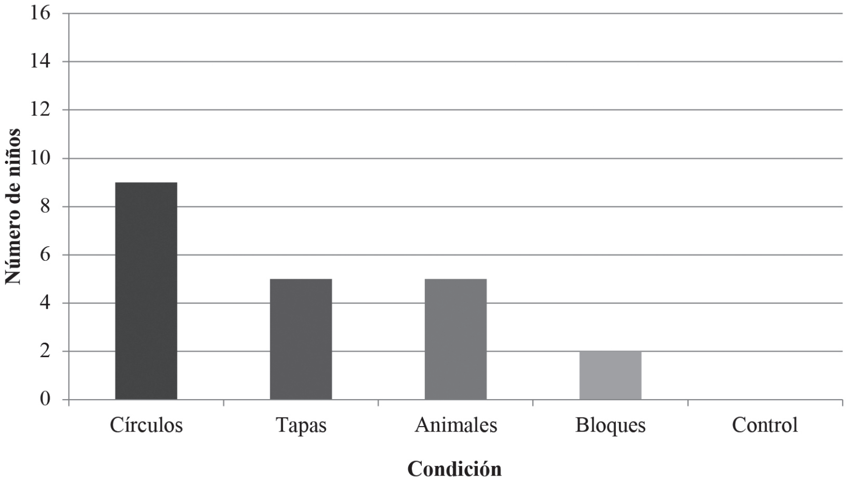


Figura 2. Número de niños con desempeño correcto con el valor cardinal 3 en la tarea Dame un Número (post-test), en función de la condición

Nota. Total de 16 niños por condición. Cada niño o niña podía tener un desempeño correcto o incorrecto con el valor cardinal 3.

El segundo patrón de resultados refiere a las comparaciones entre las condiciones de intervención. Los resultados señalaron que el desempeño correcto en la condición círculos fue superior al desempeño correcto en la condición bloques (*U* = 72, *p* = .010), sin diferencias con tapas (*U* = 96, *p* = .161) y animales (*U* = 96, *p* = .161). Tampoco se registraron diferencias entre bloques (*U* = 104, *p* = .207) y animales (*U* = 128, *p* = 1.000), ni al comparar entre bloques y tapas (*U* = 104, *p* = .207).

De este modo, los niños de las cinco condiciones comenzaron el estudio sin comprender el significado cardinal de la palabra número tres y, al finalizar el mismo, todas las condiciones de intervención se diferenciaron de la condición control. Sin embargo, entre las intervenciones, el trabajo con círculos tuvo el efecto más positivo y el trabajo con bloques el efecto más marginal en el aprendizaje.

Desempeño durante la intervención: Señala X

Primero se analizaron los efectos de la intervención a lo largo de las tres sesiones, al interior de cada condición. En la condición círculos, la prueba de Friedman arrojó diferencias significativas ($\chi 2(2) = 10.57$, $p = .005$). Las comparaciones de a pares (Wilcoxon) mostraron que el desempeño infantil mejoró en la segunda (96%) y en la tercera sesión (100%) en comparación con la primera (91%) ($Z = -2$, $p = .046$ y $Z = -2.64$, $p = .008$, respectivamente), sin diferencias significativas al comparar la segunda con la tercera sesión ($Z = -1.73$, $p = .083$).

Al interior de la condición tapas se registró un patrón similar de resultados. Se hallaron diferencias al comparar las tres sesiones ($\chi 2(2) = 11.14$, $p = .004$) y las comparaciones de a pares mostraron que en la segunda (98%) y en la tercera (100%) sesión el desempeño de los niños fue superior que en la primera (91%) ($Z = -2.23$, $p = .025$ y $Z = -2.64$, $p = .008$, respetivamente), sin diferencias entre la segunda y la tercera sesión ($Z = -1.41$, $p = .157$). No obstante, el desempeño con círculos y tapas fue alto ya desde la primera sesión de trabajo.

Al interior de la condición animales los resultados indicaron también diferencias significativas ($\chi 2(2) = 14.00$, $p = .001$), pero las comparaciones de a pares mostraron un efecto de la intervención más progresivo que en las condiciones círculos y tapas. El desempeño en la segunda sesión (70%) fue superior al de la primera (61%) ($Z = -2.33$, $p = .020$) y el desempeño en la tercera sesión (81%) fue superior al de la primera y la segunda sesión ($Z = -2.85$, $p = .004$ y $Z = -2.16$, $p = .030$, respectivamente).

Este patrón se acentúa en la condición bloques. También se encontraron diferencias al comparar el desempeño entre las tres sesiones de intervención ($\chi 2(2) = 11.45$, $p = .003$) pero solo se registró un progreso en la tercera sesión de trabajo (80%) en comparación con la segunda (75%) y la primera (68%) sesión ($Z = -2.48$, $p = .013$ y $Z = -2$, $p = .046$, respectivamente), sin diferencias entre la segunda y la primera sesión ($Z = -1.73$, $p = .083$).

En segundo lugar, se analizaron los efectos de la condición al interior de cada sesión de trabajo para examinar si hubo o no mejoras parciales en el desempeño a medida que avanzaba el proceso y en qué momento (figura 3). Los resultados de la prueba Kruskal-Wallis indicaron diferencias al comparar el desempeño entre las cuatro condiciones en todas las sesiones: primera ($\chi^2(3)$ 29.01, $p < .001$), segunda ($\chi^2(3)$ 32.47, $p < .001$) y tercera ($\chi^2(3)$ 31.84, $p < .001$).

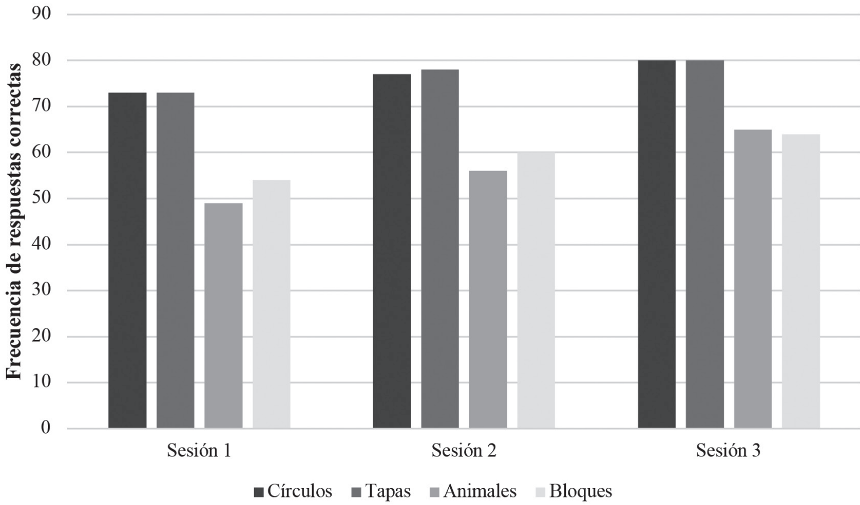


Figura 3. Frecuencias de respuestas correctas en cada sesión de Señala X en función de la condición.

Nota. Total de 80 ensayos por sesión (cada sesión consistió en cinco ensayos para cada uno de los 16 niños en cada condición).

Las comparaciones de a pares indicaron que, en las tres sesiones, los niños de la condición círculos se desempeñaron mejor que los niños de las condiciones bloques (sesión 1: U = 40.50, p < .001; sesión 2: U = 42, p < .001; sesión 3: U = 32, p < .001) y animales (sesión 1: U = 26.50, p < .001; sesión 2: U = 26.50, p < .001; sesión 3: U = 48, p < .001). El mismo patrón de resultados se registró al comparar el desempeño de los niños de la condición tapas con el desempeño de los niños de las condiciones bloques (sesión 1: U = 40.50, p < .001; sesión 2: U = 36, p < .001; sesión 3: U = 32, p < .001) y animales (sesión 1: U = 26.50, p < .001; sesión 2: U = 23, p < .001; sesión 3: U = 48, p < .001).

Más aun, no se registraron diferencias al comparar las condiciones círculos y tapas (sesión 1: U = 128, p = 1.000; sesión 2: U = 120, p = .632; sesión 3: U = 128, p = 1.000), ni al comparar las condiciones animales y bloques (sesión 1: U = 97 p = .209; sesión 2: U = 97, p = .214; sesión 3: U = 126, p = .951), evidenciando nuevamente una influencia positiva del uso de imágenes y objetos sin riqueza perceptual (círculos y tapas) en el desempeño en la tarea Señala X.

En tercer lugar, para analizar más en detalle los resultados, y siguiendo la estrategia de análisis empleada por Huang *et al.* (2010), se examinaron los efectos de la condición en los ensayos en los que el valor cardinal 3 se comparaba con un valor cardinal "conocido" por los niños (2) y con un valor cardinal "desconocido" pero próximo (4). La tabla 1 presenta las frecuencias de respuestas correctas en estos ensayos, luego de cada sesión de trabajo, y los resultados de la prueba Kruskal-Wallis al comparar los desempeños en función de la condición.

Tabla 1. Frecuencias de respuestas correctas (y porcentajes) en los ensayos 3 vs. 2 y 3 vs. 4 y estadísticos en función de la condición

		Sesión 1		Sesión 2		Sesión 3	
		3 *vs.* 2	3 *vs.* 4	3 *vs.* 2	3 *vs.* 4	3 vs. 2	3 *vs.* 4
Círculos		16 (100%)	9 (56%)	16 (100%)	13 (81%)	16 (100%)	16 (100%)
Tapas		15 (94%)	11 (69%)	16 (100%)	14 (88%)	16 (100%)	16 (100%)
Animales		9 (56%)	4 (25%)	14 (88%)	3 (19%)	15 (94%)	9 (56%)
Bloques		7 (44%)	4 (35%)	14 (88%)	3 (19%)	15 (94%)	4 (25%)
Kruskal Wallis	$\chi 2(3)$	18.52	9.50	4.20	27.28	2.03	30.28
	p	< .001	= .023	= .241	< .001	= .566	< .001

Nota. Total de 16 ensayos por sesión para cada comparación (3 *vs.* 2 y 3 *vs.* 4), uno para cada niño o niña.

En relación con el desempeño en los ensayos 3 *vs.* 2, los resultados indicaron diferencias en función de la condición únicamente luego de la primera sesión de trabajo, sin diferencias significativas luego de las sesiones 2 y 3 (tabla 1).

Como se mencionó, el desempeño en las condiciones círculos y tapas estuvo cerca del techo (91%) ya desde la primera sesión. Distinto fue el caso de las condiciones animales y bloques, que tuvieron un desempeño cercano al 60% en la primera sesión y luego fueron progresando gradualmente hasta llegar aproximadamente al 80%, acercándose al desempeño en las condiciones círculos y tapas. Luego de la sesión 1, las comparaciones de a pares indicaron que los niños de las condiciones círculos y tapas se desempeñaron mejor que los niños de las condiciones bloques ($U = 56$, $p < .001$ y $U = 64$, $p = .003$, respectivamente) y animales ($U = 72$, $p = .003$ y $U = 80$, $p = .016$), sin diferencias entre las condiciones bloques y animales ($U = 112$, $p = .486$) y entre tapas y círculos

(U = 120, p = .317). No se reportan los resultados de las sesiones 2 y 3 porque todas las comparaciones indicaron ausencia de diferencias (ps > .05).

Con respecto a los ensayos 3 *vs*. 4, los resultados mostraron diferencias al comparar el desempeño luego de cada una de las tres sesiones de intervención (Tabla 2). Los niños de la condición círculos se desempeñaron mejor que los niños de la condición bloques (sesión 1: U = 88, p = .077; sesión 2 y 3, U = 48, p = .001 y U = 32, p < .001, respectivamente). El mismo patrón se repitió entre las condiciones círculos y animales (sesión 1: U = 88, p = .077; sesión 2 y 3, U = 48, p = .001 y U = 72, p = .003, respectivamente).

Un perfil similar de resultados surge en la condición tapas, en la que el desempeño fue superior que en las condiciones bloques (sesión 1: U = 72, p = .015; sesión 2: U = 40, p < .001; sesión 3: U = 32, p < .001) y animales (sesión 1: U = 72, p = .015; sesión 2; U = 40, p < .001; sesión 3: U = 72, p = .003). Nuevamente no se registraron diferencias al comparar las condiciones tapas y círculos y bloques y animales (ps > .05).

Como se puede observar, al comparar el valor cardinal 3 con uno desconocido y próximo (4), las condiciones sin riqueza perceptual (círculos y tapas) facilitaron el desempeño a lo largo de toda la intervención. Al comparar 3 con un valor cardinal conocido (y también próximo), las diferencias entre las sesiones de trabajo desaparecieron a medida que se avanzó en la intervención.

En suma, los análisis del desempeño en el post-test (Dame un Número) y durante las sesiones de intervención (Señala X) muestran que no es solo la naturaleza bi o tridimensional de los materiales el factor determinante en los efectos encontrados en el aprendizaje de la palabra número tres, sino fundamentalmente la riqueza perceptual de las imágenes y los objetos (círculos y animales, tapas y bloques).

DISCUSIÓN

Los componentes semióticos del número no han recibido suficiente atención en los estudios que abordan el desarrollo numérico (Martí y Scheuer, 2015; Sfard, 2000; Sfard y Lavie, 2005; Walkerdine, 1988) a pesar de que los niños participan cotidianamente en interacciones en las que los números se representan de manera diferente. La mayor parte de las investigaciones sobre el conocimiento cardinal se ha enfocado en las representaciones verbales, analizando cuándo y cómo los niños comprenden las palabras número y pueden, por ejemplo, construir una colección de *n* cantidad de elementos a partir de la palabra número que da un adulto (Condry y Spelke, 2008; Huang *et al.*, 2010; Sarnecka, 2015; Wynn, 1990, 1992). En el presente estudio se adoptó un enfoque distinto, al investigar el papel de representaciones icónicas de la cantidad, colecciones en imágenes y colecciones de objetos con y sin riqueza perceptual, en la comprensión del significado cardinal de la palabra número tres. Las hipótesis fueron que las imágenes favorecerían la comprensión cardinal en comparación con los objetos y que las imágenes y los objetos con riqueza perceptual tendrían un efecto disruptivo en comparación con las representaciones sin riqueza perceptual.

Los resultados del post-test con la tarea Dame un Número indicaron que, si bien todas las condiciones de intervención introdujeron mejoras en el desempeño de los niños en comparación con la condición de control, fue la condición círculos la que tuvo la influencia más positiva. La intervención con esta condición permitió que más de la mitad del grupo (56%) comprendiera la palabra número tres, usándola como fuente de información para construir una colección de 3 elementos; en las condiciones tapas y animales la intervención tuvo este efecto en menos niños (31%) y en la condición bloques en un número muy reducido de participantes (13%). Este patrón de resultados indicaría que las diferencias entre bidimensionalidad (imágenes) y tridimensionalidad (objetos) es determinante en la comprensión cardinal solo cuando la riqueza perceptual de las representaciones es baja. Aunque se suele argumentar que las imágenes en sí mismas no son representaciones con características salientes y/o atractivas para los niños, se encontró que aun entre las imágenes, las más sencillas perceptualmente (mantienen constante la forma y el color) fueron la herramienta más eficaz en el aprendizaje del significado cardinal de la palabra número tres.

Si el acento se pone en el proceso de aprendizaje teniendo en cuenta las distintas condiciones (tarea Señala X) surge otro resultado interesante: son las dos condiciones sin riqueza perceptual (círculos y tapas) las que desencadenaron más rápidamente progresos en la comprensión cardinal. Si bien al interior de todas las condiciones se observaron mejorías en el desempeño a medida que avanzaban las sesiones de intervención, en las condiciones círculos y tapas el rendimiento en Señala X alcanzó niveles cercanos al máximo ya en la segunda sesión, mientras que en la condición animales los efectos fueron más graduales, mejorando luego de cada sesión y, en la condición bloques más tardíos, con una mejora significativa en el desempeño únicamente en la tercera sesión. Estos resultados están en consonancia con estudios que han mostrado que los objetos perceptualmente atractivos dificultan actividades de conteo (Petersen *et al.*,

2014) y la comprensión de conceptos matemáticos (Carbonneau *et al.*, 2015; McNeil *et al.*, 2009; Petersen y McNeil, 2012; Uttal *et al.*, 2013).

Diferentes factores pueden intervenir en la interpretación de estos resultados. El primero está en relación con el contexto funcional de las representaciones. Cualquier material conocido por los niños (como es el caso de los objetos y las imágenes empleados en el estudio) se vincula a un determinado contexto de uso. Cuando los niños están familiarizados con un objeto, asocian una función o un uso para ese objeto, pudiendo dificultarse reconocer y comprender un nuevo contexto de uso. Petersen y McNeil (2012) denominan a este factor "fijeza funcional".

Si se analizan los materiales empleados en cada condición, hay ciertas diferencias en cuanto a la función usualmente asignada a cada uno. Las imágenes tienen una función principalmente simbólica, son creadas para ser observadas, con la intención de transmitir determinada información a sus usuarios. Los objetos pueden adquirir esta misma función simbólica en condiciones muy específicas, como en las tareas de esta investigación, pero no es su función usual. Por ejemplo, los bloques están diseñados para ser apilados, encastrados y/o para construir estructuras. Sin dudas es posible usar una colección de bloques para comunicar información cardinal, pero esta no es una función con fuerte anclaje cultural. De este modo, los bloques de construcción serían la condición de intervención menos facilitadora porque tienen una función establecida previamente que los niños tendrían que descartar para atender a la función relevante para la tarea (los bloques, en tanto que unidades, sirven para indicar el valor cardinal de la colección).

Las tapas también poseen un claro contexto de uso, están diseñadas para cubrir los orificios de las botellas y proteger el líquido que contienen. Entonces, ¿por qué estos objetos influyeron positivamente en la comprensión cardinal, a diferencia de los bloques? Por un lado, es posible argumentar que la ausencia de botellas impide recurrir al esquema esperable: usar las tapas para cerrarlas. Por otro lado, la ausencia de riqueza perceptual parece ser un factor decisivo: el color y la forma constantes de las unidades no resultarían atractivos para estimular la exploración de la colección. De modo que la colección de tapas aparece como una configuración propicia para ser usada como representación de valores cardinales, y los niños son receptivos a esta función específica en el marco de la tarea. Se podría sostener, pues, que ante los diferentes materiales los niños ponen en juego las funciones asociadas usualmente a ellos y, cuánto más definida sea una función, más difícil será dejarla de lado para desplegar la función solicitada por la tarea.

Otro factor está directamente relacionado con la riqueza perceptual del material, la "saliencia de los elementos de la colección" (Petersen y McNeil, 2012), un aspecto muy relevante para la comprensión cardinal. Las investigaciones sugieren, en efecto, que los niños evidencian una comprensión mejor de la cardinalidad cuando pueden considerar los elementos de una colección como unidades, como elementos individuales, y para esto se han de abstraer sus particularidades (Mix *et al.*, 2002). La cardinalidad es un concepto que requiere que cada elemento sea considerado como una unidad, independientemente de sus características. Este proceso de abstracción es más difícil si los objetos tienen rasgos perceptuales muy atractivos para los niños. En este sentido, Gelman *et al.* (2005) señalan que cuanto más interesante es un objeto en sí mismo, más bajo es su estatus representacional y por ende es más probable que sea comprendido como un elemento particular (por ejemplo, "Garfield") y no como miembro de una categoría mayor ("uno entre tantos gatos"). En síntesis, la riqueza perceptual es una propiedad de los materiales que puede obstaculizar la comprensión del valor cardinal de una colección.

Los resultados del presente estudio poseen implicaciones educativas claras. Ponen en entredicho la idea de que siempre es aconsejable, sobre todo con los estudiantes de más corta edad, proponer actividades y tareas con material concreto manipulable y atractivo para favorecer el aprendizaje de las matemáticas. Esta idea general ha de ser matizada, según las demandas de las tareas y el tipo de aprendizaje en cuestión. Los resultados del estudio sugieren que, con niños que están elaborando el concepto de valor cardinal, en una etapa temprana de los aprendizajes sería propicio: 1) usar materiales con baja riqueza perceptual; y 2) privilegiar el uso de imágenes. En efecto, las dos tareas propuestas en el estudio (Dame un Número y Señala X) exigen, por un lado, que las colecciones sean interpretadas como representaciones de un valor cardinal, y no como objetos con fines lúdicos o de construcción. Todo parecería indicar que en la etapa preescolar serían las imágenes el tipo de material que más facilita la comprensión de su función simbólica, algo que ya se ha puesto de manifiesto en otros dominios de conocimiento, por ejemplo, el espacial (DeLoache, 2002; Uttal et al, 1997). Por otro lado, al tratarse de tareas numéricas, es imprescindible que los elementos de las colecciones sean considerados como unidades equivalentes. Cualquier aspecto saliente (perceptivamente) de estos elementos, dificultaría esta necesidad de abstracción. Por esto, los materiales con baja riqueza perceptiva resultarían más eficaces que los materiales con alta riqueza perceptiva.

Parecería, pues, imprescindible que a la hora de elegir los materiales más adecuados para cualquier aprendizaje se valoren sus características perceptivas y su naturaleza semiótica para que dichos materiales se adecuen a las demandas específicas de las actividades y tareas.

Antes de finalizar es necesario mencionar algunas limitaciones del presente estudio y perspectivas futuras de investigación. Una limitación está en relación con la selección de las representaciones numéricas. Los niños interactúan desde muy temprano con una gran variedad de representaciones de la cantidad, que exceden a las colecciones de objetos y en imágenes consideradas en esta investigación. Sería pertinente realizar nuevos estudios que indaguen la influencia de otros tipos de representaciones en la resolución de tareas con demanda cardinal. Se podrían introducir nuevas variaciones al interior de las colecciones, no solamente distinguiendo entre imágenes y objetos y entre aquellas con o sin riqueza perceptual, sino considerando otras propiedades de las colecciones. Por ejemplo, se podrían utilizar colecciones de sonidos o efectos visuales, e incluso gestos numéricos, conservando el carácter iterativo de la representación, pero no el carácter de permanencia material.

Otra limitación del estudio es que el procedimiento de intervención no se modificó entre sesiones a partir del desempeño infantil en cada evaluación mediante tarea Señala X. En una situación de enseñanza-aprendizaje natural, el adulto debería haber adaptado las exigencias de la intervención en función del desempeño de cada niño o niña en la sesión anterior, o incluso en los ensayos de una misma sesión, aumentando o disminuyendo el número de ensayos, o bien incorporando otros recursos semióticos como gestos numéricos (ya no el mero señalamiento de los elementos). Sin embargo, con la intención de mantener el procedimiento constante para todos los niños y condiciones (a excepción del tipo de representación que es la variable independiente manipulada experimentalmente), se realizaron las sesiones de intervención siempre de la misma manera.

Finalmente, si bien se realizaron cinco encuentros con cada niño, incluyendo pre-test, sesiones de intervención y post-test, todo el proceso se realizó en el transcurso de una semana. Sería interesante realizar estudios longitudinales, con más sesiones de intervención y más espaciadas, que permitan abordar los efectos de las variables de interés en función del tiempo.

En síntesis, los hallazgos de este estudio muestran que la riqueza perceptual de colecciones en imágenes y de objetos puede tener una influencia disruptiva en la comprensión cardinal en la etapa preescolar y que a la hora de diseñar o seleccionar materiales para la enseñanza de conocimientos numéricos en estas edades "menos es más".

AGRADECIMIENTOS

El trabajo ha sido realizado gracias a la financiación otorgada por la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (PICT 2017 N° 3199) y la Universidad Nacional de Rosario (PSI 2016-349), Argentina.

REFERENCIAS

Benoit, L., Lehalle, H., y Jouen, F. (2004). Do young children acquire number words through subitizing or counting? *Cognitive Development, 19*(3), 291–307.

Bruner, J. (1986). *Actual minds, possible worlds*. Harvard University Press.

Carbonneau, K. J., y Marley, S. C. (2015). Instructional guidance and realism of manipulatives influence preschool children's mathematics learning. *The Journal of Experimental Education, 83*(4), 495–513. https://doi.org/10.1080/00220973.2014.989306

Carbonneau, K. J., Min Wong, R., y Borysenko, N. (2020). The influence of perceptually rich manipulatives and collaboration on mathematic problem-solving and perseverance. *Contemporary Educational Psychology, 61*, 1-11. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2020.101846

Carey, S. (2009). *The origins of concepts*. Oxford University Press.

Chiong, C., y DeLoache, J. (2012). Learning the ABC's: what kinds of picture books facilitate young children's learning? *Journal of Early Childhood Literacy, 13*(2), 225–241.

Condry, K., y Spelke, E. S. (2008). The development of language and abstract concepts: The case of natural number. *Journal of Experimental Psychology, 137*(1), 22-38.

Davidson, K., Eng, K., y Barner, D. (2012). Does learning to count involve a semantic induction? *Cognition, 123*(1), 162–173.

DeLoache, J. S. (2002). Symbolic artifacts: Understanding and use. En U. Goswami (Ed.), *Blackwell handbook of childhood cognitive development* (pp. 206-226). Blackwell Publishing.

DeLoache, J. S. (1995). Early understanding and use of symbols: The model model. *Current Directions in Psychological Science, 4*, 109-113.

Gelman, S. A., Chesnick, R. J., y Waxman, S. R. (2005). Mother-child conversations about pictures and objects: Referring to categories and individuals. *Child Development, 76*(6), 1129–1143. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2005.00876.x-i1

Gelman, R., y Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number.* Harvard University Press.

Gelman, R., y Meck, E. (1983). Preschooler's counting: principles before skill. *Cognition, 13*, 343-360.

Huang, Y., Spelke, E., y Snedeker, J. (2010). When is four far more than three? Children's generalization of newly-acquired number words. *Psychological Science, 21*(4), 600-606. https://doi.org/10.1177/0956797610363552

Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M., y Heckler, A. (2009). Transfer of mathematical knowledge: The portability of generic instantiations. *Child Development Perspectives, 3*(3), 151–155. https://doi.org/10.1111/j.1750-8606.2009.00096.x

Kaminski, J., y Sloutsky, V. (2020). The use and effectiveness of colorful, contextualized, student-made material for elementary mathematics instruction. *International Journal of STEM Education, 7*(6), 1-23. https://doi.org/10.1186/s40594-019-0199-7

Krajcsi, A. (2021). Follow-up questions influence the measured number knowledge in the Give-a-number task. *Cognitive Development*, *57*, 100968. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2020.100968

Le Corre, M., y Carey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition, 105*, 395-438.

Marchand, E., Lovelett, J., Kendro, K., y Barner, D. (2022). Assessing the knower-level framework: How reliable is the Give-a-number task? *Cognition*, *222*, 104998. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2021.104998

Martí, E., y Scheuer, N. (2015) Semiotic systems, culture and early mathematical knowledge. *Estudios de Psicología*, *36*, 1-17.

Martí, E. (2003). *Representar el mundo externamente*. Machado.

McNeil, N., Uttal, D., Jarvin, L., y Sternberg, R. (2009). Should you show me the money? Concrete objects both hurt and help performance on mathematics problems. *Learning and Instruction, 19*, 171-184.

Mix, K. S., Huttenlocher, J., y Levine, S. C. (2002). *Quantitative development in infancy and early childhood*. Oxford University Press.

Pérez-Echeverría. M. P., y Scheuer, N. (2009). External Representations as Learning Tools: An Introduction. En C. Andersen, N. Scheurer, M. P. Pérez Echeverría, y E. Teubal (Eds.), *Representational Systems and Practices as Learning Tools* (p. 1-17). Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087905286_002

Petersen, L., y McNeil, N. (2012). Effects of perceptually rich manipulatives on preschooler's counting performance: Established knowledge counts. *Child Development, 84*(3), 1020-1033. https://doi.org/10.1111/cdev.12028

Petersen, L. A., McNeil, N. M., Tollaksen, A. K., Boehm, A. G., Hall, C. J., Carrazza, C., y Devlin, B. L. (2014). Counting practice with pictures, but not objects, improves children's understanding of cardinality. En P. Bello, M. Guarini, M. McShane, y B. Scassellati (Eds.), *Proceedings of the 36th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 2633-2637). Cognitive Science Society.

Piaget, J. (1970). *Science of education and the psychology of the child*. Orion Press.

Rodríguez, J., Martí, E., y Salsa, A. M. (2018). Symbolic representations and cardinal knowledge in 3- and 4-year-old children. *Cognitive Development*, *48*, 235-243. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2018.09.004

Sarnecka, B. (2015). Learning to represent exact numbers. *Synthese*, 1–18. https://doi.org/10.1007/s11229-015-0854-6

Sarnecka, B., y Carey, S. (2008). How counting represents number: What children must learn and when they learn it. *Cognition, 108*, 662-674. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2008.05.007

Sarnecka, B., y Lee, M. (2009). Levels of number knowledge during early childhood. *Journal of Experimental Child Psychology, 103*, 325-337. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2009.02.007

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: How mathemati-cal discourse and mathematical objects create each other. En P. Cobb, K. E. Yackel, y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating: Perspectives on mathematical discourse, tools, and instructional design* (pp. 37–98). Lawrence Erlbaum Associates, Inc

Sfard, A., y Lavie, I. (2005). Why cannot children see as the same what grown-ups cannot see as different? Early numerical thinking revisited. *Cognition and Instruction, 23*, 237-309. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2302_3

Spaepen, E., Gunderson, E. A., Gibson, D., Goldin-Meadow, S., y Levine, S. C. (2018). Meaning before order: Cardinal principle knowledge predicts improvement in understanding the successor principle and exact ordering. *Cognition, 180*, 59-81. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2018.06.012

Strouse, G.A., Nyhout, A., y Ganea, P.A. (2018). The role of book features in young children's transfer of information from picture books to real-world contexts. *Frontiers in Psychology, 9*, 50. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.00050

Tare, M., Chiong, C., Ganea, P., y DeLoache, J. S. (2010). Less is more: How manipulative features affect children's learning from picture books. *Journal of Applied Developmental Psychology, 31*, 395-400.

Tolchinsky, L. (2007). Usar la lengua en la escuela. *Revista Iberoamericana de Educación, 46*, 37-54.

Uttal, D., Scudder, K., y DeLoache, J. S. (1997). Manipulatives as symbols: A new perspective on the use of concrete to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology, 18*, 37-54.

Uttal, D., Amaya, M., Maita, M. R., Liu Hand, L., Cohen, C., O'Doherty, K., y De-Loache, J. S. (2013). It works both ways: Transfer difficulties between manipulatives and written subtractions solutions. *Child Development Research, 2013*, 1-13. https://doi.org/10.1155/2013/216367

van Marle, K., Chu, F. W., Li, Y., y Geary, D. C. (2014). Acuity of the approximate number system and preschoolers' quantitative development. *Developmental Science, 17*(4), 492-505.

Wagner, K., Chu, J., y Barner, D. (2019). Do children's number words begin noisy? *Developmental Science, 22*(1), e12752. https://doi.org/10.1111/desc.12752

Walkerdine, V. (1988). *The mastery of reason*. Routledge.

Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition, 36*, 155-193. https://doi.org/10.1016/0010-0277(90)90003-3

Wynn, K. (1992). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology, 24*, 220-251. https://doi.org/10.1016/0010-0285(92)90008-P

Autor de correspondencia

Analía Salsa

Dirección: IRICE (CONICET-UNR), Bv. 27 de Febrero 210 bis, Rosario, Argentina
salsa@irice-conicet.gov.ar

 https://doi.org/10.24844/EM3501.05

Conhecimento sobre tarefas e sobre os alunos num estudo de aula com professoras de matemática

Knowledge about tasks and students in a lesson study with mathematics teachers

Paula Gomes,[1] Marisa Quaresma,[2] João Pedro da Ponte[3]

Resumo. A partir de um estudo de aula baseado numa abordagem exploratória, analisamos o desenvolvimento do conhecimento de professoras de Matemática do ensino secundário sobre a elaboração de tarefas e a antecipação de estratégias e dificuldades dos alunos, no planeamento da aula e na reflexão sobre o trabalho dos alunos. A investigação é qualitativa/interpretativa. Os dados foram recolhidos por observação participante (com diário de bordo e gravações áudio/vídeo), recolha documental e entrevista. Os resultados sugerem que, nas sessões de planeamento, as discussões sobre a redação e sequenciação das questões da tarefa, influenciadas pela antecipação de estratégias e dificuldades dos alunos, criaram oportunidades para as professoras desenvolverem o seu conhecimento sobre a elaboração de tarefas, as estratégias que os alunos podem seguir e formas de os apoiar. Desenvolveram também o seu conhecimento sobre a condução da realização de tarefas exploratórias,

Fecha de recepción: 10 de julio de 2020. **Fecha de aceptación:** 8 de julio de 2021.

[1] Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal, paula.gomes@campus.ul.pt, orcid.org/0000-0002-8270-6618.

[2] Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal, mq@campus.ul.pt, orcid.org/0000-0002-0861-6016.

[3] Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal, jpponte@ie.ulisboa.pt, orcid.org/0000-0001-6203-7616.

nomeadamente a seleção e sequenciação de respostas para a discussão coletiva. Nas reflexões pós-aula, ampliaram ainda o seu conhecimento sobre os alunos e a sua aprendizagem, discutindo estratégias e dificuldades não antecipadas e procurando razões para essas dificuldades.

Palavras-chave: *Tarefa exploratória, conhecimento didático, estudo de aula, ensino secundário.*

Abstract: From a lesson study based on an exploratory approach, we analyze the development of secondary school mathematics teachers' knowledge on task design and anticipating students' strategies and difficulties, in the lesson planning and reflection on students' work. The research is qualitative/interpretative. Data were collected by participant observation (with researcher's journal and audio/video recordings), document collection, and interview. The results suggest that in the planning sessions, discussions about the wording and ordering of questions in the task, influenced by anticipation of students' solving strategies and difficulties, created opportunities for teachers to develop their knowledge about task design, the strategies students might follow and ways to support them. The teachers developed their knowledge of how to teach exploratory tasks, namely the selection and sequencing of students' answers for the whole-class discussion. In the post-lesson reflections, they expanded their knowledge about students and their learning by discussing strategies and unanticipated difficulties and seeking for reasons for those difficulties.

Keywords: *Exploratory task; didactic knowledge; lesson study; secondary school.*

1. INTRODUÇÃO

Contrastando com outros processos de desenvolvimento profissional centrados no trabalho do professor, o foco do estudo de aula está nas aprendizagens dos alunos. Um estudo de aula envolve trabalho colaborativo de um grupo de professores no planeamento, observação e reflexão sobre uma aula, a aula de investigação. O planeamento detalhado dessa aula é uma parte importante do estudo de aula e inclui a escolha das tarefas a propor aos alunos (Doig *et al.*, 2011; Fujii, 2018, 2019), centrais na aprendizagem da Matemática. O professor tem um papel fundamental na seleção das tarefas, mas essa seleção e a condução da sua realização colocam-lhe diversos desafios (Barber, 2018; Chapman, 2013), nomeadamente, a identificação de tarefas que os alunos possam resolver usando diferentes representações e diferentes estratégias, que permitam conexões entre diferentes conceitos e procedimentos (Barber, 2018; Ponte *et al*., 2019) e que sejam pontos de partida adequados para a introdução de novos conceitos e procedimentos (Ponte, 2005).

A elaboração da tarefa é influenciada pela antecipação de estratégias de resolução e de dificuldades dos alunos, outro aspeto que integra o planeamento da aula (Fujii, 2015, 2019). Por um lado, antecipar as possíveis estratégias e dificuldades dos alunos ajuda o professor a selecionar as questões a colocar na tarefa e a pensar na forma de as redigir. Por outro lado, ajuda-o a pensar em formas de apoiar os alunos durante a aula, sem diminuir o grau de desafio da tarefa. No entanto, vários estudos referem que antecipar de uma forma aprofundada as representações e estratégias que os alunos podem usar para resolver uma tarefa reveste-se de assinalável complexidade para os professores (e.g., Groves *et al*., 2016; Lee y Takahashi, 2011).

O conhecimento sobre a elaboração de tarefas e a capacidade de antecipar possíveis estratégias e dificuldades dos alunos integram o conhecimento didático do professor (Ponte, 2012) e podem ser desenvolvidos com a sua participação em estudos de aula (e.g., Barber, 2018; Cajkler *et al*., 2015; Ni Shuilleabhain y Seery, 2017; Ponte *et al*., 2018; Quaresma y Ponte, 2017; Verhoef *et al*., 2015). No entanto, a nível internacional a maioria dos trabalhos envolvendo professores em serviço, refere-se a estudos de aula com professores do ensino básico. O ensino da Matemática a nível secundário (15-18 anos) é perspetivado de modo bem distinto em termos curriculares, pois alunos têm já outro desenvolvimento matemático e outros interesses (Speer *et al*., 2015) e a prática dos professores assume contornos próprios (Verhoef *et al*., 2014). Por isso, é importante verificar até que ponto o conhecimento dos professores deste nível de ensino sobre estas questões pode ser desenvolvido através de estudos de aula. Assim, esta investigação tem por objetivo analisar o desenvolvimento do conhecimento sobre elaboração de tarefas e a antecipação de estratégias e dificuldades dos alunos, nas sessões de planeamento e de reflexão sobre o trabalho dos alunos na aula, por parte de professoras do ensino secundário, enquanto participantes num estudo de aula inspirado numa abordagem exploratória do ensino da Matemática.

2. O ESTUDO DE AULA

Num estudo de aula, um grupo de professores identifica um problema de aprendizagem dos alunos, trabalha colaborativamente para planear detalhadamente uma aula de investigação que possa ajudar a ultrapassar esse problema e reflete sobre as aprendizagens dos alunos nessa aula. Este trabalho, centrado no aluno, diferencia o estudo de aula de outros processos de desenvolvimento profissional que se centram no trabalho do professor (Cajkler *et al.*, 2015).

Uma parte das sessões de planeamento é dedicada à elaboração da tarefa a propor aos alunos durante a aula de investigação. Os professores antecipam estratégias e dificuldades dos alunos, tendo em conta a forma como eles podem responder e as representações que podem usar, e pensam em formas de os ajudar a ultrapassar essas dificuldades. Esse trabalho influencia o planeamento da aula e a forma como os professores redigem as questões da tarefa e permite-lhes ver a Matemática através dos olhos dos alunos (Fujii, 2018).

A aula é lecionada por um dos professores, enquanto os outros observam, focando-se no trabalho dos alunos. Essa observação, em tempo real, é outra característica que distingue o estudo de aula de outros processos formativos e proporciona ao professor uma oportunidade de desenvolvimento do conhecimento profissional (Murata, 2011). A discussão entre os participantes, depois da aula, baseada nas observações do trabalho dos alunos, permite-lhes partilhar e refletir sobre esse trabalho, procurando fazer inferências sobre as aprendizagens dos alunos.

Num estudo de aula, a tarefa proposta assume um lugar central durante a aula de investigação, quando os professores observam o trabalho dos alunos e o comparam com o que planearam, e depois da aula quando discutem o trabalho e as aprendizagens dos alunos a partir das suas observações (Fujii, 2015). Várias investigações sobre estudos de aula mencionam alterações no plano de aula ou no enunciado da tarefa, resultantes da observação do trabalho dos alunos e da discussão pós-aula. Por exemplo, Adler e Alshwaikh (2019) referem que os professores alteraram uma tarefa usada numa aula de investigação e que tinha sido inicialmente proposta pelos formadores, tendo em conta as respostas dos seus alunos. Na segunda versão da tarefa, tiveram o cuidado de não introduzir uma grande diversidade de questões, para não se afastarem do objetivo da aula. Noutro trabalho, Verhoef *et al.* (2015) referem que, depois de observarem e refletirem sobre as aulas, os professores reformularam as tarefas selecionadas, tendo em conta o objetivo da aula e as aprendizagens que os alunos deveriam realizar, promovendo trabalho colaborativo entre alunos e incluindo breves discussões coletivas no início das aulas.

3. TAREFAS E PLANIFICAÇÃO

Uma tarefa é um ponto de partida e o objeto para a atividade do aluno num determinado contexto (Christiansen y Walther, 1986), sendo a escolha das tarefas uma parte importante do planeamento da aula de investigação (Doig *et al.*, 2011; Fujii, 2018). Se a tarefa for bem escolhida, potencia a discussão de ideias matemáticas importantes (Fujii, 2018) e a aprendizagem dos alunos (Brodie, 2010; Christiansen y Walther, 1986).

3.1. Tarefas de natureza exploratória

Tanto a atividade do aluno como o papel do professor durante a aula estão relacionados com a abordagem curricular subjacente, o que influencia a seleção e elaboração da tarefa e todo o trabalho dos professores, desde o planeamento à reflexão pós-aula. À semelhança de outros estudos de aula já realizados em Portugal com professores em serviço (e.g., Quaresma y Ponte, 2017), no estudo de aula a que se refere este artigo, as professoras procuraram seguir uma abordagem de ensino-aprendizagem exploratória (Ponte, 2005). Nessa abordagem são valorizados os momentos de reflexão e discussão com toda a turma, com base no trabalho desenvolvido pelos alunos, "como momentos de excelência para a sistematização de conceitos, a formalização e o estabelecimento de conexões matemáticas" (Ponte, 2005, p. 16).

Sobre as tarefas que são propostas aos alunos, Ponte (2005) refere que elas podem ser analisadas por duas dimensões: a estrutura (aberta ou fechada) e o grau de desafio (reduzido ou elevado). No ensino exploratório, predomina o trabalho dos alunos em tarefas de exploração, que o autor define como tarefas relativamente abertas e acessíveis, para as quais o aluno não tem uma solução imediata e em que pode começar a trabalhar a partir do seu conhecimento prévio. O aluno pode resolver essas tarefas usando diversas representações matemáticas e seguindo várias estratégias (Ponte *et al.*, 2018), que depois tem oportunidade de apresentar e discutir com os seus colegas.

Várias investigações (Ponte *et al.*, 2015; Quaresma y Ponte, 2017) referem que quando os professores propõem tarefas de cunho exploratório, os alunos conseguem ser autónomos na sua resolução e envolvem-se mais no processo de aprendizagem, resultando em aprendizagens mais significativas. Além disso, estas investigações fazem referência ao estudo de aula como uma oportunidade para os professores planearem e realizarem aulas exploratórias, permitindo-lhes repensar as suas práticas, o seu papel e o papel do aluno em sala de aula.

3.2. Trabalho do professor na elaboração de tarefas

O professor tem um papel fundamental na seleção das tarefas (Barber, 2018; Chapman, 2013) e deve planear cuidadosamente o modo como vai conduzir a aula e o trabalho dos alunos, pois a aprendizagem é condicionada pela forma como as tarefas são interpretadas e realizadas na aula (Chapman, 2013). O complexo trabalho dos professores na elaboração e planeamento das tarefas que vão propor aos alunos vai muito além do que é visível em sala de aula, como se da parte submersa de um iceberg se tratasse. Uma parte desse trabalho é a elaboração do enunciado da tarefa, que pode ser criado pelos professores ou adaptado de manuais escolares ou de outros materiais curriculares. Além de propor tarefas para promover a aprendizagem dos alunos sobre um determinado conteúdo (Ponte y Quaresma, 2016), os professores podem apresentar tarefas para os levar a aplicar conhecimentos que já adquiriram, ou para verificar se dominam ou não certos conhecimentos (Ponte *et al.*, 2015).

As tarefas selecionadas pelos professores devem poder ser resolvidas recorrendo a diversas representações matemáticas e seguindo diversas estratégias (Doig *et al.*, 2011; Fujii, 2019; Stein *et al.*, 2008), e devem permitir estabelecer conexões entre diferentes conceitos e procedimentos (Barber, 2018). Vários autores referem que é fundamental que as tarefas sejam desafiantes (e.g., Quaresma y Ponte, 2016; Stein *et al.*, 2008; Stein y Smith, 2009), sendo muito importante que o grau de desafio seja adequado aos alunos a quem a tarefa se destina. Por isso, quando elaboram as tarefas, os professores precisam de atender aos conhecimentos prévios dos alunos (Fujii, 2016, 2018; Stein y Smith, 2009), pois a mesma questão pode ser um simples exercício, se eles dispõem de um processo imediato para a resolver, e, para outros, pode ser um difícil problema, o que pode desmotivá-los e desinteressá-los (Brodie, 2010; Jaworski y Potari, 2009).

Antes de propor as tarefas aos alunos, o professor precisa de as resolver. Isso permite-lhe perceber se as tarefas que selecionou são motivadoras e matematicamente desafiantes e se se ajustam às características dos seus alunos (Fujii, 2016, 2018; Jaworski y Potari, 2009; Stein y Smith, 2009) e permite-lhe pensar em estratégias que os alunos podem seguir e em erros e dificuldades que podem emergir (Fujii, 2019).

Para potenciar discussões que vão ao encontro dos objetivos da aula, alguns autores referem discussões entre os professores participantes em estudos de aula sobre a escolha dos números que aparecem na tarefa (e.g., Doig *et al.*, 2011; Fujii, 2016), sobre a redação do enunciado das questões e as condições que são escolhidas (Adler y Alshwaikh, 2019) e sobre a seleção e sequenciação de exemplos e questões, com crescente grau de dificuldade (Lim *et al.*, 2016).

3.3 Antecipação de estratégias e dificuldades

Para além da formulação das tarefas, a forma como elas são apresentadas pelo professor e o modo como ele conduz a sua realização influenciam o trabalho e as aprendizagens dos alunos (Stein y Smith, 2009). Assim, selecionada a tarefa, a planificação da aula é determinante para as aprendizagens que os alunos podem fazer durante essa aula (Fujii, 2018; Lee y Takahashi, 2011), embora o professor não consiga prever tudo o que pode vir a acontecer. Vários autores referem diversos aspetos a incluir num plano de aula, entre os quais as tarefas a propor, a antecipação das estratégias e dificuldades dos alunos e as questões e comentários a usar para lhes responder (e.g., Groves *et al.*, 2016; Jesus *et al.*, 2020).

Além de desenvolver a capacidade de ver a Matemática através dos olhos dos alunos (Fujii, 2018), antecipar estratégias e dificuldades dos alunos ajuda o professor a clarificar o valor matemático da tarefa, a identificar resoluções que vão ao encontro dos objetivos da aula e a sequenciá-las para o momento de discussão com toda a turma (Doig *et al.*, 2011; Groves *et al.*, 2016; Vale *et al.*, 2019). Isso pode levar o professor a alterar o enunciado da tarefa, se necessário, adequando-o ao trabalho que pretende realizar com os alunos (Fujii, 2018, 2019), e ajuda-o a assegurar-se que os objetivos da aula são atingidos (Jesus *et al.*, 2020; Fujii, 2019). Além disso, antecipar possíveis erros dos alunos ajuda o professor a analisar se devem ser explorados, de acordo com os objetivos da aula (Alshwaikh y Adler, 2017), consciente de que podem surgir uma diversidade de estratégias e que algumas delas podem não ser adequadas à realização da tarefa.

Antecipadas possíveis dificuldades dos alunos, quando planifica os momentos de trabalho autónomo, o professor precisa de pensar em formas de os ajudar a ultrapassá-las (Jesus *et al.*, 2020; Fujii, 2019; Vale *et al.*, 2019). O professor deve pensar nas questões ou comentários que pode fazer para apoiar os alunos durante a resolução da tarefa, seja para ajudar os que têm mais dificuldades ou para levar os que completaram a tarefa original a fazer generalizações ou demonstrações das suas respostas (Vale *et al*., 2019). Nas suas interações com os alunos, o professor deve levá-los a questionar os seus argumentos e a procurar estratégias alternativas de resolução e deve ter o cuidado de não lhes indicar a estratégia a seguir ou os procedimentos a realizar, para não reduzir a complexidade da tarefa (Brodie, 2010; Stein y Smith, 2009). Além disso, para manter um alto nível de exigência cognitiva de uma tarefa, nas suas intervenções, o professor deve incentivar "justificações, explicações e significados através de questões, comentários e *feedback*" (Stein y Smith, 2009, p. 27). Sobre essas intervenções, no seu trabalho, Barber (2018) refere que antes de participar no estudo de aula, quando os alunos não davam as respostas que a professora esperava, ela explicava-lhes a resposta. No entanto, ao longo do estudo de aula, a professora reconheceu a importância de questionar os alunos e focou-se em perguntas que podia fazer para os ajudar a explicar e a justificar as suas respostas.

Embora seja uma parte importante da elaboração de tarefas num estudo de aula (Fujii, 2015), vários autores dão conta dos desafios que se colocam aos professores quando tentam antecipar estratégias e dificuldades dos alunos, pondo-se no papel destes. Por exemplo, no seu trabalho, Groves *et al*. (2016) referem a dificuldade que os professores tiveram na antecipação de respostas dos alunos e a necessidade que sentiram de propor tarefas parecidas, ou até a mesma tarefa que usariam na aula de investigação, a outras turmas. As reflexões que fizeram sobre esse trabalho ajudaram os professores a antecipar as respostas dos alunos e a preparar as suas intervenções durante a aula de investigação para ajudar os alunos a explicar o modo com pensaram. Também Ni Shuilleabhain e Seery (2017) relatam que, depois de observarem as aulas e refletirem sobre elas, os professores foram ganhando confiança para anteciparem as dificuldades dos alunos e para incluírem no plano de aula questões e comentários que os ajudassem a ultrapassar essas dificuldades e a explicar o seu raciocínio.

4. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

Esta investigação segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan y Biklen, 1994), partindo do trabalho de três professoras num estudo de aula, que decorreu na sua escola, com o objetivo de analisar o desenvolvimento do seu conhecimento sobre tarefas e sobre antecipação de estratégias e dificuldades dos alunos. As participantes, Sofia, Branca e Luz (pseudónimos), todas com mais de

25 anos de serviço, disponibilizaram-se para participar no estudo de aula, no ano letivo de 2019/2020, quando lecionavam a disciplina de Matemática A a turmas do 11.º ano de escolaridade (alunos com 16/17 anos). As professoras reuniam-se com frequência para discutir e planear o trabalho com os seus alunos, e partilhavam semanalmente o espaço da sua sala com um colega, realizando uma prática de coadjuvação na disciplina de Matemática. A primeira autora do artigo, também professora na mesma escola, assumiu o papel de formadora e conduziu o estudo de aula, assumindo igualmente o papel de participante. A formadora e as professoras já tinham trabalhado juntas em outros momentos, incluindo outros processos formativos.

A recolha de dados foi feita por observação participante, com elaboração de um diário de bordo, recolha documental, gravação áudio das sessões (Sx), gravação vídeo das aulas de investigação e entrevista semiestruturada em grupo focal, no fim do estudo de aula. A análise de dados teve em conta o quadro teórico e foi feita com apoio do software NVivo, procurando identificar evidências de aprendizagens das professoras sobre a elaboração das tarefas e a antecipação das estratégias e dificuldades dos alunos. Neste artigo é analisado o trabalho nas sessões de planeamento de uma tarefa (realizado em quatro sessões), a discussão pós-aula e a entrevista em grupo focal. Para a análise do desenvolvimento do conhecimento das professoras foi considerado o quadro proposto por Ponte (2012), nomeadamente o conhecimento da prática letiva e o conhecimento dos alunos e da sua aprendizagem.

5. O ESTUDO DE AULA COM PROFESSORAS DO ENSINO SECUNDÁRIO

O estudo de aula decorreu entre novembro de 2019 e fevereiro de 2020 e teve 19 sessões, com duração variável entre 20 e 125 minutos. No início do estudo de aula, as professoras decidiram planear uma aula de investigação, com dois tempos de 45 minutos, no domínio "Funções reais de variável real", transversal ao currículo do ensino secundário, baseando-se na sua experiência e nas dificuldades que os seus alunos costumam ter. A tabela 1 apresenta um resumo das sessões do estudo de aula.

Tabela 1. Resumo das Sessões do Estudo de Aula

Sessão (S)	Resumo
1	Seleção do tópico: "estudo do sinal de funções racionais dadas por expressões da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinómios"
2 a 5	Planeamento da aula de investigação (AI1) • identificar os conhecimentos que seria de esperar os alunos terem • partilhar o modo como abordaram alguns conceitos nas suas aulas e planear tarefas para propor aos alunos antes da aula de investigação (introdução da noção de assíntota ao gráfico de uma função, por exemplo) • elaborar tarefas para propor aos alunos antes da aula de investigação (uma sobre a função raiz quadrada e outra sobre a determinação dos zeros de uma função racional) • analisar um artigo sobre estratégias e erros de alunos na resolução de equações e inequações (Tsamir y Almog, 2001) • elaborar a tarefa para a aula de investigação • antecipar representações que os alunos poderiam usar, estratégias que poderiam seguir e dificuldades que poderiam emergir • pensar em formas de apoiar os alunos durante o trabalho autónomo • planear a aula, incluindo a introdução da tarefa, o trabalho autónomo dos alunos e a discussão coletiva
6	Aula de investigação (AI1.1)
7	Reflexão pós-aula (AI1R1) • analisar o trabalho dos alunos, as representações e as estratégias que usaram, comparando-os com o que planearam • discutir sobre a necessidade, ou não, de alterar o enunciado da tarefa ou o plano de aula
8	Aula de investigação (AI1.2)
9	Reflexão pós-aula (AI1R2) – idêntica a AI1R1
10 a 12	Planeamento de uma nova aula de investigação (AI2) sobre o tópico "aplicar a noção de derivada ao estudo de funções" – idêntica a AI1, com discussões sobre o planeamento da unidade curricular como, por exemplo, o modo como uma das professoras introduziu, nas suas aulas, o conceito de derivada de uma função num ponto.
13	Aula de investigação (AI2.1)
14	Reflexão pós-aula (AI2R1) – idêntica a AI1R1
15	Aula de investigação (AI2.2)
16	Reflexão pós-aula (AI2R2) – idêntica a AI1R1
17	Aula de investigação (AI2.3)
18	Reflexão pós-aula (AI2R3) – idêntica a AI1R1
19	Balanço do trabalho no estudo de aula. Entrevista em grupo focal

No planeamento das aulas, uma parte significativa das sessões foi dedicada à elaboração de tarefas em que os alunos pudessem trabalhar com alguma autonomia, explicando as suas ideias e justificando os seus raciocínios, assim como à antecipação de possíveis erros e dificuldades dos alunos, pensando em perguntas que os poderiam ajudar a avançar no seu trabalho. Entre as sessões, particularmente durante o planeamento da segunda aula de investigação, as professoras trocaram e-mails onde registaram várias observações sobre o enunciado da tarefa que foram discutidas nas sessões seguintes.

Seguindo a abordagem exploratória, as aulas foram estruturadas em três fases (Ponte, 2005; Stein *et al*., 2008): (i) apresentação da tarefa, pelo professor, certificando-se que os alunos a compreendem; (ii) trabalho autónomo dos alunos, em pares ou em pequenos grupos, acompanhado pelo professor que vai respondendo às questões dos alunos, com o cuidado de não uniformizar estratégias de resolução nem dar respostas que reduzam o nível de exigência da tarefa; e (iii) discussão coletiva de resoluções dos alunos previamente selecionadas pelo professor, valorizando a apresentação, justificação, argumentação e negociação de significados, com uma síntese e sistematização das aprendizagens matemáticas realizadas.

6. RESULTADOS

Os resultados deste estudo são apresentados em quatro pontos. Na análise dos três primeiros pontos damos atenção ao trabalho das professoras durante as sessões de planeamento de uma tarefa e na reflexão pós-aula, referindo discussões sobre o enunciado da tarefa elaborada, erros e dificuldades antecipadas, assim como discussões sobre o trabalho dos alunos na aula de investigação e resoluções não antecipadas durante o planeamento. Por fim, apresentamos as perspetivas das professoras sobre o trabalho no estudo de aula.

6.1 Elaboração da tarefa - Inequações com funções racionais

A tarefa foi pensada para introduzir o tópico “estudo do sinal de funções racionais dadas por expressões da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinómios”, e foi dividida em duas partes. As professoras pensaram começar pela resolução da condição $\frac{x^2-4}{x-2} > 0$. No entanto, se os alunos simplificassem a fração, isso poderia afastá-los dos objetivos da aula. Decidiram então propor a resolução de uma inequação em que o numerador e o denominador fossem polinómios de grau 1 (figura 1). Quanto à redação da questão, as professoras pensaram pedir aos alunos para apresentarem a representação gráfica a par da representação algébrica para potenciar o confronto das duas, como tinham feito numa outra tarefa. Depois de alguma discussão, decidiram não orientar o trabalho dos alunos, e explorar diferentes respostas durante a discussão coletiva, como referiu Branca: "E é interessante o confronto... até se uns fizerem analiticamente e outros graficamente, tentar perceber porque é que não são coincidentes... ou são..." (S5).

Resolve, em $\mathbb{R}$, a condição $\frac{x+3}{x-2} > 0$

Figura 1. Enunciado da Primeira Questão da Tarefa

Depois de ser discutida a primeira parte da tarefa, era dada aos alunos uma segunda parte (Figura 2). Os alunos já deveriam saber resolver as duas primeiras condições e poderiam usá-las para responder à questão seguinte.

1. **Determina, em $\mathbb{R}$, o conjunto-solução de cada uma das seguintes condições:**

    1.1. $x - 3 > 0$ **1.2.** $x^2 - 4 > 0$

    1.3. $\frac{x^2-4}{x-3} > 0$ **1.4.** $\frac{3x-x^2}{x^2+x-2} \leq 0$

Figura 2. Enunciado da Segunda Parte da Tarefa

As professoras sequenciaram as questões para que os alunos começassem por um caso mais simples, o quociente de dois polinómios de grau 1, aumentando gradualmente o grau de dificuldade, como podemos ver nesta conversa entre elas:

Branca: Eu acho que era mais interessante começar por esta $\frac{x+3}{x-2} > 0$.

Sofia: (...) $\frac{x^2-4}{x-3} > 0$ já é um exemplo mais elaborado. Aqui [$\frac{x+3}{x-2} > 0$] são duas de primeiro grau, são mais simples de resolver, não é? Acho que aquele já podem ser um passo seguinte.

Branca: Este é um primeiro passo para ver exatamente qual o método que eles...

Sofia: Se estiver $x - 3 > 0$, e se tiverem (...) $x^2 - 4 > 0$ (...) E então já tem que entrar o sinal de um e o sinal do outro.... E isso já remete para uma coisa do género do que fizeram na anterior, com a variante de ter uma quadrática. (...) Depois (...) a 1.4, que no fundo é duas parábolas. Aqui é duas de primeiro grau, depois era ...

Branca: Uma de primeiro e uma de segundo (...)

Luz: Aí duas de segundo.

Sofia: (...) E, portanto, já trabalhámos uma série de situações. (S4)

Decidiram incluir uma outra questão, idêntica à 1.3, que tinha dois casos particulares, como refere Sofia: "aquelas situações em que é tudo positivo, por exemplo $\frac{x^2+4}{x-2} < 0$, ou $\frac{-x^2-4}{x-2} < 0$, para eles perceberem que também têm que pensar um bocadinho e não se pôr logo a resolver. Depois é também ter a perceção de que $x^2 + 4$ é sempre positivo, e $-x^2 - 4$ é sempre negativo" (S3). Deste modo, as professoras elaboraram esta tarefa para que os alunos compreendessem os procedimentos envolvidos na resolução de inequações fracionárias, não apenas para as aquelas condições em particular, mas para os aplicarem a outras condições.

As discussões sobre a elaboração da tarefa, potenciaram uma análise por parte das professoras da redação do enunciado das questões, para suscitar respostas com diferentes representações, e das condições que colocariam no enunciado da tarefa, permitindo trabalhar diversas situações, sem se afastarem dos objetivos da aula. Além disso, discutiram como iriam sequenciar as questões, tendo em atenção as dificuldades que os alunos poderiam ter. Esse trabalho aponta, assim, para o desenvolvimento do conhecimento das professoras sobre os alunos e a forma como aprendem e sobre a prática letiva.

6.2 Antecipação de estratégias e dificuldades

Enquanto elaboravam a tarefa, as professoras foram antecipando estratégias e dificuldades dos alunos, usando a sua experiência e apoiando-se num artigo (Tsamir y Almog, 2001) que apontava possíveis respostas em questões análogas às que colocaram nesta tarefa (figura 1 e figura 2).

As professoras esperavam que os alunos resolvessem esta tarefa algébrica ou graficamente e a discussão sobre estratégias que eles poderiam seguir foi uma oportunidade para discutir a seleção e sequenciação das respostas a explorar durante a discussão coletiva:

Sofia: Temos que... organizar os momentos de discussão, os momentos de... meter a pitada quando for necessário... a ideia que também está aí subjacente [Guerreiro *et al.*, 2016]... a ideia de ver vários tipos de resoluções, e depois levá-los ao quadro por grau de complexidade ou de completude, digamos assim, não é? Do mais completo para o mais incompleto. Podemos também fazer assim. Ver como é que eles conseguem apresentar...

(...)

Paula: Até pode ser que haja alguma resolução que tenha alguma incorreção e que valha a pena explorar...

Branca: Isso é que é interessante. Isso é que poderá ser interessante. Uma resolução algébrica que esteja errada, explorar aquele erro... exatamente. E depois passar então ao gráfico, não é? E depois pôr então a algébrica correta. (S3)

Depois de mais alguma discussão, as professoras decidiram começar a discussão coletiva da primeira parte da tarefa pela representação gráfica, seguida de representações algébricas incompletas (considerar apenas o numerador e o denominador positivos, por exemplo) ou com erros (considerar apenas o numerador positivo ou usar incorretamente conectores lógicos) e de uma representação algébrica correta. Por fim, seria apresentada uma resolução com recurso a uma tabela, onde os alunos podiam estudar o sinal do numerador e do denominador da fração e, a partir daí, concluir sobre o sinal do quociente, tal como já tinham feito, no 10.º ano, para determinar o sinal de funções polinomiais de grau superior a dois. Caso os alunos não usassem alguma destas representações, gráfica, algébrica, ou recorrendo a uma tabela, as professoras desafiariam os alunos mais rápidos a resolver a tarefa usando outras representações. Para a discussão das questões 1.3 e 1.4 da segunda parte da tarefa, as professoras pensaram começar novamente pela representação gráfica, seguida de uma resolução com recurso a uma tabela.

A discussão sobre possíveis representações e estratégias de resolução dos alunos levou as professoras a alterar o enunciado da tarefa (não incluir uma fração racional que pudesse ser simplificada). Levou-as também a refletir sobre as representações e as estratégias que poderiam selecionar para a discussão com toda a turma e como poderiam sequenciá-las. Além da representação gráfica, valorizaram a utilização de uma tabela onde os alunos pudessem estudar o sinal do numerador e do denominador da fração e, a partir daí, concluírem sobre o sinal do quociente, por ser uma estratégia que se pode usar no estudo do sinal de funções racionais ou em outras situações, para determinar sinais do quociente ou do produto.

As professoras anteciparam vários erros e dificuldades dos alunos. Entre eles, na primeira parte da tarefa, anteciparam que, na representação algébrica, os alunos poderiam considerar apenas que o numerador e o denominador teriam de ser ambos positivos. Para os ajudar a chegar à resposta correta, Sofia sugeriu: "Aqui podemos dizer: (...) vejam lá, se substituírem o $\boldsymbol{x}$ por $\mathbf{-4}$, fica $\frac{-1}{-6}$. É, ou não, solução?" (S4). Outra possibilidade seria os alunos confrontarem a representação algébrica com a gráfica: "indo por aí, [o aluno] percebe: «Espera aí. Isto não podia ser. Faltam-me aqui soluções»" (Sofia, S4). "Exatamente. Falta aqui qualquer coisa", continuou Branca. Para os alunos que usassem uma tabela para resolver a condição, e tivessem dificuldade em fazê-lo, as professoras registaram no plano de aula um comentário que remetia para o trabalho com funções polinomiais que já tinham feito no 10.º ano, e escreveram uma questão que poderia ajudar os alunos: como podemos organizar a informação quando queremos determinar o sinal de uma função polinomial de grau 3 como, por exemplo, $h(x) = (x^2 - 4)(x - 3)$?

Apoiando-se no seu conhecimento sobre os alunos e no conhecimento de práticas anteriores, ampliado pela análise do artigo de Tsamir e Almog (2001), as professoras anteciparam posssíveis erros e dificuldades dos alunos, as representações que poderiam surgir e as estratégias que eles poderiam seguir. Com base nessas discussões, repensaram o enunciado da tarefa e aprofundaram o seu conhecimento sobre a condução da realização de tarefas exploratórias, pensando em formas de ajudar os alunos, incentivando-os a explicarem as suas resoluções e a confrontarem várias representações. Esse trabalho trouxe-lhes também um novo olhar para a seleção e sequenciação de respostas para o momento de discussão coletiva, incluindo resoluções incompletas ou com erros, e foi uma oportunidade para as professoras ampliarem o seu conhecimento dos alunos e da prática letiva.

6.3 Reflexões pós-aula

A reflexão começou por uma comparação entre o trabalho dos alunos e o que tinha sido antecipado. Sobre o confronto entre a representação gráfica e algébrica, as resoluções foram ao encontro do que as professoras anteciparam. Em ambas as aulas de investigação, vários alunos perceberam que a sua resolução algébrica não estava correta quando a confrontaram com a representação gráfica. Isto foi referido por Sofia: "houve um aluno que disse assim: «Então, mas agora, a solução que obtivemos não corresponde ao gráfico»" (AI1R2). Além disso, vários alunos tiveram dificuldade em escrever o conjunto-solução da condição a partir da representação gráfica: "desenharam a hipérbole, sem atender ao zero. E depois não conseguiam tirar o conjunto-solução" (Sofia, AI1R2). As professoras discutiram essa questão e refletiram sobre a causa que poderia estar por detrás dessa dificuldade:

Branca: Tinha as assíntotas, tinha o zero, tinha o outro ponto do *y*, mas depois aquilo, para o desenho... estava difícil. (risos)

Sofia: Quando nós estamos a estudar a função racional, a partir das assíntotas, fazes a divisão e identificas... fazes um esboço. Não estás com muita preocupação com os zeros. A ideia é um esboço, mesmo. Esta é uma situação diferente. Antes não tínhamos essa... era um esboço junto das assíntotas. Isto é uma novidade, porque surge como necessidade...

O facto de alguns dos alunos não conseguirem ver os dois ramos de hipérbole, na representação gráfica de $f(x) = \frac{x^2-4}{x-3}$ na calculadora gráfica, por não ajustarem a janela de visualização, levou-os a questionar as suas resoluções, sabendo que não poderiam obter diferentes conjuntos-solução. As professoras valorizaram esse trabalho dos alunos:

Branca: Eu acho que aquela questão que surgiu, que é muito interessante... aquela de eles não verem a outra parte da função (...) era na 1.3. (...) Um aluno disse: "Isto não bate certo com o conjunto-solução, porque isto chega aqui e depois é sempre negativo." E eu: "Ai sim? Então e a assíntota, onde é que está?"

Sofia: (...) Na janela standard [[-10,10]×[-10,10]] eles não viam. (...). Eles resolveram analiticamente. Fizeram o quadro. Mas depois foram à calculadora. Foram confirmar. E só lhes aparecia o primeiro ramo. [Aluno] "Ó professora, mas isto não bate certo com o conjunto-solução."

As professoras identificaram outras resoluções, com erros, que foram ao encontro do que anteciparam, como a apresentada na figura 3.

Figura 3. Resposta de um Grupo de Alunos à Questão 1.2

Como referiu Branca, "o problema é que depois não sabem o que é isto [$x > \pm 2$]" (S3). Embora esta questão já tivesse sido trabalhada, tanto no 10.º como no 11.º ano, as professoras acharam que esta poderia ser uma oportunidade para explorar este erro, muito frequente, e discutiram sobre qual pode ser a sua causa:

Branca: É verdade que eles vão ter o $\mathbf{2}$ e o $-\mathbf{2}$, mas têm que explorar graficamente qual é o intervalo que interessa. Isto é importante porque a gente faz sempre a exploração da parábola. Mas... explorar o erro deles, a ver se interiorizavam.

Luz: Eles têm interiorizada a equação. (...) A equação é mais ou menos e, pronto, acabou.

Sofia: O que eles fazem é estender a resolução da equação para as inequações. (S3)

Nesta discussão, as professoras refletiram sobre as razões que podem levar os alunos a cometer este erro e referiram que pode estar relacionado com a analogia que eles estabelecem entre a resolução da equação $\boldsymbol{x^2 - 4 = 0}$ e a da inequação associada.

Estas reflexões sobre as razões que podem estar por detrás de erros dos alunos, assim como sobre o confronto de diferentes representações, criaram oportunidades para o desenvolvimento do conhecimento das professoras sobre os alunos e a sua aprendizagem e do conhecimento sobre a prática letiva.

As professoras refletiram também sobre as dificuldades dos alunos que tentaram fazer a resolução algébrica com conectores lógicos, nas questões 1.3 e 1.4 na primeira aula (AI1.1). Depois de determinarem os zeros dos polinómios do numerador e denominador, muitos alunos tiveram dificuldade em determinar o conjunto-solução da condição:

Sofia: O que aconteceu na aula foi que os alunos, quando foram resolver a condição $\frac{x^2-4}{x-3}$, muitos deles foram pelo processo algébrico. (...) Depois perderam-se um bocadinho aí, porque também é mais difícil, porque têm que intersetar uma união com...

Branca: A maioria fez até por aí. E só se perdeu, mesmo os que fizeram bem, que não se perderam nessa, só se perderam na 1.4, que já tinha *mais* condições. Aí é que abandonaram (...)

Sofia: (...) Era melhor quando fosse a discussão da tarefa 1, dizer que aquele procedimento era mais prático e era o que íamos privilegiar, para depois eles nas questões seguintes não se perderem.

Branca: Exatamente. Que foi o que aconteceu depois na 1.4. Exatamente (...) Escreveram a condição e depois começaram a olhar para aquilo… é melhor fazer o quadro. (...) mas acho que até não é mau, porque eles próprios perceberam a importância do quadro.

Nas aulas que lecionaram a outras turmas depois desta reflexão, as professoras deram maior ênfase à utilização da tabela na discussão coletiva da primeira parte da tarefa, enriquecendo o leque de estratégias que os alunos podem usar neste tipo de tarefa.

Depois da segunda aula (AI1.1), as professoras discutiram a forma como um aluno explicou a sua resolução à turma e como outra aluna apresentou uma outra estratégia (baseada na representação gráfica) para identificar os sinais do numerador e denominador da fração:

Sofia: Mas eu acho que o Guilherme explica bem! Eu acho que eles perceberam bem. Quando foi ao quadro (...)

Luz: Mas ele disse ali uma coisa que era importante: porque é que foram calcular os zeros. Ele primeiro não disse, mas depois aquilo saiu assim… e eu acho que isso é que fez uma grande luz!

Sofia: Fez, fez.

Paula: Porque foi no grupo tinha havido a discussão… onde a Joana disse: "Mas, eu ainda não percebi porque é que são zeros".

Sofia: E ele lembrou-se! Deixa lá explicar, porque, já que surgiu esse problema no grupo…

Branca: Explicou para os outros.

Luz: Ele até disse que era para ver… ele até fez os gestos! Onde é que a função estava… acima ou abaixo.

Sofia: E depois como deu ênfase… ah! Aqui é não definida porque qualquer número a dividir por zero… depois andou lá a fazer "positivo com negativo"… andou a explicar ali com todo o detalhe…

Luz: Aquela miúda (...) foi fazer os desenhos das retas com os declives, e eu acho que isso também consolidou o que ele já tinha dito.

Sofia: Exato, exato. Ele fez por substituição. No fundo, estava a tentar explicar os mais e os menos por substituição. E depois ela foi lá fazer o bonequinho na reta para dar outra perspetiva de... dos mais e dos menos. E eu acho que é isso! (AI1R2)

Tal como tinham planeado, as professoras selecionaram uma resolução com recurso a uma tabela para o momento de discussão coletiva, onde incentivaram os alunos a explicar e a justificar as suas resoluções. As professoras valorizaram a clareza dessa explicação e confrontaram diferentes estratégias, baseadas nas representações algébrica e gráfica, para responder à questão. Este trabalho permitiu-lhes aprofundar o seu conhecimento dos alunos e da forma como pensam, do modo como comunicam e das diferentes estratégias que podem seguir.

As professoras também refletiram sobre aspetos do trabalho dos alunos que as surpreenderam. Por um lado, contrariamente ao que esperavam, na representação algébrica muitos alunos escreveram que o numerador e o denominador teriam de ser ambos positivos ou ambos negativos, usando corretamente conectores lógicos: "Muitos disseram logo «ou os dois positivos, ou os dois negativos». E outra coisa: a muitos grupos, nem sequer faltou os parêntesis" (Sofia, AI1R2). Por outro lado, os alunos apresentaram resoluções que não estavam previstas. Numa delas, os alunos resolveram a primeira tarefa por tentativas, e a resolução foi selecionada pela professora para iniciar o momento de discussão coletiva. As professoras mostraram-se surpreendidas com a resolução e com o modo como os alunos escolheram valores que faziam variar o sinal do numerador e do denominador da fração:

> A ideia de ir por tentativas, mas não são tentativas quaisquer! Como é que ele disse? [na discussão coletiva, o aluno disse "o alcance da expressão"] $x = 2$ era impossível... e depois o $x = 3$ (...) um número superior a 2 e [outro número, -4] inferior a -3. (...) por tentativas, tendo o primeiro membro da inequação (Sofia, AI1R2).

Na mesma tarefa, um grupo de alunos apresentou outra resolução não prevista e que as professoras acharam surpreendente (figura 4).

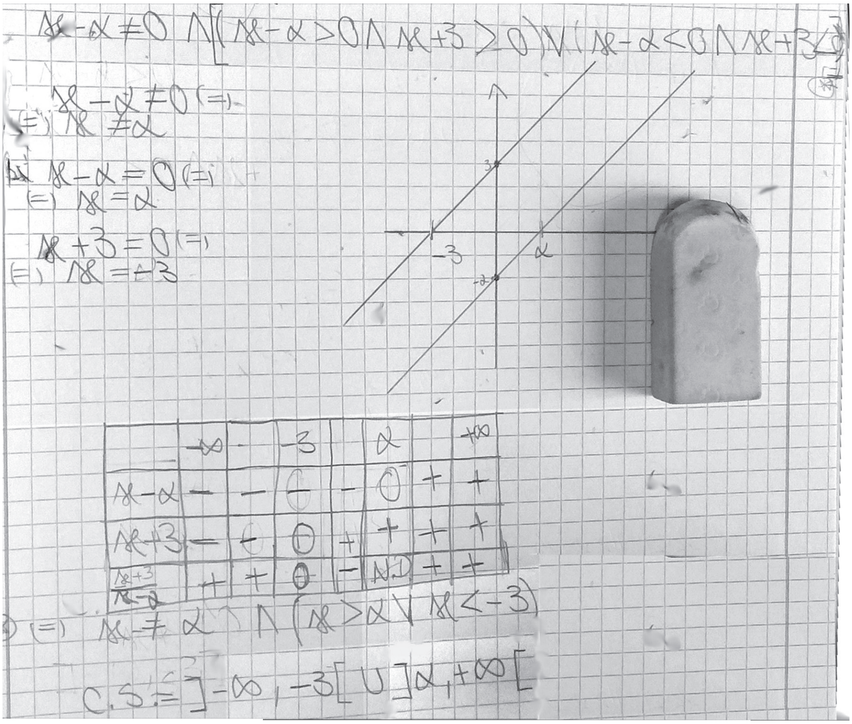


Figura 4. *Resolução de um Grupo de Alunos Usando Várias Estratégias*

Os alunos começaram por escrever a condição com conectores lógicos, tentaram escrever o sinal do quociente a partir da análise das representações gráficas do numerador e do denominador da fração e concluíram a resolução com uma tabela que resumia a informação, permitindo-lhes escrever o conjunto-solução da condição.

Sofia: Ela, para ver o sinal, não resolveu de forma algébrica, mas começou a pensar que tinha de ser os dois positivos ou os dois negativos, e para ajudar na resolução disso, representou as retas $y = x + 3$ e $y = x - 2$...

Paula: (...) Começaram a escrever ($x + 3 > 0$ e $x - 2 > 0$) ou ($x + 3 < 0$ e $x - 2 < 0$), ou têm que ser os dois positivos ou negativos... (...) chegaram aqui e pensaram..."como é que nós sabemos os sinais?" (...) depois, o problema era: "como é que eu passo esta condição do $x + 3 > 0$ e $x - 2 > 0$... como é que eu aqui, a partir do gráfico, vejo..."

Branca: Partiram para o gráfico… para perceber (…) Olha, está interessante!

Sofia: Como é que se organiza a informação?

Paula: (…) Começaram a fazer uma tabela (…) puseram o $x + 3$, puseram o $x - 2$, e ficou só assim. Depois tinham menos infinito, tinham menos três, tinham logo a seguir o dois sem ter aqui nada, e depois tinham ali o mais infinito. (…) Estavam a pôr os sinais… para tentar ver se isto as ajudava a resolver…

Luz: Analiticamente não viram bem. "Ah, deixa cá fazer o gráfico para se ver melhor…"

Branca: (…) Elas foram pensando nas várias hipóteses e misturaram tudo… (AI1R2)

Assim, além de analisarem os erros e dificuldades dos alunos, as professoras refletiram também sobre respostas que as surpreenderam, o que lhes trouxe novo conhecimento sobre as estratégias que os alunos podem seguir. Refletiram também sobre as explicações e as justificações dos alunos, mostrando-se mais uma vez surpreendidas, tanto pela escolha dos números na resolução por tentativas, como pelas estratégias seguidas por outro grupo, o que lhes permitiu aprofundar o seu conhecimento sobre os alunos e a sua aprendizagem e o conhecimento da prática letiva.

Estas reflexões proporcionaram o desenvolvimento do conhecimento das professoras, em especial na análise das respostas que anteciparam e nas respostas que as surpreenderam, aprofundando o seu conhecimento sobre a forma como os alunos comunicam as suas estratégias, e sobre o modo como o confronto de várias representações e estratégias pode promover a aprendizagem dos alunos. Perceberam também a vantagem que existe em antecipar diversas estratégias de resolução no momento de planificação da aula, tendo em vista a valorização da discussão coletiva.

6.4 Perspetivas das professoras sobre o trabalho desenvolvido no estudo de aula

Esta seção apresenta reflexões das professoras, na entrevista em grupo focal, sobre o planeamento e a condução de tarefas exploratórias no ensino secundário, incluindo a sua perspetiva sobre aspetos que diferenciam o estudo de aula de outros processos de formação.

Como constrangimento para o trabalho com tarefas exploratórias, as professoras apontam a gestão da planificação ao longo do ano letivo, considerando que é necessário muito tempo para a planificação e realização de tarefas de cariz exploratório em sala de aula. Todavia, valorizam a sua utilização como potenciadoras da aprendizagem dos alunos:

Branca: Imagina que nós em vez de perdermos uma hora perdíamos um quarto de hora, chegávamos ali, explicávamos num instantinho... OK, está dado, passamos à frente. Ganhámos tempo no nosso entender, não é? Mas, se calhar para eles...

Luz: Sim, é diferente.

Sofia: Ficou de uma forma mais enraizada, mais consolidada...

Refletindo sobre o trabalho dos alunos em tarefas de exploração, as professoras referem que desse trabalho resultam apendizagens mais significativas, reconhecendo a importância de seguir uma abordagem menos centrada no professor e que dê aos alunos um papel mais ativo na sua aprendizagem:

Sofia: Eu acho que [o trabalho que fizemos no estudo de aula] ajuda a... a organizar as aulas no sentido de dar um papel mais ativo ao aluno. Esta questão da exploração, da introdução do tema, por uma tarefa de exploração... dá maior destaque o papel do aluno, não é? Não estás a dizer o aluno como é que as coisas se fazem, é o aluno que cria, se envolve num meio, num ambiente, próprio onde as coisas da naturalmente surgem. (...) muitas vezes quando somos nós a dizer, eles vêm aquilo, mas aquilo não lhes diz muito, não é? Aqui já trabalharam, já tiveram as mãos na massa, não é... e leva muito mais tempo a mexer naquilo, e depois quando as coisas surgem têm mais significado. E acho que a aprendizagem fica mais consolidada (...) compreendida de uma forma mais profunda.

Luz: E a permitir-lhes também decidir qual é a maneira mais... mais... clara de mostrar uma mensagem... (...) Obriga-os também a isso, a fazer a sua síntese, eles a fazer a sua síntese.

Embora reconheçam a importância dar voz aos alunos para explicarem as suas resoluções, as professoras apontam a heterogeneidade da turma como um desafio para identificar o momento apropriado para iniciar a discussão coletiva:

Sofia: Estávamos no ponto de se fazer a discussão. Só que há uns que ainda não tiveram tempo de pensar, há outros que já acabaram e já querem continuar a tarefa e já estão noutra... quando chegas à discussão das primeiras, já os outros (...) iam mais era para a discussão do que vem a seguir.

Sobre a antecipação de estratégias e dificuldades dos alunos, as professoras referem que lhes permitir pensar em formas de os apoiar enquanto trabalham na tarefa:

> Sofia: E a situação também de prever algumas dificuldades também permite antecipar perguntas...
>
> Luz: Até a maneira como fazemos uma pergunta, exatamente... já...
>
> Sofia: Que devemos direcionar aos alunos de forma a não... a ideia de não matar a tarefa, não é, não matar o mais interessante que é serem eles a chegar lá, mas permitir que eles repensem... uma outra perspetiva para desbloquear... eles às vezes estão bloqueados e precisamos de fazer ali um desbloqueio.

As professoras valorizam a observação do trabalho dos alunos durante a aula, por lhes permitir comparar o que foi planeado com o que aconteceu na aula e considerar possíveis alterações no enunciado, se necessário:

> Sofia: E observar o comportamento dos alunos, e introduzir mudanças nos materiais, tem uma mais-valia muito grande, claro. Porque tu percebes logo quais são os constrangimentos daquela tarefa. Uma coisa é a pessoa... quando idealiza... está ali a pensar... mas há questões que não tem presentes. Só depois da prática é que percebe essas limitações, não é? E tu poderes logo introduzir na tarefa essas alterações, traz muito mais-valias no aperfeiçoamento da tarefa, não é? Para depois (...) se quiseres voltar a aplicar, então já... já estará mais adaptada aos alunos.

A "adaptação" da tarefa a que se refere Sofia não diz respeito apenas a alterações no enunciado, mas também à forma de conduzir a sua realização. Referindo-se à condução de uma tarefa de cariz exploratório depois do estudo de aula, as professoras falam sobre a importância de planear a introdução da tarefa, tendo em conta os alunos a quem se destina, a forma como estes se envolvem e como reagem ao que lhes é proposto:

> Luz: Eu agora vou experimentar esta [tarefa para trabalhar as transformações do gráfico de funções quadráticas], que nós fizemos no ano passado, nesta turma 10.º ano. (...) Palpita-me que vai ser diferente (...) Porque têm mais dificuldades... Até o simples facto de trabalhar em grupo (...) Isto às vezes também é uma condicionante para que as coisas corram bem.

Paula: Mas tu própria, que já tens a experiência, se fosses planear a aula de raiz (...) Também já seria diferente?

Luz: Já pensava nisso... é completamente diferente...

Sofia: A própria introdução da tarefa, pode ser mais pormenorizada, por exemplo. Se eles têm mais dificuldade em comunicar, podes fazer ali uma preparação mais detalhada... antes de começar, não é? (...) Para eles se sentirem mais à-vontade e a trabalhar de forma autónoma.

Assim, a participação no estudo de aula levou as professoras a reconhecer que antecipar estratégias e dificuldades dos alunos ajuda o professor a conduzir a realização da tarefa, o que influencia o trabalho e as aprendizagens dos alunos, apontando para um aprofundamento do conhecimento dos alunos e da sua aprendizagem e da prática letiva.

Contrastando com outras ações de formação que frequentaram, onde elaboraram tarefas, mas não as planearam com tando detalhe, nem observaram aulas ou refletiram sobre elas, as professoras destacaram a natureza prática no estudo de aula, reconhecendo-o como uma oportunidade para elaborarem e planearem tarefas de natureza exploratória e para as proporem aos seus alunos. Para além disso, valorizaram a observação das aulas e a reflexão sobre o trabalho dos alunos, o que não fizeram em outras formações:

Sofia: [O estudo de aula] põe-nos um trabalho prático com construção de materiais que depois têm uma aplicação direta nas aulas, numa relação muito próxima com a prática do aluno e com a prática letiva...

Deste modo, o trabalho das professoras no estudo de aula, desde o planeamento à reflexão pós-aula, seguindo uma abordagem exploratória, trouxe-lhes um olhar diferente sobre a elaboração e a condução das tarefas, sobre as dificuldades dos alunos e sobre as estratégias que podem seguir. Em particular, as professoras valorizam a proximidade entre o trabalho no estudo de aula e a sua prática letiva, na sua escola, com os seus alunos, com momentos de partilha e reflexão entre os professores participantes.

7. CONCLUSÃO

O trabalho do professor no planeamento e condução de tarefas exploratórias envolve vários desafios. Neste artigo referimos o desenvolvimento do conhecimento de um grupo de professoras sobre a elaboração de tarefas e a antecipação de estratégias e dificuldades dos alunos num estudo de aula, durante o planeamento da aula de investigação e durante a reflexão que fizeram depois de observar as aulas que lecionaram.

Para elaborarem a tarefa, para além do seu conhecimento da prática anterior, as professoras usaram o conhecimento desenvolvido nas sessões realizadas, onde se inclui a elaboração de tarefas de natureza exploratória. Focaram-se nas aprendizagens que os alunos deveriam fazer, sem se afastarem do objetivo da aula, tendo em conta as estratégias e dificuldades que anteciparam. As professoras deram particular atenção à redação das questões e à ordem pela qual estas apareceriam no enunciado da tarefa, sequenciando-as com grau de dificuldade crescente, como é referido em Lim *et al.* (2016). Como preparação para a discussão coletiva, as professoras discutiram o modo como poderiam sequenciar as representações e as estratégias dos alunos, para os incentivar a explicarem e justificarem as suas respostas e para promoverem o confronto de diferentes estratégias de resolução. As estratégias e dificuldades que anteciparam levaram as professoras a repensar e, em alguns casos, a reformular a redação das questões e ajudaram-nas a pensar em formas de apoiar os alunos, sem diminuir o grau de dificuldade da tarefa, tal como aponta Fujii (2018). Estas discussões tiveram grande relevância para o desenvolvimento do conhecimento das professoras sobre as estratégias que os alunos podem seguir e sobre a condução da realização de tarefas de cariz exploratório.

As reflexões pós-aula proporcionaram a comparação entre o trabalho que as professoras planearam e o que os alunos fizeram em sala de aula. Alguns alunos usaram representações e estratégias que as professoras tinham antecipado, mas outros usaram estratégias não antecipadas e que as surpreenderam. As professoras discutiram também dificuldades que os alunos manifestaram e procuraram razões para essas dificuldades. Puderam assim desenvolver o seu conhecimento dos alunos e do seu processo de aprendizagem. Além disso, introduziram alterações na condução da tarefa e fizeram uma apreciação global a seu respeito, desenvolvendo o seu conhecimento sobre tarefas.

As professoras tiveram também oportunidade de discutir o papel do aluno e do professor em sala de aula. Embora refiram que o tempo necessário ao trabalho com tarefas exploratórias pode condicionar a sua utilização em aula (o que também é referido por Barber, 2018), reconhecem que vale a pena dar ao aluno um papel mais ativo na sua aprendizagem, pois daí podem resultar aprendizagens mais significativas. Na entrevista em grupo focal, as professoras discutiram como poderiam conduzir a realização de tarefas exploratórias noutras aulas, tendo em conta as características dos alunos, o que vai ao encontro do referido por Ni Shuilleabhain e Seery (2017) e sugere o desenvolvimento do seu conhecimento da prática letiva (Ponte, 2012).

Deste modo, o trabalho colaborativo na fase de planeamento do estudo de aula permitiu que as professoras do ensino secundário dedicassem bastante tempo a discutir aspetos centrais da abordagem exploratória, levando-as a considerar as potencialidades desta abordagem curricular para este nível de ensino. Esta valorização das potencialidades da abordagem exploratória foi reforçada nas suas reflexões sobre as aulas realizadas. No entanto, apesar de reconhecerem a importância de ouvir mais os alunos, as professoras referiram que foi difícil identificar o momento apropriado para terminar o momento de trabalho autónomo e iniciar a discussão com toda a turma. Isto tende a levar à realização de discussões pouco aprofundadas ou mesmo à sua ausência. Na verdade, a condução de discussões coletivas é um dos desafios dos professores em aulas exploratórias (Guerreiro *et al.*, 2016; Jesus *et al.*, 2020). Deste modo, o modo de condução destas discussões é uma questão a que deve ser dada mais atenção em futuros trabalhos de investigação relativos a estudos de aula.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia por meio de uma bolsa atribuída a Paula Gomes (SFRH/BD/145118/2019).

REFERÊNCIAS

Adler, J., y Alshwaikh, J. (2019). A case of lesson study in South Africa. En R. Huang, A. Takahashi, y J. P. da Ponte (Eds.), *Theory and practice of lesson study in mathematics* (pp. 318–342). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04031-4

Alshwaikh, J., y Adler, J. (2017). Researchers and teachers as learners in lesson study. *E*n M. K. Mhlolo, S. N. Matoti, y B. Fredericks (Eds.), *SAARMSTE Book of Long Papers* (pp. 2-14). Free State: Central University of Technology.

Barber, K. (2018). Developing teachers' mathematical-task knowledge and practice through lesson study. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *7*(2), 136–149. https://doi.org/10.1108/IJLLS-09-2017-0042

Bogdan, R., y Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09742-8

Cajkler, W., Wood, P., Norton, J., Pedder, D., y Xu, H. (2015). Teacher perspectives about lesson study in secondary school departments: A collaborative vehicle for professional learning and practice development. *Research Papers in Education*, *30*(2), 192–213. https://doi.org/10.1080/02671522.2014.887139

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(1), 1–6. https://doi.org/10.1007/s10857-013-9234-7

Christiansen, B., y Walther, G. (1986). Task and activity. En B. Christiansen, A. G. Howson, y M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243–307). D. Reidel.

Doig, B., Groves, S., y Fujii, T. (2011). The critical role of task development in lesson study. En L. C. Hart, A. Alston, y A. Murata (Eds.), *Lesson study, research and practice in mathematics education* (pp. 181–199). Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_15

Fujii, T. (2015). The critical role of task design in lesson study. En A. Watson y M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education* (pp. 273–286). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_9

Fujii, T. (2018). Lesson study and teaching mathematics through problem solving: The two wheels of a cart. En M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. P. Ponte, A. Ní Shúilleabháin, y A. Takahashi (Eds.), *Mathematics lesson study around the world* (pp. 1–21). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7_1

Fujii, T. (2019). Designing and adapting tasks in lesson planning: A critical process of lesson study. En R. Huang, A. Takahashi, y J. P. da Ponte (Eds.), *Theory and practice of lesson study in mathematics* (Vol. 48, Issue 4, pp. 681–704). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04031-4_33

Groves, S., Doig, B., Vale, C., y Widjaja, W. (2016). Critical factors in the adaptation and implementation of Japanese lesson study in the Australian context. *ZDM – Mathematics Education*, *48*(4), 501–512. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0786-8

Guerreiro, A., Ferreira, R. A. T., Menezes, L. L., Martinho, M. H., Guerrero, A., Ferreira, R. A. T., Menezes, L. L., y Martinho, M. H. (2016). Comunicação na sala de aula: a perspetiva do ensino exploratório da matemática. *Zetetike*, *23*(2), 279–295. https://doi.org/10.20396/zet.v23i44.8646539

Jaworski, B., y Potari, D. (2009). Bridging the macro- and micro-divide: Using an activity theory model to capture sociocultural complexity in mathematics teaching and its development. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(2), 219–236. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9190-4

Jesus, C. C., Costa Trindade Cyrino, M. C., Oliveira, H. M. (2020). Mathematics teachers' learning on exploratory teaching: Analysis of a multimedia case in a community of practice. *Acta Scientiae*, *22*(1), 112–133. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5566

Lee, Y. A., y Takahashi, A. (2011). Lesson plans and the contingency of classroom interactions. *Human Studies*, *34*(2), 209–227. https://doi.org/10.1007/s10746-011-9181-1

Lim, C. S., Kor, L. K., y Chia, H. M. (2016). Revitalising mathematics classroom teaching through lesson study (LS): A Malaysian case study. *ZDM – Mathematics Education*, *48*(4), 485–499. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0779-7

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. En Lynn C. Hart, A. Alston, y A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics* (pp. 13–24). Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_1

Ni Shuilleabhain, A., y Seery, A. (2017). Enacting curriculum reform through lesson study: A case study of mathematics teacher learning. *Professional Development in Education*, *44*(2), 222–236. https://doi.org/10.1080/19415257.2017.1280521

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. En GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). APM.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educatión matemática* (pp. 83–98). Graó.

Ponte, J. P., y Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in Mathematics*, *93*(1), 51–66. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9681-z

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., y Baptista, M. (2015). Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. *Quadrante*, *24*(2), 111–134. http://hdl.handle.net/10451/22628

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., y Baptista, M. (2018). Designing lesson studies to support teachers' professional development. *Educational Designer*, *3*(11), 1–32. https://www.educationaldesigner.org/ed/volume3/issue11/article45/pdf/ed_3_11_ponte.pdf

Ponte, J. P., Wake, G., y Quaresma, M. (2019). Lesson study as a learning context in mathematics education. En G. Lloyd (Ed.), *International handbook of mathematics teacher education* (pp. 103–126). Brill/Sense. https://doi.org/10.1163/9789004419230_005

Quaresma, M., y Ponte, J. P. (2016). Comunicação, tarefas e raciocínio: aprendizagens profissionais proporcionadas por um estudo de aula. *Zetetike*, *23*(2), 297–310. https://doi.org/10.20396/zet.v23i44.8646540

Quaresma, M., y Ponte, J. P. (2017). Participar num estudo de aula: A perspetiva dos professores. *Boletim GEPEM*, *71*(2), 98–113. https://doi.org/10.4322/gepem.2017.039

Speer, N. M., King, K. D., y Howell, H. (2015). Definitions of mathematical knowledge for teaching: Using these constructs in research on secondary and college mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18*(2), 105–122. https://doi.org/10.1007/s10857-014-9277-4

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., y Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340. https://doi.org/10.1080/10986060802229675

Stein, M. K., y Smith, M. S. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática. *Educação e Matemática*, *105*(4), 22–28.

Tsamir, P., y Almog, N. (2001). Students' strategies and difficulties: The case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *32*(4), 513–524. https://doi.org/10.1080/00207390110038277

Vale, C., Widjaja, W., Doig, B., y Groves, S. (2019). Anticipating students' reasoning and planning prompts in structured problem-solving lessons. *Mathematics Education Research Journal*, *31*(1), 1–25. https://doi.org/10.1007/s13394-018-0239-5

Verhoef, N. C., Coenders, F., Pieters, J. M., van Smaalen, D., y Tall, D. (2015). Professional development through lesson study: Teaching the derivative using GeoGebra. *Professional Development in Education*, *41*(1), 109–126. https://doi.org/10.1080/19415257.2014.886285

Verhoef, N., Tall, D., Coenders, F., y van Smaalen, D. (2014). The complexities of a lesson study in a Dutch situation: Mathematics teacher learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *12*, 859–881. https://doi.org/10.1007/s10763-013-9436-6

Autor de correspondencia

Paula Gomes

Dirección: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Alameda da Universidade
1649-013 Lisboa, Portugal

Teléfono: +351933372455

https://doi.org/10.24844/EM3501.06

La enseñanza de la adición con números naturales en la escuela primaria multi-grado

Teaching natural number sums in multi-grade primary school

Lorena Trejo Guerrero[1]

Resumen: El presente trabajo muestra los resultados de una investigación terminada en relación a la comprensión del Sistema Métrico Decimal en la escuela primaria. Diseñamos, implementamos y analizamos una situación didáctica mediante juegos en el patio. Consiste en sumar unidades y decenas. Para interpretar nuestros resultados analizamos los registros en los cuadernos de los niños y los usos de los números, así como las conversaciones entre los estudiantes, al realizar las actividades del juego en equipos integrados por alumnos de primero, segundo y tercer grados, de una escuela primaria pública multi-grado. Lo que nos permitió identificar las condiciones de los niños del medio rural, su nivel de aprendizaje y la reflexión crítica de la práctica docente en el área de matemáticas en escuelas donde los profesores trabajan con dos o más grados a la vez.

Palabras clave: *multigrado, enseñanza, aprendizaje cooperativo, número.*

Abstract: The present work shows the results of a completed investigation in relation to the understanding of the Decimal Metric System in primary school. We design, implement and analyze a didactic situation through games in the

Fecha de recepción: 1 de agosto de 2020. **Fecha de aceptación:** 5 de diciembre de 2022.
[1] Universidad Pedagógica Nacional Unidad 131. Hidalgo, ltrejoge@gmail.com, orcid.org/000-0001-9654-1589

yard. They consist of adding units and tens. To interpret our results, we analyzed the records in the children's notebooks and the uses of numbers, as well as the conversations between students, when carrying out the game activities in teams made up of first, second and third grade students from a multi-grade public primary school. This allowed us to identify the conditions of rural children, their level of learning and critical reflection of teaching practice in the area of mathematics in schools where teachers work with two or more grades at the same time.

Keywords: ***multigrade,*** *teaching, cooperative learning, number.*

INTRODUCCIÓN

El conocimiento se construye en el aula gracias a un proceso de interacción entre los alumnos, el profesor y el contenido matemático. Es necesario analizar no solo la actividad constructiva de los estudiantes (ideas previas sobre el contenido, predisposición para el aprendizaje, etc.) sino también a los mecanismos de influencia o de ayuda pedagógica, rol que desempeña el profesor, así como la naturaleza del contenido a enseñar, diferenciar si lo que se enseña es un concepto o un procedimiento para llegar a comprender un concepto (Porlán, 1998).

Una función de la escuela primaria es ofrecer al alumno la oportunidad de desarrollar habilidades y construir conocimientos para resolver problemas de diversa índole que favorezca su desarrollo integral.

Los planes y programas (SEP, 2017) proponen llevar a las aulas una matemática que permita a los alumnos construir los conocimientos a través de actividades que susciten su interés y los hagan involucrarse y mantener la atención hasta encontrar la solución de un problema. Por lo anterior, cabe destacar que al término de la educación primaria, los alumnos conocerán reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones que son necesarios para alcanzar soluciones a diferentes problemas de matemáticas que se les pudieran presentar, tanto en la escuela como fuera de ella.

Para que el alumno construya sus conocimientos matemáticos es necesario que el maestro elija y diseñe problemas con los que el niño desarrolle nociones y procedimientos a través de las interrogantes que ellos se planteen. Nuestro estudio considera los conocimientos escolares y extraescolares que poseen los alumnos, los procesos que siguen para construir nuevos conocimientos y; las dificultades que enfrentan en su aprendizaje, como punto de partida para resolver problemas y para avanzar hacia el conocimiento formal. Así mismo, se pretende que el alumno desarrolle la habilidad para expresar ideas, la capacidad de razonar, de crear, de imaginar y convivir en el trabajo colaborativo a través de juegos, en donde mientras unos adquieren nuevos conocimientos, otros reafirman los mismos.

Los números naturales se enseñan desde el primer grado de primaria, con el fin de proporcionar experiencias donde los significados que adquieren en diversos contextos y las diferentes relaciones que pueden establecerse entre ellos, permitan comprender las características del Sistema Métrico Decimal. Por lo tanto, los niños desde el primer grado deben resolver problemas aritméticos de estructura aditiva desde su ingreso a la escuela primaria al interactuar con sus compañeros de los otros grados durante las actividades propias de las escuelas multigrado.

Debido a que nuestra investigación va dirigida a los tres primeros grados de educación primaria, nos parecen importantes los planteamientos del National Research Council (2001), donde proponen que la investigación en matemática educativa con respecto a la enseñanza de las matemáticas en preescolar y los primeros grados de primaria, desarrolle de cinco competencias clave para que los niños puedan formular problemas matemáticos, representarlos y resolverlos:

1. Aritmética del prescolar: que el niño tenga disponibles materiales concretos para manipularlos libremente o bien el uso de sus dedos.
2. Solucionar problemas verbales: mostrar a los niños pinturas con diversos elementos, por ejemplo, pueden ser aves, animales o frutas colocadas en referencia a algún árbol en el caso de los pájaros o de una cesta en relación a las frutas y preguntarle al niño, ¿cuántas frutas están dentro de la cesta y cuántas fuera?
3. Razonamiento adaptativo: es la capacidad de razonar lógicamente acerca de las relaciones entre conceptos construyendo analogías.
4. Disposición productiva: una buena actitud que lo motive a aprender, el juego suele ser un buen recurso para crear buenas actitudes de aprendizaje en colectivo.
5. Evitar problemas con numerales muy grandes: los niños pequeños no pueden resolver problemas cuyos recursos no tengan a la mano (material concreto) o en sus manos (dedos).

Desde los planteamientos anteriores, es necesario que el docente cuente con conocimientos disciplinares en torno a los números naturales, las reglas del sistema de numeración decimal; y, cómo resolver las operaciones aritméticas básicas con dichos números. Debe contar con habilidades comunicativas para ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión profunda de conceptos matemáticos y socializar los métodos de solución entre ellos.

También, el profesor debe contar con habilidades didácticas, que le permitan atender las necesidades reales de aprendizaje de sus alumnos, escuchar y responder al conocimiento matemático que ellos comparten, así como conocer cuáles son las dificultades que enfrentarían durante las actividades.

La labor docente en aulas de primero, segundo y tercer grados en escuelas multi-grado, consiste en atender al mismo tiempo a niños que cursan la educación primaria, lo que demanda al docente organizar y planificar el trabajo didáctico, de tal manera, que pueda articular y relacionar los contenidos de las asignaturas y hacerlas accesibles para el aprendizaje de sus alumnos, proceso también complejo. Se debe procurar en todo momento, atender adecuadamente a todos los niños con los diversos ritmos de aprendizaje de cada uno.

Generalmente para su desempeño docente tiene a la mano materiales como: libros de texto gratuito, libros para el maestro y ficheros de actividades didácticas, los cuales han sido elaborados para trabajar cada grado, es decir, no están pensados para el trabajo con dos o tres grados a la vez. Nuestro trabajo tiene como propósito ofrecer a los profesores de escuelas multigrado bi-docentes, una alternativa de enseñanza desde nuevas perspectivas, basadas en la investigación en el ámbito de la Matemática Educativa.

Si consideramos que el niño construye su conocimiento matemático en interacción con el medio ambiente, sus compañeros, su profesor y el contenido matemático; el medio más utilizado de comunicación es el lenguaje natural, entendiéndose este como el lenguaje coloquial, con el cual los profesores presentan de manera accesible el contenido matemático a los alumnos, debido a que si los alumnos no logran comprender un contenido cabalmente, crean concepciones erróneas.

Reconocemos que una de las fuentes de comunicación entre el profesor y sus alumnos es de manera oral en la vida cotidiana escolar, debido a que los niños de primer grado están en el proceso de aprendizaje del lenguaje escrito; por lo tanto, consideramos al lenguaje como una de las herramientas más importantes de los profesores. Pero, es preciso para un buen funcionamiento del intercambio de significados adecuados, un lenguaje que se aproxime paulatinamente al uso de palabras que se requieren en cada espacio de interacción social o en el desarrollo de disciplinas científicas, en cuyo caso se trata del lenguaje técnico de cada una de ellas, específicamente aquí, se trataría del lenguaje propio de la matemática.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En el presente trabajo nos propusimos abordar cómo el alumno, apoyándose en el uso del lenguaje cotidiano, adquiere la noción de número natural, a la par que interactúa con sus compañeros y con su maestra durante juegos en el patio. Así mismo, al identificar qué realizaron los niños de los tres grados al jugar con sus compañeros, cómo el niño de primer grado al interactuar con sus compañeros de segundo y tercer grados construye paulatinamente su conocimiento y, a su vez, cómo los niños de segundo y tercer grados al verificar los procedimientos de sus compañeros de primer grado, reafirman sus conocimientos.

A partir del diseño e implementación del juego de patio, se analizaron las estrategias de solución, los diálogos entre los niños al realizarse los juegos, así como las intervenciones de la maestra. El contenido seleccionado fue sumar cantidades pequeñas (de una y dos cifras) con números naturales, para propiciar el tránsito hacia la comprensión del sistema decimal de numeración en la escuela primaria.

Nuestras preguntas de investigación quedan planteadas de la siguiente manera: 1) ¿Qué beneficios se obtienen de los juegos de patio, para favorecer la comprensión de la adición de números naturales? Con respecto a los alumnos: 2) ¿Cómo mediante la interacción que se propicia en el juego, los niños comprenden las características del Sistema Decimal de Numeración?

MARCO TEÓRICO

En el marco teórico presentamos los elementos que nos permitieron interpretar las prácticas escolares en nuestra investigación, enfocándonos en las características de los problemas de estructura aditiva con números naturales en la escuela primaria, el uso del algoritmo convencional y las funciones del Sistema de Numeración Decimal. Partimos de revalorar la importancia del juego como estrategia didáctica para la enseñanza de la matemática escolar, con interés en el intercambio de significados durante las conversaciones entre los niños y sus compañeros y con la maestra. Finalmente, presentamos las características de la escuela multi-grado.

Mayer (1986) nos lleva a cuestionarnos ¿Qué sucede cuando el alumno recibe una información numérica y debe utilizar reglas de las matemáticas para deducir una respuesta numérica? Es una forma de razonamiento deductivo. Para lo cual es necesario indagar en lo que debe saber una persona al presentar una respuesta numérica, el autor menciona que es importante considerar lo siguiente:

Conocimiento esquemático: tipo de problema.
Conocimiento operativo: cómo llevar a cabo la secuencia de operaciones.
Conocimiento estratégico: técnicas para saber cómo utilizar los diversos tipos de conocimientos.

Un algoritmo es un procedimiento exacto para llevar a cabo una tarea, desde los planteamientos de Mayer (1986). Su uso sugiere una tendencia evolutiva en la cual los más pequeños utilizan modelos simples pero ineficaces, a diferencia de los más grandes, que utilizan modelos más complejos pero eficaces. En esta propuesta didáctica trabajamos con suma de cantidades pequeñas donde el uso de algoritmos convencionales de la aritmética elemental y su representación son puntos de análisis con información interesante.

PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA

Desde lo que plantea Vergnaud (1991) entiéndase por problemas de estructura aditiva “el conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones”, su esquema básico es de la forma a + b = c. Utilizamos esta estructura al sumar cantidades pequeñas para obtener un total (de puntos obtenidos por cada equipo al final del juego).

Vergnaud (1991) menciona que la enseñanza de la noción de número en la escuela primaria es la más importante de las matemáticas, desde la serie numérica como conteo, la correspondencia biunívoca y la equivalencia entre conjuntos, el número como medida, la suma de números, hasta los niveles más abstractos; para lo cual hay que tener cuidado de no enseñarlo de manera arbitraria, sino otorgando “sentido” dentro de un desarrollo sistemático. La resolución de problemas trae a colación diversas formas de representación mental, al ocuparse de tareas como son: selección, organización de informaciones, decisiones en los procedimientos de cálculo que se pudiesen utilizar para resolverlo (Polya, 1965).

Uno de los problemas más importantes de la didáctica, visto en el campo de la educación matemática, es el de conocer el orden en el cual las nociones pueden ser adquiridas por el niño, teniendo en cuenta que el orden de complejidad, no puede ser más que un orden parcial, que dará lugar eventualmente al aprendizaje simultáneo de nociones relativamente independientes (Vergnaud, 1991).

BASE NUMÉRICA DECIMAL

Una base numérica es el número de unidades de cierto orden necesarias para formar una unidad de orden inmediatamente superior (Garciadiego, 2014. p. 354).

En la escuela primaria, se pretende desde el primer grado a iniciar a los niños que ingresan a comprender paulatinamente las características de los números y sus operaciones básicas. Se utiliza el Sistema de Numeración Decimal, en el cual se requiere ese mismo número de dígitos para poder expresar todos los números que deseemos, sin importar lo grande que podría ser algún número. En este caso vamos a usar los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. A partir del número 10, cualquier número, por grande que sea, se puede expresar como la combinación de cualquiera de estos dígitos (Garciadiego y Carpio, 2014). La base 10 combina la sencillez de aumentar o reducir unidades con el número ideal de dígitos para expresar las cantidades, ni son muchos, ni son pocos.

LA IMPORTANCIA DEL LENGUAJE

Consideramos que el lenguaje es una herramienta que ayuda a facilitar la adquisición de competencias lingüísticas, es el instrumento simbólico mediante el cual cada uno organiza su entorno; es comunicación y por medio de este el ser humano organiza su pensamiento; tiene un desarrollo diferente cuando es oral o cuando es escrito; presenta una dimensión sociocultural, exhibiendo también un trascendente canal de comunicación pedagógica (Bourdieu y Passeron, 1970).

Por lo anterior, si la escuela tiene la función de que los niños comprendan diversos textos, instrucciones y todo tipo de indicaciones dentro del espacio escolar, los profesores generalmente recurren a las intervenciones orales, estas proveen las condiciones deseables para que a través de situaciones comunicativas los niños, en interacción con sus pares, y compañeros de otros grados, como es el caso de la escuela multi-grado, desarrollen y pongan en práctica sus conocimientos previos, o reproduzcan cánones establecidos, o ejecuten indicaciones al jugar con sus compañeros.

Para el análisis del lenguaje, cuando los alumnos interactúan oralmente entre sí durante las actividades escolares, Cazden (1991), menciona que, en la conversación entre iguales los niños, a diferencia de las conversaciones con el maestro, solo con sus compañeros pueden aportar elementos intelectuales, dan directrices o las cumplen, hacen preguntas o contestan las que les planteen sus compañeros. Es por lo tanto, necesario el análisis del intercambio lingüístico entre los niños, durante los juegos.

Retomamos el análisis conversacional del discurso de Thompson (1993) para nuestra investigación, cuyo principio metodológico clave de este análisis, es estudiar ejemplos de interacción lingüística en el ámbito real en que ocurren; y, poner una cuidadosa atención a las maneras en que se organizan, donde los participantes producen un orden por medio de la aplicación rutinaria y recurrente de las reglas conversacionales.

Flanders (1970) pretende captar la influencia que genera el uso del lenguaje verbal del profesor en el clima del aula y en el rendimiento del alumno. En relación con ello establece los siguientes estilos de enseñanza:

- Estilo directo: consistente en exponer las propias ideas, fundado en la autoridad y competencia del profesor.
- Estilo indirecto: propio de los profesores que tienen en cuenta las ideas de sus alumnos y promueven el diálogo.

EL JUEGO

Durante el juego se desarrollaron diferentes aprendizajes, por ejemplo, en torno a la comunicación con otros, los niños aprenden a escuchar, comprender y comunicarse con claridad. En relación con la convivencia social, aprenden a trabajar de forma colaborativa para conseguir lo que se proponen y a regular sus emociones; aprenden a explorar, cuidar y conservar lo que valoran; al enfrentarse a problemas de diversa índole, reflexionan sobre cada problema y eligen un procedimiento para solucionarlo.

Bruner (1982, p. 46) plantea con respecto a los juegos de la infancia y la niñez, que son el elemento básico y el deleite de la inmadurez humana, ya que todos ellos dependen, en alguna medida, del uso y del intercambio del lenguaje. Hay juegos que están constituidos por el lenguaje; y, solo pueden existir donde el lenguaje está presente. Con frecuencia ofrecen la primera ocasión para el uso sistemático del lenguaje del niño con el adulto.

ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LA ESCUELA MULTI-GRADO

El trabajo docente en aulas multigrado según investigaciones realizadas en las clases de matemáticas y en el estado de Hidalgo (Block, 2015; Trejo y Valdemoros, 2015) implica atender simultáneamente a niños de diversos grados, lo que demanda al profesor organizar y planificar el trabajo de tal manera que pueda articular y relacionar los contenidos de las diversas asignaturas y grados, además, trate de evitar la fragmentación de la enseñanza y atienda adecuadamente a todos los niños con diferentes maneras y ritmos de aprendizaje y trabajar el mismo tipo de cálculo como lo mencionan Broitman *et al.*, (2015).

Entre las ventajas encontramos que son grupos poco numerosos lo cual permite atender "casi" de manera personal a cada uno de los alumnos. Desventajas: para organizar las clases los maestros de la escuela multi-grado requieren emplear los mismos materiales elaborados para las escuelas por grado: libros de texto gratuito, libros para el maestro y ficheros de actividades didácticas. Otra desventaja importante es la falta de apoyo de algunos padres de familia para reforzar el trabajo en casa.

REFLEXIÓN DE LA PRÁCTICA PROPIA

Es conveniente desarrollar la habilidad de la observación de la práctica personal, en la que Elliott (1993), se muestra a favor de un modelo alternativo, si consideramos que el estilo de enseñanza se transforma; y, es importante reconocer esos cambios al observar los resultados de los alumnos en la construcción de su conocimiento durante su proceso de aprendizaje, que no es más que un reflejo de estrategias didácticas adecuadas. La investigación acción permite entonces reconocer las habilidades didácticas que propicien que los estudiantes puedan comprender mejor los conceptos que se abordan en la escuela.

Por lo anterior, la sistematización y la generación de hábitos reflexivos, son necesarias para reconocer el efecto de las decisiones docentes en la enseñanza, llevarlas a cabo será con el fin de comprender críticamente las prácticas de enseñanza personales y realizar las modificaciones necesarias, a partir de acciones que respondan a las necesidades del contexto (Bennet, 1979). Esto se debe realizar con la idea de proponer nuevas formas de abordar las problemáticas encontradas, y convertirse en oportunidades para observar las limitaciones propias y construir alternativas de acción, que guíen y mejoren la práctica docente, en beneficio de los alumnos.

Método

La investigación se realizó en una escuela primaria multi-grado bi-docente (cada maestra atiende tres grados) del sistema público en el estado de Hidalgo, en la zona escolar 105, Cuyamaloya, perteneciente al Sector 02, Tulancingo de Bravo. La maestra tuvo a su cargo un grupo de diez alumnos, cuatro de primero, cuatro de segundo y dos de tercer grado, sus edades oscilan entre los seis y ocho años. La maestra tiene una amplia experiencia en escuelas multi-grado, veintidós años de servicio.

El trabajo experimental de corte cualitativo, que consistió en implementar juegos en el patio se organizó en ocho sesiones durante ocho semanas, una sesión por semana. El juego del tiro al blanco fue el centro de atención durante todas las sesiones. En el trabajo de campo, revisamos cuidadosamente la dinámica de interacción lingüística durante los juegos. Para validar los significados que surgen en el patio, durante la clase de matemáticas, utilizamos como criterio básico los significados de las acciones desde el punto de vista de la maestra y sus alumnos.

Uno de los instrumentos metodológicos de gran utilidad fue la observación participante (Taylor y Bogdan, 1999), debido a que nos sentimos involucradas en todo momento, es decir, participamos en la observación y reflexión de la práctica propia, nuestros registros en el diario del profesor, nos permitieron recopilar y organizar los datos durante el trabajo de campo; para la posterior construcción de categorías para el análisis sistemático.

LA PROPUESTA DIDÁCTICA, SUMAR EL TOTAL DE PUNTOS OBTENIDOS

Los planes y programas (SEP, 2017) proponen definir la intención didáctica al momento de planear la clase, de ahí que, la claridad de objetivos e intenciones resulta fundamental para ajustar las actividades si se quiere lograr un nivel de comprensión.

Las orientaciones didácticas proporcionan una visión más amplia del contenido que se pretende estudiar, por ejemplo, la importancia de este como parte de la matemática básica, sus vínculos con otros contenidos, el nivel de profundidad que se pretende alcanzar, algunos problemas en los que el contenido tiene aplicación y, en algunos casos, se mencionan recursos adicionales que se pueden utilizar para el estudio.

Esta propuesta pretende proporcionar una mayor atención a los alumnos, profundizar en el tema, favorecer la colaboración, la ayuda mutua y la tutoría —los niños de mayor grado apoyan a los de menor grado—, estimular la puesta en común de los conocimientos adquiridos y atender el nivel de los alumnos al diseñar actividades apropiadas que incluyan a los tres grados.

CRITERIOS PARA LA SELECCIÓN Y USO DE RECURSOS O MATERIALES EDUCATIVOS

Cuando se trabaja con un tema común es importante considerar lo siguiente: las funciones del profesor tienen que ver con planificar de manera flexible para permitir adaptaciones a las necesidades de los alumnos. Deben tomar en cuenta los conocimientos de los alumnos al inicio de las actividades. Establecer tareas adecuadas susceptibles de realizarse con la ayuda pertinente, y fijar objetivos comprensibles con el propósito de que las actividades tengan un sentido claro para los alumnos (Pozo, 1999).

Es necesaria la reflexión acerca de la didáctica de las matemáticas en la labor de todo el que enseña, así como reconocer el efecto de las decisiones docentes en la enseñanza según sus convicciones (ya sean matemáticas o didácticas). La profesora propone a la clase actividades que considera adecuadas, la interpretación y realización de las mismas depende de las habilidades de cada alumno, desde sus concepciones individuales hasta concepciones cada vez más elaboradas y vastas, hacia modelos correctos de los conceptos esperados y deseados por la actividad didáctica como lo plantea (D'Amore, 2005, p. 155).

Por lo anterior, es necesario revalorar el trabajo colaborativo entre estudiantes de los tres grados debido a que, permite a los alumnos más hábiles ayudar a los que están en el proceso a la adquisición de un conocimiento nuevo.

Si bien los maestros se enfrentan no solo a comprender un contenido curricular; en el caso de las matemáticas en la escuela primaria, sino además los obliga a crear sus propios medios de transferencia de ese contenido, con la finalidad de ponerlos de manera accesible a sus alumnos, retomamos a Chevallard (1998) quien menciona que "se designa con el término transposición didáctica el conjunto de transformaciones que sufre un saber a efectos de ser enseñado".

ANTECEDENTES

Consideramos necesario revisar los antecedentes o conocimientos previos que el alumno de cada grado fue acumulando desde el inicio del curso escolar, hasta el momento de la implementación de nuestra propuesta. Lo importante es poner en común los conocimientos o aprendizajes previos, que los números adquieran, el significado adecuado al contexto de la clase, de acuerdo con lo planteado por Shuard y Rothery (1984). Esta propuesta la implementamos en el último bimestre del curso escolar, en los meses de mayo y junio, una vez abordados los contenidos completos del Bloque cuatro del primer grado (se trabajan cinco bloques durante el ciclo escolar), de no ser así, consideramos que los niños de primer grado no estarían listos para poder jugar adecuadamente con sus compañeros de los otros dos grados. Lo anterior, posiblemente porque los niños de primer grado, son más dependientes y necesitan relacionarse con su maestro de manera individual, una vez que tienen una relación estable, podrán tener interés en el aprendizaje de sus compañeros y ser conscientes de su relación con ellos (Sató, 2018). La escuela multi-grado proporciona oportunidades de convivencia con niños de otros grados debido a la convivencia diaria,

Desde el inicio del ciclo escolar (última semana de agosto del año anterior) se abordaron temas en primer grado con los siguientes tipos de problemas:

- Se reúnen dos cantidades en una sola.
- Se agrega o quita a una cantidad inicial.
- Se comparan dos cantidades.

En los antecedentes en segundo y tercer grados se reafirman tres aspectos. El primero, es que se utilizan cantidades más grandes (sumas de cantidades de dos cifras). El segundo, se refiere a que, mientras en primer grado el resultado que se busca en los problemas de suma es el total, en este grado el resultado que se busca puede ser un sumando. Por ejemplo: "En la cooperativa escolar se obtuvieron $340 el lunes y al cierre del martes había $590. ¿Cuánto dinero se obtuvo el martes?" La traducción del problema al lenguaje matemático es 340 + – = 590. El tercer aspecto, se refiere al uso del algoritmo usual para sumar. Este último, se apoya en las reglas del sistema decimal de numeración, en particular la necesidad de sumar unidades con unidades, decenas con decenas, etc., y la de cambiar diez unidades de un orden por una del siguiente.

Cabe agregar que para iniciar con el uso del algoritmo convencional, conviene partir de una escritura horizontal a la escritura en columnas y analizar lo que pasa si las cantidades no se acomodan de manera correcta.

Retomamos de Planes y Programas de primer grado de primaria el siguiente contenido del Bloque cinco: Plantean y resuelven problemas de suma con números naturales de una y dos cifras usando el algoritmo convencional de la suma.

Actividades de lenguaje

Expresión oral: comunicar procedimientos de resolución. Argumentar resultados.

Los recursos didácticos que usamos son los que se muestran en la siguiente tabla de fuente propia.

Tabla 1. Recursos didácticos

Para el maestro	Para el alumno
• Juegos de piso (Tiro al blanco) • Costales de semilla (dos) • Gises de colores	• Lápiz • Goma • Cuaderno

Propósito: que los alumnos realicen la suma de los puntos obtenidos en los tiros de cada uno de los integrantes del equipo e identifiquen en sus resultados, las cifras que representan las unidades, las decenas y las centenas.

Indicaciones iniciales para todo el grupo: explicar el juego, el uso de materiales, que promuevan el intercambio de saberes de los niños, en este caso fue con equipos integrados por los tres grados juntos.

El "tiro al blanco", es un juego que consiste en dibujar círculos concéntricos en la cancha de la escuela y colocar un número en cada uno de los círculos, a diez pasos del blanco se colocan los puntos de tiro, los alumnos deberán lanzar un "costal" de tela (manta) lleno de semillas, el peso del costal permitirá que este no se resbale al caer al piso.

Se forman dos equipos integrados por dos niños de primero, dos de segundo y uno de tercer grados (cinco niños en cada equipo); quienes por turnos lanzan su costal, los números registrados serán los que señalen el lugar donde cae este.

En una tabla, en el cuaderno, se escriben los nombres de los participantes. Pasan dos integrantes, uno de cada equipo y tira uno a la vez. Anotan en el cuadro donde está su nombre el número en el que cayó su costal; se juegan seis rondas por cada equipo. Al final del juego, cada equipo suma los subtotales de cada ronda, se comparan los resultados totales de los dos equipos y gana el equipo que obtenga el número mayor de puntos.

Se realizaron ocho sesiones una por semana, con seis rondas diferentes en cada una, se cambiaron los integrantes de los equipos, no todos son los mismos que en la sesión anterior.

En cada sesión se cambiaron los números. Trabajamos con las siguientes variantes:

Primera sesión

Se colocan los números 1, 2, 3, 4 y 5 ubicando el 1 en el centro del círculo y el 5 al extremo.

Esa manera de acomodar los números, permite a los niños pequeños lanzar el costal de semillas con más frecuencia al círculo de la orilla, lo cual en algunas ocasiones hace que el tiro caiga fuera del círculo, por lo tanto, no hay puntos para el equipo. En este caso es necesario analizar cómo se ponen de acuerdo para registrar el "cero".

Álvaro de segundo grado:	El tiro de Naomi cayó fuera del círculo, no hay puntos para el equipo.
Naomi:	Entonces ¿Qué anotamos en mi cuadro?
Álvaro:	Nada.
Rodrigo de tercer grado:	Mejor anoten el cero, sino se van a equivocar a la hora de hacer la suma de los puntos.

En la conversación interactúan tres integrantes de un solo equipo, aquí podemos observar que los niños se ponen de acuerdo para representar “cero puntos” escribiendo el 0 en el cuadro de Naomi, tal parece que hay una necesidad de representar algo que sabemos que no cuenta en este caso para ganar el juego. Esta necesidad de representar la nada, es parte de la historia natural del cero.

Nuestras reflexiones anteriores son respaldadas por Kaplan (2004, p. 70) quien menciona que aunque es importante tener el símbolo para el cero, el concepto interesa más, “…lo que importa aquí –en la India– es el carácter que tomaría ese concepto: ¿Sería la idea de la ausencia de cualquier número o la idea de un número para tal ausencia? ¿Sería la marca de lo vacío o una marca vacía?” Si respondemos la primera pregunta, no consideraríamos al cero como un número, en cambio, en la segunda pregunta el cero es considerado un número que representa el vacío y podemos deducir que el cero es un número que representa la nada.

Segunda sesión

Se colocaron los números 9, 8, 7, 6 y 5, poniendo el 9 en el centro del círculo y el 5 en el extremo. Los niños de primer grado, por instrucciones de sus compañeros de segundo y tercer grados, tratan de lanzar el costal al centro del círculo para obtener el número mayor de puntos para su equipo. En esta ronda no hubo tiros fuera del círculo. Los niños de primer grado distinguen dónde está colocado el número mayor; el resto de los niños saben que deben intentar que su tiro caiga en los números mayores y como estos se encuentran en el círculo del centro no se sienten presionados a que su tiro caiga fuera de los círculos y no obtengan puntos para su equipo.

Pudimos constatar cómo se construye el conocimiento en función de un pensamiento estratégico (Mayer, 1986) a partir de interpretar las instrucciones para jugar, y claro, ganarle al equipo contrario, cómo, afinar el lanzamiento del costal a los números mayores.

En las dos rondas de esta sesión se usaron números de una cifra, esto no quiere decir que la suma de los puntos no rebase el 10; los niños ya saben que si sumamos varios números de una cifra, podemos obtener un número de dos cifras como resultado. Esto les permitirá utilizar adecuadamente el Sistema de Numeración Decimal, al reconocer una jerarquía de orden superior, al escribir el resultado de una suma por ejemplo, el dígito que se encuentre en el extremo derecho representa las unidades, que sería la primera jerarquía; el que le sigue a la izquierda representa a las decenas, y así en adelante (Garciadiego, 2014).

Además, para respaldar lo anterior retomamos a Vergnaud (1991), en referencia a la didáctica, desde sus propias palabras con referencia a la educación matemática:

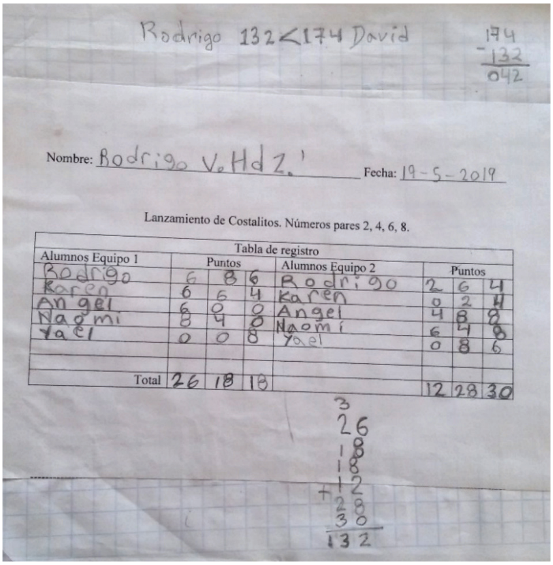
> [...] uno de los problemas más importantes de la didáctica, es el de conocer el orden en el cual las nociones pueden ser adquiridas por el niño, teniendo en cuenta que el orden de complejidad así determinado, no puede ser más que un orden parcial, que dará lugar eventualmente al aprendizaje simultáneo de nociones relativamente independientes. (Vergnaud, 1991)

Tercera sesión

Se colocaron solo números pares de una cifra, tales como 2, 4, 6 y 8, situando el 2 en el centro del círculo y el ocho al extremo. En este caso, como el número más grande se colocó en la orilla del círculo, los niños procuraron atinarle a este, con el riesgo de que su tiro saliera del círculo.

La intención de colocar solo números pares es que los niños reconozcan que la suma de estos dará como resultado un número par, así al reconocer que la suma del total de puntos es un número par, sabrán que su respuesta es correcta, aunque esto no quiera decir que no puedan equivocarse. En esta ronda, por experiencias anteriores, los niños identificaron dónde está el número más grande y solo los alumnos de tercer grado notaron que al sumar números pares obtienen como resultado un número par. Hubo dos tiros fuera del círculo en ambos equipos.

Los registros de Rodrigo son los más completos, se apegan a las indicaciones iniciales. Anota en el cuadro donde está su nombre, el número en el que cayó su costal. Al final del juego, sumó los subtotales de cada ronda de su equipo; comparó los resultados totales de los dos equipos y su equipo ganó por 42 puntos más que el otro equipo. Los registros se aprecian en la figura 1.



Rodrigo 132<174 David

174
-132
042

Nombre: Rodrigo V. Hdz.' Fecha: 19-5-2019

Lanzamiento de Costalitos. Números pares 2, 4, 6, 8.

Tabla de registro

Alumnos Equipo 1	Puntos			Alumnos Equipo 2	Puntos		
Rodrigo	6	8	6	Rodrigo	2	6	4
Karen	6	6	4	Karen	0	2	4
Angel	6	0	0	Angel	4	8	8
Naomi	8	4	0	Naomi	6	4	8
Yael	0	0	8	Yael	0	8	6
Total	26	18	18		12	28	30

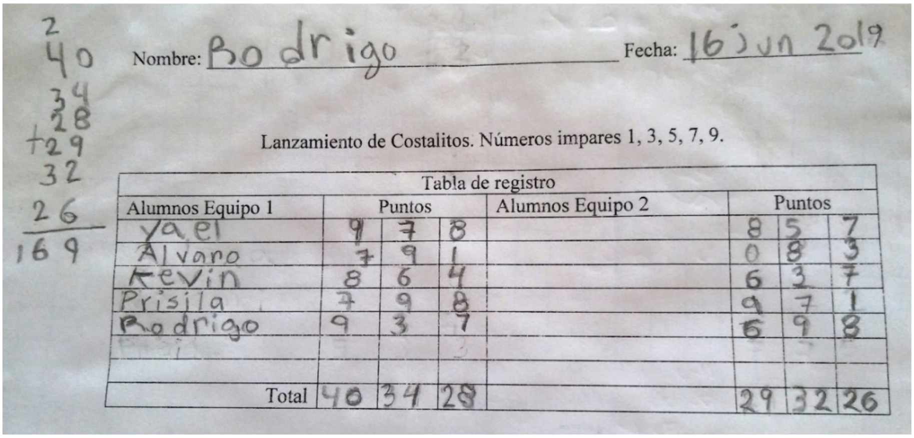
3
26
18
18
12
28
\+ 30
132

Figura 1. Registros de las seis rondas del juego.

Resalta que Rodrigo de tercer grado, realizó la resta de los puntos obtenidos de su equipo (que fueron más), para saber exactamente con cuántos puntos le ganaron al otro equipo. También anotó el signo “menor que” entre el total de puntos de su equipo y el del otro equipo. Lo cual, nos muestra que Rodrigo utiliza el conocimiento esquemático: tipo de problema; el conocimiento operativo: cómo llevar a cabo la secuencia de operaciones y el conocimiento estratégico: técnicas para saber cómo utilizar los diversos tipos de conocimientos, en concordancia con los planteamientos de Mayer (1986).

Cuarta sesión

Se colocarán los números impares 1, 3, 5, 7 9, poniendo el 9 en el centro del círculo. Los registros se aprecian en la figura 2.



2
40
34
28
+29
32
26
169

Nombre: Rodrigo Fecha: 16 Jun 2019

Lanzamiento de Costalitos. Números impares 1, 3, 5, 7, 9.

Tabla de registro

Alumnos Equipo 1	Puntos			Alumnos Equipo 2	Puntos		
Yael	9	7	8		8	5	7
Alvaro	7	9	1		0	8	3
Kevin	8	6	4		6	3	7
Prisila	7	9	8		9	7	1
Rodrigo	9	3	7		6	9	8
Total	40	34	28		29	32	26

Figura 2. Registro de las seis rondas con números impares.

La intención de poner solo números impares es que los niños reconozcan que la suma de estas no siempre dará como resultado un número impar, esto es posible solo si se suman cifras impares. Durante el juego se les explicó que en el caso de haber jugado seis participantes el resultado de sumar seis números impares dará como resultado un número par. Es algo que llamó la atención de los niños de tercer grado, quienes una vez que comprendieron lo anterior lo explicaron a sus compañeros de segundo y primer grados.

David tercer grado: Ya le entendí, entonces si sumo el uno, más el tres y el cinco obtengo como resultado nueve, que es un número impar. Esto se debe a que sumé tres números impares.

Maestra: Así es, si sumas uno, más tres, más cinco (tres números impares), obtienes como resultado nueve y si a este resultado le sumas siete, obtienes como resultado dieciséis que es un número par. Porque sumaste cuatro números impares.

En los diálogos anteriores podemos notar que hay algunas características muy peculiares que los niños más grandes pueden descubrir, no así para los niños más pequeños, como son los casos de Kevin y Priscila (ambos de primer grado) que registraron números pares, sin embargo, estas experiencias les dan elementos para que en otras circunstancias en el transcurso del ciclo escolar puedan comprender las relaciones entre estos números.

Quinta sesión

Se colocan las decenas 20, 40, 60 y 80, ubicando el 80 en el centro del círculo.

En este caso sumaron decenas, los niños suponían que su resultado sería un número par, lo cual es correcto. No hubo tiros fuera del círculo, debido a que los más pequeños ya identifican el número mayor que en este caso es el 80 y está en el centro, esto permitió el lanzamiento al centro de los círculos concéntricos.

Además de identificar el número mayor, es importante mencionar que el niño pequeño reconozca que a diferencia del lenguaje escrito, que también aprende desde el primer grado, los números al transcribirlos solamente se escriben igual que las palabras de derecha a izquierda, caso contrario con los resultados de los números al realizar operaciones aritméticas de suma. Se reconoce una jerarquía de orden superior al escribir el resultado de una suma, por ejemplo, el dígito que se encuentre en el extremo derecho representa las unidades, que sería la primera jerarquía; el que le sigue a la izquierda representa a las decenas, que correspondería a la segunda jerarquía; el siguiente a las centenas, y así en adelante (Garciadiego, 2014, p. 358).

Sexta sesión

Se colocan las decenas 10, 30, 50, 70 y 90, situando el 10 en el centro del círculo.

En este caso sumaron decenas, los niños de segundo y tercer grados no sabían exactamente si su resultado sería un número par. Hubo tiros fuera del círculo con cero puntos para uno de los equipos, debido a que todos los niños identificaron al 90 como el número mayor que en este caso, está en el círculo de la orilla. Al final del juego la maestra preguntó: "¿Qué dificultades enfrentaron al sumar las decenas?" Los niños de tercer grado comenzaron a contar a los integrantes de su equipo, son cinco de cada uno.

Rodrigo de tercer grado:	Al principio yo pensé que sería como sumar números impares de una cifra.
David de tercer grado:	No, porque todos los números que sumamos son pares, fíjense, son el diez, treinta, cincuenta, setenta y noventa. Todos son pares.
Kevin de primer grado:	Ha ya entendí. Todas las decenas son pares.
David de tercer grado:	Sí.

Lo anterior nos permite suponer que los niños de primer grado comprenden el principio esencial de la base, que es la creación de unidades superiores (Garciadiego, 2014, p. 356). En este caso después del 9 sigue el 10, el 11, 12, 13 y así sucesivamente, llegamos al 20 y sigue el 21, 22, 23, así hasta el 100. Sobre todo cuando sumaron los puntos obtenidos del equipo en las dos rondas.

Séptima sesión

Se colocaron las decenas 10, 20, 30, 40 y 50, se escribió el 50 en el centro del círculo y el 10 en el círculo del extremo.

En esta ronda los niños se entusiasmaron al observar que el 50 estaba en el centro de los círculos, al tratar de atinarle al 50 y fallar, tenían la confianza de obtener algún puntaje para su equipo, aunque este no fuera el mayor. Los niños sabían que al sumar las decenas obtendrían tal vez un número mayor de 100, aquí ya estamos en la unidad superior del Sistema de Numeración Decimal, la centena. Es en el uso de los números en juegos que ocupan su lugar y adquieren sentido, los niños saben que su equipo deberá obtener más de 100 puntos para ganar el juego.

Octava sesión

Se colocan las decenas 60, 70, 80, 90 y 100, se dibujó el 60 en el centro del círculo y el 100 en el círculo de la orilla, solo en esta sesión incluimos el 100. Veremos cómo los niños relacionan las unidades superiores, las que representan a las decenas y a las centenas. Los registros se aprecian en la figura 3.

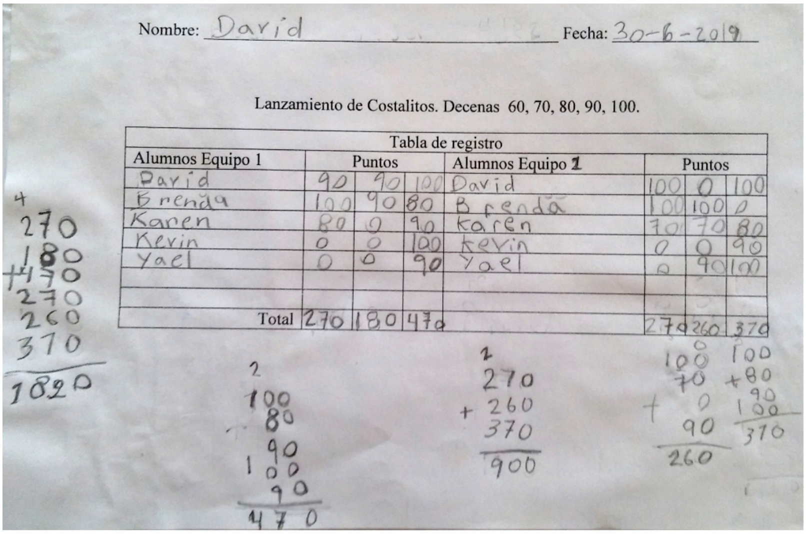


Figura 3. Registros de las seis rondas donde aparece el 100.

En esta ronda los niños se pusieron muy nerviosos, porque el 100 se colocó en la orilla, lo cual significaba que si quedaba fuera serían cero puntos para el equipo. Sabían que al sumar 100 más 100 obtendrían 200, nuevamente estamos en la unidad superior del Sistema de Numeración Decimal, la centena.

Aquí podemos advertir los diferentes significados que adquieren los números, de acuerdo a su uso, en los cuadros donde registran los puntos de cada uno de los integrantes del equipo, son solo eso, registros. Los mismos números acomodados fuera de los cuadros son utilizados para sumar la cantidad de los puntos. Observamos que los registros de David, tienen varias adiciones; podemos notar que coloca los números correctamente al sumar los puntos de cada ronda y las cantidades de las seis rondas también. Lo anterior indica que David sabe usarlos correctamente. Realizar sumas al final del juego, marca una significativa diferencia, no es lo mismo realizar montones de sumas de manera mecánica, las que el maestro escribe en el pizarrón, que realizarlas para obtener el total de los puntos acumulados al terminar de jugar. El juego del tiro al blanco es, sin duda, una fuente de aprendizaje relevante.

Al final del juego, al sumar los puntos, Brenda observa que Yael con el afán de atinarle al cien obtuvo tres tiros fuera, lo cual equivale a cero puntos. Lo muestran sus diálogos.

Yael segundo grado: Si todos le atinamos al 100 obtenemos 500 puntos.

Brenda segundo grado: Mira Yael, tanto que nos dijiste y te saliste de los círculos.

Los pasajes conversacionales anteriores serían incomprensibles para alguien que no estuvo presente en las clases. Para realizar el análisis fue necesario reflexionar en los mecanismos de intercambio lingüístico entre maestros y alumnos, y estos últimos con sus pares. Pusimos especial énfasis en los actos de "asignación de sentido" para lo cual es necesario tener un punto de "referencia" (Saussure, 1998) en este caso los números naturales y sus relaciones.

De igual manera observamos cuidadosamente cómo usaron los signos y los algoritmos, qué hizo la maestra para guiar a sus alumnos a construir su propio aprendizaje y descubrir el conocimiento de manera significativa. Por eso es importante la identificación de conceptos clave/fundamentales para la comprensión de contenidos más complejos.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Consideramos que los niños de primer grado comprendieron, en su uso, las reglas del sistema decimal de numeración, mientras que los niños de segundo grado reafirmaron estos conocimientos y los de tercer grado, lograron establecer otras relaciones distintas a los objetivos de la clase. Todo lo anterior, permite a la maestra plantear situaciones didácticas para reforzar los contenidos tratados en la clase y por consiguiente, avanzar hacia contenidos más complejos.

Cuando el juego implica acción motriz, desarrollan capacidades y destrezas como rapidez, coordinación y precisión, y cuando requieren expresar sentimientos o representar una situación, ponen en marcha su capacidad creativa con un amplio margen de acción. El juego se convierte en un gran aliado para los aprendizajes de los niños, por medio de él descubren capacidades, habilidades para organizar, proponer y representar; asimismo, propicia condiciones para que los niños afirmen su identidad y también para que valoren las particularidades de los otros (SEP, 2017).

Las observaciones de todas las sesiones nos permitieron acercarnos a indagar cómo los niños de manera sencilla usan los mismos números para los usos que se requieren en ese momento; es decir, adquieren sentido y referencia solo para ese momento específico, con la finalidad de acumular la mayor cantidad de puntos posibles.

Lo anterior beneficia a los alumnos de primer grado, con ayuda de sus compañeros de mayor experiencia comprenden paulatinamente cómo acomodar los números de manera correcta, para sumar pequeñas cantidades y de esta manera comprender poco a poco las características del sistema de numeración decimal (Duval, 1999).

Resulta legítimo crear un modo de re-crear el lenguaje colectivo, de tal manera que en ocasiones se utilizan los signos formales de la aritmética o se explican oralmente para que los alumnos puedan usar el conocimiento esencial de las propiedades aritméticas básicas. Colocar el cero en la casilla cuyo tiro cayó fuera de los círculos, resultó necesario para no confundir a los niños de primer grado en la suma de cinco cantidades, aunque saliera lo mismo anotar o no el cero, el resultado sería el mismo. La producción de significados, la intención de los individuos a fines concretos y posterior conversión en conocimiento, resultan importantes puesto que a partir de ello se estructuran las relaciones que se movilizan al interior de la escuela y marcan la dinámica social a través de una recíproca interacción lingüística entre maestro-alumno y alumno-alumno.

Los niños de primer grado, orientados por sus compañeros más grandes, identificaron el numeral que otorga más puntos, el reto fue desde ese momento, calcular la fuerza del tiro del costal, si este cae fuera de los círculos, el puntaje equivale a cero. Es indispensable que todos los niños interpreten las instrucciones, de lo contrario, sus compañeros se encargarán de explicarles detenidamente, lo cual confluye con lo expuesto por Cazden (1991), la conversación entre iguales aporta elementos intelectuales que ayudan a la comprensión de la tarea.

Es necesario considerar la naturaleza del proceso enseñanza–aprendizaje, en el cual, las relaciones entre profesores y alumnos, están determinadas ampliamente por las expectativas (a menudo implícitas del maestro), las cuales interfieren en modelar el comportamiento de los niños, esto sin duda influye en sus respuestas, por lo tanto, el niño construye una imagen de la resolución del problema según la cual "debe" antes de todo, producir la respuesta que sus compañeros de equipo esperan. Para llevar a cabo la tarea anterior de manera óptima, revisamos detenidamente y analizamos los datos recopilados, su naturaleza, su rol, su pertinencia, su manera de registrar en la tabla puntos acumulados, para de esta manera, deducir y explicar los procedimientos y la justificación de los resultados (Pozo *et al.*, 1994).

En esta perspectiva, consideramos importante que la profesora proponga construir varias imágenes del problema abordado. Pozo (1999), menciona que profesores y alumnos mantienen verdaderas teorías implícitas sobre el aprendizaje y la enseñanza, profundamente enraizadas no solo en la cultura escolar dominante, en las actividades de enseñanza cotidianas, en la organización social del aula, en la evaluación, etc., sino también en la propia estructura cognitiva de profesores y alumnos. El cambio educativo requiere también promover un cambio en las concepciones de esos agentes educativos sobre el aprendizaje y la enseñanza.

Esas concepciones pueden ser aquellas que dificultan el aprendizaje; es necesario identificar si son resultado de antecedentes deficientes, o anticipar cuáles serán las dificultades que presenta la comprensión del sistema decimal de numeración cuando sumamos cantidades de una cifra y en otro juego sumamos cantidades de dos cifras. Cabe agregar que el uso del cero puede generar concepciones erróneas (Trejo y Valdemoros, 2015), cuando el costal cayó fuera de los círculos, los niños de tercer grado indicaban a los niños de primer grado, anotar el cero para no equivocarse a la hora de realizar la suma del total de puntos.

CONSIDERACIONES FINALES

A través del juego de tiro al blanco con los alumnos, y al realizar una reflexión crítica de la práctica nuestra, exploramos las posibilidades para mejorar las clases, enfocándonos en los usos de los números que hacen que los niños comprendan las características del Sistema Métrico Decimal. Analizar las conversaciones de los estudiantes entre sí, nos ayuda al diseño de nuevos juegos que propicien acciones concretas y reflexivas de los procesos de aprendizaje de los alumnos de la escuela primaria multi-grado específicamente.

Durante los juegos, pudimos revisar las características del lenguaje utilizado al momento de seguir las instrucciones y tratar de ganarle al otro equipo obteniendo la mayoría de puntos. Con todo ello, confirmamos que acumular los números mayores fue el reto, asumir que fueron distintos y que cuando el tiro cayó fuera no hubo puntos para el equipo, mantuvo el interés por el juego durante todas las sesiones.

Algo muy importante de mencionar es, el conocimiento de las ideas y representaciones de los alumnos sobre los contenidos que son objeto de aprendizaje escolar, es sumamente importante observar cómo los alumnos usan los números para registrar los puntos; y, cómo realizan las operaciones aritméticas para obtener el total de puntos acumulados y saber quién fue el ganador. Además de que los alumnos más experimentados utilizaron el signo mayor que, lo cual los condujo a hacer una resta para precisar con cuántos puntos le ganó un equipo a otro. Lo anterior beneficia a ambos, a los alumnos porque tienen una manera diferente de aprender o reafirmar un contenido, lo que permite fortalecer las habilidades de planeación de la profesora en la enseñanza de las matemáticas, la reflexión crítica sobre la práctica docente propia y, fomenta la adaptación o el diseño de estrategias didácticas eficaces, acordes a las necesidades de los alumnos.

Otro punto de reflexión importante, es reconocer que en la escuela primaria predomina el uso del lenguaje oral y escrito en el proceso de enseñanza y aprendizaje de cualquier asignatura; y, está presente durante todo el proceso escolar, los alumnos requieren conversar sobre los temas. Por ello, es de suma importancia que la escuela contribuya al desarrollo de las competencias comunicativas de los alumnos. El uso del lenguaje se convierte en el principal elemento de interacción objetiva, ya que a través de este proceso se fundan las nuevas condiciones en la construcción del conocimiento.

La adquisición de experiencia laboral de los maestros en este tipo de escuelas se basa, a diferencia de la escuela de organización completa, en las habilidades que adquieren para ajustar el currículum oficial a las condiciones sociales y culturales de estas pequeñas comunidades. Con lo anterior, podemos comprender los retos y las dificultades de los profesores para presentar las actividades de enseñanza de manera accesible a sus alumnos. De este modo, los maestros se enfrentan no solo a comprender un contenido curricular, sino a crear sus propios medios de transferencia.

El diseño o adaptación de estas actividades, permiten un trabajo acorde con los avances y ritmos de aprendizaje de los alumnos, lo que es un principio básico del trabajo en multigrado. Cabe agregar que también dependen del tipo de escuela multigrado que se trate, ya sean aquellas que cuentan con un profesor (unitarias) dos, tres o cuatro profesores. Con respecto a los estudiantes de escuelas multi-grado, podemos decir que cuentan con experiencias y conocimientos peculiares propios del medio rural y diferente a los niños de escuelas en medios urbanos y semi-urbanos.

Una situación que debe fomentarse y aprovecharse en las escuelas multigrado es el trabajo cooperativo, la ayuda mutua y las tareas compartidas entre los alumnos, quienes aprenden unos de otros y conocen lo que se trabaja en distintos grados, para que así, los niños pequeños vayan adquiriendo espontáneamente conocimientos de los alumnos mayores, quienes a su vez adquieren seguridad en sí mismos y reafirman sus conocimientos al apoyar a sus compañeros. De ahí que es recomendable promover la realización de algunas actividades en equipos integrados por alumnos de diferentes grados.

Lo anterior nos permitió verificar la pertinencia de la secuencia de aprendizaje y superar las dificultades reconocidas por los alumnos. Los estudiantes mostraron gran entusiasmo al jugar con sus compañeros; aunque algunos presentaron mayores dificultades que otros para comprender las instrucciones, consideramos que fue una grata experiencia para ellos.

REFERENCIAS

Bennet, N. (1979). *Estilos de enseñanza y procesos de los alumnos.* Morata.

Block, D., Ramírez, M. y Reséndiz, L. (2015). Las ayudas personalizadas como recurso de enseñanza de las matemáticas en un aula multigrado. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *20*(66), 7111-735.

Bordieu, P. y Passeron, J. C. (1970). *La reproducción: Elementos para la teoría del sistema de enseñanza.* Editorial Laia.

Broitman, C., Escobar, M., Sancha, I., y Urretabizcaya, J. (2015). Interacciones entre alumnos de diversos niveles de conocimientos matemáticos. Un estudio en un aula plurigrado de escuela primaria. *Yupana*, (8), 11-30. https://doi.org/10.14409/yu.v0i8.5014

Bruner, J. (1983). Capítulo 3. Jugar, juegos y lenguaje. En *El habla del niño. Cognición y desarrollo humano.* Editorial Paidós.

Cazden, C. B. (1991). *El discurso en el aula: El lenguaje de la enseñanza y el eprendizaje*. Paidós.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Aiqué.

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática.* Reverté Ediciones.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano.* Peter Lang Ediciones – Universidad del Valle.

Elliot, J. (1993). *El cambio Educativo desde la investigación-acción.* Morata.

Flanders, N. (1970). *Analyzing teaching behavior.* Addison – Wesley.

Garciadiego, A. (2014). "Bases numéricas". En A. Garciadiego, *Infinito, paradojas y principios, Escritos históricos en torno a los fundamentos de las matemáticas* (pp. 353-386). Plaza y Valdéz.

Kaplan, R. (2004). *Una historia natural del cero. La nada que existe*. Editorial Océano.

Mayer, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* Paidós.

National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* National Academy Press. http://www.nap.edu

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas.

Porlán, R. (1998). *Qué y cómo enseñar desde una perspectiva constructivista*. Dimensión Educativa.

Pozo, I. (1999). *Aprendices y maestros. La nueva cultura del aprendizaje*. Alianza.

Pozo, I., Puy, P. M., Domínguez, J., Gómez, M. A. y Postigo, Y. (1994). *La nueva solución de problemas*. Editorial Santillana.

Sató, M. (2018). El desafío de la escuela: crear una comunidad para el aprendizaje. Traducción de Virginia Meza H. El Colegio de México.

Saussure, F. (1998). *Curso de lingüística general.* Fontamara.

Secretaría de Educación Pública (2017). Planes y Programas de Estudio. Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública (2017). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Primer grado.* Secretaría de Educación Pública.

Secretaría de Educación Pública (2017). *Desafíos matemáticos. Libro para el maestro. Primer grado.* Secretaría de Educación Pública.

Shuard, H. y Rothery, A. (1984). *Children reading mathematics.* John Murray.

Taylor, S. y Bogdan, R. (1999). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación.* Paidós.

Thompson, J. (1993). *Ideología y cultura moderna*. UAM.

Trejo, L. y Valdemoros, M. (2015). El uso del lenguaje matemático en la enseñanza del número natural en la escuela primaria [Tesis para de doctorado en Ciencias en la especialidad de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV–IPN)].

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad.* Trillas.

Datos de correspondencia:

Lorena Trejo Guerrero

Dirección: 4ª Cerrada de Oasis No 206, M.4, L. 26, Fraccionamiento Oasis de Doria, Pachuca de Soto, Hidalgo. C. P. 42083

Teléfono: +52 7711877806

 https://doi.org/10.24844/EM3501.07

Elaboración de una Guía de Situaciones-Problemas sobre Variable Aleatoria y sus Aplicaciones a partir del Currículo Escolar Chileno

Construction of a Guide of Problems-Situations about Random Variable and their Applications according to the Chilean School Curriculum

Valeria Bizet Leyton,[1] Elena Molina-Portillo[2]
Felipe Ruz,[3] José Miguel Contreras García[4]

Resumen: Esta investigación tiene por objetivo proponer una guía que integre las situaciones-problemas relativas a la comprensión de variable aleatoria y sus aplicaciones en distribuciones de probabilidad promovidos por el currículo escolar chileno, fundamentada en las ideas de Transposición Didáctica y objetos matemáticos primarios del EOS (Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos). Primero, por medio del análisis de contenido a lineamientos curriculares chilenos e internacionales, fue creada la Guía de Situaciones-Problemas sobre Variable Aleatoria y sus Aplicaciones en Distribuciones de Probabilidad según el Currículo Escolar Chileno (GSP-VADP). Posteriormente, a partir de la literatura ha sido seleccionado un conjunto inicial de ítems representantes de las situaciones-problemas que componen la guía, y luego a

Fecha de recepción: 9 de mayo de 2021. **Fecha de aceptación:** 10 de febrero de 2023.

[1] Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, España, valeriabizet@gmail.com, orcid.org/0000-0002-5995-1543.

[2] Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, España, elemo@ugr.es, orcid.org/0000-0002-9955-3080.

[3] Instituto de Estadística, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, felipe.ruz.a@pucv.cl, orcid.org/0000-0003-4050-728X.

[4] Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, España, jmcontreras@ugr.es, orcid.org/0000-0001-6821-0563.

través de un juicio de expertos fue identificado el conjunto final. Los resultados muestran que la GSP-VADP está constituida por 34 situaciones-problemas, de aquellas emergen los restantes objetos matemáticos primarios. Esta herramienta es viable utilizarla para identificar ítems representantes de sus situaciones-problemas por medio de juicio de expertos, debido a que el conjunto final de ítems obtuvo un coeficiente de validez y concordancia bueno (0,86).

Palabras clave: *Variable Aleatoria. Distribuciones de Probabilidad. Situaciones-Problemas. Transposición Didáctica. Currículo Escolar.*

Abstract: This research has the aim of proposing a guide that integrate the problems-situations regarding the understanding of random variable and their applications in probability distributions promoted by the Chilean School Curriculum, based on the ideas of Didactic Transposition and OSA's primary mathematical objects (Ontosemiotic Approach to Mathematical Cognition and Instruction). First, through the content analysis to Chilean and international curricular documents, the Guide of Problems-Situations about Random Variable and their Applications in Probability Distributions according to the School Chilean Curriculum (GPS-RVPD) was created. Subsequently, from the literature has been selected an initial item group that is a representation of the problems-situations that compose the guide, and then through an expert judgment the final group was identified. The results show that the GPS-RVPD is constituted by 34 problems-situations, from which emerge the rest primary mathematical objects. This tool is feasible to use for identifying items representing their problems-situations, through expert judgment, this is because the final item group obtained a good validity and concordance coefficient (0,86).

Keywords: *Random Variable. Probability Distribution. Problems-Situations. Didactic Transposition. School Curriculum.*

1. INTRODUCCIÓN

La variable aleatoria y las distribuciones de probabilidad son tópicos esenciales en la educación estocástica dada su importancia en la teoría de la probabilidad y en la práctica estadística (Heitele, 1975; Batanero, 2004). Por esta razón se les da un lugar importante a estos temas en el currículo de Chile (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2015; MINEDUC, 2019a) y en el currículo de la mayoría de países, por ejemplo, el de Estados Unidos (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; National Governors Association Center for Best Practices [NGACBP] y Council of Chief State School Officers [CCSSO], 2010).

En las investigaciones que tienen como objeto de estudio los libros de texto de probabilidad y estadística, se ha constatado la escasez de situaciones-problemas sobre el tema de variable aleatoria y distribuciones (Ortiz, 2002, Valverde, 2017). Por otro lado, a pesar de que la variable aleatoria es inseparable de su distribución de probabilidad (Ruiz, 2013), hemos notado que la literatura previa ha sido persistente en reportar deficiencias en los conocimientos utilizados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la distribución binomial a nivel escolar (Sánchez y Landín, 2014), la variable aleatoria (Ruiz, 2006) o la distribución normal en el ámbito universitario (Tauber, 2001).

Por ello, identificamos una problemática vigente en torno a la carencia de herramientas que permitan valorar de manera articulada y simultánea la comprensión de la variable aleatoria y sus aplicaciones en las distribuciones de probabilidad binomial y normal. Lo anterior se agudiza frente al inminente tratamiento de este contenido durante la transición de egreso de la educación escolar e inicio de la educación superior, que se espera sea coherente con los lineamientos curriculares actuales. Por tanto, en este trabajo nos proponemos abordar la problemática descrita previamente, para lo cual se establece el objetivo de proponer una guía que integre las situaciones-problemas relativas a la comprensión de variable aleatoria y sus aplicaciones en distribuciones de probabilidad, promovidas por el currículo escolar chileno, donde las situaciones-problemas hacen referencia a tareas, actividades o ejercicios que originan la actividad matemática (Godino, 2002).

2. MARCO CONCEPTUAL

La investigación se fundamenta en la noción de tansposición didáctica, entendida como el cambio realizado al conocimiento científico (saber sabio) para poder ser enseñalado (Chevallard, 1980). Dentro de esta se distinguen dos tipos (Chevallard, 1991): la transposición didáctica externa, que corresponde a la transformación realizada del conocimiento científico (saber sabio) al contenido expuesto en el curriculo escolar (saber a enseñar); transposición interna, que hace referencia al cambio del contenido presente en los lineamientos curriculares (saber a enseñar) en una forma de conocimiento que sea accesible a los estudiantes (saber enseñado).

Además, en la transposición didáctica intervienen agentes, tales como (Chevalard, 1991): (i) expertos, vigilan en el proceso de transformación que el saber enseñado no sea una distorción del saber sabio; (ii) documentos curriculares, los cuales exponen los contenidos de referencia sobre los que debe actuar el profesor; (iii) profesor, quien es uno de los responsables del proceso de transposición didáctica y; (iv) estudiantes, quienes son los receptores de aquel producto.

También este estudio se sustenta en elementos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino *et al*., 2007), teoría que propone que el origen de la actividad matemática son las situaciones-problemas, es decir, tareas, actividades o ejercicios (Godino, 2002), y para su resolución se realizan determinadas prácticas matemáticas. Aquellas prácticas son específicas actuaciones y expresiones verbales o gráficas que pueden ser compartidas en una institución (llamado significado institucional) o realizadas por una persona (denominado significado personal) para resolver una tarea o comunicar su solución (Godino, 1994).

En el EOS los objetos corresponden a todo aquello a lo que se hace referencia en la práctica matemática, por lo que según la función que cumplan es posible clasificarlos en la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios (Godino, 2002): a) situaciones-problemas (S-P), tareas, actividades o ejercicios que promueven la actividad matemática; b) lenguaje (L), términos matemáticos en sus diversos registros de representación (verbal, simbólico, tabular y gráfico) utilizados para enunciar o resolver tareas; c) conceptos (C), descripciones o definiciones relacionadas a un objeto matemático, aplicadas en la resolución de actividades; d) proposiciones (PP), características o propiedades de conceptos, usadas en solucionar tareas; e) procedimientos (P), algoritmos, técnicas de cálculos u operaciones desarrollados para responder actividades; y f) argumentos (A), enunciados empleados para aprobar o justificar proposiciones y procedimientos, o la respuesta a tareas. Así, un conjunto de situaciones-problemas vinculadas recíprocamente, que comparten sus representaciones, procesos o soluciones similares constituyen un campo de problema (C-P) (Godino, 1999).

De esta manera, el EOS se ha utilizado en la determinación de los campos de problema que estructuran la guía diseñada, a partir de la indagación de investigaciones previas en torno a la epistemología y significado institucional de los temas en cuestión. La noción de transposición didáctica interna fue empleada en el análisis de documentos curriculares tanto chilenos como internacionales y proceso de identificación, clasificación y reducción de unidades de análisis. También el Enfoque Ontosemiótico se ha usado en el proceso de inferencia de situaciones-problemas a partir de las unidades de análisis, además en la selección desde la literatura de tareas, actividades o ejercicios que representan aquellas situaciones-problemas que componen la guía.

3. METODOLOGÍA

El presente trabajo es una investigación documental, la cual tiene como propósito comprender la realidad social y producir conocimiento mediante el análisis de diversos documentos (Hoyos, 2010). También, este trabajo posee datos empíricos obtenidos de las opiniones de expertos iberoamericanos que validaron la guía diseñada.

3.1 Contexto y materiales de la investigación

El contexto de esta investigación ha sido la educación escolar chilena, por consiguiente, en primer lugar, se indagó el principal documento curricular del país propuesto por el Ministerio de Educación, denominado Bases Curriculares (MINEDUC, 2015; MINEDUC, 2019a) únicamente las destinadas a la educación secundaria (grado 9 hasta 12). Además, se incluyó el análisis a los Programas de estudio de Matemática (MINEDUC, 2016; MINEDUC, 2019b; MINEDUC 2019c), pues es un instrumento que hace posible la ejecución de las Bases Curriculares. En estos documentos fueron estudiados los Objetivos de Aprendizaje (O.A.) e Indicadores de Evaluación (I. Ev.) sobre tópicos estocásticos.

La elaboración de las Bases Curriculares, se sustentan en diversas fuentes, una de ellas es la revisión de lineamientos curriculares internacionales principalmente de países pertenecientes a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (MINEDUC, 2009). En consecuencia, en un segundo momento se analizaron los siguientes documentos:

- Los estándares americanos como los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000) y los Estándares Estatales Básico Comunes para las Matemáticas (NGACBP y CCSSO, 2010), dirigidos a la educación preescolar y escolar (grados K al 12). En el primero de ellos se han estudiado las Expectativas de Aprendizaje (E.A.) del estándar de Análisis de Datos y Probabilidad, mientras que en el segundo los Dominios (D) y Estándares (E) pertenecientes a la categoría conceptual de Estadística y Probabilidad.
- Los Lineamientos para la Evaluación y Enseñanza en Educación Estadística, conocido como proyecto GAISE (Franklin *et al.*, 2005) que abarca desde la educación preescolar a grado 12, pues es un documento de referencia internacional para afrontar los desafíos de la educación estadística a nivel escolar. En él fue estudiado el apartado sobre el rol de la probabilidad en estadística.

La investigación se realizó bajo un enfoque mixto (Hernández *et al.*, 2014) y su desarrollo se organizó en tres fases, cada una es detalla a continuación.

3.2 Fase 1: Construcción de guía de situaciones-problemas

En la primera fase de la investigación, se empleó la técnica de análisis de contenido (Krippendorff, 1990). Esta es una técnica para analizar de forma sistemática documentos, con el propósito de realizar inferencia reproducible e identificar en sus fragmentos la presencia o ausencia de alguna característica del tema. Por ello se ha utilizado en la identificación y clasificación de normativas vigentes en torno a la enseñanza-aprendizaje de la variable aleatoria y sus aplicaciones en algunas distribuciones de probabilidad, organizadas en categorías, según los ocho campos de problema abajo definidos.

Aquellos campos de problema fueron establecidos en un proceso cíclico e inductivo por medio del análisis a la epistemología de la variable aleatoria (Amrani y Zaki, 2015; Dinges, 2005; Ruiz, 2013). También este aspecto ha sido indagado en la distribución binomial (García-García *et al.*, 2022; Vilca, 2015) y distribución normal (Stahl 2006; Tauber, 2001). Así se obtuvieron los siguientes:

1. Identificar la variable aleatoria como una función presente en el contexto probabilístico.
2. Reconocer la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta (función de cuantía) como una herramienta que permite ver la variación aleatoria.
3. Reconocer la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua (función de densidad) como una herramienta que permite ver la variación aleatoria.
4. Establecer la función de distribución de una variable aleatoria discreta.
5. Utilizar parámetros vinculados a la variable aleatoria para resumir la distribución de sus probabilidades.
6. La distribución binomial como un modelo probabilístico que describe un fenómeno de la vida real.
7. La distribución normal como un modelo probabilístico que describe un fenómeno de la vida real.
8. Aproximar distribuciones de variables aleatorias discretas con un número grande de valores.

Las Unidades de Análisis (U.A.) fueron definidas a partir de la revisión de los documentos curriculares señalados y clasificadas en los campos de problema anteriores, para ello se emplearon letras minúsculas del alfabeto latino (a, b, c, ..., z). Luego por medio del método de Rivas (2014), las U.A. han sido comparadas y reducidas utilizado el comentario "contenida en", debido a que algunas unidades estaban contenidas en otra o no entregaban nueva información, todo ello con el propósito de lograr representar su información en una U.A. final. Un ejemplo de este procedimiento se expone en la tabla 1.

Tabla 1. Ejemplo del proceso de identificación, clasificación y reducción de las Unidades de Análisis

Campo de problema	Unidades de Análisis
2. Reconocer la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta (o función de cuantía) como una herramienta que permite ver la variación aleatoria	MINEDUC (2015, p. 124): OA 10 Mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas a. Calculando su probabilidad. *U.A. a contenida en h* b. Graficando sus distribuciones. *U.A. b contenida en d*
	MINEDUC (2016, p. 154): I. Ev. c. Determinan las probabilidades de una variable aleatoria aplicando la terminología P(X = xi). *U.A. c contenida en h* d. Elaboran tablas y gráficos para representar la distribución de una variable aleatoria finita. *U.A. d* NCTM (2000, p. 324): E. A. e. Comprender los conceptos de espacio muestral y distribución de probabilidad y construir espacios muestrales y distribuciones en casos simples. *U.A. e contenida en h* f. Usar simulaciones para construir distribuciones de probabilidad empíricas. *U.A. f contenida en i* NGACBP y CCSSO (2010, p.82-83): D. Usar la probabilidad para tomar decisiones g. E.1: Graficar la distribución de probabilidad correspondiente utilizando el mismo gráfico como para distribuciones de datos. *U.A. g contenida en d* h. E.3: Desarrollar una distribución de probabilidad para una variable aleatoria definida en un espacio muestral en el que se puede calcular las probabilidades teóricas. *U.A. h* i. E.4: Desarrollar una distribución de probabilidad para una variable aleatoria definida en un espacio muestral en el que las probabilidades se asignan empíricamente. *U.A. i*
	Franklin *et al.* (2005): El rol de la probabilidad en estadística j. Se requiere la comprensión de conceptos probabilísticos, como las distribuciones de probabilidad. *U.A. j contenida en h*

Posteriormente, a partir de las Unidades de Análisis final se procedió a inferir situaciones-problemas (S-P) alusivas a la comprensión de la variable aleatoria y distribuciones de probabilidad, donde se presentaron los siguientes casos: (i) una U.A. final originó una única situación-problema; (ii) una U.A final originó dos o tres situaciones-problemas, ejemplo de ello se muestra en la tabla 2.

Tabla 2. Ejemplo del proceso de inferencia de situaciones-problemas

Unidades de Análisis final	Situaciones-Problemas
U.A. final i. Desarrollar una distribución de probabilidad para una variable aleatoria definida en un espacio muestral en el que las probabilidades se asignan empíricamente (NGACBP; CCSSO, 2010, p. 82-83)	E 2.1 Determinar las probabilidades asociada a los valores de una variable aleatoria discreta desde un enfoque frecuencial
U.A. final h. Desarrollar una distribución de probabilidad para una variable aleatoria definida en un espacio muestral en el que se puede calcular las probabilidades teóricas (NGACBP; CCSSO, 2010, p. 82-83)	E 2.2 Determinar las probabilidades asociada a los valores de una variable aleatoria discreta desde un enfoque clásico E 2.3 Definir la función de probabilidad de una variable aleatoria utilizando la terminología $P(X = x_i)$.
U.A. final d. Elaboran tablas y gráficos para representar la distribución de una variable aleatoria finita (MINEDUC, 2016, p. 154	E 2.4 Construir una tabla para representar la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta E 2.5 Construir un gráfico de barras para representar la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta

Finalmente, como resultado de esta fase se obtuvo un conjunto de 34 situaciones-problemas, que sintetizaron los objetivos de aprendizaje e indicadores de evaluación en torno a la comprensión de variable aleatoria y sus aplicaciones en el modelo binomial y normal, presentes en documentos curriculares escolares. En su conjunto conformaron la Guía de Situaciones-Problemas sobre Variable Aleatoria y sus Aplicaciones en Distribuciones de Probabilidad según el Currículo Escolar Chileno (GSP-VADP).

3.3 Fase 2: Selección de un conjunto inicial de ítems a partir de la literatura

En esta fase se seleccionó de la literatura actividades, tareas o ejercicios concretos, representantes de las situaciones-problemas que componen la guía sobre variable aleatoria y sus aplicaciones en distribuciones de probabilidad. La búsqueda se realizó en estudios, tanto donde se hayan utilizado cuestionarios para evaluar la comprensión de la variable aleatoria y/o distribución binomial o normal, como en aquellos que se presentan propuestas de enseñanza en torno a los conceptos en cuestión. En el caso que, en las indagaciones no se encontrara una pregunta pertinente para valorar una situación-problema, se procedió inicialmente a buscar una interrogante en libros de textos escolares de matemática (chilenos) y en última instancia esta fue creada según el contexto de algún enunciado propuesto para evaluar otra situación-problema.

Para cada situación-problema que integra la guía, fue preparado un trío de ítems diferentes, aunque en algunos casos un ítem valoró más de una situación-problema. De esta manera se obtuvo un primer conjunto constituido por 91 ítems, la mayor parte fueron preguntas de tipo abierta, debido a que entregan información más detallada (Hernández *et al.*, 2014).

3.4 Fase 3: Selección de un conjunto final de ítem a partir de la validez de contenido por juicio de expertos

En este momento se procedió a la validez de contenido de los ítems por medio de la valoración por juicio de experto, su evaluación permitió seleccionar de cada trío propuesto al ítem mejor calificado para el conjunto final. Participaron seis expertos de diferentes nacionalidades (Argentina, Chile, España, México y Portugal), dado que se recomienda considerar entre cinco a diez (Barraza, 2007), todos ellos doctores en educación matemática o psicología con una reconocida experiencia en investigación en el área de didáctica de la estadística. A cada uno de los expertos se les envió, por medio de correo electrónico, una invitación en la cual se especificó el contexto de la investigación y objetivo del instrumento y se solicitó su colaboración para valorar: el grado en que cada ítem es adecuado para evaluar la situación-problema donde fue clasificado; elegir aquel ítem que considera que evalúa de mejor manera la situación-problema, entre los tres que se proponen por cada una. Para ello fue propuesta una escala Likert, de 1 (nada relevante) a 5 (muy relevante), sumado a un apartado de sugerencias donde pudieran recomendar mejoras en la redacción de los ítems.

Posteriormente se realizó un análisis descriptivo de los resultados por medio de indicadores estadísticos sobre el centro (media: $\overline{X}$ y mediana: M_e) y la dispersión (desviación típica) de las valoraciones de los expertos. Así de los tres ítems propuesto para cada situación-problema, ha sido seleccionado aquel con media más alta. Para los casos donde existieron dos ítems con igual media, fue elegido aquel que tiene una mediana con mayor valor, mientras que, si hubo dos ítems con igual media y mediana, fue seleccionado el con menor desviación típica.

Finalmente, para analizar el grado en que cada ítem seleccionado se ajustó a una situación-problema, los resultados también fueron examinados a través del Coeficiente de Validez de Contenido (CVC) de Hernández-Nieto (2002) que permite valorar el grado de acuerdo de los expertos respecto a cada uno de los diferentes ítems y al instrumento en general. Para interpretar el CVC de un ítem se tuvo en cuenta la siguiente escala: (i) ítem inaceptable ($CVC < 0{,}60$); ítem deficiente ($0{,}60 \leq CVC \leq 0{,}70$); (iii) ítem adecuado ($0{,}70 < CVC \leq 0{,}80$); (iv) ítem bueno ($0{,}80 < CVC \leq 0{,}90$); (v) ítem excelente ($0{,}90 < CVC$). De esta manera se consideraron aceptables los ítems con un coeficiente de validez y concordancia mayor que 0,70.

4. RESULTADOS

4.1 Guía de Situaciones-Problemas

La tabla 3 presenta la Guía de Situaciones-Problemas sobre Variable Aleatoria y sus Aplicaciones en Distribuciones de Probabilidad según el Currículo Escolar Chileno (GSP-VADP). Como se puede apreciar el primer campo de problema, constituido por cuatro situaciones-problemas, aborda el reconocimiento de la variable aleatoria ligada a un fenómeno aleatorio, dado que es el primer paso para estudiar distribuciones de probabilidad. El segundo y tercer campo de problema, compuesto por cinco y tres situaciones-problemas respectivamente, tiene relación con el establecimiento de la función de probabilidad: en una primera instancia para la variable aleatoria de tipo discreta que permite determinar la probabilidad que esta tome valores aislados; en un segundo momento para la variable aleatoria de tipo continua que, hace posible calcular la probabilidad que esta tome un valor en un subconjunto de números reales. El cuarto campo de problema integrado por tres situaciones-problemas, hace referencia a estudiar la función de distribución de una variable aleatoria discreta, dado que son tópicos inseparables y esta función permite representar la situación aleatoria en que ambas están involucradas. El quinto campo de problema, conformado por seis situaciones-problemas, aborda un aspecto fundamental de la variable aleatoria como son sus parámetros, que están mayormente relacionados a su función de probabilidad.

El sexto y séptimo campo de problema, constituidos por cinco y seis situaciones-problemas respectivamente, trabajan la aplicación de la variable aleatoria en los modelos de probabilidad, para las de tipo discreta (modelo binomial) y continuas (modelo normal) correspondientemente. El octavo y último campo de problema, constituido por dos situaciones-problemas, está relacionado a la aproximación de la distribución binomial por la normal.

Por tanto, partir de las 34 situaciones-problemas identificadas emergen los restantes tipos de objetos matemáticos (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), y que en su conjunto reflejan el significado institucional de la variable aleatoria y sus aplicaciones en distribuciones de probabilidad en el contexto escolar chileno.

Tabla 3. GSP-VADP

Campos de problema	Situaciones-Problemas
1. Identificar la variable aleatoria como una función presente en el contexto probabilístico	1.1 Diferenciar entre variables deterministas y variables aleatorias 1.2 Definir variables aleatorias finitas en experimentos aleatorios 1.3 Identificar dominio de una variable aleatoria finita 1.4 Identificar recorrido o valores de una variable aleatoria finita
2. Reconocer la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta (o función de cuantía) como una herramienta que permite ver la variación aleatoria	2.1 Determinar las probabilidades asociadas a los valores de una variable aleatoria discreta desde un enfoque frecuencial 2.2 Determinar las probabilidades asociadas a los valores de una variable aleatoria discreta desde un enfoque clásico 2.3 Definir la función de probabilidad de una variable aleatoria utilizando la terminología $P(X = x_i)$ 2.4 Construir una tabla para representar la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta 2.5 Construir un gráfico de barras para representar la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta

3. Reconocer la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua (o función de densidad) como una herramienta que permite ver la variación aleatoria	3.1 Construir gráfico de la función de probabilidad de una variable aleatoria continua 3.2 Calcular algunas probabilidades asociadas a la variable aleatoria continua 3.3 Determinar si la función dada es una función de probabilidad de una variable aleatoria continua
4. Establecer la función de distribución de una variable aleatoria discreta	4.1 Determinar la probabilidad acumulada hasta algunos valores de la variable aleatoria discreta 4.2 Definir la función de distribución (o función de probabilidad acumulada) de una variable aleatoria discreta 4.3 Construir un gráfico para representar la función de distribución (o función de probabilidad acumulada) de una variable aleatoria discreta
5. Utilizar parámetros vinculados a la variable aleatoria para resumir la distribución de sus probabilidades	5.1 Calcular la media o valor esperado de una variable aleatoria discreta 5.2 Interpretar la media o valor esperado de una variable aleatoria discreta 5.3 Calcular la varianza de una variable aleatoria discreta 5.4 Calcular la desviación estándar de una variable aleatoria discreta 5.5 Interpretar la desviación estándar de una variable aleatoria discreta 5.6 Identificar la media y desviación estándar de una variable aleatoria continua
6. La distribución binomial como un modelo probabilístico que describe un fenómeno de la vida real	6.1 Identificar situaciones que pueden modelizarse a través de la distribución binomial 6.2 Determinar los parámetros asociados a la distribución binomial como n (número de ensayos), p (probabilidad de éxito) y q (probabilidad de fracaso) 6.3 Calcular la media y/o desviación estándar de la distribución binomial 6.4 Calcular probabilidades aplicando la función de probabilidad o función de distribución de la distribución binomial 6.5 Calcular probabilidades asociadas a una distribución binomial empleando una herramienta tecnológica

7. La distribución normal como un modelo probabilístico que describe un fenómeno de la vida real	7.1 Identificar situaciones que pueden modelizarse a través de la distribución normal 7.2 Calcular la probabilidad en una distribución normal a través de la propiedad $\pm 3\sigma$ 7.3 Calcular la probabilidad en una distribución normal empleando la tipificación 7.4 Describir la tendencia de los datos representados gráficamente empleando la aproximación de la binomial por la normal 7.5 Evaluar la veracidad de afirmaciones utilizando el concepto de distribución normal 7.6 Calcular probabilidades asociadas a una distribución normal empleando una herramienta tecnológica
8. Aproximar distribuciones de variables aleatorias discretas con un número grande de valores	8.1 Calcular los parámetros asociados a la distribución normal como (media) y (desviación estándar) 8.2 Calcular probabilidades en el contexto de aproximación de la distribución binomial a la normal

A continuación, se muestra la selección de cada ítem representante de una situación-problema a través de la valoración por juicio de expertos. Es importante mencionar que, en las fases de selección de ítems a partir de la literatura y elección según juicio de expertos, se han excluido dos situaciones-problemas (6.5 y 7.6), debido a que se proyecta que el conjunto final de ítems sea aplicado a estudiantes individualmente y en forma presencial o en línea. Además, en las fases señalas se incluyeron ítems para valorar dos situaciones-problemas (6.1 y 7.1) fundamentadas en la alfabetización estadística en términos de Gal (2002), con el propósito de aportar con información sólida y empírica a la investigación de esta área.

4.2 Análisis descriptivo de la validez de contenido por juicio de expertos

A los seis expertos participantes se les presentó un documento donde la primera sección contenía tres ítems para cada una de las 32 situaciones-problemas previamente identificadas. Su valoración hizo posible seleccionar de cada trío de ítems propuesto, aquel que fue más relevante para ellos (ítem sombreado), a través del mayor valor medio dado a cada uno. Por ejemplo, para la situación-problema 1.1 fueron propuestos los ítems 1, 2A y 3.1, por lo que ha sido seleccionado el ítem 1, cuya media es de 4,33 puntos. La tabla 4, muestra los siguientes casos presentados en la elección de ítems que componen la versión definitiva de esta sección:

i. En tres situaciones-problemas (1.4, 6.2 y 7.4), un par de ítems fueron evaluados con la misma puntuación media, seleccionándose aquel con mayor mediana. En concreto, para la situación problema 1.4, los ítems 1 y 3.2C, poseen igual media (4 puntos), entonces fue seleccionado el ítem 3.2C, cuya mediana es 4,5 puntos.
ii. En dos situaciones-problemas (5.2 y 7.1), un par de ítems han sido valorados con igual media y mediana, entonces fue elegido el que presenta menor desviación típica. En particular, para la situación-problema 5.2, los ítems 14.1A y 15C tienen misma media (4 puntos) y mediana (4 puntos), así fue elegido el ítem 15C cuya desviación típica es 0 punto.
iii. En la situación-problema 4.2, los ítems 8A y 9A fueron calificados con igual media (4,683 puntos), mediana (4,7 puntos) y desviación típica (0,37 puntos). Por tanto, ha sido escogido el ítem 8A, ya que posee igual contexto que los ítems seleccionados para la situación-problema 4.1 y 4.3.

Tabla 4. Selección de ítems y resumen estadístico de puntuaciones de expertos a los ítems

Situación-Problema	Ítem	$\overline{X}$	M_e	Desv. típ.	Situación-Problema	Ítem	$\overline{X}$	M_e	Desv. típ.
1. 1	*1*	*4,33*	5	1,21	5.2	13.1B	3,8	4,4	1,47
	2A	3,83	4	1,17		14.1A	4	4	0,89
	3.1	2,33	2	1,51		*15C*	*4*	*4*	*0*
1. 2	*1*	*4,33*	4,5	0,82	5.3	13.2A	4	4	0,89
	2C	3,83	4	1,17		14.2A	3,67	4	1,03
	3.2 B	4	4,5	1,55		*15B*	*4,5*	4,5	0,55
1.3	1	3,17	3	1,17	5.4	13.2A	4	4	0,89
	2B	*4,17*	4,5	0,98		*14.2A*	*4,33*	4,5	0,82
	3.2 A y C	4	4	1,1		15B	4,17	4	0,75
1.4	1	4	4	0,89	5.5	13.2B	3,83	4	1,17
	2B	3,67	3,5	1,21		14.2B	3,67	3,5	1,21
	3.2 C	*4*	*4,5*	1,27		*15.C*	*4*	4	1,1
2.1	4.2	3	2,5	1,67	5.6	16	2,67	3	1,51
	5.1 A	*3,83*	4	1,17		*17*	*3,33*	4	1,51
	6.2	3,67	4	1,03		18	2	1	1,55
2.2	4.1 A	3,8	3,9	1,17	6.1	19.1	3,83	4	1,33
	5.1 B	3	3	1,1		*20*	*4,17*	4	0,75
	6.1 A	*4*	4	1,1		21	3,83	4	1,17
2.3	4.1 B	3	3	0,89	6.2	19.1	3,5	3,5	1,05
	5.2	3,83	4,5	1,47		*20A, B, C y D*	4,17	*4,5*	0,98
	6.1 B	*4,17*	4	0,75		21A y B	4,17	4	0,75
2.4	4.1 B	3,33	3,5	1,21	6.3	19.2A y B	4,17	4,5	1,17
	5.1 B	*4,17*	4	0,75		20E y F	4,5	5	0,84
	6.1 B	3,83	4	0,98		*21C y D*	*4,6*	4,8	0,49
2.5	4.1 C	4,17	4,5	0,98	6.4	19.1	4,17	4,5	1,17
	5.1 C	4,17	4,5	0,98		20B	4,33	4,5	0,82
	6.1 C	*4,33*	4,5	0,82		*21B*	*4,5*	4,5	0,55
3.1	*10A*	*3,83*	4	0,98	7.1	22A	4,17	4,5	1,17
	11A	3,5	3,5	1,38		*23.1*	*4,17*	*4,5*	*0,98*
	12.1 B	3,33	3,5	1,63		24	3	3,5	1,27
3.2	10C y D	3,67	4	0,52	7.2	*22B y C*	*4*	4,5	1,27
	11B	*3,83*	*4*	*0,98*		23.2	3	3	1,1
	12.2 y 12.3	3,67	4	1,37		24	3,5	3,5	1,38
3.3	10B	4	4	0,63	7.3	25	4,17	4	0,75
	11B	*4,17*	4	0,75		*26*	*4,33*	4,5	0,82
	12.1 A	4	4	1,1		27	4	4	1,1
4.1	7A	3,67	4,5	1,75	7.4	28	2,83	2,5	1,47
	8A	*4*	4	0,89		*29*	*4,5*	*5*	0,84
	9C	3,83	4	1,17		30	4,5	4,5	0,55

4.2	7B	4	4	0,89	7.5	31	3,17	3,5	0,98
	8A	*4,683*	4,7	0,37		*32*	*3,83*	4	0,75
	9A	4,683	4,7	0,37		33	3,17	3	0,75
4.3	7B	3,83	4	1,17	8.1	34A	3,83	4	0,75
	8B	*4,5*	4,5	0,55		*35A*	*4*	4	0,63
	9B	4,33	4,5	0,82		36	3,67	3,5	0,82
5.1	*13.1B*	*4,33*	4,5	0,82	8.2	*34B*	*4,17*	4	0,75
	14.1 A y B	4,17	4	0,75		35B	4	4	0,89
	15A	3,67	4	1,03		36	3,83	3,5	0,98

Como resultado se puede apreciar que de los 32 ítems elegidos para la versión final de esta sección del documento: veinte de ellos fueron muy relevantes para los expertos, dado que cada uno fue calificado en promedio con más de 4 puntos; siete han sido relevantes pues, cada uno fue evaluado en promedio con 4 puntos; cinco fueron medianamente relevantes ya que, cada uno ha sido valorado en promedio con más de 3 puntos, pero menos que 4.

Además, según se expone en la tabla 4 los expertos han valorado positivamente las situaciones-problemas que componen cada campo de problema. Una evidencia de ello es que, en cada uno de los 32 ítems escogidos para la versión final de la primera sección del documento, su evaluación obtuvo una mediana igual o mayor a 4 puntos. Concretamente: en cuatro de estos ítems la mediana de sus puntuaciones es mayor a 4,5 puntos, es decir, la mitad de los expertos valoraron cada interrogante con 5 puntos a diferencia de los demás evaluadores que les asignaron 5 o menos puntuación; en 13 de ellos, las puntuaciones evidenciaron una mediana de 4,5 puntos, lo cual significa que tres jueces evaluaron a cada ítem con 5 puntos y los tres participantes restantes lo han hecho con 5 o menor valor; en 15 de esos, la mediana de sus puntuaciones es 4, es decir, tres de los jueces valoraron a estos ítems con 4 o 5 puntos y la otra mitad de los participantes les han asignado un valor igual o menor a 4.

Por tanto, para los expertos participantes, cada ítem seleccionado es representativo de la situación-problema en la cual han sido propuesto, además de ser relevante y coherente para evaluar la situación-problema consultada. También estos ítems representan las tareas, ejercicios y actividades que promueve el currículo escolar chileno para valorar la comprensión de la variable aleatoria y distribuciones binomial y normal.

Respecto a la segunda sección del documento presentado a los expertos, donde se abordan situaciones-problemas acerca de distribuciones de probabilidad fundamentadas en la alfabetización estadística, la tabla 5 contiene los resultados sobre su valoración. En ella ha sido posible observar que se presentó el caso que una de las situaciones-problemas (6.1) obtuvo dos ítems calificados con igual media, mediana y desviación típica. Por tanto, ha sido escogido aquel, en que el estudiante debe poner en juego habilidades como evaluar e interpretar la información estadística presente en su enunciado, más que realizar procedimientos (algoritmos, operaciones, etcétera).

Tabla 5. Selección de ítems sobre alfabetización estadística y resumen estadístico de puntuaciones de expertos

Situación-Problema	Ítem	$\overline{X}$	M_e	Desv. típ.
6.1 Identificar situaciones que pueden modelizarse a través de la distribución binomial	*37*	*4,5*	*5*	*0,84*
	38	4	4	1,1
	39	4,5	5	0,84
7.1 Identificar situaciones que pueden modelizarse a través de la distribución normal	*40*	*4,7*	5	0,52
	41	4	4	1,1
	42	4	4	1,1

También la tabla 5 muestra que los dos ítems que fueron seleccionados para la versión definitiva de esta sección han sido evaluados por los participantes como muy relevantes, pues cada uno fue calificado en promedio con más de 4 puntos. Aún más, en aquellos ítems la mediana de sus puntuaciones es 5, lo cual significa que tres de los expertos asignaron a cada uno la máxima valoración (5) a diferencia de los otros tres que los calificaron con 5 o menos puntos.

De esta manera se obtuvo un conjunto final de 34 ítems que representan concretamente gran parte de las situaciones-problemas de la GSP-VADP, 32 de estos integran la primera sección de un documento, mientras que los restantes dos la segunda. En su resolución se manifiestan conceptos, lenguaje, procedimientos, propiedades y argumentos, que en conjunto caracterizan el significado institucional de la variable aleatoria y sus aplicaciones en las distribuciones de probabilidad a nivel escolar. La tabla 6 presenta información relativa a las fuentes bibliográficas de los 34 ítems, organizada según la situación-problema que valora cada uno.

Tabla 6. Fuentes bibliográficas del conjunto final de ítems

Situación-Problema	Ítem y Fuente	Situación-Problema	Ítem y Fuente
1.1	1.1 Fernández *et al.* (2013)	5.2	5.2c Elaboración propia
1.2	1.1 Fernández *et al.* (2013)	5.3	5.2b Osorio *et al.* (2019)
1.3	1.2 Flores *et al.* (2014)	5.4	5.2a Elaboración propia
1.4	1.3 Adaptación de Flores *et al.* (2014) y Salazar (2014)	5.5	5.2c Elaboración propia
2.1	2.1a Flores *et al.* (2014)	5.6	10.a Elaboración propia y posee información de Ramírez (2018)
2.2	2.2a Salazar (2014)	6.1	6 Alvarado y Retamal (2014) 9. Elaboración propia y posee información de Colomé (2015) *Alfabetización estadística
2.3	2.2b Salazar (2014)	6.2	6 Alvarado y Retamal (2014) y adaptación de Sánchez y Carrasco (2018)
2.4	2.1b Flores *et al.* (2014)	6.3	6.e y 6.f Elaboración propia
2.5	2.2c Elaboración propia	6.4	6.a, 6.b, 6.c y 6.d Alvarado y Retamal (2014) y adaptación de Sánchez y Carrasco (2018)
3.1	3.1 Muñoz *et al.* (2013)	7.1	7.1 Morales *et al.* (2008a) 10.b Elaboración propia y posee información de Ramírez (2018) *Alfabetización estadística
3.2	3.2b Muñoz *et al.* (2013)	7.2	7.2 Tauber (2001)
3.3	3.2a Adaptación de Muñoz *et al.* (2013)	7.3	7.3 González y Ojeda (2017)
4.1	4.a Elaboración propia	7.4	7.4 Adaptación de MINEDUC (2019c)
4.2	4.a Elaboración propia	7.5	7.5a Tauber (2001) y 7.5b Morales *et al.* (2008b)
4.3	4.b Chacón *et al.* (2018)	8.1	8.1 Norambuena *et al.* (2019)
5.1	5.1 Guerrero *et al.* (2016)	8.2	8.2 Alvarado y Batanero (2007)

En la tabla 7 es expuesto un ejemplo de ítems seleccionados para el conjunto final, los cuales representan las situaciones-problemas correspondientes al campo de problema dos. En este caso, es posible apreciar los elementos que consideraron significativos los expertos para elegir las situaciones-problemas relativas a la distribución de probabilidades de una variable aleatoria discreta. Respecto a la situación-problema 2.1 los expertos seleccionaron el ítem 2.1A. Por tanto, se puede reconocer que consideraron relevante el proponer una situación real y cercana a estudiantes, la cual admite una estrategia de resolución por tanteo, donde para entender y dar respuesta a la tarea planteada se pueden llevar a cabo en repetidas ocasiones el experimento aleatorio involucrado.

Tabla 7. Ejemplo de ítems seleccionados para su conjunto final

<table>
<tr><th>Campo de problema 2: Reconocer a la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta (o función de cuantía) como una herramienta que permite ver la variación aleatoria</th><th>Situación-Problema</th></tr>
<tr><td>2.1 (Flores, García y Sánchez, 2014) Llamaremos lanzamiento a la acción de lanzar tres monedas al aire al mismo tiempo (de preferencia de la misma denominación). Ahora imagínate que se realizan 1000 lanzamientos y en cada uno de ellos se observa la variable “número de caras que ocurren”.
A) En la siguiente tabla anota en la fila de arriba, los posibles valores de la variable y en la fila de abajo, el número de veces (o frecuencia) que crees que ocurra cada valor:
<table>
<tr><td>Caras</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>Total</td></tr>
<tr><td>Frecuencia</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
B) Anota la probabilidad que asignas a la ocurrencia de cada valor de la variable:
<table>
<tr><td>Caras</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>Total</td></tr>
<tr><td>Probabilidad</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td>
<td>2.1 Determinar las probabilidades asociada a los valores de una variable aleatoria discreta desde un enfoque frecuencial (apartado A).

2.4 Construir una tabla para representar la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta (apartado B).</td></tr>
<tr><td>2.2 (Salazar, 2014) En un programa de televisión los concursantes hacen girar una flecha en una ruleta como en la figura y cada vez que la flecha se detiene en la zona de color rojo, se gana un premio y el concurso se trata de hacer girar la flecha 3 veces. En base a esta situación responde las siguientes preguntas:

A) ¿Cuál es la probabilidad de que un participante gane dos premios? Y ¿Cuál es la probabilidad de que un concursante no gane ningún premio?
B) Escribe en la tabla siguiente la función de probabilidad de la variable aleatoria que relaciona el espacio muestral con el número de premios que gana un concursante:
<table>
<tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
C) En un gráfico represente la función de probabilidad anterior.</td>
<td>2.2 Determinar las probabilidades asociada a los valores de una variable aleatoria discreta desde un enfoque clásico (apartado A).

2.3 Definir la función de probabilidad de una variable aleatoria, utilizando la terminología P (X = xi). (apartado B).

2.5 Construir un gráfico de barra para representar la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta (apartado C).</td></tr>
</table>

Para representar la situación-problema 2.2 los expertos eligieron el ítem 2.2A. En él no es inmediata la obtención de las probabilidades solicitadas, sino que es necesario razonar e interpretar el enunciado (no ganar ningún premio quiere decir ganar cero premios). También permite aplicar diferentes elementos asociado al tópico de probabilidad como la intersección de sucesos aleatorios independientes o el diagrama de árbol, entre otros.

Sobre la situación-problema 2.3, los participantes escogieron para caracterizarla el ítem 2.2B, donde se propone un tipo de lenguaje específico para representar la función de probabilidad (lenguaje tabular). Por lo general dicho lenguaje de representación es más cercano a estudiantes que el simbólico, además se facilita la respuesta dado que se entrega el dominio de la función requerida.

En relación con la situación-problema 2.4, los expertos prefirieron el ítem 2.1B. Esto se debió a que su enunciado proporciona facilidades, tanto en entregar una tabla donde se espera que sea representada la función de probabilidad, como en proveer completada la fila superior de esta tabla, correspondiente a los elementos del dominio de dicha función. Aún más, la tabla contiene una columna que hace referencia al total de las probabilidades, la cual sirve para corroborar si la función identificada, cumple con una de las condiciones para ser de probabilidad (suma de sus probabilidades igual a uno). De esta manera los aspectos mencionados favorecen a comprender lo solicitado y responder manera correcta.

Finalmente, los expertos, para representar la situación-problema 2.5, optaron por el ítem 2.2C. Esto se debe a su vinculación con el contexto de ítem 2.2B (situación-problema 2.3), el cual proporciona todos los elementos del dominio de la función de probabilidad, pero haciendo referencia explícita a los valores de X (variable aleatoria discreta). Esta información sin duda favorece a la resolución de la situación-problema 2.5, específicamente ayuda a asociar el eje horizontal del gráfico con el dominio de dicha función (valores de la variable aleatoria) y su eje vertical con el recorrido (probabilidades).

4.3 ESTIMACIÓN DE LA VALIDEZ DE CONTENIDO POR JUICIO DE EXPERTOS

A cada uno de los 34 ítems seleccionados a través de juicio de expertos, se le calculó el CVC de Hernández-Nieto (2002) y los resultados del procedimiento se exponen en la tabla 8. Así es posible afirmar que los ítems elegidos pueden ser conservados debido a que cada uno posee un coeficiente superior a 0,70, es decir, valora adecuadamente la situación-problema respectiva. También el conjunto final de ítems obtuvo en promedio un CVC igual a 0,8, este valor indica que aquellos ítems evalúan idóneamente la comprensión de variable aleatoria y sus aplicaciones en las distribuciones de probabilidad binomial y normal en el contexto escolar chileno. En consecuencia, se puede sugerir la utilización de la GSP-VADP como un instrumento de evaluación en una investigación en educación o para estimar el avance en la comprensión de los estudiantes en los temas señalados.

Tabla 8. Valor de CVC de cada ítem que integra la versión final de la GVC-VADP

Situación-Problema	Ítem	CVC
1. 1	1	0,87
1. 2	1	0,87
1.3	2B	0,83
1.4	3.2C	0,8
2.1	5.1A	0,77
2.2	6.1A	0,8
2.3	6.1B	0,83
2.4	5.1B	0,83
2.5	6.1C	0,87
3.1	10A	0,77
3.2	11B	0,77
3.3	11B	0,83
4.1	8A	0,8
4.2	8A	0,94
4.3	8B	0,9
5.1	13.1B	0,87
5.2	15C	0,8
5.3	15B	0,9

Situación-Problema	Ítem	CVC
5.4	14.2A	0,87
5.5	15 C	0,8
5.6	17	0,67
6.1	20	0,83
6.2	20A, B, C y D	0,83
6.3	21C y D	0,92
6.4	21B	0,9
7.1	23.1	0,83
7.2	22B y C	0,8
7.3	26	0,87
7.4	29	0,9
7.5	32	0,77
8.1	35.A	0,8
8.2	34.B	0,83
6.1	37	0,9
7.1	40	0,93
Media		0,86

5. CONCLUSIONES

La presente investigación permitió crear una guía integrada por diversas tareas, actividades o ejercicios para comprender la variable aleatoria y distribuciones de probabilidad binomial y normal, según el currículo escolar chileno, denominada GSP-VADP. Los resultados de este estudio muestran que la guía está constituida por 34 situaciones-problemas sobre dichos temas, identificadas a partir de un análisis riguroso a documentos curriculares vigente, principalmente de Chile (MINEDUC, 2015; MINEDUC, 2016; MINEDUC, 2019a; MINEDUC, 2019b; MINEDUC, 2019c), además de Estados Unidos (NGACBP y CCSSO, 2010; Franklin *et al.*, 2005; NCTM, 2000). También esta herramienta presenta importantes avances en torno a la enseñanza de los tópicos probabilísticos señalados:

- Amplía la diversidad de situaciones-problemas sobre variable aleatoria identificadas por Ortiz (2002), siendo estas representativas de la educación escolar actual.
- Propone situaciones-problemas en torno a la distribución binomial, fundamentales para la educación escolar e inicio de la universitaria, que no han sido explicitadas como tal objeto matemático en estudios previos.
- Amplía las diferentes situaciones-problemas relativas a la distribución normal reconocidas por Valverde (2017), coherentes con la educación probabilística fomentada documentos curriculares vigentes.

Por tanto, la Guía de Situaciones-Problemas sobre Variable Aleatoria y sus Aplicaciones en Distribuciones de Probabilidad según el Currículo Escolar, posee información valiosa que puede servir a los profesores de matemática que ejercen su labor en las escuelas, para orientar su trabajo y diseñar propuestas de enseñanzas en torno a los temas en cuestión.

Por otra parte, los resultados del presente estudio indican que es viable utilizar la GSPVADP para identificar ítems que representen las situaciones-problemas que la constituyen, por medio de expertos. Debido a que el conjunto final de ítems que ha sido seleccionados por los seis participantes obtuvo en promedio que es bueno, con un coeficiente de validez y concordancia superior a 0,8. También este conjunto de ítems complementa las actividades o tareas propuestas para la enseñanza a nivel escolar de la variable aleatoria (Bizet y Ramos, 2022; Doukhan y Gueudet, 2019), distribución binomial (Alvarado y Retamal, 2014) y distribución normal (Salinas *et al.*, 2018), ya que de manera articulada integra situaciones-problemas sobre variable aleatoria y su aplicación en distribuciones de probabilidad.

Finalmente, esta investigación se proyecta en llevar a cabo un análisis a priori de las situaciones-problemas que componen el conjunto final de ítems. De esta manera, establecer de forma explícita el lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos puestos en juego en su resolución, los cuales caracterizan el significado institucional de la variable aleatoria y aplicaciones en distribuciones de probabilidad. Posteriormente, se espera aplicar aquellos ítems a estudiantes que cursan último grado de educación escolar (17 a 19 años) o comienzan su formación universitaria, con el propósito de centrarse en identificar el significado personal de los tópicos en cuestión.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo realizado en el marco del proyecto B-SEJ-063-UGR18 y Grupo SEJ622 (Junta de Andalucía). La investigación ha sido financiada por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) del Gobierno de Chile a través de la beca de doctorado en el extranjero (folio-72200367).

REFERENCIAS

Alvarado, H. y Batanero, C. (2007). Dificultades de Comprensión de la Aproximación Normal a la Distribución Binomial. *Números, revista de didáctica de las matemáticas, 67*, 1-7.

Alvarado, H. y Retamal, M. (2014). Representaciones de la distribución de probabilidad binomial. En L. Andrade (Ed.), *Memorias del I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp. 98-109). Asociación Colombiana de Educación Estocástica.

Amrani, H. y Zaki, M. (2015). Student's conceptual difficulties with respect to the notion of random variable. *International Journal of Education, Learning and Development, 3*(9), 82-98.

Barraza, M. (2007). La consulta a expertos como estrategia para la recolección de evidencias de validez basado en el contenido. *Investigación Educativa Duranguense, 2*(7), 5-14.

Batanero, C. (2004) Ideas estocásticas fundamentales ¿qué contenido se debe enseñar en la clase de probabilidades? En J. Fernández, M. Sousa y S. Ribeiro (Eds.), *Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 9-30). Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Bizet, V. y Ramos, E. (2022). Valoración de una situación didáctica para la enseñanza de variable aleatoria y distribución de probabilidad en la educación secundaria chilena. *Innovaciones Educativas, 24*(36), 21-36. http://dx.doi.org/10.22458/ie.v24i36.3897.

Chacón, A., García, G., Rupín, P., Setz, J. y Villena, M. (2018). *Texto del estudiante de matemática 2° medio*. Ediciones SM.

Chevallard, Y. (1980). The didactics of mathematics: its problematic and related research. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 1*, 146-157.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*: Aique.

Colomé, S. (28 de diciembre de 2015). *¿Cuál es la probabilidad real del empate de la CUP?*. La Vanguardia. https://www.lavanguardia.com/politica/20151228/301071423295/probabilidad-empate-cup.html

Dinges, H. (2005). Variables, in particular random variables. En M. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and sign grounding mathematics education* (pp. 305–311). Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24270-8_26.

Doukhan, C. y Gueudet, G. (2019). Students' difficulties at the secondary-tertiary transition: the case of random variables. En U. Jankvist, M. Van Den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2464-2471). Freudenthal Group y Freudenthal Institute of the Utrecht University y ERME.

Fernández, F., Andrade, L. y Sarmiento, B. (2013). Rehaciendo el camino hacia la comprensión de la variable aleatoria. En P. Perry, C. Samper, Ó. Molina, L. Camargo, A. Echeverry, F. Fernández y B. Sarmiento (Eds.), *Aportes investigativos para el diseño curricular en geometría y estadística* (pp. 93–169). Universidad Pedagógica Nacional.

Flores, B., García, J. y Sánchez, E. (2014). Avances en la calidad de las respuestas a preguntas de probabilidad después de una actividad de aprendizaje con tecnología. En M. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 307-316). SEIEM.

Font, V., Godino, J. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*(1), 97-124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0.

Franklin, C., Kader, G., Newborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-k–12 curriculum framework*. American Statistical Association.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1– 25. https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2002.tb00336.x.

García-García, J., Fernández, N., Arredondo, E. e Imilpán, I. (2022). The Binomial Distribution: Historical Origin and Evolution of Its Problem Situations. *Mathematics, 10*, 1-28. https://doi.org/10.3390/math10152680.

Godino, J. (1999). Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico- antropológico para la investigación en didáctica de las matemáticas. En T. Ortega (Ed.), *Investigación en Educación Matemática III* (pp. 196-212). SEIEM.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2.3), 237-284.

Godino, J. y Batanero, C (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1.

González, Y. y Ojeda, A. (2017). Comprensión de la distribución normal en bachillerato. En L. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 30* (pp. 207-2017). CLAME.

Guerrero, H., Batanero, C. y J. M. Contreras. (2016). Conocimientos sobre esperanza matemática en alumnos de bachillerato. En F. España (Ed.), *Actas del XVI congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* (pp. 26-35). Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

Heitele, D. (1975). An epistemological view of fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, *6*(2), 187–205, 1975. https://doi.org/10.1007/BF00302543.

Hernández-Nieto, R. (2002). *Contributions to Statistical Analysis.* Universidad de los Andes.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación.* (6a ed.). Editorial McGraw Hill Education.

Hoyos, C. (2010). *Un modelo para la investigación documental. Guía teórico-práctica sobre construcción de Estados del Arte con importantes reflexiones sobre la investigación.* Señal Editora.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica.* Paidós.

Ministerio de Educación de Chile. (2009). *Currículum: Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media.* Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación de Chile. (2015). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio. Gobierno de Chile.* Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación de Chile. (2016). *Matemática, programa de estudio segundo medio.* Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación de Chile. (2019a). Chile. *Bases Curriculares 3º y 4º medio.* Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación de Chile. (2019b). *Programa de estudio matemática 3° medio para formación general.* Unidad de Currículum y Evaluación.

Ministerio de Educación de Chile. (2019c). *Programa de estudio matemática 4° medio para formación general.* Unidad de Currículum y Evaluación.

Morales, F., Vega, M., Aguilar, M. Gúmera, C. y Marchant, P. (2008a). *Texto manual matemática 3º y 4º medio – proyecto explor@ndo.* Ediciones SM.

Morales, F., Vega, M., Aguilar, M. Gúmera, C. y Marchant, P. (2008b). *Libro de actividades 3° y 4° medio– proyecto explor@ndo.* Ediciones SM.

Muñoz, G., Gutiérrez, V. y Muñoz, S. (2013). T*exto matemática cuarto año medio.* Santillana.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* NCTM.

National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standars for Mathematics.* NGACBP and CCSSO.

Norambuena, P., Osorio, G., Romante, M. y Díaz, J. (2019). *Cuaderno de actividades de matemática 3° y 4° medio.* Ediciones SM.

Ortiz, J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto.* Grupo de Investigación en Educación Estadística de la Universidad de Granada.

Osorio, G., Norambuena, P., Romante, M., Gaete, D., Díaz, J., Celedón, J., Morales, K., Ortiz, N., Ramírez, P., Barrera, R. y Hurtado, Y. (2019). *Texto del estudiante de matemática 3° y 4° medio.* Ediciones SM.

Ramírez, N. (28 de diciembre de 2018). *Siempre el 16% obtiene más de 600 puntos en la PSU: Demre explica cómo funciona la prueba. Emol.* https://www.emol.com/noticias/Nacional/2018/12/28/932495/Siempre-el-16-obtiene-mas-de-600-puntos-en-la-PSU-DEMRE-explica-como-funciona-la-prueba.html

Rivas, H. (2014). *Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria* [Tesis de doctorado no publicada]. Universidad de Granada.

Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria* [Tesis de maestría no publicada]. Instituto Politécnico Nacional.

Ruiz, B. (2013). *Análisis epistemológico de la variable aleatoria y comprensión de objetos matemáticos relacionados por estudiantes universitarios* [Tesis de doctorado no publicada]. Universidad de Granada.

Salazar, R. (2014). *La variable aleatoria con probabilidad desde la perspectiva de la teoría APOE* [Tesis de maestria no publicada]. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Salinas, J., Valdez, J. y Salinas-Hernández, U. (2018). Un acercamiento a la metodología lesson study para la enseñanza de la distribución normal. En L. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 525- 534). SEIEM.

Sánchez, E. y Carrasco, G. (2018). El razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato en actividades de distribución binomial. En L. Rodríguez-Múniz, L. Múñiz-Rodríguez, Á. Aguilar-González, P. Alonso, F. García y A. Bruno (Eds.*), Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 535- 543). SEIEM.
Sánchez, E. y Landín, P. (2014). Levels of probabilistic reasoning of high school students about binomial problems. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking presenting plural perspectives* (pp. 581-597). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_31.
Stahl, S. (2006). *The Evolution of the Normal Distribution. Mathematics Magazine, 79*(2), 96-113. https://doi.org/10.1080/0025570X.2006.11953386.
Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos* [Tesis de doctorado no publicada]. Universidad de Sevilla.
Valverde, M. (2017). *Un estudio de la presentación de la distribución normal en los textos de bachillerato* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad de Granada.
Vilca, M. (2015). *Tipificación de los errores que se presentan al identificar una variable aleatoria de distribución binomial en problemas contextualizados* [Tesis de maestría no publicada]. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Autor de correspondencia
Valeria Bizet Leyton
Dirección postal: Campus Universitario de Cartuja C.P. 18071, Granada (España).
valeriabizet@gmail.com

 https://doi.org/10.24844/EM3501.08

Acciones y expresiones de la comprensión del límite de una función en un punto, por estudiantes de cálculo diferencial

Actions and expressions of understanding the limit of a function at a point, by calculus students

Sergio Alexander Guarin Amorocho,[1]
Sandra Evely Parada Rico[2]

Resumen: Este artículo responde a la inquietud: ¿Qué comprensiones logran, sobre el concepto de límite de una función en un punto, estudiantes que participan de un curso de cálculo diferencial en el que se exploran las nociones de aproximación y tendencia? Se toma "comprensión" de la manera descrita por la teoría de Pirie y Kieren (1989), en términos de las complementariedades de la acción y expresión. Para responder a la pregunta, se diseñó una secuencia de actividades alrededor del concepto de límite de una función en un punto, usando las nociones de aproximación y tendencia por medio del software de matemática dinámica GeoGebra. Para el estudio se siguió a un estudiante como caso de estudio, quien desarrolló completa la secuencia de actividades diseñada. Ese estudiante exhibió evidencias de comprensión, desde la perspectiva teórica en la que se posiciona el estudio, realizando complementariedades de la acción y expresión asociadas al nivel que Pirie y Kieren (1989) llaman de "formalización", logrando identificar las propiedades comunes de las clases de imágenes que había construido a medida que iba desarrollando las actividades.

Fecha de recepción: 5 de noviembre de 2021. **Fecha de aceptación:** 22 de enero de 2023.
[1] Universidad Francisco de Paula Santander Ocaña, Colombia, saguarina@ufpso.edu.co, orcid.org/0000-0002-8020-6740.
[2] Universidad Industrial de Santander, Colombia, sanevepa@uis.edu.co, orcid.org/0000-0001-5468-0943.

Palabras claves: *Comprensión, acción, expresión, límite, función.*

Abstract: This article responds to the concern: What understandings do students who participate in a differential calculus course in which the notions of approximation and trend are explored, about the concept of limit of a function at a point? "Understanding" is taken in light of the theory of Pirie and Kieren (1989) who describe it in terms of the complementarities of action and expression. To answer the question, a sequence of activities was designed around the concept of limit of a function at a point using the notions of approximation and trend through the GeoGebra dynamic mathematics software. For the study, a student was followed as a case study, who developed and completed the designed sequence of activities. This student exhibited evidence of understanding, from the theoretical perspective in which the study is positioned, performing complementarities of action and expression that are associated with the "Formalization" level of Pirie and Kieren (1989), managing to identify the common properties of the kinds of images that he had built as he developed the activities.

Keywords: *Understanding, action, expression, limit, function.*

1. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas de la educación superior han generado un campo fértil de investigación, en el que se ha evidenciado el interés por parte de algunos investigadores como Sierpinska (1987), Tall (1991), Dreyfus (1991), Artigue (1995) en profundizar en el estudio de fenómenos asociados a la enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial e integral.

En particular, la enseñanza del cálculo diferencial y, en especial, el concepto de límite se ha constituido uno de los mayores desafíos de la educación matemática. Al respecto, Blázquez y Ortega (2000) afirman que "para los estudiantes éste es un concepto árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que olvidan totalmente con demasiada facilidad y, en suma, es uno de los más difíciles de enseñar y aprender" (p. 331).

Autores como Cornu (1991), Tall (1992), Hitt (2003), Vracken *et al.* (2006), entre otros, han reflexionado sobre el aprendizaje y enseñanza del cálculo y exponen que existen dificultades de aprendizaje en torno al concepto de límite que impiden de manera natural la comprensión del mismo. Entre estas dificultades, se pueden destacar: las generadas por el lenguaje y el uso de términos como “límite”, “tender” o “aproximarse”, los cuales tienen un significado ordinario que distorsiona el concepto matemático formal; el deseo de reducir el límite a una operación algebraica; la identificación de una cantidad que se hace cada vez más pequeña, un infinitésimo, y si es una cantidad que se hace arbitrariamente grande sugiere la idea del infinito; dificultades relacionadas con si el límite es un valor que se alcanza o no, y la confusión sobre el paso de lo finito a lo infinito.

Así mismo, Cornu (1991) menciona que una de las grandes dificultades al aprender el concepto de límite no emana solo de su complejidad o de su riqueza,

> ... sino en entender que todos los aspectos cognitivos del concepto de límite resultarán muy difíciles de aprender a partir de su definición matemática, una de las múltiples facetas del concepto de límite es la idea de aproximación. Muchas veces la idea de aproximación es el primer encuentro que los estudiantes tienen del concepto de límite a través de la noción dinámica de límite. (p. 153)

Por su parte, Cornu (1991), Hitt (2003) y Kidron (2014) enfatizan que el aprendizaje del concepto de límite es fundamental para la construcción adecuada de los conceptos del cálculo, a su vez que requiere de un conocimiento sobre los procesos infinitos. Además, Hitt (2003) menciona que si la enseñanza del cálculo se restringe a sus aspectos algebraicos sin poner atención al uso de representaciones diferentes a las algebraicas, difícilmente los alumnos llegarán a una comprensión profunda del cálculo. Del mismo modo resalta el desarrollo de las habilidades que están ligadas a la visualización matemática ya que podrán impulsar a los alumnos a un nivel más profundo de los conceptos fundamentales del cálculo.

En ese sentido, para lograr la comprensión de conceptos matemáticos Blázquez (1999) plantea la necesidad de recurrir a los diferentes tipos de representación (en el sentido de Duval, 2006), porque según este autor todo concepto está asociado a ciertas imágenes visuales, ciertos vínculos con otros conceptos y con el lenguaje habitual, diferentes propiedades en diferentes contextos, que pueden parecer intrínsecas al propio concepto y se pueden expresar utilizando distintos sistemas de representación. Además, todo forma parte de una imagen conceptual, que no siempre es coherente con la definición del concepto. Es por lo que, para Tall y Vinner (1981), comprender un concepto no se centra en entender su definición, sino crear una imagen conceptual rica y coherente.

Las diferentes dificultades han generado que, desde la didáctica de la matemática, surjan investigaciones que busquen indagar sobre los problemas en el aprendizaje en torno al concepto de límite de una función. Entre las investigaciones, resaltan las que usan la noción de aproximación y tendencia para la coordinación de los procesos vinculados a la comprensión del límite de una función (Blázquez y Ortega, 2002; Blázquez *et al.*, 2006; Valls *et al.*, 2011). Por su parte, Kidron (2010) y Fernández (2010) en sus investigaciones han utilizado los diferentes tipos de representación para analizar el desarrollo de la comprensión del límite de una función. También encontramos estudios que analizan cuáles son esas concepciones, intuiciones y definiciones utilizadas en el aula de clase (Przenioslo, 2004; Gücler, 2013; González *et al.*, 2021). Y otras que muestran cómo el uso de herramientas tecnológicas potencializa la visualización matemática y da un panorama dinámico de lo que se esconde detrás de la definición formal del concepto de límite de una función (Rangel *et al.*, 2014; Betancur *et al.*, 2015).

En particular, en esta investigación se aprovechan algunas de las ideas mencionadas, con el fin de diseñar, implementar y evaluar una secuencia de actividades (organizada para su implementación en seis talleres) que permita caracterizar los niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto, en estudiantes que participan de un curso de cálculo diferencial en el que se exploran las nociones de aproximación y tendencia. En este artículo se exhibe una síntesis de los resultados generales de la investigación, mediante un estudio de caso de un estudiante al que hemos llamado Kevin.

2. ASPECTOS TEÓRICOS Y CONCEPTUALES

El sustento teórico de la investigación se centra en tres aspectos fundamentales: en primera instancia, usamos la teoría de Pirie y Kieren (1989) porque nos permite ofrecer descriptores de la comprensión de un objeto matemático a partir de acciones y expresiones. Esta teoría ha sido usada por investigaciones en didáctica del cálculo como las reportadas por Villa-Ochoa (2011), Londoño (2011), entre otros. Por otra parte, nos acercamos a las concepciones de la enseñanza y del aprendizaje del límite desde autores como Blázquez y Ortega (2002), García, Serrano y Díaz (2002), Pons (2014) y Mira (2016), que nos mostraron orientaciones didácticas para la estructura de la secuencia de actividades. Y, por último, para diseñar los talleres nos acogimos a la propuesta metodológica de Fiallo y Parada (2018), pues engrana la interacción con los objetos matemáticos de estudio (mediante GeoGebra), la resolución de problemas y debate en el aula.

2.1 Teoría para la comprensión matemática

La teoría propuesta por Pirie y Kieren (1989) describe la evolución de la comprensión matemática como un todo dinámico, estratificado, recursivo, pero no lineal, que permite resignificar el conocimiento durante el proceso de aprendizaje. Esta teoría es una herramienta que actúa como un lente (traducción del autor), a través del cual puede observarse el proceso de evolución de la compresión matemática de un individuo o de un grupo de individuos en ocho niveles que conforman su aspecto descriptivo; a saber*: 1) Conocimiento primitivo; 2) Creación de la imagen; 3) Comprensión de la imagen; 4) Observación de la propiedad; 5) Formalización; 6) Observación; 7) Estructuración; 8) Invención*. Además, la teoría aporta tres características que permiten dar cuenta de la comprensión: i) Resignificar conocimientos (traducción propia del autor al término "*folding back*" que se menciona en la teoría), ii) Límites de alta de necesidad, y iii) Complementariedades de la acción y expresión.

En nuestra investigación nos apegamos a la característica de las complementariedades de la acción y expresión, la cual Pirie y Kieren (1994) describen así:

> ... más allá del primer nivel "conocimiento primitivo", cada nivel se compone de una complementariedad de acción y expresión y que cada uno de estos aspectos de la evolución de la comprensión es necesario, antes de moverse desde cualquier nivel. Además, el crecimiento ocurre actuando primero y luego expresando, pero con más frecuencia a través de y desde el movimiento entre estos aspectos complementarios. En cualquier nivel, la acción (el desempeño) abarca toda la comprensión previa, suministrando continuidad con los niveles internos, y la expresión brinda comportamientos distintos a ese particular nivel. (p. 175)

Lo anterior, aclara que las acciones y las expresiones son registradas por los estudiantes cuando están comprendiendo conceptos matemáticos en situaciones de aprendizaje. Ellas, además, destacan la importancia de expresar con respuestas, procedimientos no esperados, una actitud innovadora o de descubrimiento de relaciones matemáticas. Así, las acciones y expresiones permiten describir en cada uno de los niveles la comprensión del concepto de límite de una función en un punto. Además, Pirie y Kieren (1994) mencionan ciertos términos que sirven para etiquetar las complementariedades de la acción y la expresión para cada nivel, tal como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Complementariedades de la acción y expresión del modelo de Pirie y Kieren (1994)

	COMPLEMENTARIEDADES	
NIVEL	**ACCIÓN**	**EXPRESIÓN**
Conocimiento primitivo		
Creación de la imagen	Realización de la imagen	Análisis de la imagen
Comprensión de la imagen	Visualización de la imagen	Expresión de la imagen
Observación de la propiedad	Predicción de la propiedad	Registro de la propiedad
Formalización	Aplicación del método	Justificación del método
Observación	Identificar la característica	Descripción de la característica
Estructuración	Conjeturar el Teorema	Demostración del Teorema
Invención		

2.2 Nociones que rodean el concepto de límite

El concepto de límite ha sido particularmente difícil de enseñar y aprender, pues como lo menciona Cornu (1991) es "propio del Pensamiento Matemático Avanzado con una posición central en el análisis matemático, fundamental en la teoría de aproximación, de continuidad y del cálculo diferencial e integral" (p. 153) (traducción del autor). En ese mismo sentido, investigaciones realizadas por Blázquez y Ortega (2002), García *et al.* (2002), Pons (2014) y Mira (2016) han reportado que para lograr su comprensión se deben tener en cuenta aspectos como: las nociones de aproximación y tendencia, la concepción dinámica del límite de una función en un punto, la concepción óptima del límite de una función en un punto y la concepción métrica del límite de una función en un punto; elementos que fueron utilizados durante el desarrollo de la investigación.

Por ejemplo, Blázquez y Ortega (2002) usan las nociones de aproximación y tendencia con el fin de plantear una definición del concepto de límite funcional, la cual los estudiantes recuerden fácilmente, esto de manera similar a como lo hizo D'Alembert, nociones que precisan así:

> Aproximación: Una variable, que toma sus valores en un conjunto numérico, puede aproximarse a un cierto número si los errores absolutos que se cometen, considerando los valores de la variable como aproximaciones del número, son cada vez menores. Por ejemplo: Los valores $3{,}1209; 3{,}12009; 3{,}120009; \ldots$ se aproximan a 3 porque los errores son $0{,}1209; 0{,}12009; 0{,}120009; \ldots$ pero también se aproximan a $3{,}1$ (los errores son $0{,}0209; 0{,}02009; 0{,}020009; \ldots$), a $3{,}12$ ($0{,}0009; 0{,}00009; 0{,}000009; \ldots$), etcétera.

> Tendencia: La variable tiende a un número cuando los valores son aproximaciones del número y además se aproximan más que cualquier otro valor, es decir, cualquier aproximación se puede mejorar con valores de la variable. Por ejemplo: Los valores $3{,}1; 3{,}01; 3{,}001; 3{,}0001; \ldots$ son aproximaciones de 3, pero ademásla proximidad que se logra con este tipo de valores es mayor que con cualquier número distinto de 3, pues si tomamos, por ejemplo, $2{,}99999999$ como aproximación de 3 (el error es 0,000000001) y, por ejemplo, el valor $3{,}000000001$ mejora la aproximación (el error es 10 veces menor). (p. 80)

De igual forma, García *et al.* (2002) realizan un estudio relacionado con la aproximación como noción básica del cálculo, donde definen aproximación como:

> ... una expresión relacional, que establece una relación entre un valor exacto y el valor aproximado, la posibilidad de aceptar que una representación es la representación aproximada de un valor exacto exige usar la regla del error absoluto. (p. 17)

En ese sentido, la tendencia, tal como lo mencionan García *et al.* (2002) "exige una visualización de tipo numérico de los procesos infinitos de aproximación como un todo, lo que permite aceptar cierta regularidad en las aproximaciones obtenidas en el proceso para intuir un resultado final" (p. 17). Ellos, además, mencionan que la aceptación de estas regularidades implica considerar que los errores absolutos de la aproximación se hacen tan pequeños como se desee.

Por su parte, Blázquez y Ortega (2002) exponen que generalmente el primer acercamiento que tienen los estudiantes de bachillerato y de recién ingreso a la universidad al concepto de límite de una función es a través de la noción de aproximación y mediante la concepción dinámica del límite planteada de la siguiente manera:

> Sea "f" una función y "a" un número real, el número "L" es el límite de la función "f" en el punto "a", y se escribe $\lim_{x \to a} f(x)$, si cuando "x" tiende al número "a", siendo distinto de "a", sus imágenes "$f(x)$" tienden a "L". (p. 80)

Esta concepción se usa durante la investigación con el fin que los estudiantes construyan sucesiones de ciertos valores en el dominio y en el rango de la función, para identificar si existe o no tendencia. La construcción de estas sucesiones permite reconocer la aproximación en el dominio y la tendencia en el rango de la función, al igual que el uso del teorema de los límites laterales para decidir sobre la existencia del límite.

Por tanto, las concepciones métrica y óptima planteadas por Cottrill *et al.* (1996, citado en Mira, 2016) deben entenderse como un paso anterior al de la definición formal de límite. Así, la concepción óptima del límite, definida como sigue, se usa con el fin que los estudiantes logren calcular distancias entre valores próximos a un punto (diferencias en valor absoluto) y además para que construyan sucesiones con estas diferencias en el dominio y a través de la función en el rango, concepción desarrollada en el Taller 4 de la investigación.

> El valor L es el límite de $f(x)$ en "a" si, para todo valor de K muy próximo a L, existe otro valor h muy próximo a "a", tal que los "x" que mejoran ese valor h, es decir que están más próximos a "a", hacen que sus imágenes $f(x)$ también mejoren el valor K cercano a L, y estén más cerca de L. (p. 47)

De igual forma, Cottrill *et al.* (1996) plantean la concepción métrica del límite (en la cita siguiente), la cual se usa con el propósito que los estudiantes logren realizar la coordinación de las distancias que tienden a cero, y a su vez se pretende que los estudiantes logren identificar de manera intuitiva las cotas de épsilon y delta sin emplear un lenguaje formal, como se desarrolló en el Taller 5 de la investigación.

> Sea "f" una función y "a" un número real, el número "L" es el límite de la función "f" en el punto "a", y se escribe $\lim_{x \to a} f(x)$, si cuando "$x - a$" en valor absoluto se aproxima a 0, "$f(x) - L$" en valor absoluto se aproxima a 0. En símbolos "$0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - L|$". (p. 48)

Estos elementos conceptuales permitieron realizar el planteamiento de la secuencia de actividades, tal como se explicó, con el fin de favorecer la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, en estudiantes que participan de un curso de cálculo diferencial de la Universidad Industrial de Santander (UIS).

2.3 Estructura metodológica para el diseño de actividades

Para el diseño de los talleres, que hacen parte de la secuencia de actividades, se tuvieron en cuenta los aspectos metodológicos propuestos por Fiallo y Parada (2018), quienes plantean un curso de precálculo, en el cual se integran actividades organizadas secuencialmente, alrededor de uno o dos problemas, trabajo individual, trabajo en equipo y debate en el aula. Los autores proponen que la actividad de la clase se desarrolle en los siguientes momentos: exploración libre, socialización de los resultados obtenidos, exploración dirigida (mediada por un software de matemática dinámica), explicación y por último una tarea retadora. Esos momentos fueron retomados en el planteamiento de los talleres que se diseñaron en la investigación, donde la secuencia de actividades articula el uso de GeoGebra y el trabajo a lápiz y papel. Además, se da gran importancia al proceso de comunicación en el que los estudiantes debaten permanentemente sus ideas con el profesor y sus pares académicos.

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

La investigación que se realizó fue de corte fenomenológico, entendida en términos de Aguirre y Jaramillo (2012), quienes exponen que este tipo de estudios aportan significativamente al conocimiento de realidades escolares y que justamente estos privilegian las vivencias de quienes participan en el proceso educativo. El estudio se organizó en las siguientes ocho fases:

Fase I: Estudio preliminar. El punto de partida fue un diseño didáctico para el estudio del concepto de límite en estudiantes de bachillerato o de primer semestre universitario realizado por Betancur *et al.* (2015). El planteamiento y el análisis de los resultados del diseño didáctico antes mencionado, nos permitió seguir explorando sobre dicho fenómeno a través de la siguiente pregunta de investigación ¿Qué comprensiones logran, sobre el concepto de límite de una función en un punto, estudiantes que participan en un curso de cálculo diferencial donde se exploran las nociones de aproximación y tendencia?

Fase II: Breve revisión teórica y epistemológica del límite de una función en un punto. La revisión de varios libros de historia de las matemáticas, y algunas tesis de Maestría y Doctorado (Fernández, 2010; Pons, 2014; Mira, 2016), han permitido vislumbrar aspectos históricos que dan cuenta de la evolución del concepto de límite, y lo complejo que ha sido su conceptualización, al igual que los obstáculos epistemológicos que ha tenido el concepto a lo largo de la historia (Sierpinska, 1987; Cornu, 1991), y las dificultades que se presentan en la enseñanza del límite de una función (Tall, 1992; Hitt y Páez, 2003). Esta revisión, nos permitió considerar algunos aspectos que han contribuido en el desarrollo del concepto y a su vez tomarlos como referencia para el diseño de la secuencia de actividades; además, fue necesario revisar el texto guía *Cálculo: Transcendentes Tempranas* de Zill y Wright (2011), el cual se utiliza en el curso de cálculo diferencial de la UIS, con el fin de identificar: el orden de los contenidos, el planteamiento metodológico de las actividades y los problemas que se utilizan para el estudio del límite de una función en un punto.

Fase III: Diseño de la secuencia de actividades. En esta fase, se tuvieron en cuenta algunos acercamientos didácticos a la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, planteados por Fernández (2010), Pons (2014) y Mira (2016). La estructura conceptual propuesta por estos autores coincide en varios aspectos, a pesar de que parten de diferentes marcos teóricos. En dichas estructuras se hace uso de las nociones de aproximación y tendencia, las concepciones dinámica, óptima y métrica del límite, así como el uso de las diferentes formas de representar una función (tabular, gráfica, algebraica), los cuales favorecen la comprensión del objeto matemático de estudio. Esos acercamientos nos permitieron hacer el planteamiento de los siguientes talleres para la secuencia de actividades: T1. Conocimientos previos; T2. Nociones de aproximación y tendencia; T3. Concepción dinámica del límite de una función en un punto; T4. Concepción óptima del límite de una función en un punto; T5. Concepción métrica del límite de una función en un punto; y T6. Conocimientos finales.

Fase IV: Pilotaje de la secuencia de actividades. Se realizó con un grupo de tres estudiantes que estaban cursando por primera vez la asignatura cálculo diferencial. La aplicación de la prueba piloto se llevó a cabo durante el primer semestre académico del año 2018, en un espacio extra-clase durante diez horas, con una duración de dos horas para cada uno de los talleres. Esta aplicación nos permitió reformular algunas preguntas de los talleres y los tiempos del uso de la tecnología para el desarrollo de la secuencia.

Fase V: Descriptores a priori de los niveles de comprensión. En esta fase se tuvo en cuenta el análisis a priori realizado a los talleres de la secuencia de actividades y la revisión teórica que se realiza del concepto de límite de una función. Esos elementos permitieron realizar la caracterización de los primeros cinco niveles de comprensión matemática en términos de las complementariedades de la acción y expresión. A continuación, se mencionan algunos de los descriptores asociados a cada nivel (tabla 2).

Tabla 2. Descriptores de los niveles de comprensión para del concepto de límite de una función en un punto (Guarin, 2018)

	N 1	N 2	N 3	N 4	N 5
Acción	Reconoce gráfica y analíticamente el dominio de la función $\boxed{f(x)}$. Determina procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.	Reconoce imágenes del concepto de límite de forma mental, verbal, escrita (gráfica, tabla de valores). Realiza aproximaciones numéricas por izquierda y derecha a un valor $\boxed{c}$ en el dominio de la función.	Explica que si el límite de una función $\boxed{f(x)}$ existe, entonces es único. Interpreta los comportamientos para tendencia finita e infinita de una función.	Interpreta el comportamiento de los límites laterales de una función $\boxed{f(x)}$ de modo que pueden hacerse arbitrariamente próximos a un número $\boxed{L}$ al tomar $\boxed{x}$ suficientemente cerca por izquierda y por derecha, pero sin que sea igual.	Reconoce “usando las diferentes representaciones” que el límite de una función $\boxed{f(x)}$ a un valor $\boxed{c}$, existe si cuando la variable $\boxed{x}$ se aproxima a $\boxed{c}$, entonces $\boxed{f(x)}$ tiende a $\boxed{L}$.
Expresión	Interpreta el dominio como el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente. Establece relación entre una fracción y su representación decimal.	Determina la existencia del límite de manera gráfica o numérica. Interpreta la tendencia como una aproximación que “es posible mejorarla”.	Justifica que si una función $\boxed{f(x)}$ tiende a un valor $\boxed{L}$, cuando la variable independiente $\boxed{x}$ crece o decrece sin límite, entonces se dice que $\boxed{f(x)}$ posee un límite en el infinito. Justifica cuándo el límite de una función no existe de acuerdo a su representación gráfica.	Justifica que el límite de una función $\boxed{f(x)}$ no existe, cuando el límite por la izquierda o límite por derecha de $\boxed{c}$ no existen; también puede ser que existan pero sean diferentes.	Interpreta usando las diferentes representaciones la existencia de un límite de una función $\boxed{f(x)}$ cuando $\boxed{x}$ tiende a $\boxed{c}$ no depende de si $\boxed{f(x)}$ está definida en $\boxed{c}$, sino solo de si está definida para $\boxed{x}$ cerca del número $\boxed{c}$.

Fase VI: Trabajo de campo. La secuencia de actividades se implementó en el transcurso de un semestre académico regular, en las sesiones ordinarias de la clase durante siete sesiones de dos horas, distribuidas en tres semanas (tiempo estipulado para su estudio, según la programación dada por la institución para la asignatura de cálculo diferencial). Las sesiones de clase, en las que se desarrollaron los talleres fueron dirigidas por el primer autor de este artículo, que a su vez era el profesor titular del curso. Las interacciones entre el profesor y los estudiantes fueron guiadas por la metodología de Fiallo y Parada (2018), descrita en el apartado 2.2. Mediante los talleres planteados en la investigación se desarrolló el contenido relacionado con límites de una función y, a su vez, los datos se recogieron en un curso real con una programación y evaluación ya definida.

La recolección de datos se hizo a través de las hojas de trabajo de los estudiantes, las videograbaciones de clases con su respectiva transcripción y la narrativa de una entrevista semiestructurada, entre el investigador y los estudiantes (sujetos de estudio), en la que se cuestionó sobre algunas respuestas o procedimientos realizados en los talleres.

Fase VII: Selección del caso de estudio. Se recopilaron datos de 38 estudiantes que realizaron el curso de cálculo diferencial, 18 de ellos asistieron a todas las sesiones de trabajo y 10 de estos últimos desarrollaron todo el proceso. De los 10 estudiantes se seleccionó a Kevin, como caso de estudio, por ser el único que tenía completa la información y el único que logró transitar por los niveles de comprensión matemática previstos.

Fase VIII: Análisis de los datos y reporte de resultados. Los datos recolectados se analizaron desde la teoría de Pirie y Kieren (1989) con el análisis a priori de las actividades y la caracterización a priori para los cinco primeros niveles (Guarin, 2018), con el fin de describir la comprensión del límite de una función en un punto, en términos de las complementariedades de la acción y la expresión realizadas por el caso de estudio durante la implementación de la secuencia de actividades.

4. ACCIONES Y EXPRESIONES EN LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO EN UN CURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL

En este apartado se describen algunas de las acciones y expresiones realizadas por Kevin durante la implementación de la secuencia de actividades, las cuales permiten situarlo en el nivel de *formalización* para la comprensión del límite de una función en un punto. En las evidencias, algunas de las figuras se señalan con las siguientes convenciones: recuadros amarillos, para las complementariedades de la acción y recuadros rojos para las expresiones de Kevin capturadas de las hojas de trabajo. Además, se exhibirán transcripciones de episodios de la entrevista y de los videos de clase en los que se llevó a cabo la aplicación de la secuencia de actividades.

Al examinar las acciones y expresiones en el Taller 1: Conocimientos previos, se pretendía identificar la relación que el estudiante establece entre aproximación y tendencia en un contexto geométrico y un contexto funcional, al igual que el uso de los diferentes registros de representación. En este caso, la respuesta de Kevin al ítem a) del numeral 4 en el Taller 1 (figura 1), se observa que la primera acción realizada por Kevin fue evaluar los extremos del intervalo $\boxed{[-20,20]}$. En esta parte el estudiante no se detuvo a analizar los valores que toma la función de acuerdo con la variación de la variable independiente, de tal manera que lo lleva a expresar que la función toma valores entre $\boxed{[-0.05,0.05]}$. Esto nos permitió inferir que en este momento el estudiante no reconoció la variación de la función en el intervalo mencionado.

El siguiente episodio hace parte de la entrevista del investigador con Kevin al momento de indagar sobre sus respuestas a la actividad (en la trascripción se menciona a Kevin como K y al investigador como I):

I: ¿Qué valores puede tomar la variable independiente?

K: Todos, excepto el cero, porque al colocar cero abajo me da una asíntota [con la mano hace un movimiento indicando que es vertical].

I: Bueno, ahora con los valores que ya calculó, puede decir cuáles serían los valores que toma la función en el intervalo de $\boxed{[-20,20]}$.

K: Esos valores están en el rango, pues siendo así es de $\boxed{-0{,}05}$ a $\boxed{0{,}05}$.

I: ¿Está seguro de eso?

K: Sí.

I: Qué sucede si elegimos a $\boxed{f(x) = 0{,}04}$ ¿Cuál sería el valor de $\boxed{x}$?

K: Es decir $\boxed{f(x) = 0{,}04}$ y ahora sería buscar a $\boxed{x}$ [utiliza la calculadora], el valor de $\boxed{x}$ es 25 pero ese valor se sale del intervalo.

I: Entonces es falso lo que está diciendo.

K: Sí, porque está por fuera del intervalo.

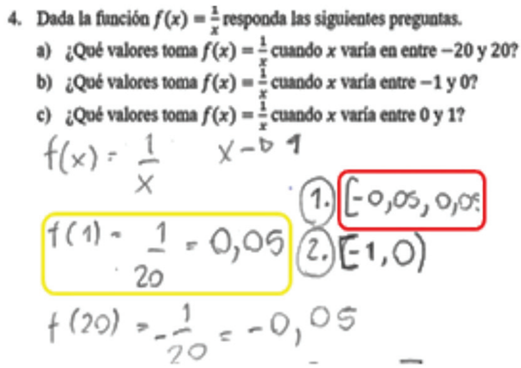


Figura 1. Respuesta de Kevin al ítem 4 del Taller 1.

De ese episodio, se pudo concluir que el estudiante no lograba determinar cuáles eran los valores que tomaba $f(x)$ en ese intervalo; por ello, se le solicitó realizar una exploración de la función numéricamente, para luego hacer una representación gráfica, de lo cual Kevin expresó lo siguiente:

K: Mmm, no recuerdo cómo es la gráfica, pero voy a hacer una tabla de valores. [Elabora la tabla que se muestra en la figura 2 y luego traza la gráfica (acciones del estudiante)].

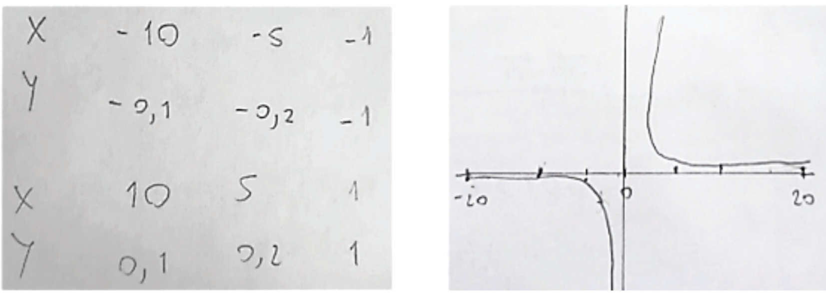


Figura 2. Tabla de valores y representación gráfica realizada por Kevin en el ítem 4 del Taller 1.

I: Bueno y ahora que ya tiene la gráfica ¿Qué sucede cuándo x toma valores próximos a cero?

K: En $x = 0$ hay una asíntota. [Muestra en la hoja que la función se va a infinito y menos infinito].

I: Entonces, ¿cuáles son los valores que toma la función?

K: Mmm, ya, sería de menos infinito a $-0{,}05$ y de $0{,}05$ a infinito. [Expresa lo que se muestra en la figura 3].

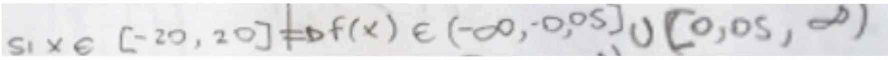


Figura 3. Expresión de los valores que toma la función del Ítem 4 del Taller 1 realizada por Kevin.

La exploración de la función de manera numérica y gráfica son acciones que le permitieron al estudiante analizar la variación y los valores que toma $f(x) = \frac{1}{x}$ cuando x varía entre -20 y 20, al igual cuando se toman valores próximos a $x = 0$, para así decidir y expresar cuáles son los valores que toma la función a medida que está variando la variable independiente.

Durante la exploración a la función $f(x) = \frac{1}{x}$, se pudo observar que Kevin realiza una resignificación de conocimientos sobre el concepto de función, en la cual reexamina sus conocimientos acerca del dominio y rango de una función, al igual que su representación gráfica, esto con el fin de lograr analizar la variación de la función en ciertos intervalos. De acuerdo con Thom y Pirie (2006) "como observadores, nunca podremos saber exactamente el conocimiento primitivo de otra persona. Sin embargo, podemos construir diversas interpretaciones de la evidencia que se tenga a nuestra disposición a través de unas acciones físicas, verbales o escritas" (p. 189).

En los razonamientos expuestos por Kevin para la actividad 4 (Taller 2: Nociones de aproximación y tendencia), se le solicitó realizar una tabla de valores con el fin de establecer aproximaciones a un valor $"x"$, relacionando las aproximaciones en el dominio de la función, con la tendencia de $f(x)$ a través del registro numérico (acción que realiza en una tabla de valores para $(x_i, f(x_i))$ que se muestra en la figura 4. Para lo anterior, Kevin fue refinando aproximaciones, acción que le permitió ir buscando la aproximación a 3 que indicara la existencia de tendencia a medida que las aproximaciones laterales coincidieran en un mismo punto.

$f(x) = x^2 - 1$

a)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x	1	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)	0	3	5,25	7,41	7,94	7,99

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x	3,111	3,11	3,1	3,5	4	5
f(x)	8,67	8,672	8,61	11,25	10,56	11,25

Figura 4. Respuesta de Kevin al ítem *a* de la actividad 4 del Taller 2.

Durante esta actividad el estudiante realiza las siguientes complementariedades de la acción; la primera fue escoger dos sucesiones numéricas que se aproximen a 3, una por derecha y otra por izquierda (figura 4), y la segunda identificar que la distancia entre los valores tomados y 3 se aproximan a cero (recuadro amarillo de la figura 5). Y la complementariedad de la expresión se da cuando el estudiante logra expresar que "*la función* $f(x)$ *toma valores más cercanos a* 8 *cuando me acerco por izquierda a* $x = 3$" (figura 5). El mismo razonamiento es presentado cuando Kevin analiza los valores próximos a derecha de 3.

tiende a 8, a medida que me aproximo a 3 por izquierda y la distancia entre los valores tomados los valores tomados se aproxima a cero, la funcion f(x) toma valores cada vez mas cercanos a 8 cuando me acerco por izquierda a x=3

Figura 5. Respuesta de Kevin al ítem *b* de la actividad 4 del Taller 2.

Esas aproximaciones realizadas por el estudiante le permitieron justificar que *"cuando x se aproxima a* 3, $f(x)$ *tiende a* 8 *por izquierda y por derecha"*, (utilizando el teorema de los límites laterales y dibujando dos flechas que indican tendencia, para señalar que estos son iguales, tal como se visualiza en la figura 6, elementos que indican otra complementariedad de la expresión), ese valor sería el límite de la función en ese punto.

Thom y Pirie (2006) mencionan que el primer momento en la comprensión de un concepto matemático surge cuando se realizan acciones (físicas o mentales) con el fin de crear una idea del nuevo tema o concepto. En el caso de Kevin se evidencia que logró *crear una imagen* para el límite de una función en un punto, porque sus acciones estuvieron encaminadas en la *realización de la imagen* que hace a través del uso de la representación tabular. Además, logró identificar la relación entre aproximación y tendencia para analizar el límite de una función como lo que sucede cerca del punto.

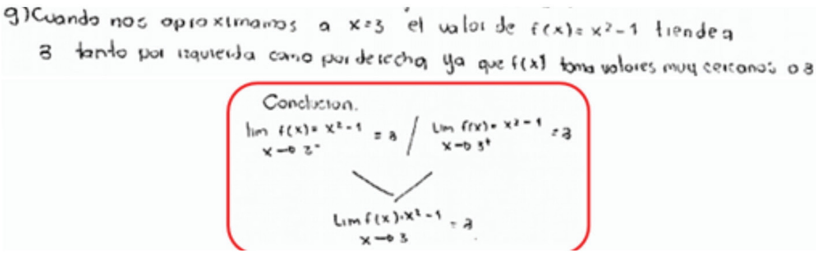


Figura 6. Respuesta de Kevin al ítem g de la actividad 4 del Taller 2.

Por otro lado, Kevin mostró expresiones enfocadas en el *análisis de la imagen* al realizar la distinción entre las nociones de aproximación y tendencia. Esas expresiones se dieron en el momento que tuvo que generar las dos sucesiones numéricas y aproximarse a un valor c en el dominio de la función (por la izquierda y la derecha de 3), con base en la disminución de la distancia (haciendo referencia a calcular el error absoluto); y también cuando identificó que las magnitudes cada vez se pueden mejorar, aproximándose más a un valor en el dominio de la función, a través del registro numérico para determinar la existencia o no del límite de la función en un punto.

En ese sentido, en el desarrollo del Taller 3: Concepción dinámica del límite de una función en un punto, la actividad 4 es una actividad retadora que se plantea con el fin de observar y analizar la forma en que el estudiante interpreta cada una de las condiciones dadas, además que las debe utilizar todas para trazar la gráfica de una función. En la solución del estudiante se observa que logró interpretar todas las condiciones dadas en el enunciado de la figura 7, puesto que le permitieron realizar una representación gráfica de la función que cumpliera con las condiciones.

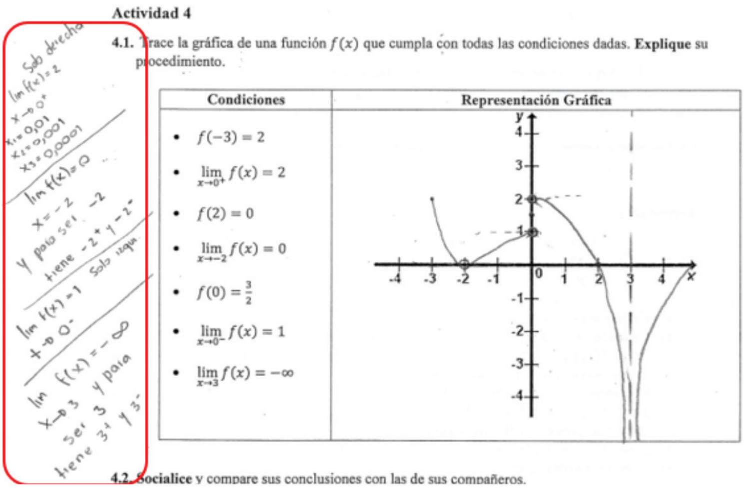


Figura 7. Respuesta de Kevin a la actividad 4 del Taller 3.

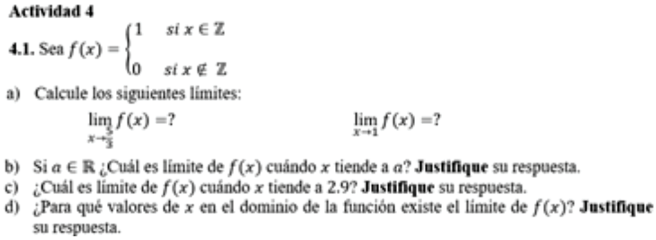
El estudiante en primera instancia identificó que la función a bosquejar pasaba por los puntos $(-3,2)$, $(2,0)$ y $\left(0,\frac{3}{2}\right)$. También logró interpretar que el límite de la función cuando x tiende a 0 no existe, porque cuando x se aproxima a 0 *"solo por derecha"*, es decir toma valores como $0{,}01$, $0{,}001$, $0{,}0001$, $f(x)$ tiende a 2 y cuando x toma valores próximos a 0 *"solo por izquierda"*, los valores de $f(x)$ tienden a 1, de modo que el límite de la función en ese punto no existe porque los límites laterales no coinciden. Además, Kevin identificó que cuando x tiende a -2, el límite de la función existe y este es único, haciendo referencia a que cuando x se aproxima a -2^+ y -2^- la función debe tender al mismo valor, aunque en las condiciones no se menciona si $f(-2)$ está definido el estudiante decide representar un hueco en $x=-2$, pero sigue reconociendo la existencia del límite de la función en ese punto y que el valor es cero. Por último, analizó que cuando se hacen aproximaciones a $x=3$, tanto por derecha como por izquierda los valores de $f(x)$ tienden a $-\infty$. El interpretar cada una de las condiciones le permitió a Kevin realizar una representación gráfica de la función (figura 7).

Como se logró evidenciar en las actividades descritas, el estudiante ha logrado adquirir una concepción dinámica del límite de una función en un punto, ya que establece coordinación entre las aproximaciones en el dominio, con las aproximaciones en el rango de la función, diferenciando cuándo las aproximaciones laterales coinciden o cuándo no coinciden (Valls *et al.*, 2011).

En este apartado se evidencia que Kevin ha transitado por los niveles de *comprensión de la imagen* y *observación de la propiedad*. El estudiante transitó en el nivel de *comprensión de la imagen*, porque logró desarrollar imágenes asociadas a la existencia del límite de una función en un punto, vislumbradas en la complementariedad de la acción a través de la visualización de la imagen; imágenes que para Villa-Ochoa (2011) están vinculadas "a una sola actividad y se reemplazan por una imagen mental. El desarrollo de esas imágenes mentales, o más precisamente imágenes orientadas por un proceso mental, libera las matemáticas del estudiante con la necesidad de realizar acciones físicas particulares" (Villa-Ochoa, p. 204), que logran expresarse mediante la complementariedad de la *expresión de la imagen*, que se perciben en las actividades a través de la coincidencia entre las aproximaciones laterales, mediante el uso de las diferentes maneras de representar una función.

Por otra parte, en el nivel de *observación de la propiedad*, Kevin ha logrado construir varias imágenes del concepto de límite, desde la representación gráfica, numérica y algebraica; permitiéndole examinar, establecer conexiones y distinciones entre las diferentes imágenes que ha logrado construir para el concepto de límite de una función. Para Thom y Kieren (2006) este nivel es una forma de "caminar atrás y reflexionar sobre la comprensión existente a fin de promover ese entendimiento" (p. 190). De acuerdo con Pirie y Kieren (1989), la diferencia entre el nivel de *comprensión de la imagen* y el nivel de la *observación de la propiedad* es la habilidad para resaltar una conexión entre imágenes y explicar el método para verificar la conexión.

En la actividad retadora del Taller 4: Concepción óptima del límite de una función en un punto (figura 8), Kevin logra reconocer que al refinar las aproximaciones a un valor $\boxed{c}$ en el dominio de la función (señala la representación gráfica de la hoja de trabajo y menciona "me aproximo tanto por izquierda como por derecha del valor de $\boxed{c}$"), y si estas aproximaciones coinciden, le van a permitir decidir si el límite de $\boxed{f(x)}$ en ese punto existe o no.



Actividad 4

4.1. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Z} \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

a) Calcule los siguientes límites:

$\lim_{x \to \frac{5}{3}} f(x) = ?$ $\qquad\qquad$ $\lim_{x \to 1} f(x) = ?$

b) Si $a \in \mathbb{R}$ ¿Cuál es límite de $f(x)$ cuándo x tiende a a? **Justifique** su respuesta.

c) ¿Cuál es límite de $f(x)$ cuándo x tiende a 2.9? **Justifique** su respuesta.

d) ¿Para qué valores de x en el dominio de la función existe el límite de $f(x)$? **Justifique** su respuesta.

Figura 8. Actividad 4 del Taller 4.

En esta actividad, el estudiante recurre a la representación gráfica, para establecer qué sucede con la función para valores próximos a $\frac{5}{3}$ y así decidir si existe o no el límite de $f(x)$, a lo que expresó:

I: ¿Cuál sería la representación gráfica de la función?

K: Pues sería algo así más o menos. [Muestra la hoja de trabajo de la figura 9].

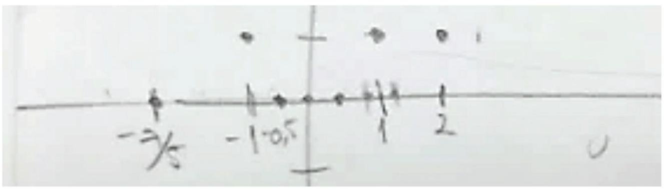


Figura 9. Gráfica de la función de la actividad 4 del Taller 4.

I: ¿Cuál sería el $\lim_{x \to \frac{5}{3}} f(x)$?

K: El límite sería cero.

I: ¿Por qué?

K: Mmm no, mentiras, el límite va a ser 1 ¿o va ser cero?, ¡ay, no!

I: ¿Dónde estaría ubicado $x = \frac{5}{3}$ ahí en su gráfica?

K: Mmm... ¡Ya! Cuando me aproximo tanto por izquierda como por derecha es cero.

I: Ahora, ¿cuál sería el $\lim_{x \to 1} f(x)$?

K: Tanto por izquierda como por derecha, tiende a 1.

I: ¿Seguro que es 1? ¿Por qué?

K: Pues ahí no sé, no estoy seguro.

I: ¿Qué sucede si elige un valor próximo a $\boxed{1}$ por derecha?

K: $\boxed{1{,}01}$ y va a tender a cero.

I: Y ahora, ¿qué sucede si elige un valor próximo a $\boxed{1}$ por izquierda?

K: También tiende a cero.

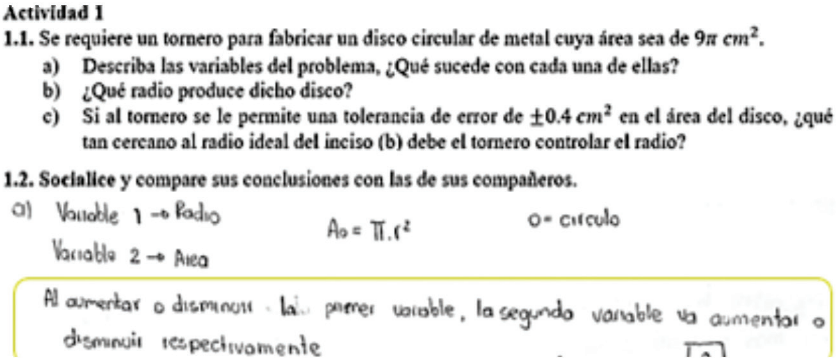
I: Entonces, ¿existe el límite?

K: Es cero, porque por derecha y por izquierda tiende a cero.

Durante el desarrollo de esta actividad, y en el episodio anterior, se pudo observar que Kevin, realiza una *resignificación de conocimientos* con el fin de reexaminar las imágenes que había construido en la comprensión del límite de una función. En ese sentido, Kevin logró reconocer que es posible analizar el límite de una función $\boxed{f(x)}$ en un punto $\boxed{c}$, haciendo un proceso de aproximación infinito.

En el nivel de *observación de la propiedad* se evidencia que Kevin posee las complementariedades de la *predicción de la propiedad* y el *registro de la propiedad.* Esto al interpretar de manera numérica y gráfica el comportamiento de los límites laterales de una función $\boxed{f(x)}$ de modo que pueden hacerse arbitrariamente próximos a un número $\boxed{L}$ al tomar $\boxed{x}$ suficientemente cerca por izquierda y por derecha, pero sin que sea igual. De igual manera, Meel (2003) menciona que "la predicción de la propiedad relaciona la imagen con una propiedad observada por el estudiante, mientras el registro de la propiedad se incorpora dentro de la estructura cognitiva del estudiante la propiedad observada como algo que existe y parece funcionar" (p. 18).

Las acciones de Kevin en la primera actividad del Taller 5: Concepción métrica del límite de una función en un punto, están centradas en lograr identificar las variables de la situación, además de reconocer la relación de interdependencia entre el área y el radio del disco circular (figura 10); esto le permitió calcular el valor del radio $\boxed{"r"}$ que generaba el disco circular con un área de $\boxed{9\pi\, cm^2}$.



Actividad 1

1.1. Se requiere un tornero para fabricar un disco circular de metal cuya área sea de $9\pi\ cm^2$.

a) Describa las variables del problema, ¿Qué sucede con cada una de ellas?

b) ¿Qué radio produce dicho disco?

c) Si al tornero se le permite una tolerancia de error de $\pm 0.4\ cm^2$ en el área del disco, ¿qué tan cercano al radio ideal del inciso (b) debe el tornero controlar el radio?

1.2. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.

Figura 10. Respuesta de Kevin al ítem $\boxed{a}$ y $\boxed{b}$ de la actividad 1 del Taller 5.

En el ítem $\boxed{c}$ de la actividad 1, el estudiante utiliza la representación algebraica del área del disco y el error que puede cometer el tornero sobre el área del disco que se desea fabricar. En este episodio se puede observar que una de las expresiones de Kevin fue calcular el error mínimo y máximo en el radio del disco circular, en términos de la distancia del radio ideal y el aproximado, usando el valor absoluto (figura 11).

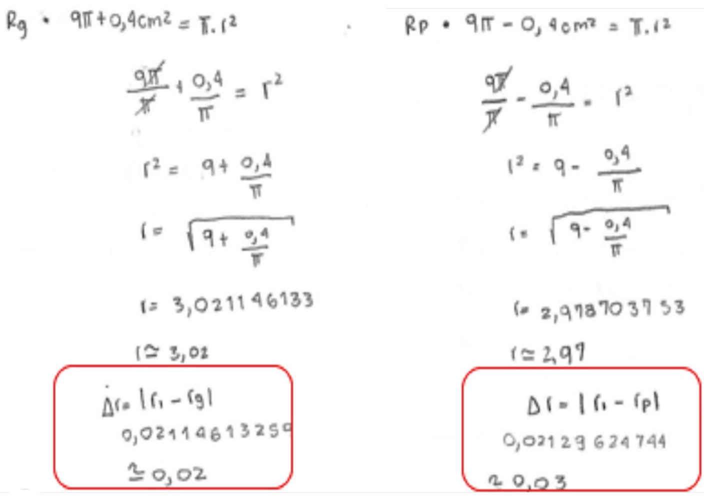


Figura 11. Respuesta de Kevin al ítem $\boxed{c}$ de la actividad 1 del Taller 5.

En ese mismo taller, en la exploración dirigida de la actividad 2, en el ítem b) se le solicita a Kevin realizar aproximaciones a un punto (radio ideal) y al límite del área del disco que se desea fabricar. Además, en el ítem c) se le pregunta: ¿Cómo son las distancias conforme se aproxima a $\boxed{3}$? con el fin de observar el comportamiento de disminución de las distancias de las aproximaciones en el dominio y en el rango de la función. Para ello debería usar un registro tabular y gráfico, con el fin de deducir el límite de la función por concepción métrica (figura 12).

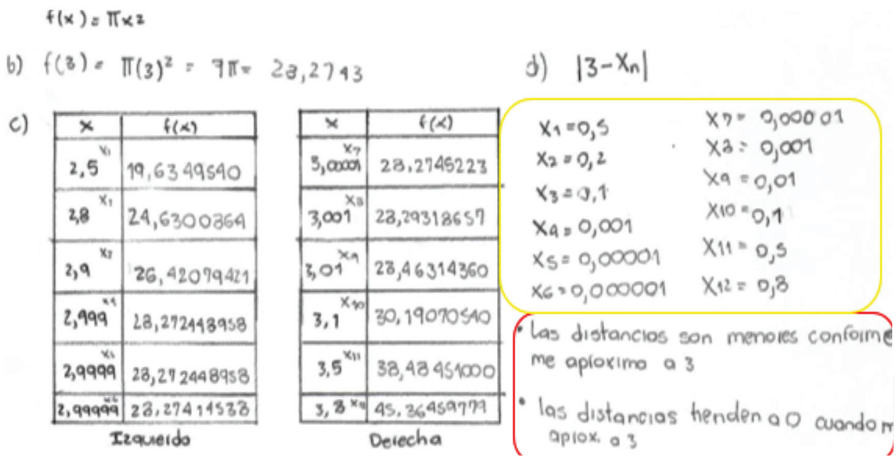


Figura 12. Respuesta de Kevin al ítem $\boxed{c}$ y $\boxed{d}$ de la actividad 2 del Taller 5.

Como se puede ver en la expresión de Kevin tomada textualmente del recuadro rojo de la figura 12 (y en relación con las operaciones que se encierran en el recuadro amarillo), dice que “las distancias tienden a cero cuando se aproxima a $\boxed{3}$”, esas acciones y expresiones al parecer le permitieron decidir sobre la existencia del límite de la función en ese punto. El investigador quiso seguir indagando al respecto, y encontró lo que se muestra a continuación:

I: ¿Qué sucede con las distancias cuanto más me aproximo a $\boxed{3}$?

K: Las distancias son menores conforme me aproximo a $\boxed{3}$ y a $\boxed{9\pi}$.

I: Y gráficamente, ¿qué está sucediendo? [muestra el archivo de GeoGebra de la figura 13].

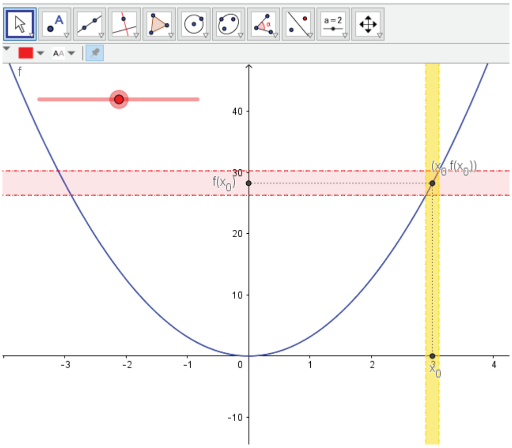


Figura 13. Archivo en GeoGebra para la actividad 2 del Taller 5.

K: La distancia tiende a ser cero en ambos lados (refiriéndose a los valores en el dominio y en el rango de la función) y así el límite de la función es $\boxed{28{,}27}$ cuando $\boxed{x}$ tiende a $\boxed{3}$.

I: ¿Qué relación existe entre la distancia y la existencia del límite?

K: Pues, a medida que los valores están próximos a $\boxed{3}$, la distancia tiende a cero y, además, los valores de $\boxed{f(x)}$ están próximos al límite de la función (figura 14).

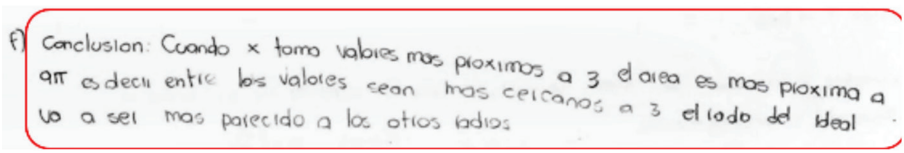


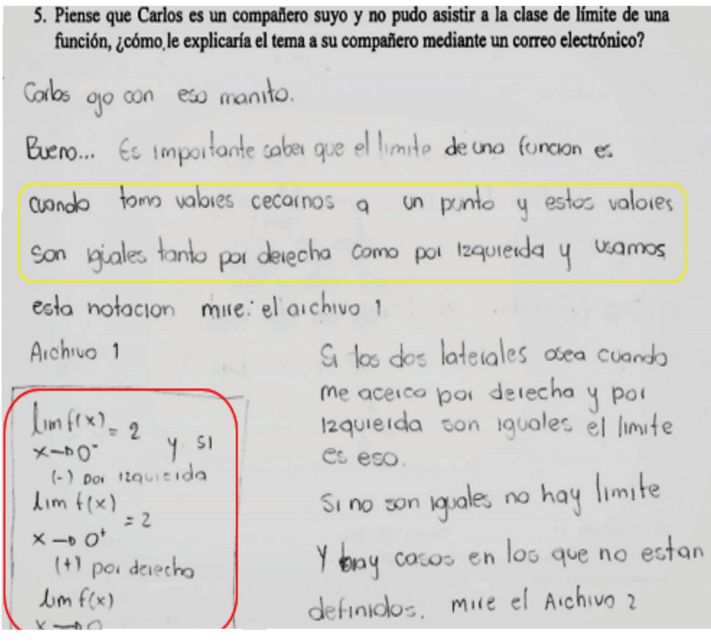
Figura 14. Respuesta de Kevin al ítem $\boxed{f}$ de la actividad 2 del Taller 5.

Para Mira (2016), este puede ser el paso previo a la conceptualización métrica de límite de una función en un punto, que el estudiante coordine la tendencia de las distancias al punto y de sus imágenes al límite, a fin de establecer que tienden a cero.

En estas actividades se logró identificar que Kevin está realizando complementariedades de la acción y expresión del nivel de *formalización*. Para Pirie y Kieren (1989) el estudiante en este nivel es capaz de conocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes del concepto de límite en los diferentes registros de representación. Aquí está reconociendo que es posible realizar aproximaciones desde el rango con aproximaciones en el dominio de la función, a partir de la disminución de las distancias. Además, cae en cuenta de que tiene objetos mentales de clases similares construidos a partir de propiedades observadas con cualidades comunes, al coordinar las distancias en el rango con las distancias en el dominio de la función, al producir entornos más reducidos e intentar deducir el límite por la concepción métrica.

Por último, en el análisis a las respuestas de Kevin durante el desarrollo del Taller 6: Conocimientos finales, se plantea un enunciado con el propósito de identificar cómo el estudiante comprende e interpreta el límite de una función en un punto (figura 15).

En esa actividad, Kevin inicia describiendo que el *"límite de una función es cuando tomo valores cercanos a un punto"*; aquí es de resaltar que el estudiante está creando una imagen para este concepto. Inferimos lo anterior, porque a través de esa expresión se evidencia que esta imaginando dos sucesiones numéricas que se aproximan a un punto, y que, además, está coordinando las aproximaciones en el dominio y en el rango para ver si estas coinciden tanto por izquierda como por derecha (recuadro amarillo de la figura 15).



5. Piense que Carlos es un compañero suyo y no pudo asistir a la clase de límite de una función, ¿cómo le explicaría el tema a su compañero mediante un correo electrónico?

Carlos ojo con eso manito.

Bueno... Es importante saber que el limite de una funcion es cuando tomo valores cercanos a un punto y estos valores son iguales tanto por derecha como por izquierda y usamos esta notacion mire: el archivo 1

Archivo 1

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2$ y si

(-) por izquierda

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$

(+) por derecha

$\lim_{x \to 0} f(x)$

Si los dos laterales osea cuando me acerco por derecha y por izquierda son iguales el limite es eso.

Si no son iguales no hay limite

Y hay casos en los que no estan definidos. mire el Archivo 2

Figura 15. Primera parte de la respuesta de Kevin al ítem 5 del Taller 6.

En ese sentido, Kevin usa la notación con el fin de especificar que los límites laterales de la función en ese punto deben ser iguales, y si sucede eso, entonces el límite existe; además el estudiante plantea el caso en que los límites no sean iguales. Ante estas especificaciones dadas por Kevin podemos identificar que ha transitado a un nivel de *comprensión de la imagen*, porque está usando las imágenes para reconocer las propiedades globales de los objetos matemáticos.

De acuerdo con esas imágenes que ha ido desarrollando Kevin, explica el caso en el cual límite de la función no está definido, a lo que recurre a un ejemplo particular que se ve en el recuadro amarillo de la figura 16. Allí, el estudiante hace referencia a que cuando $\boxed{x}$ toma valores próximos a cero por derecha $\boxed{f(x)}$ tiende a infinito, y cuando $\boxed{x}$ toma valores próximos a cero por izquierda $\boxed{f(x)}$ tiende a menos infinito. Así, de tal manera que los límites no coinciden; estas expresiones evidencian que el estudiante está en un nivel de *observación de la propiedad* porque logró examinar una imagen mental y determinar distintos atributos asociados con dicha imagen para determinar la existencia o no del límite.

Ahora Kevin decide expresar el caso en el que existe el límite de la función en un punto, pero este no es igual a la imagen de la función en ese punto (figura 16). El estudiante para ese caso decidió recurrir a la representación gráfica y además expresó literalmente "el límite existe porque no es cuando tomo el valor del punto si no valores cercanos".

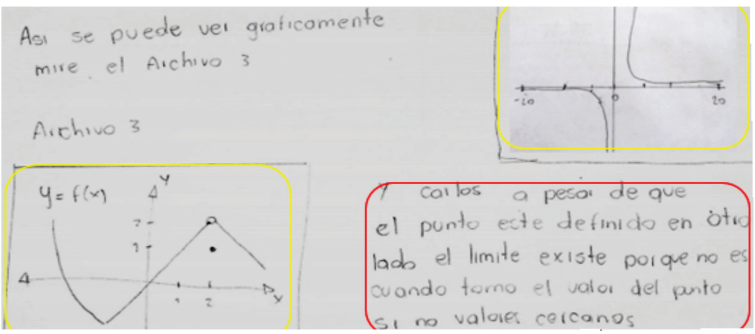


Figura 16. Segunda parte de la respuesta de Kevin al ítem 5 del Taller 6.

El estudiante fue capaz de conocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes que había desarrollado durante la secuencia de actividades. Todo lo anterior, nos permite situar a Kevin en un nivel de *formalización* para la comprensión del límite de una función en un punto, esto de acuerdo con las complementariedades de la acción y la expresión que se evidenciaron a lo largo de la secuencia de actividades. Aunque, el lenguaje usado por Kevin para describir el concepto no tiene un lenguaje matemático formal, la descripción suministrada en términos de aproximación, tendencia y contemplar la disminución de las distancias tanto en el dominio como en el rango de la función para decidir si existe o no límite de la función en ese punto es equivalente a la definición matemática apropiada.

5. REFLEXIONES FINALES Y PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN

Frente al propósito de la investigación, de la que se extrae el caso de estudio aquí reportado, se obtienen las siguientes reflexiones:

- En cuanto a los conocimientos previos de Kevin en relación con las nociones de aproximación y tendencia, se pudo evidenciar que logró identificar la existencia de estas nociones. Sin embargo, en ese momento usaba otros términos para referirse a ellas y para realizar aproximaciones numéricas de acuerdo con el contexto del enunciado.
- La *creación de la imagen* del concepto de límite de una función en un punto se posibilitó a través del taller donde se trabajaron las nociones de aproximación y tendencia, dado que allí Kevin logró identificar y diferenciar ambas nociones; además, de establecer aproximaciones a un valor $\boxed{"x"}$, relacionando las aproximaciones en el dominio de la función, con los valores que toma $\boxed{f(x)}$ para esas aproximaciones.
- El estudiante transitó al nivel de *comprensión de la imagen*, porque logró desarrollar imágenes asociadas a la existencia del límite de una función en un punto. Para este nivel es necesario resaltar la importancia de la coordinación entre las aproximaciones realizadas en el dominio y en el rango de la función, porque le permitieron al estudiante identificar que cuando x tiende a $\boxed{a}$, el límite de la función $\boxed{f(x)}$ tiende a $\boxed{L}$, esto sucede cuando las aproximaciones realizadas coinciden o, en el otro caso, identificar cuando no existe el límite de la función en un punto. El estudiante en este nivel muestra que ha logrado alcanzar la comprensión de las imágenes que ha creado hasta el momento, debido a que logra usar las diferentes formas de representar una función para analizar el límite de una función en un punto.

- De acuerdo con el análisis de las respuestas de Kevin frente a las actividades relacionadas con la concepción dinámica y óptima del límite de una función en un punto, se identificó que: para el nivel de *observación de la propiedad*, el estudiante logró buscar en el rango de la función valores próximos al límite; esto fue posible al analizar y comparar las distancias entre las aproximaciones realizadas y el mismo límite. Además, consiguió analizar las distancias de los valores correspondientes en el dominio de la función, análisis que con el apoyo de GeoGebra y de los applets diseñados por los investigadores (utilizados en las actividades de exploración dirigida) nos permite identificar que se favorece una mejor visualización.
- En las actividades desarrollas en el taller de conocimientos finales, se logró identificar que Kevin realizó complementariedades de la acción y expresión asociadas al nivel de *formalización*, dado que logró identificar las propiedades para abstraer cualidades comunes de las clases de imágenes que había logrado construir para el límite de una función en un punto en el desarrollo de todas las actividades. Aunque, el lenguaje usado por Kevin no es formal, la descripción suministrada es equivalente a la definición matemática del concepto, al mantener el rigor y al realizar aproximaciones e identificar la disminución de las distancias tanto en el dominio como en el rango de la función para decidir si existe o no límite de la función en ese punto.

La investigación hace un aporte a la teoría de Pirie y Kieren, específicamente para el concepto de límite de una función en un punto, puesto que la caracterización de los niveles permite identificar y describir la comprensión que logran los estudiantes cuando participan de un curso de cálculo diferencial. Además, la secuencia de actividades es una contribución a la matemática educativa para que pueda ser usada por profesores de educación media o educación superior en sus aulas de clase para favorecer la comprensión de dicho concepto.

Es necesario resaltar que uno de los elementos particulares de la secuencia de actividades, es el uso de las nociones de aproximación y tendencia como un acercamiento a la comprensión del límite de una función en un punto, porque retoma el dinamismo que se esconde detrás de la definición formal del concepto de límite de una función. Además, se da una articulación entre el uso de un software de matemática dinámica y el trabajo a lápiz y papel realizado durante la investigación. El estudio mostró la importancia del proceso de comunicación entre el profesor y los estudiantes, pues permite el debate y la resignificación de ideas a la luz de los apoyos didácticos que se ofrecen en el aula de clase.

AGRADECIMIENTO

La publicación de este trabajo de investigación se logra gracias al apoyo del Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación, Colombia – MINCIENCIAS quien está financiando el programa de investigación "Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro". Código1115-852 70767, con el proyecto "Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnología: procesos de formación y reflexión con profesores". Financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología". Código70783, con recursos del Patrimonio autónomo Fondo Nacional de financiamiento para la ciencia, la tecnología y la innovación Francisco José de Caldas, contrato CT 183-2021.

REFERENCIAS

Aguirre, J., y Jaramillo, L. (2012). Aportes del método fenomenológico a la investigación educativa. *Revista latinoamericana de estudios educativos*, *8*(2), 51-74. https://www.redalyc.org/pdf/1341/134129257004.pdf

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). Grupo Editorial Iberoamérica. http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf

Betancur, A., Guarin, S., Parada, S., y Fiallo J. (2015). La noción de aproximación óptima en la comprensión del concepto de límite. *IX Simposio Nororiental de matemáticas*. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga. Colombia. http://funes.uniandes.edu.co/12522/1/Betancur2015La.pdf

Blázquez, S. (1999). Sobre la noción del límite en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. En T. Ortega (Ed.), *Actas del III SEIEM*. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Blázquez, S., y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 331-354). Grupo Editorial Iberoamérica. https://docplayer.es/14774257-El-concepto-de-limite-en-la-educacion-secundaria.html

Blázquez, S., y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *8*(30), 67-82.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME 9*(2), 189-209. https://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v9n2/v9n2a2.pdf

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 153-166). Kluwer Academic Publisher.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), 143-168.

Fernández, J. (2010). *Unidad didáctica: límite y continuidad de funciones.* [Tesis de Maestría, Universidad de Granada]. https://www.ugr.es/~lrico/MasterSec_files/Fernandez%20Plaza%20TFM.pdf

Fiallo, J., y Parada, S. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación.* Universidad Industrial de Santander.

García, G., Serrano, C., y Díaz, H. (2002). *La aproximación: una noción básica en el cálculo: un estudio en la educación básica*. Universidad Pedagógica Nacional.

Gonzales, Y., Montoro, A., y Ruiz, J. (2021). Análisis de las definiciones de límite que brindan estudiantes universitarios. Uniciencia, 35(2), 1-20. https://doi.org/10.15359/ru.35-2.18

Guarin, S. (2018). Aproximación y Tendencia: nociones para la comprensión del límite de una función en un punto [Tesis de Maestría. Universidad Industrial de Santander]. https://www.dropbox.com/s/bnt1qzxjhcm6yc0/TesisSGuar%C3%ADn.pdf?dl=0

Gücler, B. (2013). Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 439-453. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9438-2

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *In XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers*. Michoacan University San Nicolás de Hidalgo. Morelia. México.

Hitt, F y Páez, R. (2003). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 32*, 97-108.

Kidron, I. (2010). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*, 1261-1279. https://doi.org/10.1007/s10763-010-9258-8

Kidron, I. (2014). Calculus teaching and learning. En S. Lerman, (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. (pp. 69-75). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_18

Londoño, R. (2011*). La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren*. [Tesis Doctoral, Universidad de Antioquia]. https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/6920/1/ReneLondo%c3%b1o_2011_teoriapiriekieren.pdf

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *6*(3), 221-278. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33560303

Mira, M. (2016). *Desarrollo de la comprensión del concepto de límite de una función. Características de trayectorias hipotéticas de aprendizaje*. [Tesis Doctoral, Universidad de Alicante]. http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/53830#vpreview

Pirie, S., y Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the learning of mathematics*, *9*(3), 7-11.

Pirie, S., y Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(5), 505-528.

Pirie, S., y Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 165-190. https://doi.org/10.1007/BF01273662

Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto*. [Tesis Doctoral, Universidad de Alicante]. http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/45713#vpreview

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics, 55*, 103-132. https://www.jstor.org/stable/4150304

Rangel, R., Betancourt, A., Árcega, M., y García, J. (2014). Diseño instruccional para el aprendizaje del concepto de límite: Un estudio de caso en el ITCG, la UJED, la UASLP y la UAN. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. *37*, 91-110. http://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/745/457

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related the limitis. *Educational Studies in Mathematics. 18*(4), 371-397.

Tall, D. (1991). The psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking*. (pp. 3-24). Kluwer Academic Publisher.

Tall, D. (1992). Students' difficulties in calculus. *In proceedings of working group.* ICME-7. Québec, Canada.

Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*, 151-169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Thom, J., y Pirie, S. (2006). Looking at the complexity of two young children's understanding of number. *Journal of mathematical Behavior*, *25(3)*, 185-195. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.004

Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A., Muller, D., y Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA*, *8*(29), 9-19.

Valls, J., Pons, J., y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(3), 325-338. http://funes.uniandes.edu.co/21952/1/Valls2011Coordinacion.pdf

Villa-Ochoa, J. (2011). *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren*. [Tesis Doctoral, Universidad de Antioquia]. https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/16849/1/VillaJhony_2011_ComprensionTasaVariacion.pdf

Zill, D., y Wright, W. (2011). *Cálculo: Trascendentes tempranas*. Mc Graw Hill.

Autor de correspondencia
Sandra Evely Parada Rico

Dirección: Ciudad Universitaria Cra. 27 con Calle 9, Oficina 146,
Edificio Camilo Torres, Bucaramanga, Santander
sanevepa@uis.edu.co

 https://doi.org/10.24844/EM3501.09

Diálogo entre la Teoría Antropológica de lo Didáctico y el Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática sobre las nociones de juicio de valor, praxeología y paradigma didáctico

Dialogue between the Anthropological Theory of Didactics and the Onto-semiotic Approach in Mathematics Education on the notions of value judgement, praxeology and didactic paradigm

Juan D. Godino[1]

Resumen: La aplicación de los resultados de las investigaciones científicas y tecnológicas a la práctica de la enseñanza es conflictiva por su carácter descriptivo, explicativo y predictivo y la exigencia de evitar los juicios de valor subjetivos en el desarrollo de las mismas. La práctica educativa requiere, sin embargo, tomar decisiones sobre las acciones que se deben realizar para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, lo que implica la adopción de juicios de valor. La manera en que se aborda este dilema depende de cómo se concibe la Didáctica, de los marcos teóricos que se usan en la investigación y de los diferentes paradigmas de investigación en que se apoyan. En este trabajo analizamos esta problemática discutiendo el papel de los juicios de valor en las ciencias básicas y aplicadas, así como las nociones de praxeología y paradigma didáctico de referencia introducidas en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Se justifica, además, la necesidad de establecer una interfaz entre la investigación científico-tecnológica y la práctica reflexiva mediante la cual se identifiquen criterios de idoneidad, que sinteticen y estructuren los resultados de dichas investigaciones, con la mirada puesta en su aplicación para

Fecha de recepción: 12 de septiembre de 2021. **Fecha de aceptación:** 24 de mayo de 2022.

[1] Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, jgodino@ugr.es, orcid.org/0000-0001-8409-0258

producir cambios fundamentados, según propone el Enfoque Ontosemiótico en educación matemática.

Palabras clave: *Investigación científica, tecnología, paradigmas, práctica reflexiva, educación matemática, articulación de teorías.*

Abstract: The application of results of scientific and technological research to the teaching practice is conflictive, due to its descriptive, explanatory, and predictive nature and the demands of avoiding subjective value judgements in scientific and technological research. Educational practice requires, however, making decisions about the type of actions to be taken to improve teaching and learning processes, which implies the adoption of value judgements. The way in which this dilemma is approached depends on how Didactics is conceived, the theoretical frameworks used in research and the different research paradigms on which they are based. In this paper, I reflect on this problematic by discussing the role of value judgements in basic and applied science, as well as the notions of praxeology and didactic paradigm of reference introduced in the Anthropological Theory of Didactics. I also suggest the need to establish an interface between scientific-technological research and the reflective practice by identifying criteria of suitability that synthesise and structure the results of such research, as proposed by the Onto-semiotic Approach in mathematics education.

Keywords: *Scientific research, technology, paradigms, reflective practice, mathematics education, networking theories.*

1. INTRODUCCIÓN

En una primera etapa de diálogo entre teorías y enfoques de investigación en didáctica de las matemáticas Gascón y Nicolás (2017, p. 26) plantearon la cuestión de “¿Hasta qué punto, en qué forma y en qué condiciones, la didáctica puede (o incluso debe) proponer juicios valorativos y normativos que proporcionen criterios sobre cómo organizar y gestionar los procesos de estudio?”. La respuesta que dan estos autores desde el punto de vista de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1992; 1999) fue clara: “la didáctica de la matemática, considerada como una ciencia, no está legitimada para presentar, como resultados de la investigación, prescripciones normativas ni juicios de valor de ningún tipo" (Gascón y Nicolás, 2019, p. 42).

En Godino *et al.*, (2019) dimos una respuesta diferente a esta cuestión desde el punto de vista del Enfoque Ontosemiótico (EOS), al asumir que la Didáctica tiene, además de un componente científico, y por tanto, descriptivo, explicativo o predictivo, otro componente tecnológico que debe dar respuestas fundamentadas sobre cómo intervenir en los procesos educativos para hacerlos lo mejor posible. Además, en el campo de la educación se vienen desarrollando teorías dirigidas a la práctica que describen métodos sobre cómo mejorar la enseñanza y el aprendizaje: "Una teoría de diseño educativo es una teoría que ofrece una guía explícita sobre la mejor forma de ayudar a que la gente aprenda y se desarrolle" (Reigeluth, 2000, p. 15).

En una nueva fase del diálogo entre teorías didácticas Gascón y Nicolás (2021) llaman la atención a las siguientes cuestiones que tienen que ver con las relaciones entre la investigación didáctica y la práctica docente:

> ¿Qué postulados fundamentan la investigación didáctica que lleva a cabo una comunidad científica y las prácticas docentes que promueve para alcanzar los fines educativos que, de manera más o menos implícita, propugna dicha comunidad? Y, en última instancia, ¿cómo se relaciona la investigación didáctica que desarrolla una comunidad científica con la práctica docente que promueve? (Gascón y Nicolás, 2021, p. 9)

Este no es un tema nuevo en la investigación educativa. El esfuerzo analítico por definir problemas abordables con precisión dentro de la investigación didáctica lleva, en general, a centrar la atención en aspectos puntuales, con una finalidad fundamentalmente descriptiva y explicativa, con frecuencia alejados de la problemática docente del aula. Esta puede ser una de las razones de la brecha entre la investigación y la práctica, que es un problema permanente en el campo de la investigación educativa (English y Kischner, 2016; Korthagen, 2007; McIntyre, 2005).

Gascón y Nicolás (2021) avanzan la posición de la TAD sobre estas cuestiones proponiendo un esquema metodológico para su análisis que, puede ser aplicado desde otros marcos teóricos y facilitar el diálogo entre los mismos. En particular, proponen usar la noción de *praxeología de investigación* en lugar de "teoría didáctica", así como la de paradigma didáctico asumido por una comunidad de investigadores. Estas nociones inciden simultáneamente sobre la praxis científica y la práctica docente que promueve, constituyendo así herramientas para explicar las relaciones entre ambas y para avanzar en el diálogo entre teorías.

El hilo argumental del trabajo de Gascón y Nicolás (2021) se sustenta en que la investigación científica es una actividad humana que aborda un campo de problemas con técnicas o estrategias metodológicas, basadas en principios para producir conocimiento descriptivo, explicativo, o predictivo. Estos autores insisten en que, de los resultados obtenidos de la investigación científica, no se derivan directamente normas de cómo intervenir en los procesos educativos, debido a la propia naturaleza del conocimiento científico. Esas normas de intervención sobre la práctica incorporan juicios de valor que no se derivan de la investigación empírica. En todo caso, es necesario explicitar los fines que se pretenden conseguir y los medios para lograrlos, los cuales son dependientes del modelo epistemológico de referencia en que se basa la actividad científica, esto es, la teoría o praxeología de investigación. Concluyen el trabajo indicando que, para profundizar en el diálogo entre diferentes praxeologías de investigación didáctica (PID), será preciso contrastar los fines educativos y los modelos epistemológicos subyacentes de los paradigmas asumidos por cada una de ellas. Será imprescindible contrastar la compatibilidad entre los paradigmas didácticos asumidos, en la práctica, por las diferentes PID. "Pero, antes de enfocar el diálogo en estos términos, será preciso discutir si las nociones de praxeología de investigación didáctica (PID) y de paradigma didáctico asumido por una PID son pertinentes o deben sustituirse por otras" (Gascón y Nicolás, 2021, p. 36).

En este trabajo abordamos las nuevas cuestiones que proponen Gascón y Nicolás (2021), analizando previamente los constructos de praxeología, programa y paradigma de investigación, así como la noción de paradigma didáctico de referencia, como herramientas de análisis de cualquier actividad humana y, su particularización al caso de la actividad didáctico-matemática. Estudiaremos la dimensión axiológica inherente a cualquier actividad humana, esto es, la noción de valor y juicio de valor. Contrastaremos la visión subjetivista sobre los valores de Max Weber, sobre la que se apoyan Gascón y Nicolás (2021) en sus reflexiones epistemológicas sobre la Didáctica, con la concepción social y racional de los valores que proponen otros autores (Lacey, 2003; Rugina, 1998), y con la visión de la educación como sociotecnología de Bunge (1998). Esta concepción ampliada de la Didáctica y de los juicios de valor, desde nuestro punto de vista, aporta luz a los dilemas en los que están atrapadas algunas teorías respecto de la relación entre la teoría didáctica y la práctica de la enseñanza.

El trabajo lo organizamos en los siguientes apartados. Después de esta introducción, abordamos en la Sección 2 el problema de los valores y juicios de valor en las ciencias naturales y sociales. En la Sección 3, analizamos el uso del término praxeología como filosofía de la acción y como constructo para el análisis epistemológico y didáctico que propone la TAD. En la Sección 4 discutimos la noción de paradigma de investigación en las ciencias naturales y sociales, proponiendo un modelo con cuatro tipos o categorías de paradigmas, atendiendo al énfasis en la comprensión de los fenómenos o el uso de los resultados de la investigación. Este modelo ayuda a clarificar el tipo de investigación mixta y compleja que se realiza en la Didáctica. El dilema entre investigación científico-tecnológica y la práctica reflexiva nos lleva a proponer la elaboración de una teoría de la idoneidad didáctica (Sección 5), centrada en la identificación y estructuración de los juicios de valor compartidos por diferentes praxeologías de investigación que ayude a superar la brecha entre la teoría y la práctica educativa. En la Sección 6 analizamos la noción de paradigma didáctico de referencia formulada por Gascón y Nicolás (2021) proponiendo un desarrollo de esta. En la última sección incluimos una síntesis del trabajo y proponemos algunas cuestiones abiertas sobre la articulación de paradigmas didácticos en educación matemática.

2. EL PAPEL DE LOS VALORES Y LOS JUICIOS DE VALOR EN LAS CIENCIAS NATURALES Y SOCIALES

Gascón y Nicolás (2021) consideran que los fines educativos en una institución docente y los fines de referencia de una praxeología de investigación (como, por ejemplo, la TAD) "se sitúan en la 'esfera de los valores' (Weber, 2010), caen fuera de la 'esfera del conocimiento' y, en consecuencia, no pueden ser establecidos racionalmente" (p. 16). Consideran por ello que la ciencia didáctica no está legitimada para enunciar como resultados de investigación, ni juicios de valor, ni prescripciones normativas de ningún tipo (Gascón y Nicolás, 2019). Nuestra concepción sobre la Didáctica difiere de la sostenida por los autores y de manera especial sobre el papel de los valores y juicios de valor en la teoría y la práctica educativa.

En este apartado presentamos una síntesis de posiciones sobre los valores en la investigación científica y tecnológica diferente de la sostenida por Weber (2010). Así, encontramos que Rudner (1953) argumenta que los científicos emiten y se apoyan en juicios de valor, esto es, que dichos juicios están esencialmente implicados en los procedimientos de la ciencia. Esto es así porque el científico acepta o rechaza hipótesis, y puesto que ninguna hipótesis científica se verifica por completo, al aceptar una hipótesis el científico debe tomar la decisión de que la evidencia es lo suficientemente fuerte, o que la probabilidad es lo suficientemente alta para justificar la aceptación de la hipótesis. El grado de seguridad que debemos tener antes de aceptar una hipótesis dependerá de la gravedad de un error. "Obviamente, nuestra decisión respecto a las pruebas y a cómo de fuertes son "suficientemente fuertes", va a estar en función de la importancia, en el sentido típicamente ético, de cometer un error al aceptar o rechazar la hipótesis" (Rudner, 1953, p. 2).

Lacey (2003) sostiene que hay momentos en las prácticas de investigación en los que los valores pueden desempeñar un papel legítimo y a veces indispensable y, por tanto, rechaza que los juicios de valor y las declaraciones cargadas de valores deban excluirse por completo de la investigación científica. Propone distinguir tres aspectos o momentos lógicos de la investigación científica sobre los que hay que tomar decisiones, en las cuales los juicios de valor desempeñan papeles diferentes:

M1: Adopción de la estrategia
M2: Aceptación de datos, hipótesis y teorías
M3: Aplicación del conocimiento científico

Nadie duda de que los juicios de valor deben tener un papel en M3, ya que en esta categoría las cuestiones de legitimidad y eficacia deben ser relevantes; es en los otros dos momentos donde se suele negar que tengan un papel legítimo. Sin embargo, Lacey (1999) argumenta que pueden tener un papel indispensable en M1, en la adopción de una estrategia investigativa, aunque no en M2. Si no se adopta una estrategia (paradigma o tradición de investigación), no se puede definir lo que se considera una investigación valiosa o significativa y, entre otras razones, no se pueden abordar de forma coherente y sistemática las siguientes cuestiones: qué preguntas plantear; qué clase de posibilidades identificar; qué tipos de explicaciones explorar; qué categorías desplegar, tanto en las teorías (hipótesis) como en los informes de observación; qué fenómenos observar, medir y experimentar; y qué procedimientos utilizar.

Rugina (1998) analiza el problema de los valores y los juicios de valor en las ciencias naturales y sociales, y elabora una teoría para abordarlo de manera racional. Considera que toda cosa de cualquier naturaleza (material o intelectual), por la que expresemos un interés tiene valor. Un enunciado o una proposición mediante la cual se afirma o niega un valor en forma imperativa de "debería" o "debe", constituye un juicio de valor. Incluso en las ciencias naturales son inevitables los valores y los juicios de valor, porque se utilizan muchos recursos (humanos y naturales) para la investigación y éstos son valores. Los resultados de los numerosos proyectos de investigación en aplicación tienen importantes efectos positivos y negativos en el medio ambiente y conllevan importantes consecuencias sociales, económicas y financieras, no sólo para el presente sino también para las generaciones futuras.

El principio de Weber (2010) sobre la neutralidad ética del científico indica que "no hay lugar en la ciencia para los juicios de valor". Sin embargo, las ciencias sociales están asociadas a los valores y, en consecuencia, se inclinan a utilizar términos y supuestos cargados de ellos. Se razona que los estudios sociales y económicos no pueden alcanzar el estatus de ciencia moderna a menos que se evite el uso de términos de valor como categorías explicativas y de esta manera se satisfaga el principio de Weber. Rugina (1998) considera que este principio tiene que ser reexaminado, pero no con el propósito de demolerlo o refutarlo categóricamente. Concluye con estos resultados que: (1) no hay lugar en la ciencia para los valores y los juicios de valor personales y subjetivos; (2) hay espacio en la ciencia para los valores y juicios de valor sociales y objetivos con el requisito de que se apoyen en una prueba lógica y/o empírica.

Consideremos el enunciado siguiente: "Si unas circunstancias son similares a C, se aceptan los principios P y se quiere conseguir el fin F, entonces se deben aplicar los Medios M para obtener los mejores resultados". Dicho enunciado no es un juicio de valor subjetivo, sino racional o fundamentado, y por tanto compartible para una comunidad. Esta es la teoría sobre los valores de Rugina (1998), que es un desarrollo crítico de la teoría de valores subjetivos de Max Weber y está fundamentada en una teoría de la verdad, no como correspondencia, sino como consenso en el seno de una comunidad (Habermas, 1997).

Una posición similar sobre los valores en las ciencias sociales la encontramos en Bunge (2016).

> Cuando todos los miembros de un grupo muy numeroso aprecian lo mismo en una situación similar, se puede hablar de valores impersonales y universales, como la salud y la alimentación, la convivencia y la solidaridad, la verdad y la eficacia, etc. (Bunge, 2016, p. 381)

Sostiene, además, que el objetivo de la tecnología es esencialmente diferente del de la ciencia básica y que para las sociotecnologías, como es el caso de la educación, es consustancial el paso del *es* al *debería* y por tanto está impregnada de valores:

> Para comenzar, en tanto la ciencia –ya sea natural, social o socionatural– estudia el mundo, la tecnología idea maneras de cambiarlo: es el arte y la ciencia de hacer las cosas del modo más eficiente. Si se prefiere, la tecnología idea modos racionales de saltar del es al debería. En la ciencia, el cambio deliberado, como el que se produce en un experimento, es un medio para llegar al conocimiento. En tecnología es al revés: aquí, el conocimiento es un medio de modificar la realidad. (Bunge, 1998, p. 324)

Considera que debemos distinguir e interrelacionar, tres campos diferentes: ciencia (C), tecnología (T) y praxis (P). Las relaciones entre ellas pueden resumirse de la siguiente manera: C ↔ T ↔ P, donde "↔" denota interacción. Toda actividad práctica puede ser objeto de una tecnología, y a su vez toda tecnología eficaz puede fundarse en y justificarse por una o más ciencias; además, toda ciencia puede usarse para construir o fortalecer la correspondiente tecnología, la cual puede utilizarse para orientar la correspondiente actividad práctica.

3. UNA VISIÓN AMPLIADA DE LA NOCIÓN DE PRAXEOLOGÍA

En educación matemática el constructo praxeología es uno de los básicos de la TAD, en el que se incorpora y hace operativa la visión antropológica de la matemática como actividad humana. No obstante, el término también es usado en algunos enfoques filosóficos sobre la acción eficiente y en sociología. En esta sección se analizan esos usos y sus posibles conexiones.

3.1. La praxeología como disciplina

El término praxeología (o praxiología) se viene usando para referirse al ámbito de reflexión filosófica sobre la acción humana, entendida como conducta comprometida con un propósito. La praxeología como disciplina ha sido desarrollada de manera independiente por dos escuelas de pensamiento diferentes, la escuela austríaca liderada por von Mises (1949) focalizada en el campo de la economía y de las ciencias sociales y la polaca liderada por Kotarbiński (1965), con una orientación hacia la filosofía de la acción eficiente. También, encontramos el término para describir la metodología de investigación de Pierre Bourdieu como praxeología social. "La praxeología es una antropología universal que tiene en cuenta la historicidad, y por tanto la relatividad, de las estructuras cognitivas, al tiempo que registra el hecho de que los agentes ponen universalmente en funcionamiento dichas estructuras históricas" (Bourdieu y Wacquant, 1992, p. 139).

Según von Mises (1949):

> La teoría moderna del valor amplía el horizonte científico y extiende el campo de los estudios económicos. De la economía política de la escuela clásica surge la teoría general de la acción humana, la praxeología. .... Ningún tratamiento de los problemas económicos propiamente dicho puede evitar partir de los actos de elección; la economía se convierte en una parte, aunque la mejor elaborada hasta ahora, de una ciencia más universal, la praxeología. (Von Mises, 1949, p. 3)

La praxeología busca la formulación de un sistema de recomendaciones y advertencias de validez técnica general y el estudio de la dinámica de progreso de las capacidades humanas, para lo cual procede a la descripción analítica de los elementos de la acción y las variadas formas de la acción: agentes, material, medios y métodos, objetivos, productos, etc.

> El praxiólogo se preocupa por encontrar las generalizaciones más amplias posibles de carácter técnico. Su objetivo es la técnica del trabajo bueno y eficaz como tal, indicaciones y advertencias importantes para todo trabajo que pretenda alcanzar la máxima eficacia. (Kotarbiński, 1965, p. 1)

Según Bunge:

> La praxiología, o teoría de la acción, es el estudio de las características generales de la acción humana individual y colectiva. Puede considerarse como el fundamento de la sociotecnología o bien como la más básica y general de todas las teorías sociales, aunque, por desdicha, no la más avanzada. (Bunge, 1998, p. 332)

3.2. La praxeología como constructo

Chevallard (1992; 1999) ha propuesto usar el término praxeología para indicar no una disciplina sino a un constructo o herramienta teórica para el análisis de la actividad humana en cualquier campo, aunque pensando inicialmente en la actividad matemática y didáctica. Con el fin de estudiar conjuntamente las prácticas de las personas al resolver determinados problemas o realizar las tareas (praxis) y el discurso que acompaña dicha práctica (logos) llama praxeología al par <Praxis, Logos>, desglosado a su vez en la cuaterna <Tarea, Técnica, Tecnología y Teoría>, donde las dos primeras componentes se refieren a la praxis y las dos últimas al logos.

Este constructo tiene la virtud de señalar que en la práctica o actividad humana no hay solo conceptos y procedimientos, esto es, discurso teórico o logos, sino también problemas que son la razón de ser de los conceptos y maneras de actuar. Sin duda este constructo es útil para el análisis a nivel macro de la actividad realizada por comunidades de prácticas, colectivos profesionales, escuelas de pensamiento y paradigmas de investigación. Se puede hablar de praxeologías matemáticas, didácticas, médicas, etc., con un lenguaje y metodología común.

En educación matemática se han propuesto otros constructos teóricos para describir la actividad de los sujetos cuando resuelven problemas y, los conocimientos y competencias que se ponen en juego, con una funcionalidad similar al constructo de praxeología. Así la noción de *concepto como tripleta* (Vergnaud, 1990), <Situaciones-problemas, Invariantes operativos, Representaciones> trata de vincular el concepto con la actividad del sujeto, los problemas y las representaciones materiales. En el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino *et al.*, 2007; Font *et al.*,, 2013) se introduce la noción de *significado pragmático de un objeto* como el sistema de prácticas operativas, discursivas y normativas, que se ponen en juego en la solución de determinadas situaciones problemas, en su doble versión institucional y personal (Godino y Batanero, 1994). En cierto modo estos constructos, aunque han surgido con relación al análisis de los conocimientos y competencias matemáticas, son aplicables a cualquier actividad humana y responden, por tanto, a la misma problemática epistemológica y cognitiva que el constructo praxeología introducido en la TAD. Igual ocurre con la noción de *teoría* que propone Radford (2008) para orientar los estudios de articulación de teorías, distinguiendo tres componentes <Cuestiones Principios, Métodos); este uso metonímico de teoría para designar la tripleta va en la misma dirección que la noción de praxeología de investigación (Artigue *et al.*, 2011).

Los constructos de praxeología matemática y praxeología didáctica son útiles para el análisis y comparación a nivel macro de la actividad matemática y didáctica que realizan grupos de personas o incluso personas individuales. También puede ser relevante para describir la actividad de investigación que llevan a cabo distintos colectivos que comparten determinados principios, problemas y métodos. En cierto modo, la praxeología de la TAD constituye el constructo central de un marco de la acción humana que aporta elementos originales con relación a otras teorías de la acción, como es la conexión entre el componente de la praxis (tareas y técnicas) y el componente del logos (tecnología y teoría). No obstante, la comparación con otras teorías de la acción puede señalar algunas limitaciones del constructo y desvelar su filiación con los paradigmas positivistas de la investigación científica.

Desde el punto de vista del EOS, que también incorpora elementos propios de una teoría de la acción, aunque restringida a la actividad matemática y didáctica, el modelo de cuatro componentes que propone la TAD para la noción de praxeología, <Tarea, Técnica, Tecnología, Teoría>, podría completarse en algunos puntos:

(1) La idea de tarea refiere a algo que se hace o hay que hacer, pero no explicita en sí misma el *fin* o intencionalidad de las prácticas, que debe ser la resolución de determinadas situaciones-problemas o cuestiones. Esto no quiere decir que la TAD no tenga en cuenta la razón de ser de cualquier actividad, que es la resolución de determinadas cuestiones o problemas. La formulación de cuestiones de distintos grados de generalidad es un aspecto clave en la TAD.

(2) Los elementos que se destacan son los medios (técnicas) y la justificación racional del uso de dichos medios (tecnología y teoría), quedando fuera del constructo los juicios de valor que siempre acompañan a toda actividad humana, esto es, el componente axiológico. No incluir un nexo entre la praxis y el logos dificulta salvar la brecha entre teoría y práctica. El análisis de los valores y los juicios de valor, en particular, de la eficiencia de la actividad de los sujetos y colectivos cuando abordan la solución de problemas debe ser un componente explícito de las praxeologías. Ciertamente, para que esto sea posible es necesario superar las limitaciones del modelo axiológico de Weber, que considera los valores como algo esencialmente subjetivo, y por tanto, no abordables desde el punto de la investigación científica.

(3) No incluye el detalle de los tipos de objetos y procesos que configuran el logos, lo que dificulta la realización de análisis a nivel micro de la actividad:

> este estudio microscópico requiere herramientas más finas y específicas para cada ámbito de acción. Esta es la razón por la que en el EOS se ha introducido la noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos para el análisis fino de la actividad matemática, y la noción de configuración didáctica, sus tipos y secuenciación, para el de la actividad didáctica (Godino, Batanero y Font, 2019).

Como afirma Bunge (1998), la acción humana, ya sea individual o social, está controlada por la valoración, explícita o tácita.

> En efecto, lo que desencadena nuestras acciones es la necesidad o el deseo de alcanzar metas valiosas o evitar resultados sin valor. Y, cuando son racionales, esas acciones se planifican y examinan a la luz de juicios de valor; por otra parte, sus resultados se evalúan en términos de eficiencia, moralidad o ambas. (p. 359)

Además, la experiencia y la deliberación sobre los valores y las maneras de realizarlos se condensan finalmente en reglas o normas. Una norma o regla es una prescripción para hacer algo. La forma general de una regla es: para alcanzar el objetivo O con los recursos R, seleccione entre estos y construya un medio M, y realice la acción A con la ayuda de M. Una regla es social si cualquiera de sus tres componentes –objetivo, medios o acción considerada– es social o, al implementarla, tiene un impacto social. Y una regla social es una regla moral si las acciones que gobierna mejoran el bienestar de otros sin impedir que nadie satisfaga sus necesidades básicas.

La triple dialéctica entre fines, valores y medios es propia de toda praxeología, cualquiera que sea el campo disciplinar y paradigma, bien de las ciencias naturales o sociales. La elección de los Medios se hace aplicando Valores, aquello que se considera mejor o peor para los Fines que se pretenden. Los juicios de valor están siempre presentes, incluso en la actividad científica y tecnológica en el campo de las ciencias naturales. Es pertinente tener en cuenta el tipo de acción regulada por normas que describe Habermas (1999), ya que incluso la práctica matemática incluye una parte esencial de ese tipo de acciones. No todo el trabajo matemático consiste en la resolución creativa de nuevos problemas para los cuales no se conocen reglas de cómo resolverlos. Los procedimientos y algoritmos e incluso las definiciones matemáticas son reglas que se deben seguir para realizar la tarea de una manera eficiente. En el caso de la actividad didáctica son esenciales las acciones comunicativas, orientadas a la comprensión y el mutuo entendimiento. Este tipo de prácticas comunicativas no quedan reflejadas en el constructo praxeología didáctica.

Toda praxeología investigativa debe incluir un programa gnoseológico, esto es, focalizado en la elaboración de conocimientos científico-tecnológicos, y un programa axiológico focalizado en la intencionalidad, eficiencia, idoneidad (valores, principios axiológicos) de las prácticas humanas, sean estas operatorias, discursivas o normativas. Con esta visión ampliada, el constructo praxeología sale del campo de la reflexión filosófica sobre la acción eficiente (praxiología) para convertirse en una herramienta de análisis gnoseológico y axiológico de la actividad humana en cualquier campo científico y tecnológico. Aunque en cada campo de actividad, la cuaterna praxeológica debe ser complementada con herramientas más finas que permitan un análisis más detallado de los tipos de objetos y procesos que intervienen y emergen de la praxis y el logos correspondiente, así como de los criterios de racionalidad o eficiencia de tal actividad.

4. PARADIGMAS DE INVESTIGACIÓN SEGÚN LA DUALIDAD COMPRENSIÓN-USO

Un aspecto que se interpreta en este trabajo es que la visión de la investigación científica que adoptan Gascón y Nicolás para la Didáctica está fuertemente relacionada con el tipo de investigación básica o fundamental propia de las ciencias naturales, alejada de otras visiones más amplias de la indagación en el campo de las ciencias sociales, y en particular en la educación. Para dilucidar las relaciones entre la investigación y la práctica educativa que promueve una praxeología de investigación hay que abordar el problema de cómo se concibe la Didáctica.

Consideramos necesario explicitar qué entendemos por investigación y qué tipos diferentes existen, ya que los fines que se persiguen en cada caso pueden ser diferentes, como también los medios que se desarrollan y aplican, y los resultados que se obtienen. Esto nos lleva a explicitar qué entendemos por paradigma de investigación, dado que el término paradigma es polisémico[2].

[2] Los paradigmas son definidos por Kuhn como ejemplos aceptados de la práctica científica real, que incluyen a un mismo tiempo, ley, teoría, aplicación e instrumentación, los cuales proporcionan una serie de modelos de los que surgen tradiciones especialmente coherentes de investigación científica. Esta tesis, el concepto principal de paradigma, ha sido atacada por su vaguedad y poca exactitud. La primera crítica a Thomas Kuhn versó sobre las múltiples y confusas definiciones que dio del término 'paradigma' en *La*

En Godino *et al.* (2019) hemos mencionado la postura del EOS sobre el carácter tanto científico como tecnológico de la Didáctica. Seguidamente profundizaremos en esta cuestión ya que el análisis de las relaciones entre la investigación científica y tecnológica y la práctica de la enseñanza, esto es, entre teoría y práctica, reclaman la atención de otros paradigmas y de las relaciones que se establecen entre los mismos.

Consideramos los paradigmas de investigación como clases o tipos de praxeologías investigativas que comparten el núcleo central de la praxis y del logos. Nos parece útil distinguir cuatro tipos de paradigmas teniendo en cuenta la dialéctica entre comprensión y uso, la cual se puede aplicar a la investigación en cualquier campo, bien de las ciencias naturales o sociales. Nos apoyamos en el modelo del "Cuadrante de Pasteur" de Stokes (1997), interpretado en Godino (2021) para la investigación educativa.

Stokes (1997) clasifica las investigaciones según una matriz con cuatro celdas. En filas distingue si la investigación está o no inspirada por la búsqueda de comprensión fundamental de los fenómenos; en columnas, si está o no inspirada por el uso o aplicación práctica. De esta manera, el cuadrante I se considera como investigación básica-aplicada (ejemplo, la desarrollada por Louis Pasteur); el cuadrante II investigación fundamental o básica-pura (como la de Niels Bohr); el cuadrante III, la identificación de fenómenos singulares; el cuadrante IV, investigación aplicada pura (p. e., la de Thomas Alva Edison). En la figura 1 interpretamos estos cuadrantes e indicamos algunas praxeologías de investigación en educación matemática que pueden ser representativas de cada caso.

Las investigaciones científica y tecnológica (cuadrantes I y II) pretenden describir, explicar y predecir fenómenos; se caracterizan por la generalidad, el control de variables, el diseño experimental y los métodos cuantitativos. Por tanto, el paradigma de las mismas es el propio de las ciencias naturales, básicamente de tipo positivista (Cohen *et al.*, 2007).

El cuadrante III, en el caso de la educación, se puede representar con la indagación de tipo naturalista en sus diferentes versiones (etnografías, estudios de casos, biografías...). El cuadrante IV puede estar representado por la práctica reflexiva (investigación-acción en sus diferentes versiones); el foco de atención es la mejora de la práctica, bien de manera colaborativa o individual. Los cuadrantes III y IV se caracterizan por investigar fenómenos singulares, la

estructura de las revoluciones científicas. Margaret Masterman (1975) identifica hasta 21 formas diferentes en las que Kuhn utiliza la palabra paradigma.

interpretación, la etnografía, la observación participante, los métodos cualitativos, definiendo de este modo los paradigmas propios de las ciencias sociales y de manera particular las ciencias de la educación, las cuales son vistas por Bunge (1998) como sociotecnologías.

Un paradigma de investigación refiere, por tanto, a grandes categorías o tipos de praxeologías investigativas que comparten elementos destacados de las mismas (positivismo, constructivismo, etnografía, práctica reflexiva, etc.). Así podemos hablar de praxeologías positivistas (como la desarrollada por la TAD), praxeologías interpretativas/ etnográficas, sociocríticas, holísticas (EOS), etc. El programa de investigación refiere a una secuencia temporal de las actividades realizadas o planificadas por la comunidad correspondiente.

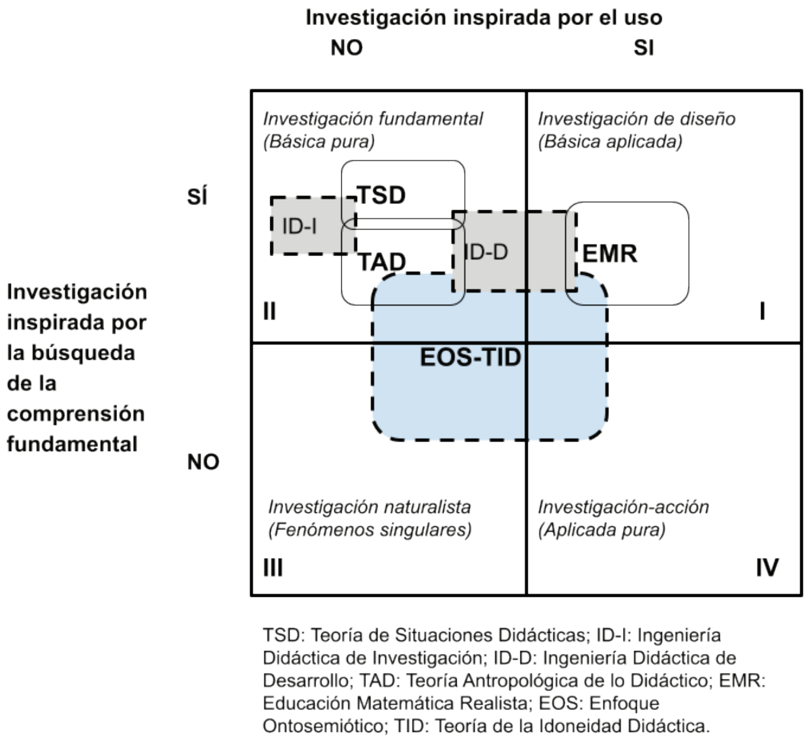


Figura 1. Tipos de investigaciones.

Como ejemplos de posibles praxeologías de investigación a incluir en cada cuadrante, en la figura 1 hemos incluido, en el cuadrante I la Educación

Matemática Realista (EMR) (Freudenthal, 1991; Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014), en el II la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 2002) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), si bien en estos casos, cuando se aplican ingenierías didácticas de desarrollo (ID-D) tienen también intersecciones con el cuadrante I.

El EOS incluye principios y herramientas para realizar investigaciones focalizadas tanto en la comprensión como en el uso. El módulo de la Idoneidad Didáctica (TID) pretende ser una herramienta que sirva de apoyo para las indagaciones profesionales, razón por la cual la representamos entre los cuatro cuadrantes.

5. LOS CRITERIOS DE IDONEIDAD COMO JUICIOS DE VALOR SOCIALES FUNDAMENTADOS

En este apartado reflexionamos sobre el constructo idoneidad introducido en diversos trabajos relacionados con los procesos didácticos (Godino *et al.*, 2007; Godino, 2013; Breda *et al.*, 2018), pero que puede ser útil para analizar la eficiencia en cualquier praxeología de investigación, aplicando un enfoque no weberiano a la noción de juicio de valor en la ciencia. Partimos de la base de que, en las ciencias sociales, y en particular, las educativas, es posible formular criterios de idoneidad, en forma de juicios de valor, *se debería hacer esto y no aquello*, en las circunstancias en que dichos juicios tienen carácter social y se explicita un fundamento para su formulación.

> Las emisiones o manifestaciones que llevan asociadas pretensiones de rectitud normativa o de veracidad subjetiva, de forma similar a como otros actos llevan asociada una pretensión de verdad proposicional o de eficiencia, satisfacen el requisito esencial para la racionalidad: son susceptibles de fundamentación y de crítica. (Habermas, 1999, p. 34)

Los criterios de idoneidad no tienen pretensiones universales de validez sino dependientes de los contextos de acción; sin embargo, conllevan una racionalidad, por lo que pueden ser objeto de escrutinio científico.

En el EOS se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza-aprendizaje como el grado en que este (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Este constructo sirve de punto de partida para desarrollar una teoría de la idoneidad de la actividad didáctica (TID-EOS), ya que aborda una problemática específica (identificación de juicios de valor compartidos en el seno de la comunidad de educación matemática, su formulación y estructuración), cuyo abordaje se apoya en un conjunto de supuestos sobre las características de los juicios de valor y procedimientos para su elaboración y progresivo refinamiento.

Los criterios de idoneidad no son entendidos como reglas positivistas a seguir o ejecutar como si fueran las normas de edificación de una estructura física. Por el contrario, se conciben como una trama de juicios de valor compartidos por una comunidad y fundamentados en los principios del sistema teórico EOS. Los sujetos encargados de su aplicación tienen que interpretar y sopesar cada criterio para alcanzar un equilibrio dinámico entre sus diferentes facetas, a fin de optimizar local y circunstancialmente la idoneidad de la actividad correspondiente (sea actividad de investigación, matemática o didáctica). Se prefiere usar el término idoneidad y no eficiencia o calidad por el carácter de principio interpretable y adaptable al contexto y circunstancias que se atribuye a cada criterio (Breda *et al.*, 2018).

Los criterios de idoneidad didáctica no son reglas de obligado cumplimiento ni juicios de valor subjetivos sino principios heurísticos que sintetizan los resultados de las investigaciones científicas y tecnológicas en educación matemática. La mayoría de estos criterios son compartidos por diversas praxeologías de investigación, como se indica en Godino (2013) y en Godino (2021). Se ofrecen como herramienta de apoyo de la indagación individual o colaborativa del profesional de la educación, que deberá interpretar y adaptar a sus circunstancias particulares los criterios globales y específicos para cada componente del proceso instruccional, ponderando el peso relativo a cada criterio.

La TID se podría apoyar en otros marcos teóricos diferentes del EOS, por lo que sienta las bases de un programa de investigación orientado a la identificación de los juicios de valor implicados en cada una de las facetas y componentes de una praxeología de investigación, así como la comparación y articulación de criterios entre distintas praxeologías. En Godino (2021) se inicia la comparación de los principios didácticos de la Teoría de Situaciones Didácticas, la Teoría Antropológica de lo Didáctico, la Educación Matemática Realista y los criterios de idoneidad basados en EOS.

Una teoría de la idoneidad para una actividad humana establece un nexo entre la investigación científica-tecnológica y la práctica reflexiva, ayuda en la toma de decisiones para abordar la triple dialéctica entre Fines, Valores y Medios, la cual recae en el práctico reflexivo. Los juicios de valor se pueden analizar, comparar, articular de manera racional. Toda actividad humana incorpora principios de eficiencia, incluso la actividad matemática; por esta razón la idoneidad didáctica se puede ampliar a idoneidad matemática, idoneidad económica, etcétera.

Con esta visión general, una Teoría de la Actividad Idónea será un sistema de juicios de valor –*se debería hacer esto y no aquello*– sobre cómo proceder para realizar una actividad de la mejor manera posible, teniendo en cuenta el contexto y circunstanciales específicas en que tal actividad tiene lugar. Estas teorías pueden ser implícitas o explícitas, personales o sociales, espontáneas o fundamentadas en resultados de investigaciones básicas o aplicadas, así como de la práctica reflexiva de los agentes implicados en la actividad.

6. PARADIGMAS DIDÁCTICOS, SUS TIPOS Y COMPONENTES

Gascón y Nicolás (2021) proponen la noción de paradigma didáctico de referencia PDR ligado a una praxeología de investigación educativa que incluye cuatro elementos: PDR (Paradigma Didáctico de Referencia) = Modelo Epistemológico de referencia, Fines, Medios y Fenómenos de referencia. Simbólicamente, PDR = [MER, FR, MR, φR].

Esta herramienta teórica se debe complementar con un análisis más detallado de los aspectos que se incluyen en cada componente, la inclusión de otros nuevos y analizando su estructura. En primer lugar, nos parece que los componentes que se añaden al MER para formar el paradigma, esto es, fines, medios y fenómenos, en realidad son constituyentes de cualquier praxeología, al menos en la versión ampliada que hemos descrito en la sección 3. En toda praxeología hay unos fines, básicamente la solución de una clase de situaciones-problemas o cuestiones, y unos medios (técnicas y tecnologías). Los fenómenos son regularidades observadas en la contingencia que son explicadas en términos del logos correspondiente, y por tanto son nuevos conocimientos que incrementan el acervo de la tecnología y teoría. En el logos se debería distinguir un núcleo básico formado por los principios o supuestos asumidos por la comunidad, y los resultados del trabajo realizado en la solución de los problemas.

Como hemos indicado, dado que el análisis de los fines, medios y fenómenos deben ser aspectos por considerar en toda praxeología, sea sobre la actividad didáctica o de otro tipo, no parece pertinente incluir estos componentes como algo definitorio de un paradigma didáctico. El término paradigma se debe reservar para clases o tipos de praxeologías investigativas. Los tipos de paradigmas generales y básicos descritos en la sección 4 son también aplicables al caso de las praxeologías didácticas: positivismo, etcétera.

Es necesario explicitar en el modelo epistemológico de referencia (MER) el aspecto ontológico, que debe ser diferenciado de la epistemología, reconociendo la naturaleza y tipos de objetos matemáticos y los procesos implicados en su emergencia. Los cuatro componentes de una praxeología, <Tarea, Técnica, Tecnología y Teoría>, si bien pueden ser suficientes para algunos análisis a nivel macro, pueden ser insuficientes para otros análisis a nivel micro. En el marco del EOS la noción de configuración de prácticas, objetos y procesos es una ampliación de la noción de praxeología matemática que permite reconocer la complejidad ontosemiótica del conocimiento matemático, lo que aporta nuevas explicaciones a hechos cognitivos y didácticos claves en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En el caso de las praxeologías didácticas consideramos que se deben tener en cuenta otros aspectos, como son los modelos instruccional, ecológico y cognitivo-afectivo (figura 2), los cuales no están contemplados de manera explícita en el concepto de praxeología didáctica, dada la generalidad con la que se define el concepto de praxeología. Esto tiene consecuencias en el tipo de fenómenos que se pueden identificar y explicar.

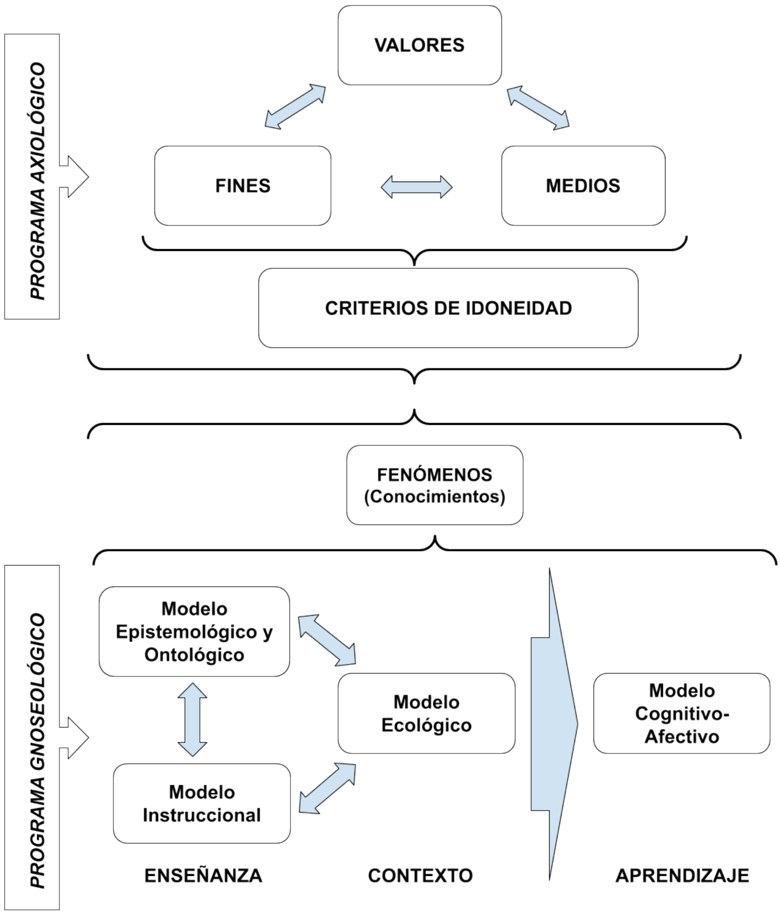


Figura 2. Componentes y estructura de un paradigma didáctico.

En la parte inferior de la figura indicamos los aspectos o dimensiones que se incluyen como constituyentes del componente gnoseológico (conocimientos) de una praxeología didáctica. El análisis del contenido, los patrones de interacción y medios instruccionales propios de la enseñanza se contempla con el modelo epistemológico-ontológico y el modelo instruccional. La enseñanza tiene lugar en un contexto que la condiciona y hace posible, cuyo análisis se realiza con el modelo ecológico. La finalidad de esa actividad de enseñanza está dirigida a promover el aprendizaje de los estudiantes, cuyo análisis requiere la aplicación de un modelo cognitivo-afectivo. Como resultado de esa actividad de investigación se obtienen conocimientos que pueden consistir en la identificación de fenómenos didácticos, entendidos como regularidades explicables en el marco teórico que se está aplicando en el diseño empírico.

En las praxeologías didácticas, como en cualquier otra, se debe incluir el componente axiológico, que en el caso del EOS está formado por el sistema de criterios de idoneidad didáctica, los cuales están estructurados y son derivados de los modelos epistemológico, ontológico, instruccional, ecológico y cognitivo-afectivo. La aplicación en la práctica educativa de los resultados de las investigaciones que se derivan de una praxeología de investigación no es directa. Esta aplicación requiere la intervención de otra comunidad usualmente diferente de la comunidad que interviene en las investigaciones de tipo I y II (figura 1). Se trata de la comunidad de los profesores de matemáticas que tienen que implementar el tipo IV de indagación profesional y, como se indica en la figura 2, supone la triple dialéctica entre fines, medios y valores. Entre las dos clases de investigación hay una brecha, la divisoria entre teoría y práctica, cuya superación requiere el desarrollo de un módulo de conexión, que en el caso del EOS está formado por la Teoría de la Idoneidad Didáctica (TID).

7. REFLEXIONES FINALES

Según lo indicado en las secciones anteriores, la Didáctica no se puede considerar solo como una disciplina científica, porque su objetivo no puede limitarse a describir y explicar una parcela de la realidad, como son los procesos de enseñanza y aprendizaje. Tiene que actuar sobre esa parcela para cambiarla, estudiando cómo hacer dichos procesos lo más idóneos posibles. Ese objetivo es propio de la tecnología la cual, no obstante, se apoya en la investigación científica para fundamentar los cambios que se proponen, comprendiendo los procesos educativos y los factores que los condicionan y soportan. Incluye, por tanto, un módulo de investigación básica. Esto es general para toda acción humana, que tiende de manera natural a ser lo más eficiente posible, discriminando las acciones más o menos eficientes, más o menos preferibles para satisfacer los objetivos pretendidos.

Incluso la concepción de la Didáctica como disciplina científica y tecnológica, atendiendo a la problemática de los cuadrantes I y II indicados en la figura 1 (investigación fundamental y básica aplicada) es limitada, ya que en las ciencias sociales y en particular en educación se están aplicando otros paradigmas de investigación que abordan las cuestiones y enfoques característicos de los cuadrantes III y IV. Se trata de los paradigmas interpretativo / etnográfico (cuadrante III) y práctico reflexivo (cuadrante IV). Entre ellos hay una brecha para cuya superación es necesario abordar un programa de investigación que conecte los resultados de la investigación científico-tecnológica con la práctica profesional.

La postura de Max Weber sobre la abstención de emitir juicios de valor en el caso del conocimiento científico es consecuencia de su carácter descriptivo, explicativo y predictivo. Pero este no se aplica a la sociotecnología cuyo objetivo es cambiar o mejorar una parte de la realidad social o educativa. Un fin esencial de la Didáctica es mejorar la educación, por lo que tiene que identificar y producir normas de actuación, basadas no en opiniones, gustos o preferencias subjetivas, sino fundamentadas en la investigación científica y tecnológica.

La complejidad de los procesos sociales, como son los de enseñanza y aprendizaje, lleva a que las aplicaciones de las "normas educativas" tienen que ser interpretadas y aplicadas localmente por el profesorado, bien de manera individual o colaborativa. Esto es, dichas normas no se pueden considerar como reglas a seguir de manera inflexible, sino como principios o heurísticas. Las regularidades y fenómenos observables y explicables en el marco de una teoría, en el caso de las disciplinas educativas tienen un carácter contextual y tienen que ser interpretadas y aplicadas por agentes individuales según el caso.

Por esta razón, en el EOS preferimos hablar de *criterios de idoneidad didáctic*a, no criterios o normas de calidad (Breda *et al*., 2018), que sería más propio de las reglas aplicadas a la producción en el caso de las ciencias y tecnologías de la naturaleza. Es importante reconocer que, de la investigación educativa, en sus facetas científica y tecnológica, se producen resultados que aspiran a cambiar para optimizar de la manera más idónea posible la enseñanza y el aprendizaje. En consecuencia, se debe incluir, como un componente de los paradigmas didácticos de referencia, la síntesis de criterios de idoneidad didáctica derivados de un programa asociado a una praxeología de investigación, como propone el EOS.

Las reflexiones incluidas en este artículo aportan nuevos aspectos al diálogo entre la TAD y el EOS iniciado en D'Amore y Godino (2007). Son inducidas por los postulados y herramientas de la TAD presentados por Gascón y Nicolás (2021) en su análisis de las relaciones entre el modelo epistemológico de las matemáticas vigente en una institución didáctica y las prácticas docentes que es posible desarrollar en la misma.

Aunque nuestro estudio es básicamente teórico, las reflexiones sobre los juicios de valor y los paradigmas didácticos tienen claras implicaciones para los procesos de formación de profesores y la práctica docente. Nuestra interpretación para el campo de la educación de los cuatro tipos de investigaciones del Cuadrante de Pasteur (Stokes, 1997) (figura 1) atribuye un papel clave al trabajo de los profesores (cuadrante IV), revelando la necesidad de elaborar herramientas de conexión entre los restantes cuadrantes. Esa es la finalidad de la TID desarrollada en el marco del EOS mediante la cual se aborda el programa axiológico que debe acompañar al programa gnoseológico propio de cualquier praxeología de investigación didáctica (figura 2). De esta manera se establecen también relaciones entre la investigación básica (Ciencia) y la investigación-acción (Práctica) en el esquema propuesto por Bunge (sección 2). En nuestro caso, la herramienta idoneidad didáctica está siendo ampliamente utilizada para analizar las secuencias didácticas diseñadas e implementadas por los profesores, con el fin de lograr una adecuada enseñanza de las matemáticas (Breda, 2020; Morales y Font, 2019; García Marimón *et al.*, 2021). También se está empleando para organizar programas de formación centrados en la reflexión sobre la práctica docente (Burgos *et al.*, 2020; Esqué y Breda, 2021; Giacomone *et al.*, 2018).

RECONOCIMIENTO

Trabajo realizado en el marco del Proyecto PID2019-105601GB-I00/AEI/ 10.13039/501100011033 y en el seno del Grupo FQM-126 del PAI (Junta de Andalucía, España).

REFERENCIAS

Artigue, M., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Research praxeologies and networking theories. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2381–2390). University of Rzeszów.

Bourdieu, P. y Wacquant, L. J. D. (1992). *An invitation to reflexive sociology.* Polity Press.

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema, 34*(66), 69-88.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L.R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13.

Brousseau, B. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer.
Bunge, M. (1998). *Las ciencias sociales en discusión: una perspectiva filosófica*. Editorial Sudamericana.
Bunge, M. (2016). *Between two worlds. Memoirs of a philosopher-scientist*. Springer.
Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). La cuestión de la idoneidad de los vídeos educativos de matemáticas: una experiencia de análisis con futuros maestros de educación primaria. *Revista Española de Pedagogía, 78*(275), 27-49. https://doi.org/10.22550/REP78-1-2020-07
Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73-112.
Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221–266.
Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. Routledge.
D'Amore, B. y Godino, J. D. (2007).El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(2), 191-218.
English, L. D. y Kirshner, D. (2016). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (3rd edition). Taylor & Francis.
Esqué, D. y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. *Uniciencia, 35*(1), 38-54.
Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97–124.
Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China lectures.* Kluwer
García Marimón, O., Morales Maure, L., Diez-Palomar, J. y Durán González, R. E. (2021). Evaluación de secuencias de aprendizaje de matemáticas usando la herramienta de los Criterios de Idoneidad Didáctica. *Bolema 35*(70), 1047-1072. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a23
Gascón, J. y Nicolás, P. (2017). Can didactics say how to teach? The beginning of a dialogue between the anthropological theory of the didactic and other approaches. *For the Learning of Mathematics, 37*(3), 26–30.
Gascón, J. y Nicolás, P. (2019). Research ends and teaching ends in the anthropological theory of the didactic. *For the Learning of Mathematics, 39*(2), 42–47.
Gascón, J. y Nicolás, P. (2021). Incidencia de los paradigmas didácticos sobre la investigación didáctica y la práctica docente. *Educación Matemática, 33*(1), 7-40.

Giacomone, B., Godino, J. D., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. *Educação e Pesquisa, 44*, e172011.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*, 111-132.

Godino, J. D. (2021). De la ingeniería a la idoneidad didáctica en educación matemática. *Revemop*, e202129, 1-26. https://doi.org/10.33532/revemop.e202129

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14* (3), 325-355.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135. doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The Onto-Semiotic Approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38–43.

Habermas, J. (1997). Teorías de la verdad. En J. A. Nicolás y M. J. Frápoli (Eds.), *Teorías de la verdad en el siglo XX* (pp. 543-596). Tecnos.

Habermas, J. (1999). *Teoría de la acción comunicativa, I. Racionalidad de la acción y racionalización social*. Taurus.

Korthagen, F. A. J. (2007). The gap between research and practice revisited. *Educational Research and Evaluation, 13*(3), 303–310.

Kotarbiński, T. (1955/1965). Praxiology: An Introduction to the Sciences of Efficient Action. Pergamon Press.

Lacey, H. (1999). *Is science value free? Values and scientific understanding*. Routledge.

Masterman, M. (1975). La naturaleza de los paradigmas. En I. Lakatos y A. Musgrave (Eds.). *La crítica y el desarrollo del conocimiento* (pp. 159-202). Grijalbo.

McIntyre, D. (2005). Bridging the gap between research and practice. *Cambridge Journal of Education*, *35*(3), 357-382. https://doi.org/10.1080/03057640500319065

Morales, Y. y Font, V. (2019). Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. *Educaçao e Pesquisa, 45*, 1-20.

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 40*(2), 317-327. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0090-3.

Reigeluth, C. M. (2000). ¿En qué consiste una teoría de diseño educativo y cómo se está transformando? En C. M. Reigeluth (Ed.), *Diseño de la instrucción. Teorías y modelos. Un nuevo paradigma de la teoría de la instrucción* (pp. 15-40). Santillana.

Rudner, R. (1953). The scientist qua scientist makes value judgments. *Philosophy of Science, 20* (1), 1-6.

Rugina, A.N. (1998). The problem of values and value–judgments in science and a positive solution: Max Weber and Ludwig Wittgenstein revisited. *International Journal of Social Economics, 25* (5), 805-854. https://doi.org/10.1108/EUM0000000004522

Stokes, D. E. (1997). *Paster's quadrant. Basic science and technological innovation*. Brookings Institution Press.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. En S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8.

Von Mises, L. (1949). *Human action: A treatise on economics*. Yale University Press.

Weber, M. (2010). *Por qué no se deben hacer juicios de valor en la sociología y en la economía*. [The Meaning of "Ethical Neutrality" in Sociology and Economics]. Alianza Editorial. (Trabajo original publicado en 1917)

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2- 3), 133-170.

Correspondencia

Juan D. Godino

Dirección: Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación,
Universidad de Granada
18071 Granada (España)
jgodino@ugr.es

 https://doi.org/10.24844/EM3501.10

Una experiencia de formación para futuros maestros de educación primaria: implementación de una actividad de geometría y de medida

A Teaching Experience for Prospective primary school Teachers: implementation of a geometric and measure activity

María Teresa Costado Dios[1]

Resumen: El presente documento relata una experiencia de clase en el área de matemáticas en el Grado de Maestro de Educación Primaria en la Universidad de Cádiz. Dicha experiencia consistió en la realización de un taller combinando conocimientos y destrezas asociados a los ámbitos geométrico y de medida de las matemáticas. En el cual se pretendía que los alumnos analizaran y reflexionaran acerca de los conocimientos relacionados con ambos ámbitos de las matemáticas para la resolución de una actividad cercana a la vida real, y desarrollaran competencias necesarias para su futura profesión docente. En esta experiencia de clase se trabaja desde una matemática realista contextualizada en la profesión docente, alejándolo del modelo tradicional de enseñanza y estimulando a los estudiantes para que construyan su propio conocimiento desde su particular autonomía y experiencia. Se muestran las producciones de los estudiantes futuros maestros de educación primaria y se ofrecen algunas conclusiones derivadas de la actividad. Se presenta este trabajo como una contribución de buena práctica o iniciativa de innovación docente a modo de experiencia motivadora para orientar a otros docentes en el campo de la educación.

Fecha de recepción: 1 de mayo de 2021. **Fecha de aceptación:** 25 de octubre de 2022.

[1] Departamento de Didáctica, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Cádiz, Campus de Puerto Real, mariateresa@gm.uca.es, orcid.org/0000-0002-2672-4061

Palabras clave: *conocimiento matemático; enseñanza de las matemáticas; competencia matemática; geometría y medida, formación de profesores.*

Abstract: This document describes an experience of class in the mathematics area in the Primary Education Degree at the University of Cádiz. Specifically, in the subject of Mathematical Knowledge II. This experience consisted in the realization of a workshop combining knowledge and skills associated with the geometry and measure knowledge of the mathematics. In this workshop, the students must analyse and reflect on the knowledge for the resolution of an activity close to the reality, and they will develop necessary skills for their future profession. In the classroom experience, we work from a realistic mathematics contextualized in the teaching profession, moving it away from the traditional teaching model and stimulating students to build their own knowledge from your own autonomy and experience. The productions of future primary school teachers are shown, and some conclusions derived from the activity are offered. This work is presented as a contribution of good practice or teaching innovation initiative like a motivating experience to guide other teachers in the field of education.

Keywords: *mathematical knowledge; mathematics teaching; mathematical competence; geometry and measure, teacher professional development,*

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo tiene el propósito de dar a conocer una experiencia de clase de alumnos universitarios futuros maestros de educación primaria en matemáticas. Es el resultado de una investigación que persigue como uno de sus objetivos evaluar los conocimientos adquiridos por los maestros en formación a la hora de realizar dicha experiencia, así como las competencias desarrolladas en su ejecución. Por tanto, en esta investigación se entrelazan diferentes temáticas, como son la formación de futuros maestros, el conocimiento matemático del futuro profesor y las competencias profesionales. La preocupación de un bajo nivel en matemáticas de los jóvenes derivado de los últimos informes PISA realizados por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (2018) pone en evidencia la necesidad de prestar atención a la formación de quienes enseñarán matemáticas en un futuro. En consecuencia, se ha diseñado una experiencia de clase para los alumnos del Grado de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Cádiz entrelazando el ámbito geométrico y el de medida de las matemáticas en forma de taller.

Las consideraciones de conexiones internas dentro de una misma materia corresponden con la perspectiva competencial de estructuras curriculares internacionales como el National Council of Teachers of Mathematics (2003), que también recoge la Orden de 17 de marzo de 2015 del currículo de Educación Primaria en Andalucía. Es necesario relacionar conceptos para no ver los bloques temáticos en el área de matemáticas como independientes y dar importancia al hecho de que las matemáticas no son ideas aisladas e inconexas. Se presenta dicho taller como la vinculación entre dos ramas de las matemáticas y como la oportunidad ideal para que los alumnos experimenten de primera mano un trabajo de conexión curricular. Es decir, comprender cómo se conectan y relacionan dos ámbitos matemáticos entre sí, y cómo se puede con ello interpretar la realidad que nos rodea (Albarracín y Badillo, 2018).

La idea de realizar un taller de conexión curricular en el área de matemáticas con maestros en formación, viene de tener en cuenta los propios principios que desarrolla la Orden del 17 de marzo de 2015. Concretamente, el artículo 3 versa sobre principios para el desarrollo del currículo donde en el punto 4 habla del diseño de tareas motivadoras que favorezcan la capacidad de aprender por sí mismos, haciendo uso de materiales diversos. Además, el artículo 4 habla de orientaciones metodológicas de actividad y participación del alumnado. La mejor manera de que el alumnado, futuros maestros, aprenda como debería enseñar matemáticas el día de mañana es que ellos en primera persona experimenten situaciones-problema reales. Estos maestros en formación deberán conseguir que su alumnado aprenda y comprenda un conocimiento matemático determinado (Zabalza-Beraza y Zabalza-Cerdeiriña, 2012), y una forma es que ellos experimenten el mismo proceso cognitivo para tomar conciencia de las dificultades de dicho proceso. Se trata de ir más allá de la enseñanza tradicional dando la posibilidad al estudiante de experimentar una situación de aprendizaje de construcción de conocimiento y reflexión acerca de dicha construcción. En el campo de la didáctica de la matemática Azcárate y Cardeñoso (2021), indican que la forma de elaborar el conocimiento profesional de un docente es a través de la interacción directa con los problemas profesionales. Dicho conocimiento profesional no debe ser transferido, sino construido por cada discente en formación mediante procesos reflexivos sobre sus particulares situaciones y, analizándolas con otros compañeros y/o con los profesores. Igualmente, Zabalza (2011) expresa que un docente se forma a partir de sus propias experiencias vividas en los diferentes niveles de educación, y que así será como el maestro confecciona su propio modelo didáctico de enseñanza. También, Zabalza-Beraza y Zabalza-Cerdeiriña (2012) expresan la idea de que los docentes y educadores son un modelo por imitar por nuestros estudiantes, más allá de los contenidos a explicar pues el alumnado se nutre de la forma en que piensa el docente, lo que ven hacer y cómo se les trate. De esta forma el estudiante desarrolla una fuerte empatía hacia modelos de vida sensatos, disfrutan de lo que están haciendo y se motivan para la profesión para la que se están formando.

Es necesario hacer conscientes a los maestros en formación que sus peculiares concepciones sobre el conocimiento, el aprendizaje y enseñanza de dicho conocimiento, es parte fundamental del saber profesional. Además, dicho saber profesional es un proceso formativo donde los conocimientos y creencias son parte esencial, donde el conocimiento se construye mediante la interacción del conocimiento que ya posea con la nueva información surgida en situaciones problema relevantes que posibiliten la puesta en común de ideas, conjeturas y soluciones o incluso la confrontación de estas entre iguales para generar un aprendizaje significativo. Lo fundamental es fomentar el aprendizaje de otra persona y promover la participación de los estudiantes en un proceso constructivo en una nueva visión de la enseñanza. Es decir, crear situaciones estimulantes donde el estudiante tenga el control sobre su propio proceso de aprendizaje y aprendan en mayor profundidad (Ruiz-Huerta, 2009). Con ello se pretende dar un mayor nivel de protagonismo y autonomía a los estudiantes planteando una docencia centrada en el aprendizaje y no en la enseñanza.

En el siguiente apartado se expone la fundamentación teórica que sustenta nuestra investigación para posteriormente describir el contexto de realización de la experiencia de formación, así como el análisis de esta y los productos finales creados por los futuros maestros de educación primaria. Finalmente, se presentan las conclusiones de esta investigación.

2. MARCO TEÓRICO

Lo que se aprende en los primeros cursos del Grado de Maestro de Educación Primaria, sienta las bases sobre las cuales se edifica el conocimiento matemático puesto al servicio de la enseñanza. Engloba, básicamente, aquello de lo que debe disponer un docente para generar una buena enseñanza. Shulman (1986) fue el precursor de la línea de investigación sobre la formación del profesor, con una propuesta de categorías para conceptualizar la clase de conocimiento requerido en la enseñanza de cualquier materia. Ball *et al*. (2008) orientan la investigación de Shulman hacia las matemáticas, e identifican seis dominios de conocimiento matemático para enseñar, destacando el conocimiento común del contenido y el conocimiento especializado del contenido. Gonzato *et al*. (2011), incorporan un tercer aspecto como conocimiento ampliado del contenido. En su investigación estos autores muestran que los maestros en formación consiguen resolver correctamente las tareas geométricas relacionadas con los conocimientos común y ampliado, pero muestran debilidades en el conocimiento especializado en el sentido de tener dificultades para identificar los objetos y procesos, así como en justificar sus procedimientos. Sgreccia y Massa (2012), definen el conocimiento específico del contenido como aquel que corresponde a los usos específicos que surgen en el proceso de enseñanza, a las adecuaciones, adaptaciones y secuenciaciones realizadas por el docente para transformarlo en contenido enseñable, conocimiento y habilidades matemáticas. Estos dominios están definidos, así como sus subdominios en la teoría desarrollada por Carrillo *et al*. (2022). Dentro del dominio del conocimiento matemático por parte del maestro, se define el subdominio del conocimiento de los temas (KoT – Knowledge of Topics) como el conocimiento sobre propiedades, para describir o caracterizar un concepto, su definición (es) o sus diferentes registros. También define el conocimiento de la estructura matemática (KSM - Knowledge of the Structure of Mathematics) como el conocimiento de las relaciones o conexiones entre distintos contenidos matemáticos, y el conocimiento de la práctica matemática (KPM - Knowledge of Practices in Mathematics) como el de las formas de crear o producir que son propias de la actividad matemática (Vasco-Mora *et al*., 2016, Montes *et al*., 2022). Existen otros dominios que no son aquí definidos pues no son objeto de estudio relacionado con nuestra investigación.

Las personas piensan y aprenden a través de experiencias cuando un sujeto piensa e interpreta lo sucedido. Interpretar la experiencia significa pensar en la acción antes y después de ejecutarla, analizar cómo los objetivos se relacionan con el propio razonamiento de la situación (Guzmán y Saucedo, 2015). En esta misma línea, Larrosa (2003), señala que a partir de la experiencia es posible dar sentido a lo sucedido. Es por ello por lo que se plantea una experiencia de enseñanza contextualizada de las matemáticas, donde se haga predominar y dar sentido a los conceptos y nociones necesarios para la resolución de esta frente al aprendizaje de destrezas, algoritmos o fórmulas memorizadas en situaciones descontextualizadas. Se deben trascender los procesos de enseñanza y aprendizaje basados en la exposición magistral en el aula, y poner a los estudiantes en contacto con la realidad que los rodea. Al vivir la experiencia de la situación-problema real, se pretende que el alumnado sea creativo e innovador, situación indispensable para atender a los problemas del mundo real a los que se enfrentará profesionalmente, idea básica de nuestro taller.

Igualmente, Zabalza-Beraza y Zabalza-Cerdeiriña (2012) expresan que para facilitar el aprendizaje el docente debe saber motivar, saber organizar situaciones de aprendizaje adaptadas a los estudiantes, así como supervisar y tutorizar sus actividades y ayudarles a resolver dificultades. En dichos momentos de aprendizaje, el estudiante debe entender no solo lo que se hace sino como se hace, dando sentido al conocimiento al vincularlo con experiencias directas incrementando así la intervención del alumnado resultando en un aprendizaje efectivo.

Que un maestro en formación posea un conocimiento completo de la materia a impartir en un futuro profesional, fue el primer pilar fundamental a la hora de crear el taller e iniciar esta investigación. Para poder enseñar, el profesor debe tener conocimientos sólidos del tema que está enseñando que le permitan ayudar al alumno a comprender, aparte del soporte didáctico del que disponga (Torres, 2015). Dicho conocimiento matemático determina la gestión que se produzca en el aula del proceso de enseñanza y aprendizaje (Llinares, 1998). Igualmente, Fernández-Enguita (2006) en su artículo sobre la importancia del profesorado dice que la efectividad de la función del profesor consiste en elementos que dependen de él mismo, como conocer lo que tiene que enseñar, saber estructurarlo y explicarlo, es decir, saber organizar un proceso de enseñanza y aprendizaje mostrando la utilidad de lo que enseña logrando una mínima empatía con el alumnado. Esta publicación aparece en la Revista de Educación, editada por el Ministerio de Educación Español, dentro del número monográfico de 2006 dedicado a la tarea de enseñar donde concluyen que cualquier país necesita contar con un profesorado de calidad sea cual sea el nivel educativo.

El segundo pilar fundamental para la creación del taller, fue tener en cuenta las competencias que todo maestro en formación debe desarrollar y adquirir para su futura profesión, es decir, los conocimientos, habilidades y actitudes que capacitan para el buen desempeño de la profesión docente, viendo la enseñanza como una visión compleja que requiere de una formación especializada. Con el inicio del Plan Bolonia, se creó una organización educativa encargada de coordinar el Espacio Europeo de la Educación Superior, donde una de las medidas implementadas fue la creación de los grados universitarios que se imparten hoy en día (Bejarano-Franco, 2008). Estos cambios en la educación trajeron consigo la reducción de horas de clase y de ratio de alumnos por clase, así como el énfasis en el aprendizaje autónomo del estudiante y por competencias. Es en la universidad donde se establecen los fundamentos teóricos y prácticos del saber profesional y donde los estudiantes adquieren las herramientas básicas de actitudes y técnicas docentes para el desempeño de su profesión futura como maestros de educación primaria (Zabalza-Beraza y Zabalza-Cerdeiriña, 2012). Una buena formación docente debe responder a las características generales de una formación profesional, así como a las características de la etapa educativa en donde vayan a ejercer. La dirección de la enseñanza actual por competencias, creando situaciones de experiencias estimulantes e intensas para el desarrollo personal y la integración social constituyen el eje didáctico de las buenas prácticas (Zabalza, 2012). Las competencias que se han considerado en nuestro caso son la de comunicación, la digital, la social y la matemática, de las cuales se habla a continuación.

Para un futuro maestro, el adecuado desempeño de su labor docente depende de la capacidad de comunicación, es decir, de las habilidades que posibilitan la apropiada participación del sujeto en situaciones donde intervenga la comunicación. Relacionada con dicha competencia encontramos que la voz, el tono, la posición del cuerpo, así como las palabras y gestos que se usan, son parte fundamental para dominar dicha competencia. Convertirse en un docente con excelencia desarrollando una buena comunicación educativa permitirá establecer una relación educativa de calidad entre el futuro maestro y su alumnado. Hacer que los alumnos se expresen en público les hace perder el miedo al ridículo y vergüenza, así como tener que improvisar para adaptarse a cada persona o situación (Tijeras y Monsalve, 2018).

Una de las dimensiones del marco europeo sobre la competencia digital es la comunicación y colaboración, así como la creación de contenidos digitales y resolución de problemas. En España (Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y Formación del Profesorado, 2017), este marco europeo se ha traducido en diversas iniciativas relacionadas con la competencia digital. Las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) son cada vez más usadas en el entorno educativo como prácticas innovadoras en las distintas etapas educativas. Por ello es necesario que un maestro en formación adquiera dicha competencia digital para desarrollar actividades pedagógicas en un futuro profesional facilitando la incorporación de las TIC en la educación. Un docente requiere de habilidades y destrezas en el uso de diversas y diferentes TICs para efectuar una praxis profesional tanto de gestión como de acceso al conocimiento. Rodríguez-García (2019) realizó una investigación en el Grado de Maestros de Educación Primaria y concluye que 53% de la muestra participante acaba la titulación con un nivel competencial digital intermedio y 41% con un nivel básico general, adquirido de forma autodidacta o a través de asignaturas del grado. Por otro lado, Pegalajar (2017), concluye en su investigación que se debe potenciar la formación didáctica del docente en el quehacer diario hacia el uso de las TIC para la atención a la diversidad, hacia las posibilidades didácticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de aquellos alumnos que presentan necesidades especiales. De esa forma dice favorecer su inclusión y normalización de las condiciones de vida del alumnado dentro del aula. Finalmente, como apunta el documento creado por la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2008), la formación profesional de los maestros se integra en un marco más amplio de reforma educativa. Es necesario desarrollar en los estudiantes habilidades indispensables para el siglo XXI y lograr que los docentes utilicen recursos TIC para mejorar sus estrategias de enseñanza de manera que ayude a optimizar la calidad del sistema educativo a fin de contribuir en el desarrollo económico y social del país.

Hoy en día la sociedad demanda la formación de individuos con habilidades que les permita desempeñarse no solo en la escuela, sino en su entorno cotidiano como profesionales y ciudadanos responsables. Aprender matemáticas es un proceso en donde los individuos deben desarrollar la comprensión de conceptos, dominio de procedimientos y habilidades matemáticas en la medida en que abordan situaciones que les demandan poner en juego sus conocimientos, habilidades, competencias e integrar experiencias (Vargas-Alejo *et al.* 2018). Ser competente en matemáticas, significa poseer:

1. Comprensión conceptual, donde se deben aprender conceptos, operaciones y relaciones matemáticas.
2. Fluidez procedimental, o lo que es lo mismo, desarrollar la habilidad para llevar a cabo procedimientos de manera flexible, eficaz y eficiente.
3. Competencia estratégica en el sentido de saber formular, representar y resolver problemas matemáticos.
4. Razonamiento adaptativo, siendo esta la capacidad de explicar y justificar su propia forma de pensar de manera lógica y reflexiva.

5. Disposición productiva para poseer una concepción de la matemática como disciplina útil y valiosa, y una noción de sí mismo de confianza en las propias capacidades.

El desarrollo de la competencia matemática requiere la creación de un proceso de aprendizaje activo/constructivo, contextualizado y colaborativo, donde el estudiante construye significados y conocimientos matemáticos realizando tareas junto a sus iguales. El desarrollo de conocimiento sobre conceptos y habilidades sigue un proceso evolutivo que va desde los sistemas conceptuales burdos, poco estructurados a sistemas conceptuales más robustos, organizados y formalizados, acordes con las experiencias de la persona (Lesh y Yoon, 2004). La comprensión de los conceptos se incrementa y robustece en la medida en que el individuo comunica y comparte sus modelos cognitivos con otros. En este sentido, el conocimiento desarrollado por una persona se refleja, no solo en la descripción de los conceptos, los procedimientos y los cálculos utilizados, sino en la explicación de estos de forma oral y/o escrita. Se considera que el intercambio entre iguales permite comparar, contrastar, unificar y consolidar ideas respecto a las nociones y conocimientos matemáticos que se ponen en juego, para profundizar y reflexionar sobre ellos para la ejecución de la experiencia formativa. El proceso de desarrollo de conocimiento es social, donde la reflexión colectiva redunda en el avance hacia niveles de comprensión cada vez más altos respecto al conocimiento matemático puesto en juego en cualquier actividad. Por lo tanto, es importante propiciar que los alumnos comuniquen sus interpretaciones en diferentes formas y contextos a sus compañeros y al instructor (Vargas-Alejo *et al.*, 2018) para conseguir un aprendizaje social y significativo.

La competencia social habilita a las personas para participar plenamente en la vida cívica gracias al conocimiento de conceptos, estructuras sociales y políticas, y al compromiso de participación democrática (Pagès, 2009). La finalidad de dicha competencia es preparar a las personas para participar en la vida social en comunidades cada vez más diversificadas y poder resolver conflictos. Para desarrollar esta competencia en el ámbito educativo se hace necesario trasladar al aula problemáticas reales y generar conexiones entre diferentes conocimientos. Se debe incentivar al alumno en el aula al diálogo, al trabajo en equipo, en hacer que experimente situaciones reales y tenga que realizar acciones concretas de colaboración, comunicación, debate y pensamiento crítico.

Como tercer pilar fundamental de esta investigación se ha tenido en cuenta la idea de autonomía educativa, habilidad indispensable en la nueva realidad social, que permite al alumno ser capaz de fortalecer otras competencias y habilidades en distintos aspectos de su vida académica, profesional y personal. Un alumno, cuando trabaja de manera autónoma, va autocontrolándose, planificando sus estrategias, corrigiendo sus errores y conociendo sus limitaciones, apoyándose en los recursos y regulando su propia conducta, en el sentido de actuar según su criterio y conocimientos y se va adaptando a la situación. Toro (2004), considera que el estudiante universitario pueda hacer un uso constructivo y creativo de su autonomía, es decir, debería generar, integrar, apropiarse y aplicar el conocimiento. Para ello, el docente universitario debería crear un ambiente fértil (dotado con un conjunto de recursos e instrumentos) para despertar el deseo de aprendizaje. La configuración de ambientes ricos en estímulos debería ser el marco principal de la actuación docente. Los ambientes de aprendizaje propician el desarrollo, aprendizaje y socialización de los estudiantes en los distintos ámbitos curriculares.

Por otro lado, Vera-Pérez (2013) concluye que la educación es una herramienta para la autorrealización del estudiante, que requiere de calidad, y cuyos mecanismos deben centrarse en sus necesidades básicas de aprendizaje. La educación de calidad debe generar desarrollo de la autonomía y crear estudiantes constructivos de su aprendizaje. Esta idea de autonomía educativa forma parte de algunas corrientes pedagógicas y de los objetivos de desarrollo sostenible de la Organización de la Naciones Unidas (2015). Concretamente el objetivo 4 sobre educación, pretende garantizar una educación inclusiva, equitativa, de calidad y promover oportunidades de aprendizaje. Además, critica que más de la mitad de los niños y adolescentes de todo el mundo no están alcanzando los estándares mínimos de competencia en lectura y matemáticas. Tres de sus metas son:

- De aquí a 2030, asegurar el acceso igualitario de todos los hombres y las mujeres a una formación técnica, profesional y superior de calidad, incluida la enseñanza universitaria. (Organización de las Naciones Unidas [ONU], 2015)
- De aquí a 2030, aumentar considerablemente el número de jóvenes y adultos que tienen las competencias necesarias, en particular técnicas y profesionales, para acceder al empleo, el trabajo decente y el emprendimiento. (ONU, 2015)
- De aquí a 2030, asegurar que todos los alumnos adquieran los conocimientos teóricos y prácticos necesarios para promover el desarrollo sostenible, entre otras cosas mediante la educación para el desarrollo sostenible y los estilos de vida sostenibles, los derechos humanos, la igualdad de

género, la promoción de una cultura de paz y no violencia, la ciudadanía mundial y la valoración de la diversidad cultural y la contribución de la cultura al desarrollo sostenible. (ONU, 2015)

3. IMPLEMENTACIÓN DE LA ACTIVIDAD

Con base en el marco teórico expuesto se ha creado un ambiente de aprendizaje rico y estimulante para despertar el deseo de aprender del estudiante y, pueda desarrollar un aprendizaje autónomo. Atendiendo a sus necesidades de formación de conocimiento matemático para trabajar las técnicas de documentación, observación, análisis, reflexión y argumentación, así como las competencias sociales, de comunicación, digital y matemática.

3.1. Creación del taller

El primer paso fue la creación del taller por parte del docente para establecer las nociones, procedimientos y competencias matemáticas que los alumnos debían poner en práctica. El conocimiento matemático necesario es: definiciones, propiedades y características de los polígonos, poliedros y cuerpos de revolución; construcción de sus desarrollos, planos bidimensional (2D) y plegado de estos; construcción y visualización de una figura tridimensional (3D) a partir de otras figuras por composición; y análisis de figuras para cálculo de áreas y volúmenes. De esta forma se pone en práctica un conocimiento concreto de geometría (contenido matemático–subdominio KoT), relacionándolo con el de medida (conexiones entre contenidos–subdominio KSM), con la utilidad real de las matemáticas y las formas de crear o producir propias del trabajo matemático (subdominio KPM). Las competencias por desarrollar eran la social (trabajo en equipo), comunicativa (exposición oral e informe escrito del trabajo), digital (realización de la presentación o video) y matemática (conocimiento, procedimientos, argumentaciones y razonamientos del trabajo realizado). La evaluación final tendría en cuenta todos estos aspectos. Por ello, esta se dividía en la calificación del objeto creado, del informe con las correspondientes reflexiones y la presentación por parte del alumnado del trabajo realizado durante la ejecución del taller (presencial en clase o a través de video).

El taller consistía en la creación de un objeto 3D original formado por diferentes poliedros y/o polígonos combinando varios materiales para posteriormente realizar un informe escrito a modo de diario, recogiendo toda la información relevante del proceso de creación, así como detallando la utilidad del objeto y los conocimientos matemáticos básicos de geometría y de las magnitudes, junto a su medida, implicados en la construcción de dicho objeto. También el alumnado tuvo que hacer el desarrollo 2D de uno de los poliedros que forma parte del objeto, como una figura única en el plano a escala, donde tenían que calcular su área total y su volumen, poniendo de manifiesto sus conocimientos matemáticos en todo el proceso.

3.2. Participantes

El contexto en el que se ha desarrollado la experiencia de formación de maestros es en el área de matemáticas del Grado de Maestro de Educación Primaria en la Universidad de Cádiz, durante tres cursos seguidos 2018/2019, 2019/2020 y 2020/2021 en la asignatura de Conocimiento Matemático II (donde solo se trabaja el conocimiento, no su didáctica, es decir, no el cómo enseñar, sino el qué deben enseñar los maestros). Las horas del taller se intercalaban con horas teóricas y prácticas de implementación del temario de la propia asignatura. Con lo que se realizaba el taller a la misma vez que el alumnado adquiría el conocimiento necesario para implementarlo en la experiencia, dado que se asume que la construcción del conocimiento es progresiva. El número de alumnos/as que realizó el taller fue de 199, siendo de 61 en el curso 2018/2019, de 68 en 2019/2020 y de 70 en 2020/2021, agrupados en equipos de entre tres y seis personas, dando lugar a 13 grupos de trabajo, en los tres cursos. Todos los grupos en ambos cursos presentaron sus producciones con mayor o menor éxito en su ejecución.

La experiencia se desarrolló durante dos clases prácticas de hora y media de duración elaborando el objeto, así como planteando al profesorado las dudas surgidas durante la realización de este o pidiendo consejo. Se destinó otra clase para que el alumnado expusiera su trabajo al resto de compañeros y el docente pudiera calificar dicha exposición. Particularmente, por falta de tiempo esta tercera clase en los cursos 2019/2020 y 2020/2021 fue sustituida por la realización de un video a modo de presentación e igualmente evaluable. Cabe mención especial el curso 2020/2021 debido a la situación mundial derivada del Covid-19. Las clases se desarrollaron virtualmente estando los alumnos en sus casas y el alumnado tuvo que ir elaborando el objeto y el informe por partes. Cuando la situación sanitaria lo permitió, el alumnado pudo reunirse para encajar las diferentes piezas o partes del objeto y completarlo, terminar a su vez el informe y realizar la presentación en formato video.

3.3. Analisis de las producciones de los estudiantes

Los estudiantes presentaron trabajos de temáticas muy diversas, usando diferentes materiales y multitud de formas geométricas combinando tanto poliedros como polígonos. Los resultados fueron muy satisfactorios, donde la gran mayoría obtuvieron una aceptable o buena calificación, siendo algún trabajo excelente, demostrando su esfuerzo y dominio de la materia en cuestión, así como la correcta evolución de su aprendizaje.

En la parte de evaluación y análisis de los trabajos presentados se buscaba que el alumnado demostrara los conocimientos matemáticos adquiridos, así como las competencias desarrolladas. Los conocimientos aparecían reflejados en el objeto creado, en el sentido de una buena composición de figuras, creación de estas, plegado de desarrollos planos, proporcionalidad de las partes del objeto y visualización del mismo. También los conocimientos matemáticos aparecen contemplados en el informe escrito a modo de conceptos y procedimientos, y en el diálogo de la presentación del trabajo. Estos conocimientos forman parte de la competencia matemática, así como las argumentaciones y razonamientos utilizados en el informe y presentación para explicar el objeto creado. La competencia comunicativa es evaluada en el informe escrito y en la presentación o video, y en este último también la competencia digital. Y en el desarrollo del taller, la competencia social es evaluada como el trabajo en equipo.

A continuación, se presentan algunos de los objetos creados por los alumnos en los tres cursos analizados a modo de ejemplos de la experiencia realizada.

La figura 1 son dos ejemplos concretos de objetos realizados por el alumnado del curso 2018/2019. A la izquierda un coche de la película Cars, que a su vez era un estuche en su interior (apertura en la parte de atrás) y un sacapuntas en la parte delantera. Los estudiantes en su informe presentaron este objeto como un proyecto a realizar en su futura clase de primaria donde conectarían las TIC (ver la película), las artes plásticas con las matemáticas (formas geométricas) así como la utilidad de estuche como objeto cotidiano de la clase. En la misma figura 1, derecha, se muestra un barco pirata, donde los estudiantes presentaron un proyecto conectando la lengua y gramática con las matemáticas, pues los niños de primaria de forma individual deberían de escribir una redacción de aventuras para fomentar la imaginación, creatividad y desarrollar la lecto-escritura, aparte de construir el barco.

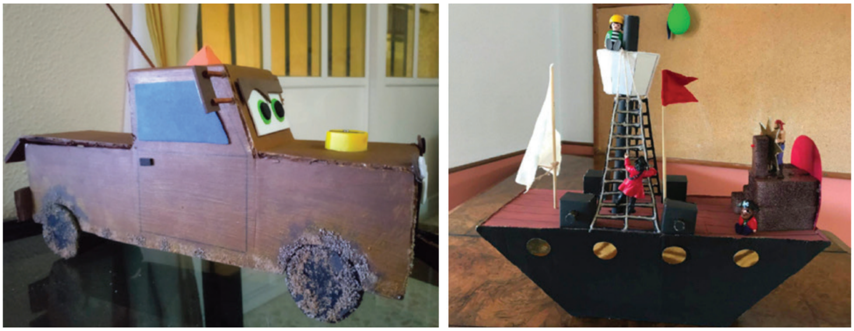


Figura 1. Ejemplos de objetos elaborados por parte del alumnado en el curso 2018/2019, izquierda el coche – estuche y derecha un barco pirata.

En la figura 2 derecha se muestra un Papá Noel que era una máquina de caramelos en su interior con un dispositivo de dispensador en la parte posterior. Las alumnas crearon este objeto pensando en relacionar las matemáticas con la Navidad y además que sirviera como objeto de la clase para que cuando un alumno participara realizando una pregunta o dando respuesta a alguna otra se llevara un caramelo (premio). Con la misma idea de proyecto, hacer un objeto de clase para fomentar y premiar la participación de los niños de primaria, en el curso 2019/2020 un grupo presentó una maqueta de canastas, donde cada una de ellas tenía una puntuación, la cual se sumaría como premio a la nota final del alumno cada vez que este participara de algún modo en clase. La elección de las canastas fue porque entre todos los miembros del grupo eligieron el baloncesto como deporte favorito.

Figura 2. Ejemplos de objetos elaborados por parte del alumnado en el curso 2018/2019 (derecha – Papá Noel – máquina de caramelos) y 2019/2020 (izquierda – campo canastas – puntos). La utilidad de los dos objetos era el premiar la participación en clase de sus futuros alumnos de primaria.

El tema de los animales (figura 3) es el más repetido pues el proyecto que presentan es realizar un animal conectando las ciencias naturales con las matemáticas, pudiendo analizar el hábitat, costumbres y anatomía del animal, así como las formas geométricas con las que ha sido construido (igual que en el resto de objeto elaborados por el alumnado). Estos ejemplos corresponden a trabajos presentados en los tres cursos que se realizó la experiencia.

Figura 3. Ejemplos de animales elaborados por el alumnado durante los tres cursos.

Otros ejemplos de proyectos presentados del curso 2019/2020 (izquierda) y del curso 2020/2021 (derecha) se muestran en la figura 4. El primero de ellos (izquierda) relacionaría las matemáticas con la naturaleza y la geografía de España, pues la idea sería crear una cueva con estalactitas y estalagmitas (pirámides de diferentes bases) y que los futuros alumnos de primaria buscaran acerca del proceso de creación de estas, y dónde existen cuevas en España dónde poder encontrar dichos fenómenos. El segundo objeto (figura 4 derecha) se corresponde con un proyecto relacionando las matemáticas y una vida saludable al ser este un frutero que consta de diversas frutas creadas a partir de diferentes poliedros.

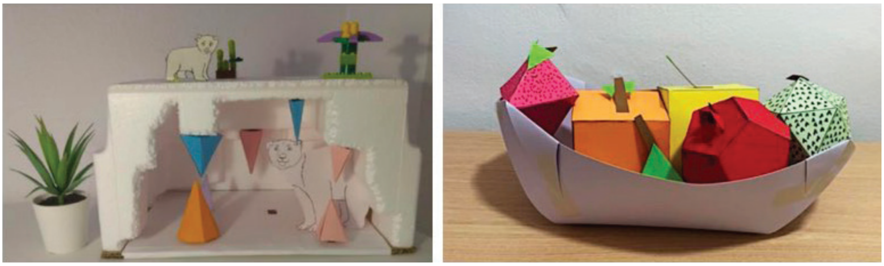


Figura 4. Ejemplos de objetos elaborados por parte del alumnado en el curso 2019/2020 (izquierda) y 2020/2021 (derecha). La imagen izquierda es una cueva con estalactitas y estalagmitas creadas con pirámides de diferentes bases y la derecha es un frutero con frutas de diversas formas.

Finalmente, otros dos ejemplos de proyectos presentados por el alumnado, en el curso 2020/2021. El primero (figura 5 izquierda) relacionaría las matemáticas con la sociedad y cultura árabe tan presente en España, concretamente en la zona sur donde nos encontramos (provincia de Cádiz, comunidad autónoma de Andalucía). El segundo objeto (figura 5 derecha) es un proyecto matemático donde relaciona las formas geométricas de las partes del robot y la magnitud dinero puesto que la utilidad del objeto era de hucha donde los niños de primaria podrían guardar las monedas que les dieran sus padres y/o abuelos.

Figura 5. Ejemplos de objetos elaborados por parte del alumnado en el curso 2020/2021, siendo la imagen izquierda un castillo y derecha un robot hucha.

Del análisis de las producciones presentadas se puede ver que la creatividad tuvo un papel importante en la realización de este taller, no solo por el objeto a realizar, sino también por el proyecto o utilidad relacionada con el mismo, así como por la diversidad de materiales usados para su creación. Igualmente se desprenden de la lectura de los informes, algunas dificultades por las cuales pasaron durante la ejecución de este y cómo lo solucionaron:

1. Los grupos de alumnos que realizaron animales o el robot (figuras 3 y 5 derecha) no sabían muy bien qué medidas tomar de cada parte del animal/robot para que quedara lo más proporcionado posible. La solución que adoptaron fue la de crear varias piezas de distintos tamaños, empezando por un cuerpo más pequeño del que inicialmente habían considerado, para que al montar el objeto tuviera consistencia y proporcionalidad (problemas con las medidas iniciales a considerar).
2. Otra dificultad fue como hacer para que los cilindros de las patas pegaran bien con los prismas trapezoides de los pies (figura 3), o como conseguir pegar la cabeza con el cuerpo y que se sostuviera (figura 3 derecha y 5 derecha) o como crear las esferas y pegarlas a la torre cilíndrica del castillo (figura 5 izquierda), es decir, dificultades con el montaje de piezas u objetos de diversas formas (problemas en la composición de la figura total completa).
3. Otra dificultad era como tenían que pegar los desarrollos 2D de las piezas, para que realmente se creara la forma buscada. Esta dificultad fue debida a que no se les permitió comprar plantillas de desarrollos 2D de figuras geométricas regulares. Ellos mismos tenían que construir los desarrollos, recortar y pegar ese desarrollo 2D para convertirlo en la figura geométrica correspondiente en 3D (problemas con el dibujo y posterior plegado de desarrollos planos de poliedros o cuerpos de revolución).
4. Otra adversidad fue la de mecanismos interiores de funcionamiento, que los propios alumnos/as se propusieron como retos. Ejemplos de ellos son los objetos de la figura 2, la máquina de caramelos y la cancha de baloncesto. A base de ingenio y su creatividad, ambos grupos consiguieron que el mecanismo funcionara a la perfección, combinando canales con barreras por donde bajar la bola o caramelo en cuestión (dificultad con la creación del mecanismo interior del objeto).
5. Finalmente, otra de las dificultades era pensar en el proyecto o idea o utilidad didáctica del objeto. En lugar de crear el proyecto o idea principal y

después crear el objeto específico, su plan de trabajo ha sido el contrario en la mayoría de los casos. Empiezan por lo concreto, y luego piensan en el proyecto/idea/utilidad del mismo. En algún caso concreto, esta parte del informe no estaba bien definida, muy poco desarrollada y explicada, y con poco sentido didáctico (dificultad a la hora de pensar en un proyecto real y útil para niños de primaria).

4. DISCUSION Y CONCLUSIONES

Ante el requerimiento del Espacio Europeo de Educación Superior de nuevas prácticas metodológicas, y puesto que el trabajo experimental permite el refuerzo del aprendizaje, el taller de geometría y de medida que se ha realizado, se prescribe como complemento a la tradicional forma de enseñanza, en la firmeza de consolidar la calidad y la excelencia en la docencia universitaria. A través de la realización de este taller, los alumnos ponen de manifiesto su comprensión o su posible falta de esta de los distintos conceptos y conocimientos geométrico y de medida requeridos para la realización del taller. Además de poner en práctica los conocimientos adquiridos, la ejecución de esta experiencia resulta totalmente aconsejable porque ayuda a los alumnos a mejorar sus competencias y habilidades personales. Y es que esta experiencia permite la conexión entre el alumnado universitario y la utilidad de las matemáticas en la vida real, lo que motiva una implicación con su propia formación.

El taller fue valorado positivamente por parte del alumnado como parte fundamental de su formación, pues tuvieron que aplicar el conocimiento adquirido en la asignatura y hacerlo realidad, es decir, crear un objeto real con diferentes materiales y recursos para, posteriormente, en el informe escrito entregado y en la exposición o video realizado analizar las diferentes formas geométricas que componían el objeto, así como la resolución del área y volumen de una de sus partes y, por lo tanto, realizar un proceso de medición. Los futuros maestros que participan en esta experiencia recurren a nociones y conceptos matemáticos, así como a sus relaciones para construir figuras geométricas. Es decir, el maestro en formación recurre a su propio conocimiento de las matemáticas que debe enseñar el día de mañana. Pone de manifiesto en la ejecución de este taller los tres subdominios del dominio del conocimiento de la materia que todo maestro debe poseer. Dicha experiencia resulta beneficiosa para los estudiantes evidenciando un trabajo centrado en objetos matemáticos y de las posibilidades formativas que estas experiencias otorgan a los futuros profesores de matemáticas, donde se hacen predominar y dar sentido a los conceptos y nociones necesarias para su resolución.

La mayoría de los maestros en formación que participaron de esta experiencia, mostraron una competencia de comprensión conceptual de geometría y de medida bastante robusta. Su fluidez procedimental se manifestó en el uso adecuado de razonamientos y habilidad para resolver la situación-problema planteada con capacidad para explicar y justificar el objeto desarrollado. Durante el desarrollo de la experiencia en clase, así como en el informe y exposiciones finales (en clase de manera presencial o a través de videos) realizadas con el uso de tecnología, mostraron evidencias de confianza en sus conocimientos, habilidades y capacidades. El desarrollo de la competencia matemática requiere la creación de un proceso de aprendizaje contextualizado y colaborativo, donde el estudiante construye significados y conocimientos matemáticos realizando tareas junto a sus iguales. Por esto se concluye que esta experiencia contribuye el desarrollo de la competencia matemática.

La realización del taller les hizo ganar confianza en sí mismos, de que su proceso de aprendizaje era el correcto, así como el desarrollo de las destrezas matemáticas y competencias relacionadas. Usando palabras de los propios estudiantes, se fomentan capacidades relacionadas con la creatividad y originalidad, y que se puede trabajar a la vez que te diviertes, existiendo siempre coordinación, debate y diálogo entre los miembros del grupo, desarrollando la competencia social pues han trabajado en equipo, han recibido sugerencias del profesor y/u otros alumnos y de la observación del trabajo de los demás alumnos.

En cuanto a las competencias digital y de comunicación, esta actividad de clase ha favorecido su desarrollo. El uso de las TIC para crear el video o presentación le hace al alumnado poner en práctica sus destrezas con la tecnología o la falta de ellas. Se busca que ellos mismos desarrollen esas habilidades técnicas, si carecen de ellas o las mejoren con su autoaprendizaje o autonomía. Igualmente, hablar en público les hace perder el miedo al ridículo o vergüenza, así como tener que improvisar, algo tan necesario para su futuro profesional. El cuidado de la voz, su entonación o escritura del discurso o su capacidad de explicar, son puntos clave que se trabajan en esta actividad mediante el informe y la presentación. La efectividad de la función del profesor consiste en elementos que dependen de él mismo, como conocer lo que tiene que enseñar, saber estructurarlo y explicarlo. La comprensión de los conceptos se incrementa y robustece en la medida en que el individuo comunica y comparte sus modelos cognitivos con otras personas.

Las buenas prácticas (Zabalza, 2012) deben conocerse, es decir, la identificación, análisis y muestra de experiencias prácticas en los diferentes niveles del sistema educativo puede aportar ideas a otros educadores para llevarlas a la práctica en su actividad docente. Es una manera de dar a conocer y transferir a otras situaciones docentes como punto de referencia y/o contraste. Esta investigación puede servir para orientar a otros docentes en su actividad formadora en matemáticas de maestros en formación, en particular para quienes deseen llevar a cabo en el aula experiencias motivadoras para sus estudiantes. Finalmente, se desea destacar que este trabajo contiene ideas fundamentales para tener en cuenta por parte de un profesor formador de formadores, además de reflexionar y repensar la enseñanza a nivel de cuerpo docente. Nuestra experiencia es interesante para la docencia pues un docente que quiera innovar precisa conocer de otros procesos de formación que incidan más en la metodología que en los contenidos, con mayor dedicación a las prácticas que a la extensión de nociones conceptuales.

REFERENCIAS

Albarracín L. y Badillo E. (2018). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación primaria*. Síntesis.

Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (2021). La formación inicial de profesores de matemáticas, finalidades, limitaciones y obstáculos. *Investigación en la Escuela*, *35*, 75–85. https://doi.org/10.12795/IE.1998.i35.07

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bejarano-Franco, M. T. (2008). Modelos tradicionales y nuevos modelos para una enseñanza universitaria enmarcada en el Espacio Europeo de Educación Superior. *Multiárea: Revista de Didáctica, 3,* 27-38. https://dialnet.unirioja.es/ejemplar/206972

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2022). Una trayectoria de investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas: del grupo SIDM a la Red Iberoamericana MTSK. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática, 2*(2), e202204. https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.41

Fernández-Enguita, M. (2006). Los profesores cuentan. *Revista de educación, 340,* 59-65. https://dialnet.unirioja.es/ejemplar/141771

Gonzato, M., Godino, J. D. y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico- matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática, 23*(3), 5-37. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/gonzato_godino_neto%20visualizacion.pdf

Guzmán, C. y Saucedo, C. L. (2015). Experiencias, vivencias y sentidos en torno a la escuela y a los estudios: Abordajes desde las perspectivas de alumnos y estudiantes. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 20*(67), 1019-1054. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-66662015000400002

Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y Formación del Profesorado. (2017). *Marco común de competencia digital docente.* http://aprende.intef.es/sites/default/files/2018-05/2017_1020_Marco-Com%C3%BAn-de-Competencia-Digital-Docente.pdf

Larrosa, J. (2003). *Entre las lenguas. Lenguaje y educación después de Babel*. Laertes.

Lesh, R. y Yoon, C. (2004). Evolving Communities of Mind in which Development Involves several interacting and simultaneously developing strands. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 205-226. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_7

Llinares, S. (1998). La investigación sobre el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional. *Aula, 10*, 153-179. https://dialnet.unirioja.es/servlet/autor?codigo=18683

Montes, M., Climent, N. y Contreras, L. C. (2022). Construyendo conocimiento especializado en geometría: un experimento de enseñanza en formación inicial de maestros. *Aula Abierta, 51*(1), 27-36. https://doi.org/10.17811/rifie.51.1.2022.27-36

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 60, de 27 de marzo de 2015. https://www.juntadeandalucia.es/boja/2015/60/1

Organización de la Naciones Unidas. (2015). *Objetivos de Desarrollo Sostenible 2030*. https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/education/

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2008). *Estándares de competencia TIC para docentes*. http://www.eduteka.org/pdfdir/UNESCOEstandaresDocentes.pdf

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. (2018). *Programa para la evaluación internacional de estudiantes (PISA). Resultados de PISA 2018.* https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_esp_ESP.pdf

Pagès, J. (2009). Competencia social y ciudadana. *Aula de innovación educativa, 187*, 7-11. https://ddd.uab.cat/record/182046

Pegalajar, M. C. (2017). El futuro docente ante el uso de las TIC para la educación inclusiva. *Digital Education Review, 31,* 131-148. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6052462

Rodríguez-García, A. M. (2019). *Análisis de competencias digitales adquiridas en el Grado de Educación Primaria y su adecuación para el desempeño de una labor docente de calidad en Andalucía* [Tesis doctoral]. Universidad de Granada. https://digibug.ugr.es/handle/10481/55719

Ruiz-Huerta, J. (2009). Don Finkel. Dar clase con la boca cerrada. *Revista electrónica sobre la enseñanza de la economía publica, 6,* 49-60. http://e-publica.unizar.es/wp-content/uploads/2015/09/64RUIZ.pdf

Sgreccia, N. y Massa, M. (2012). Conocimiento especializado del contenido de estudiantes para profesor y docentes noveles de matemáticas. El caso de los cuerpos geométricos. *Educación matemática, 24*(3), 33-66. http://funes.uniandes.edu.co/13254/1/Sgreccia2012Conocimiento.pdf

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Tijeras, A. y Monsalve, L. (2018). Desarrollo de la competencia comunicativa en la formación inicial del profesorado. *Atenas, 3*(43), 89-102. https://www.redalyc.org/jatsRepo/4780/478055153006/html/index.html

Toro, J. R. (2004). La autonomía, el propósito de la educación. *Revista de estudios sociales, 19*, 119-124. https://www.redalyc.org/pdf/815/81501911.pdf

Torres, E. (2015). *El conocimiento del profesor de Matemáticas en la práctica: enseñanza de la proporcionalidad.* [Tesis Doctoral]. Universidad Autónoma de Barcelona. https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/290741/etm1de1.pdf?sequence=1

Vargas-Alejo, V., Cristóbal-Escalante, C. y Carmona, G. (2018). Competencias Matemáticas a través de la implementación de actividades provocadoras de modelos. *Educación matemática, 30*(1), 213-236. http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v30n1/1665-5826-ed-30-01-213.pdf

Vasco-Mora, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento especializado de un profesor de álgebra lineal y espacios de trabajo matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 30(*54), 222–239. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a11

Vera-Pérez, B. L. (2013). La autonomía educativa ante los nuevos paradigmas, un criterio a seguir en la educación continua. *Boletín Científico Ciencia Huasteca, 1.* https://www.uaeh.edu.mx/scige/boletin/huejutla/n1/

Zabalza, M. A. (2011). *Competencias docentes del profesorado universitario. Calidad y desarrollo profesional.* (2º edición, 3º reimpresión). Narcea.

Zabalza, M. A. (2012). El estudio de las buenas prácticas docentes en la enseñanza universitaria. *Revista de docencia universitaria, 10*(1), 17-42. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4020162

Zabalza-Beraza, M. A. y Zabalza-Cerdeiriña, M. A. (2012). *Profesores y profesión docente. Entre el ser y el estar.* Narcea.

Correspondencia

María Teresa Costado Dios

Dirección: Departamento de Didáctica, Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Cádiz, Campus de Puerto Real,
Avda. República Saharaui s/n. CP 11519. Puerto Real (Cádiz, España)
mariateresa@gm.uca.es

 https://doi.org/10.24844/EM3501.11

Más de uno, pero menos de dos. La enseñanza de las fracciones y los decimales en la educación básica. David Block Sevilla

Margarita Ramírez Badillo[1]

Esta obra, en dos volúmenes, aborda el estudio de contenidos muy sensibles y cercanos a las dificultades que los maestros enfrentan en las aulas y, pretende contribuir a una mejor comprensión de los números racionales y su enseñanza.

El autor, con cerca de 40 años de trabajo ininterrumpidos en la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, tiene un particular interés en el estudio de la didáctica de las estructuras multiplicativas en la educación básica, mismo que se ha hecho patente a través de su incursión en diferentes vertientes, entre ellas, el diseño y experimentación de situaciones didácticas, estudios de prácticas de enseñanza en escuelas multigrado y escuelas de organización completa y conocimientos adquiridos fuera de la escuela, en especial con adultos no alfabetizados. Es reconocida su participación en proyectos de desarrollo curricular, a través de la elaboración de programas, libros para el maestro y libros de texto, además de su invaluable contribución a la formación de recursos humanos, tanto en programas de posgrado como en la formación continua de profesores. Además de su destacada labor en la investigación, se interesa en que esta trascienda, y asume el compromiso de que llegue a diversos destinatarios a través de sus numerosos artículos y publicaciones para maestros. Su principal referente teórico es la Teoría de las Situaciones Didácticas creada por G. Brousseau.

[1] mramirezba@yahoo.com.mx

La cercanía del autor con el trabajo que los maestros realizan en las aulas, así como la sensibilidad para identificar asuntos cruciales en la enseñanza de las matemáticas, lo llevaron a concretar su experiencia en esta obra, cuyo propósito central es profundizar en el conocimiento matemático y didáctico de las fracciones y los decimales. Cabe destacar que la mayor parte del material que se incluye, es producto de la investigación sobre el tema.

En cuanto a la estructura general, ambos tomos incluyen un original *prólogo* escrito por el Dr. Luis Manuel Aguayo, en el que mediante diversas analogías da cuenta de las particularidades de esta obra, así como del carácter profundo, dinámico y riguroso con el que se analiza la problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones y los decimales. En la *introducción*, el lector encontrará un panorama amplio de los aspectos que se abordan en los dos volúmenes; en ella se anticipa la función de los problemas y los diferentes papeles que juegan las fracciones en cada tipo de problema, ya sea que se usen para expresar medidas, relaciones entre una parte y un todo, operadores multiplicativos, o números abstractos; asimismo se anuncia la forma en que se estudiarán los decimales, como un subconjunto de las fracciones. En este apartado también se incluyen los objetivos en los que se conjugan las intenciones específicas que orientan el estudio de las fracciones y los decimales, con los relativos a los conocimientos teóricos sobre didáctica de las matemáticas.

Los *capítulos* que componen esta obra son: Volumen I*:* 1. *Las fracciones y la medida,* y 2. *Los decimales y la medida.* Volumen II: 1. *Las fracciones y la división; 2. Las fracciones en el papel de razones* y 3. *Fracciones y decimales como operadores multiplicativos.*

En *Las fracciones y la medida*, el autor toma como punto de partida uno de los problemas que están en el origen de las fracciones: determinar una medida cuando la unidad que se usa no cabe un número entero de veces en lo que se quiere medir. En este capítulo se aborda el significado clásico de las fracciones como partes de unidad y se estudian las nociones de equivalencia, orden y densidad, las fracciones como puntos en la recta, así como las operaciones aditivas, incluyendo el cálculo mental.

En *Los decimales y la medida*, se estudian los decimales como un subconjunto de los racionales. Dado su uso generalizado y la tendencia a aplicar los mismos principios que se usan en los números naturales, al grado de ocultar las diferencias entre ambos conjuntos numéricos, el autor optó por proponer primero el estudio de las fracciones comunes, después las características exclusivas de las fracciones decimales y, finalmente la expresión de estas mediante la escritura decimal.

Las fracciones y la división, aborda la estrecha relación entre la división de números naturales en situaciones de reparto y las fracciones. Si bien la acción de medir puede llevar al fraccionamiento de unidades, también la acción de *repartir* lo hace; por otra parte, las fracciones permiten que todas las divisiones de números naturales, excepto entre cero, tengan un cociente. El autor propone un reflexivo trabajo didáctico que propicia la conciliación de dos definiciones de fracción: como parte de unidad y como cociente de dos enteros, relación que no es evidente y suele no ser objeto de estudio en la escuela.

Las fracciones en el papel de razones, se dedica al estudio de la fracción como expresión, ya no de una medida de cantidades, sino de una relación de tipo multiplicativo que hay entre ellas, es decir, la fracción como expresión de una *razón*. En la enseñanza, las razones están en la base de otras nociones que se estudian en la educación básica, como la proporcionalidad, en especial el porcentaje y la escala, y la multiplicación de fracciones. La propuesta que se hace en este capítulo aborda, al principio, situaciones en las que las fracciones se dejan implícitas y las razones se expresan mediante parejas de números naturales, lo cual da lugar a razonamientos sobre la proporcionalidad; en un segundo momento las fracciones se hacen explícitas es su papel de razones.

En el último capítulo, *Fracciones y decimales como operadores multiplicativos,* se propone analizar la ruptura de significados entre la multiplicación de números naturales y la multiplicación de fracciones y decimales, en donde la idea misma de "multiplicar" cambia; la multiplicación ya no es una operación que siempre "agranda", ni se puede calcular siempre mediante una suma repetida. Detrás de la multiplicación por fracciones y decimales están las nociones de proporcionalidad, como razón, escala, porcentaje, probabilidad, entre otras, que ofrecen la posibilidad de incidir en el estudio de la multiplicación. Para acceder a la noción de multiplicación de números racionales, el autor propone un abordaje simultáneo desde dos tipos de problemas multiplicativos: los que implican relaciones de proporcionalidad entre magnitudes, y otros, sobre el cálculo del área de rectángulos.

Cabe aclarar que el orden en que se presentan los capítulos no representa la ruta que se sigue en el estudio en la primaria o secundaria; en cada uno hay aspectos que pueden ser motivo de estudio en diferentes grados.

En cada uno de los apartados, el autor toma como punto de partida preguntas auténticas de alumnos para, a partir de ellas, incursionar en una serie de actividades que consisten fundamentalmente en un trabajo de análisis sobre fragmentos de clase, lecciones de libros de texto para alumnos de primaria y secundaria, procedimientos de alumnos y su evolución, propuestas didácticas para trabajar en el aula (que implican observar y tomar notas del trabajo realizado), así como problemas para ser resueltos por los propios maestros. Estas actividades tienen en común el hecho de estar acompañadas de numerosas interrogantes y propuestas para la reflexión, además de incorporar el estudio de nociones específicas sobre didáctica de las matemáticas, como institucionalización, equilibración didáctica, reticencia, variables didácticas, situación adidáctica, obstáculo didáctico, obstáculo epistemológico, el papel del error, entre otras.

En cada volumen se incluye un *solucionario*; en la versión digital está el vínculo para ir a la respuesta y para regresar del solucionario al texto. Las *notas*, una amplia *bibliografía*, y propuestas para la *profundización* en temas específicos, ofrecen al lector la oportunidad de ampliar su horizonte. La mayor parte de las *actividades* puede ponerse en práctica en el aula y están acompañadas de la leyenda *aula*. Asimismo, de destacan las actividades que son para *primaria* o *secundaria*.

Esta obra, que incluye cerca de 90 actividades, se elaboró en forma de taller. Si bien es un libro pensado fundamentalmente para la formación continua de profesores, también está dirigido a formadores de docentes, estudiantes de formación inicial, estudiantes de posgrado y diseñadores de currículo.

Se sugiere estudiarlo en grupo o, al menos, con un colega; el análisis de procedimientos de los alumnos, las discusiones a que dan lugar las actividades en colectivo, enriquecen la experiencia. Como lo señala el Dr. Aguayo en el prólogo, al hacer una analogía con Rayuela de Julio Cortázar, "es un libro que se desdobla en múltiples libros" cuya lectura puede hacerse desde diferentes entradas; se puede seguir el orden de los capítulos, o elegir un nivel o grado específico para primaria o secundaria, poner a prueba en sus propias aulas, u optar por las actividades propuestas específicamente para los profesores.

Por último, cabe destacar que la generosidad del autor para su publicación en versión digital e impresa, de libre acceso, conlleva la intención y el compromiso de convocar a todos los que tengan interés por ampliar y compartir su experiencia sobre el estudio de estos temas y formar comunidades de estudio en los centros de trabajo, en donde no haya barreras para acceder a los materiales. La comunidad académica celebra y da la bienvenida a esta nueva obra.

RESEÑA https://doi.org/10.24844/EM3501.12

Un día para jóvenes investigadores en el contexto del primer Congreso de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática

A Day for Young Researchers at the First Congress of the Mexican Society for Research and Dissemination of Mathematics Education

Angie Damián Mojica[1], Rafael Enrique Gutiérrez-Araujo,[2]
Santiago Alonso Palmas Pérez,[3] Mario Sánchez Aguilar[4]

INTRODUCCIÓN

La Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM) organizó en este año 2023 un primer congreso, llamado SOMIDEM1, como parte de varios proyectos con el fin de concretar el siguiente objetivo declarado en sus estatutos:

> Actuar como un foro académico internacional en lengua española en el que se discutan problemáticas y hallazgos en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en diferentes contextos (Acta constitutiva de SOMIDEM)

Tales proyectos fueron concebidos a partir de la reciente convocatoria a afiliarse a la SOMIDEM y la consecuente incorporación de más de 150 investigadores y profesores interesados en participar en ella. Se formó una comisión voluntaria

[1] Universidad Autónoma de Guerrero, México, adamian@uagro.mx, https://orcid.org/0000-0002-0372-4392.
[2] Asociación Aprender en Red, Venezuela, rafael.gutierrez0593@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-4003-8324.
[3] Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Lerma, México, s.palmas@correo.ler.uam.mx, https://orcid.org/0000-0003-1175-5938.
[4] Instituto Politécnico Nacional, México, mosanchez@ipn.mx, https://orcid.org/0000-0002-1391-9388.

de 17 asociados para planear el congreso SOMIDEM1, quienes se reunieron en varias ocasiones, bajo la coordinación de Mario Sánchez Aguilar, para establecer los lineamientos y la logística para llevarlo a cabo.

El formato de la organización del congreso estuvo basado en el establecimiento de 18 Grupos de Trabajo Temáticos (GTT) con sendos temas de investigación. Cada grupo estuvo liderado por tres asociados, en promedio, quienes promovieron la participación de su GTT y, organizaron la discusión al interior del grupo. Para participar en un GTT, los interesados enviaron un manuscrito de cuatro páginas con una breve exposición de una investigación concerniente a la temática del grupo. Los GTT continuarán trabajando en la fase posterior al evento enfocada en la elaboración de las memorias del congreso.

El Congreso SOMIDEM1 se celebró del 9 al 14 de marzo de 2023, a través de Zoom. En total se aceptaron 98 artículos provenientes principalmente de distintas regiones de México, pero también se recibieron artículos escritos o coescritos por colegas de Argentina (1), Chile (5), Colombia (8), España (3), Estados Unidos (3), Países Bajos (1) y San Marino (1).

Un rasgo importante de SOMIDEM1 consistió en dedicar un día para la reunión y discusión de problemáticas concernientes a los jóvenes investigadores, llamado día Jóvenes Investigadoras e Investigadores en Educación Matemática (JIIEM).

EL DÍA JIIEM

Se celebró el 9 de marzo de 2023 como evento inaugural del congreso SOMIDEM1 con dos objetivos en el horizonte.

- Brindar a los participantes oportunidades formativas relacionadas con el quehacer de la investigación en educación matemática.
- Constituir espacios de encuentro entre jóvenes de México y de otras latitudes que les permitieran compartir y dialogar sobre trabajos de investigación que tuvieran en marcha al momento del evento.

El evento permitió a jóvenes investigadoras e investigadores compartir y discutir sus propuestas y diseños de investigación en un ambiente de colaboración y retroalimentación.

Buscando lograr estos objetivos, el Día JIIEM ofreció a sus participantes una programación que contó con una bienvenida, dos conversatorios, dos talleres, cinco salas de discusión simultáneas y una clausura.

La bienvenida fueron unas palabras de Mario Sánchez Aguilar (Instituto Politécnico Nacional) y María García González (Universidad Autónoma de Guerrero y presidenta de la SOMIDEM). Posteriormente, los responsables del Día JIIEM tomaron la palabra para comentar el origen y la concepción de este día, así como los objetivos que se pretendían lograr con su realización y la programación de actividades. Por tratarse de la inauguración conjunta de SOMIDEM1 y JIIEM, la asistencia a esta bienvenida llegó a las 100 personas conectadas en vivo –número máximo de usuarios permitido por la sala de Zoom utilizada.

El primer conversatorio del día estuvo a cargo de Mario Sánchez Aguilar, quien dialogó con los asistentes sobre la importancia de la escritura de artículos de investigación como una actividad social. A lo largo de la charla, diversos temas fueron puestos sobre la mesa, entre los cuales se destacan: (a) publicar es una forma de trascender y de no "dejar en el aire" el conocimiento adquirido y construido; (b) administrar el tiempo es necesario para poder escribir artículos de investigación; (c) tener en cuenta la evaluación y retroalimentación de los revisores es importante, aun cuando el artículo no sea aceptado; y (d) la elección de la revista es de suma importancia a la hora de enviar un artículo a evaluación. Además, se abordó el asunto de la dimensión emocional y personal de cada investigador como uno de los factores que influyen en la escritura de artículos científicos, y de la que poco se habla en la academia.

El primer taller fue desarrollado por María García González, quien se enfocó en la reflexión sobre los elementos a considerar al enviar y realizar arbitrajes de un artículo científico, ejemplificando con la revista *Educación Matemática*. La tallerista expuso los diferentes procesos de arbitraje, destacando la importancia de la transparencia y objetividad del proceso de evaluación, así como el proceso mediante el cual se eligen las o los posibles revisores para un artículo. Durante el taller, la presentadora expuso los diferentes procesos de arbitraje, enfatizando en los modelos más comunes utilizados por las revistas científicas: simple-ciego, doble-ciego o abierto. Se discutieron aspectos como la importancia de elegir el enfoque teórico y metodológico adecuado para el estudio y la presentación de los resultados de una investigación, de manera clara y concisa. También se reflexionó sobre la necesidad de contextualizar los hallazgos y mostrar su relevancia para la comunidad científica y la sociedad en general. En este sentido, se destacó la importancia de que las y los jóvenes investigadores reciban retroalimentación constructiva y rigurosa para mejorar sus habilidades de investigación y escritura científica.

En cuanto a las salas de discusión, se lograron confeccionar y llevar a cabo cinco en las que, en su conjunto, se presentaron y discutieron 16 trabajos académicos en diferentes etapas de desarrollo y de diferentes niveles de grado, provenientes de México (14) —Guerrero (7), Ciudad de México (5) y Puebla (2)—, Argentina (1) y Colombia (1). El propósito de estas salas fue el de ofrecer a los ponentes un espacio para la difusión de sus trabajos de investigación y la retroalimentación conjunta, tanto por sus pares de sala como por un educador matemático experimentado bajo la figura de invitado experto. En este último rol, las salas de discusión contaron con la participación de Mario Sánchez Aguilar, Apolo Castañeda Alonso (Instituto Politécnico Nacional), Erika García Torres (Universidad Autónoma de Querétaro), Ulises Xolocotzin Eligio (CINVESTAV) y Armando Morales Carballo (Universidad Autónoma de Guerrero). La moderación de las salas estuvo a cargo de los responsables del Día JIIEM, así como de las colegas invitadas Daysi Julissa García-Cuéllar (Pontificia Universidad Católica del Perú) e Ingrid Quilantán Ortega (Universidad Autónoma de Guerrero).

El segundo taller a cargo de Gustavo Martínez-Sierra (Universidad Autónoma de Guerrero), quien trató con las y los jóvenes el tema de la utilidad y potencial del uso de un mánager de referencias y bases de datos para la revisión de la literatura de investigación en educación matemática. El mánager utilizado fue Mendeley y la base de datos fue Google Académico. Este taller mostró la manera de organizar y actualizar datos bibliográficos según las necesidades del investigador, logrando con ello la creación automática de informes bibliográficos. Algunas de las bondades que se trataron en el taller sobre este gestor bibliográfico fueron: (a) ayudar a organizar y gestionar las referencias bibliográficas; (b) exportar las referencias internas; (c) crear y rediseñar la bibliografía en variados formatos internacionales; (d) insertar citas y bibliografía mientras se está escribiendo un artículo; y (e) consultar y descargar documentos desde el propio gestor.

El segundo conversatorio y última actividad del día se llevó a cabo bajo la conducción de Melissa Andrade-Molina (Pontificia Universidad Católica de Valparaíso), quien mostró de una manera amena las ilusiones, tensiones y sinsabores que se tienen en el inicio al mundo de la investigación en educación matemática. Así, se habló de las cuestiones que van más allá de lo académico y que permean la práctica y vida de los investigadores. A lo largo de la actividad se habló sobre los prejuicios por la falta de experiencia, la presión por hacer algo innovador que tenga impacto, el hecho de que no siempre se puede investigar lo que se quiere y cómo esto se relaciona con situaciones institucionales. Para concluir, se destacó la importancia de rodearnos de personas que puedan apoyarnos en el trayecto académico, ya que quizás, en algún momento, puedan convertirse en coautores o coinvestigadores en algún proyecto.

A modo de cierre del recuento del Día JIIEM, destacamos el país de origen de las y los jóvenes asistentes a este evento. En efecto, no solo nos acompañaron jóvenes provenientes de México, sino también de Argentina, Brasil, Chile, Colombia, Ecuador, España, Estados Unidos, Hungría, Perú y Venezuela. Esto nos da una muestra del alcance internacional que el Día JIIEM tuvo en su primera edición.

PROSPECTIVA DEL CONGRESO SOMIDEM Y DEL DÍA JIIEM

El congreso SOMIDEM1 con su sección del Día JIIEM, es el resultado del entusiasmo y trabajo conjunto de un gran número de profesionales interesados en la educación matemática y su desarrollo. Para su continuación en ediciones posteriores de congresos SOMIDEM tiene el potencial de convertirse en un evento académico periódico para reconfigurar y potenciar a la comunidad de educadores matemáticos de México y más allá. No obstante, hay mucho trabajo pendiente por hacer.

En el caso particular de SOMIDEM1, una tarea próxima a desarrollarse es la elaboración y publicación de sus memorias. En este proceso estarán involucrados todos los participantes del congreso, quienes tendrán la oportunidad de extender sus escritos presentados durante el evento. Dichos escritos serán sometidos a una evaluación entre pares para incrementar la calidad de las memorias de SOMIDEM1.

Es también necesario definir otros aspectos del congreso como su periodicidad, la posible inclusión de conferencias plenarias o mesas redondas, entre otros. Estos aspectos serán discutidos y acordados por el Comité Científico, el cual está integrado por sus líderes de grupo, incluyendo los líderes del Día JIIEM.

En lo que al Día JIIEM se refiere, algunos de los desafíos que se vislumbran para sus ediciones futuras son:

- Lograr la participación de jóvenes mexicanos(as) de otros estados del país, diferentes de Guerrero, Ciudad de México y Puebla.
- Aumentar la participación de jóvenes extranjeros(as) provenientes de Iberoamérica, para promover así la internacionalización del evento.

- Mejorar los procesos de captación, organización y evaluación de propuestas de trabajo para las salas de discusión.
- Extender el desarrollo de JIIEM a más de un día, y con ello: (a) flexibilizar los horarios; (b) diversificar los tipos de actividades; y (c) crear mejores condiciones para la realización de actividades prácticas, como los talleres.
- Garantizar una mayor equidad de género en cuanto a las y los invitados al evento.

Autor de correspondencia
MARIO SÁNCHEZ AGUILAR
Dirección postal: Calzada Legaria No. 694, Col. Irrigación. C.P. 11500, Alcaldía Miguel Hidalgo, Ciudad de México, México
Teléfono: +52 57296300 extensión 67741