

Educación Matemática



Sociedad Mexicana
de Investigación
y Divulgación
de la Educación
Matemática, A.C.



UNIVERSIDAD DE
GUADALAJARA

Red Universitaria e Institución Benemérita de Jalisco
Centro Universitario de Ciencias
Exactas e Ingenierías

Educación Matemática vol. 37 • núm. 2 • agosto de 2025

© Educación Matemática, agosto de 2025, vol. 37, núm. 2, es una publicación cuatrimestral editada por la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C., con domicilio en Adolfo Prieto 1734, Col. Del Valle centro, 03100, Benito Juárez, Ciudad de México, correo electrónico somidem2023@gmail.com y la Universidad de Guadalajara a través del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, dirección Blvd. Marcelino García Barragán #1421, esq. Calzada Olímpica, C.P. 44430, Guadalajara, Jalisco, México, correo electrónico educacion.matematica@administrativos.udg.mx

Editor responsable: Ernesto A. Sánchez Sánchez. Reserva de derechos al Uso Exclusivo del Título: 04-2015-10163264600-203, ISSN (web) 2448-8089, ambos otorgados por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor.

La presentación y disposición en conjunto de cada página de Educación Matemática, vol. 37, núm. 2, agosto de 2025, son propiedad de D.R. © Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C. y de la Universidad de Guadalajara.

Diagramación y corrección de estilo: Formas e Imágenes, S.A. de C.V., Av. Universidad 1953, edif. 2, loc. E, Copilco el Bajo, Coyoacán, 04330, Ciudad de México, formaseimagenes@gmail.com

Fecha de la última actualización 1 de agosto de 2025.

<https://www.revista-educacion-matematica.org.mx>

Contenido

Editorial	5
<i>Ernesto Alonso Sánchez Sánchez</i>	
ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN	
Abordaje de las matemáticas desde la perspectiva histórico-cultural con infantes	10
<i>Approach to mathematics from a historical-cultural perspective with infants</i>	
<i>Yolanda Montserrat Mejía Chávez, José Alfonso Jiménez Moreno</i>	
Representación individual y diádica de datos cuantitativos: Estudiantes de sexto y séptimo grado construyendo una tabla de contingencia	43
<i>Individual and dyadic representation of quantitative data: Sixth and seventh grade students constructing a contingency table</i>	
<i>Mariano Castellaro, Nadia Soledad Peralta, Juan Manuel Curcio, María Agustina Tuzinkievicz</i>	
Estrategias que usan estudiantes de tercer año de Educación Primaria cuando resuelven una tarea de pensamiento funcional	79
<i>Strategies used by third-year primary school students when solving a functional thinking task</i>	
<i>Rodolfo Morales, Ángela Agurto, Isidora Mendoza, Catalina Olave, Lissett Valenzuela, Danilo Díaz-Levicoy</i>	
Reflexiones para la planificación de la enseñanza de la geometría escolar: Un estudio de caso	107
<i>Reflections for planning the teaching of school geometry: A case study</i>	
<i>Teresita Eugenia Méndez-Olave, Claudia Estrella Valenzuela-Gaete, Isabel Margarita Vargas Calvert, Eduardo Israel Piña Flores</i>	
La construcción mental de funciones exponenciales usando multiplicación repetida	138
<i>The construction of exponential functions by secondary school students using repeated multiplication</i>	
<i>Tomás Díaz-Berrios, Rafael Martínez-Planell</i>	

Evaluación de la Razonabilidad Numérica en alumnado de secundaria <i>Assessment of Numerical Reasonableness in secondary school students</i> <i>Macarena Fariña, Alicia Bruno</i>	171
Tras la indagación de significados. Tareas para la formación de profesores que revelan concepciones alternativas: el caso del número racional <i>In search of meaning: Tasks for teacher education that reveal alternative conceptions – the case of rational numbers</i> <i>Cristina Ochoviet Filgueiras, Verónica Mollino Vigo</i>	200
Comparando y contrastando las teorías APOE y de Registros de Representación Semiótica: una posible integración <i>Comparing and contrasting APOS and Registers of Semiotic Representation theories: a possible integration</i> <i>José David Morante Rodríguez, Lidia Aurora Hernández Rebollar, María Trigueros Gaisman</i>	226
CONTRIBUCIÓN A LA DOCENCIA	
Secuencia de aprendizaje lúdica que desarrolla el razonamiento estadístico en estudiantes de 8 a 9 años <i>A playful learning sequence to foster statistical reasoning in students aged 8 to 9</i> <i>Soledad Estrella, Brahiam Ramírez, Alejandra Mondaca-Saavedra, Maritza Méndez-Reina, Pedro Vidal-Szabó, Sergio Morales</i>	246
Aprendiendo teoría de grafos a través del béisbol <i>Learning graph theory through baseball</i> <i>María Luisa Rodríguez Arévalo, Teudys Ramón Pérez Méndez, Javier García Maimó</i>	276
RESEÑA	
Una obra que transforma nuestra visión de las matemáticas. Reseña de <i>El infinito placer de las matemáticas</i> <i>David Eduardo León</i>	299
Libro SOMIDEM: Tendencias en la Educación Matemática 2024 <i>Guadalupe Vera-Soria</i>	305

Editorial

Ernesto Alonso Sánchez Sánchez¹

Estimados lectores,

El 12 de agosto de 2021 asumí el cargo de Editor en jefe de *Educación Matemática*, por lo que después de cuatro años, el próximo 12 de agosto, lo entregaré a los doctores. María García González y Humberto Gutiérrez Pulido. Aprovecho para desearles una excelente gestión en su labor de ser editores de la revista *Educación Matemática* y que, como a mí, sea una experiencia rica en conocimiento de nuestros pares y de mucho aprendizaje.

La lección más importante que tuve fue la de poder valorar de primera mano la importancia y eficacia del trabajo colectivo. Los primeros días de mi tarea como editor, revisé todo lo que debía coordinar, corregir, promover y resolver a la luz de un proyecto editorial que había imaginado para la revista. Pero, fácilmente me di cuenta de que era tal la cantidad de asuntos que debía atender para dar continuidad, y otros para promover, que me desbordaban con mucho y, concluí, que iba a ser imposible atenderlos con eficacia.

En estas circunstancias, descubrí que estaba planteando mal mi tarea y que mi labor como editor en jefe no era echarme a mis espaldas todos esos asuntos que quedaban bajo mi responsabilidad, pues para el momento en que asumí la jefatura editorial, ya había una estructura consolidada alrededor de la revista que incluía una comunidad de colegas profesionales con diferentes capacidades y con gran disposición para colaborar con ella de distintas maneras. Así fue como surgió la idea de invitar a quienes identifiqué con un fuerte compromiso con la revista para formar un Consejo Directivo (el nombre vino después) para asumir en conjunto las tareas del Editor en jefe. Con ellos reelaboramos y desarrollamos un plan editorial más realista que el que había imaginado y, más aún, nos distribuimos, a lo largo de cuatro años, tareas prácticas cotidianas como la de hacer las evaluaciones técnicas de los manuscritos que se reciben todos los días. Y aprovecho este espacio para manifestar mi profundo agradecimiento y admiración a los miembros del Consejo Directivo por su invaluable apoyo y dedicación.

¹ Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, esanchez@cinvestav.mx, <https://orcid.org/0000-0002-8995-7962>

El cuerpo de editores de sección, lo constituyen doctores especialistas en educación matemática de diferentes países de Iberoamérica, como se puede apreciar en los créditos de la revista en su página de presentación. En el plan editorial que imaginaba y con base en la experiencia de participación en otras revistas, pensaba implementar uno de seguimiento de los procesos de gestión de la evaluación de los manuscritos con tiempos preestablecidos y recordatorios programados. No obstante, cambió mi percepción porque la actividad de gestionar un manuscrito no es mecánica ni predecible del todo, ya que cada editor de sección recibe una propuesta y realiza la gestión en diferentes condiciones y contextos, de modo que no se puede esperar que los procesos sean uniformes. Pedirle a un editor de sección que se comprometa con un calendario preestablecido es ignorar su realidad y propiciaría declinaciones frecuentes por motivos diferentes al de su competencia académica y de gestión. Por lo demás, me encontré con la grata experiencia de que la mayoría de los editores de sección llevaron los procesos con mucho profesionalismo en plazos razonables. Por lo que les agradezco su apoyo y dedicación.

La actividad de los árbitros es la principal promotora de la discusión y la calidad académica; son los que leen a profundidad los manuscritos, deciden acerca de la pertinencia de sus contenidos y, en su caso, sugieren cambios para fortalecer o mejorar puntos finos de la exposición. Hasta ahora, la evaluación por pares es una vía para reconocer y apoyar el desarrollo del conocimiento científico porque juzga sobre la calidad, el rigor y la validez científica de los artículos antes de su publicación. Durante los 37 años de existencia de la revista *Educación Matemática* la comunidad de educadores matemáticos que contribuyen en su desarrollo ha ido forjando sus propios estándares, los cuales se emparejan con los de otras revistas internacionales. Como resultado de este desarrollo hemos podido hacer explícitos algunos criterios heurísticos para hacer las evaluaciones técnicas y de pertinencia de los manuscritos que nos llegan. Estos mismos criterios pueden servir a su vez a los árbitros para orientar sus evaluaciones, se pueden consultar estos criterios en el editorial Criterios de revisión y evaluación de manuscritos en Educación Matemática (<https://doi.org/10.24844/EM3602.00>), dirigido a Artículos de investigación; en el editorial Criterios de revisión y evaluación de contribuciones a la docencia (<https://doi.org/10.24844/EM3603.00>), enfocado en Contribuciones a la Docencia, o en el editorial Ensayos y Revisiones de Literatura en Educación Matemática: caracterización y criterios de evaluación (<https://doi.org/10.24844/EM3701.00>) correspondiente a Ensayos y revisiones o estados del arte.

Los insumos de la revista son los informes de investigación empírica o teórica que nos envían para someterse a evaluación. Los autores que deciden enviar sus trabajos son los principales pilares de la existencia de la revista. Nuestra función o misión es coadyuvar con los autores, investigadores y profesores interesados en la educación matemática, para entender y crear alternativas para mejorar la enseñanza de las matemáticas. Los invito a que nos sigan considerando para difundir sus investigaciones.

Por otra parte quiero compartir información sobre algunos aspectos cuantitativos que ofrecen una perspectiva general del desarrollo de la revista en este periodo que culmina.

En el periodo de diciembre de 2021 a febrero de 2025 se recibieron 507 manuscritos y, de estos, se publicaron 101, por lo que el índice de aceptación fue aproximadamente del 20%. Cada manuscrito pasa por una revisión técnica y de pertinencia realizada por los miembros del Consejo directivo. En esta revisión aproximadamente 40% de manuscritos pasa a evaluación formal y de estos la mitad son admitidos para su publicación.

En los 12 números que correspondieron al periodo del editor en jefe saliente, se publicaron 101 en la modalidad de artículo, 13 contribuciones a la docencia y 3 ensayos, los cuales se distribuyeron como se muestra en las tablas siguientes:

Tabla 1. Distribución de artículos por año y número vs modalidad

Año	2021	2022			2023		
Número	33(3)	34(1)	34(2)	34(3)	35(1)	35(2)	35(3)
Artículos	10	9	10	11	8	8	8
Contr. a la docencia	-	2	1	2	-	2	-
Ensayos	1	-	-	-	-	1	-
	11	11	11	13	8	11	8

2024			2025	
36(1)	36(2)	36(3)	37(1)	37(2)
6	7	9	7	8
1	1	1	1	2
-	1	-	-	-
7	9	10	8	10

Con relación a la distribución de autores por nacionalidad, la tabla 2 incluye solo los artículos en los que todos los autores solo pertenecen a un mismo país (Las siglas para abreviar a los países corresponden a un código internacional: https://es.wikipedia.org/wiki/ISO_3166-1_alfa-2)

Tabla 2. Frecuencia de autores por país.

MX	ES	CL	AR	PT	PE	CO	BR	UY
25	16	12	9	8	4	3	2	2

DO	PR	TN	US	Total
1	1	1	1	85

El resto de los artículos son firmados por autores que pertenecen al menos a dos países. Cada pareja o terna en la siguiente lista corresponde a los países de las nacionalidades de los autores (varias de ellas corresponden a más de un artículo, pero omitimos las frecuencias), el orden en cada pareja o terna de países no necesariamente corresponde con el orden en el que aparecen en el artículo y en varios casos el número de autores es más que dos o tres. Se han reordenado poniendo al comienzo el país que aparece con más frecuencia:

Duplas: MX-CL, MX-CU, MX-CR, MX-CO, MX-ES, MX-AR, MX-CL, ES-DE, ES-SE, ES-IT, ES-AR, ES-CL, ES-PE, ES-EC, ES-CR, IT-FR, NL-US, BR-PT.
Triples: MX-ES-CA, ES- CL-BR, CL-BR-DE.

En la tabla siguiente se presenta la frecuencia de artículos cuyo contenido se enfoca en el estudio de profesores, sin distinguir el nivel escolar, y luego la distribución entre los niveles de Básico e Infantil, Medio básico, Medio superior y Superior. Los clasificados como Transversal se refieren a temas de carácter general que son independientes del nivel escolar.

Tabla 3. Frecuencia de artículos por contenido

Nivel	Prof.	B e I	MB	MS	S	Trans.
Frecuencia	31	29	13	12	22	10

Los anteriores datos dan una idea de la cobertura de la revista en diferentes aspectos que, pueden permitir una valoración sobre el avance en el cumplimiento de su misión de propiciar un foro para la discusión y desarrollo de la educación matemática a nivel internacional y, en especial, en el ámbito iberoamericano.

Para concluir quiero reconocer la importancia del papel de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM) y la Universidad de Guadalajara (UdeG) para que la revista pueda pertenecer al grupo selecto de revistas Acceso Abierto Diamante, pues gracias al financiamiento que la UdeG, y eventualmente SOMIDEM, proporcionan a la revista podemos mantener la gratuidad para los autores y lectores. Agradezco también al equipo técnico que me ha apoyado durante estos cuatro años, en especial a Imelda Inclán y la empresa Formas e Imágenes quienes se encargan de la revisión de estilo y la edición de los manuscritos. También estoy en deuda con la labor de José Luis López, quien ha sido mi brazo derecho para todo lo concerniente a la gestión de la revista.

Ernesto Sánchez

Abordaje de las matemáticas desde la perspectiva histórico-cultural con infantes

Approach to mathematics from a historical-cultural perspective with infants

Yolanda Montserrat Mejía Chávez,¹
José Alfonso Jiménez Moreno²

Resumen: El presente artículo recupera la experiencia de implementación de una propuesta didáctica para el aprendizaje de las matemáticas en un preescolar público rural en el noroeste de México, como propuesta posterior a la enseñanza remota de emergencia (ERE) implementada por la pandemia por el virus SARS-CoV-2 y su transición a la presencialidad. La propuesta se diseñó como herramienta de apoyo desde el enfoque histórico-cultural, retomando el concepto de zona de desarrollo próximo (ZDP) y la interacción social para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático. Entre los principales hallazgos se encuentra el trabajo colaborativo entre educadoras y familias como medio para fomentar el desarrollo del pensamiento matemático, así como la interacción entre preescolares como elemento fundamental en la formación de conceptos científicos de carácter matemático. Se reconoce el entorno socio-cultural, así como el uso de símbolos y signos como elementos para fomentar el aprendizaje de las matemáticas.

Fecha de recepción: 24 de abril de 2024. **Fecha de aceptación:** 27 de marzo de 2025.

¹ Instituto de Servicios Educativos y Pedagógicos de Baja California, ymejiac@edubc.mx / mcyolandam@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0002-7713-8123>

² Facultad de Ciencias Políticas y Sociales. Universidad Nacional Autónoma de México, alfonsojimenez@politicas.unam.mx / alpsic@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-0704-7883>

Palabras clave: *enseñanza y formación, psicología de la educación, aprendizaje, cognición, pensamiento*

Abstract: This article recovers the experience of implementing a didactic proposal for learning mathematics in a rural public preschool in northwestern Mexico, as a proposal after the remote emergency teaching (ERE) implemented due to the SARS-CoV-2 pandemic and its transition to face-to-face teaching. The proposal was designed as a support tool from the historical-cultural approach, taking up the concept of the zone of proximal development (ZDP) and social interaction to enhance the development of mathematical thinking. Among the main findings is the collaborative work between educators and families as a means to promote the development of mathematical thinking, as well as the interaction between preschoolers as a fundamental element in the formation of scientific concepts of a mathematical nature. The sociocultural environment is recognized, as well as the use of symbols and signs as elements to promote the learning of mathematics. .

Keywords: *teaching and training, psychology of the education, learning, cognition, thinking*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las matemáticas en las escuelas públicas mexicanas de educación básica, está determinada por objetivos y contenidos regulados por las intenciones del Estado Mexicano, representadas por la Secretaría de Educación Pública (SEP). Bajo este escenario, es posible considerar que las prácticas educativas, en sus diversos niveles responden a una linealidad propia del discurso matemático escolar, cuyas cualidades principales son su carácter hegemónico, con un discurso y estructura oficial (Reyes-Gasperini, 2016). En la educación básica mexicana, esta disciplina es considerada como fundamental, sin embargo, ha sido también aquella con mayores índices de reprobación (Reyes-Gasperini, 2016). Esta situación es de preocupación en todos los niveles educativos, y así lo fue particularmente bajo el contexto de la pandemia por el virus SARS-CoV-2. El pasado 11 de marzo de 2020, la Organización Mundial de la Salud (OMS) realizó el anuncio sobre la pandemia causada por el nuevo coronavirus

2019 (COVID-19), dando origen al cierre de actividades y confinamiento domiciliario como medidas para mitigar contagios (OPS, s/f).

Ante dicho escenario, los sistemas educativos tuvieron que adaptarse para salvaguardar el derecho a la educación y a la salud de niños, niñas y adolescentes alrededor del mundo. De manera particular, en México, se implementaron estrategias para continuar la educación de los alumnos desde casa, mediante la enseñanza remota de emergencia (ERE). Lo cual implicó la participación directa de las familias en los procesos de enseñanza-aprendizaje, por lo que la SEP promovió la creación de la plataforma virtual *Aprende en casa*, para poner a su disposición materiales educativos digitales y la emisión de clases por televisión como recursos de apoyo. Sin embargo, la mayoría de los recursos presentados consistían en la extracción directa de los contenidos en los libros de texto gratuitos, sin espacios para llevar a cabo una autoevaluación y retroalimentación de lo aprendido como elementos interactivos que motivaran el aprendizaje y cumplieran con las necesidades reales de los usuarios (Cazales *et al.*, 2020).

En el estado de Baja California, ubicado al noroeste del país, se realizaron diversas acciones como apoyo a la estrategia nacional *Aprende en casa*. De manera particular, en preescolar preocupó la posibilidad de enfrentar problemas de rezago educativo en asignaturas clave, como la lengua o las matemáticas. Mediante una entrevista con la Autoridad Educativa del nivel preescolar de la Secretaría de Educación de Baja California (SEBC), se reconocieron algunas acciones dirigidas a las y los educadores para implementar la ERE, como el diseño de materiales didácticos, *Webinars* para el manejo de las herramientas digitales de *Google* y la colaboración con el Consejo Nacional de Fomento Educativo (CONAFE) para la difusión de cuadernillos de trabajo dirigidos a las comunidades en situaciones de vulnerabilidad, como las escuelas rurales, las cuales carecían de infraestructura tecnológica idónea. Es importante mencionar, que se priorizó la atención de la lengua y las matemáticas para el diseño de los materiales didácticos como parte de las actividades programadas previas a la pandemia como líneas de acción ante el rezago educativo identificado mediante pruebas estandarizadas como la Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) aplicadas en el nivel primaria en años anteriores, es decir, incluso previo a la pandemia, eran áreas académicas de interés en México.

Estos recursos de apoyo fueron difundidos a través de la página oficial de la SEP y su estructura burocrática, mediante la figura de supervisoras o inspectoras de zona que invitaban a las educadoras y educadores a su uso, así como de manera impresa en algunas comunidades que la SEBC consideraba como

vulnerables; sin embargo, el alcance en su difusión e implementación no resultó el esperado. Además de los problemas asociados a la presencialidad, se sumaron las características de los diversos contextos en que se sitúan los centros escolares que comprenden el nivel preescolar en el estado, caracterizado mayoritariamente por zonas rurales, en las cuales las disposiciones tecnológicas características de la ERE no eran homogéneas entre la población. Si bien las escuelas rurales se caracterizan por problemáticas más allá de lo tecnológico (por ejemplo, acceso a servicios básicos, condiciones de acceso a las escuelas, entre otros), la falta de homogeneidad de infraestructura fue de relevancia particular bajo el contexto de la pandemia y las diversas formas de acción establecidas por las autoridades escolares. Bajo estas condiciones, se consideró que las oportunidades de interacción social resultan fundamentales para impulsar el desarrollo de conceptos matemáticos en los preescolares, no solo por las condiciones que generó la pandemia, sino también debido a la relevancia que la formación de conceptos matemáticos tiene para el desarrollo psicológico e intelectual infantil.

El presente artículo muestra el desarrollo y los resultados de un material didáctico de apoyo para la enseñanza de las matemáticas en preescolares tras el retorno a la presencialidad. Este ejercicio se fundamentó en la teoría histórico-cultural de Vygotsky (2009) y su implementación en contextos rurales del noroeste de México. La intención de este material responde a promover el pensamiento matemático en preescolares de zonas rurales, considerando un contexto temporal caracterizado por el retorno a actividades presenciales tras dos años de pandemia e implementación de la ERE. Para ello, se describen las bases teórico-conceptuales que fundamentaron los materiales didácticos, incluyendo, además, algunas experiencias en la materia; la metodología de trabajo, los resultados obtenidos, para finalizar con las conclusiones del ejercicio.

ELEMENTOS TEÓRICOS Y CONCEPTUALIZACIÓN

La enseñanza de las matemáticas en la educación preescolar mexicana se fundamenta en discursos oficiales y un currículum establecido por el Sistema Educativo Nacional, con contenidos nacionales articulados de manera progresiva para responder a un perfil de egreso común, que comprende el trayecto formativo de niños y niñas entre 0 y 15 años de edad. La asignatura que integra contenidos matemáticos, se denomina Saberes y Pensamiento Científico, y su

abordaje en preescolar, por tanto, responde a una estructura lineal y progresiva en la búsqueda del objetivo final, que consiste en desarrollar habilidades como indagar, interpretar, modelizar, argumentar y explicar el entorno (SEP, 2022).

No obstante, en virtud de las características del contexto y momento histórico, se desarrolló una propuesta de material didáctico con base en la perspectiva histórico-cultural propuesta por el ruso Lev Semionivich Vygotsky (2009), ello debido a su particularidad de entendimiento del desarrollo. Esta teoría permite comprender al desarrollo de conceptos matemáticos no como consecuencia de factores biológicos y madurativos, sino desde de las oportunidades de interacción social con las que los niños cuentan (Wertsch, 1985). De esta manera, el desarrollo está conformado por dos líneas de origen distinto: los procesos elementales o básicos (de origen biológico, relacionados con la inteligencia práctica característica de los animales) y las funciones psicológicas superiores (de origen sociocultural, únicas de la especie humana). Bajo esta perspectiva, se considera que el desarrollo no se ejecuta de manera lineal o biológica, en la que se avanza en maduración conforme la persona crece, sino que responde a una evolución del tipo espiral donde el sujeto atraviesa siempre el mismo punto avanzando hacia un estadio superior (Vygotsky, 2009), siempre en función de las condiciones que su contexto permita, dado que los procesos psicológicos son, en un primer momento, sociales y, posteriormente, la persona los internaliza. De esta manera, para Vygotsky, lo individual emerge de lo colectivo (Ursini, 1996), y, en particular en la formación de conceptos matemáticos, la forma de enseñanza conducirá a su desarrollo (Talizina, 2001).

Por tal motivo, el proceso del desarrollo del pensamiento matemático en niñas y niños en edad preescolar no se entiende solo como la adquisición de contenidos particulares, sino que depende de la maduración de los procesos elementales como la capacidad de hacer uso de herramientas o instrumentos para transformar el entorno físico que le rodea; por supuesto, como todo concepto científico, requiere de la adquisición de conceptos matemáticos (Talizina, 2001). A su vez, su experiencia con el contexto le brindará elementos para impulsar el desarrollo de las funciones psicológicas superiores, relacionadas con el entorno sociocultural, como el uso del lenguaje y de sistemas de signos como la escritura y los números (Vygotsky, 2009). Esta perspectiva considera que los niños y niñas poseen experiencias matemáticas antes de ingresar a la escuela y fuera de dicho espacio formal, de manera que el desarrollo del pensamiento matemático está determinado por la interrelación existente entre los conceptos

formales, propios del ámbito escolar y aquellos de origen espontáneo, producto de su interacción con el entorno (Vygotsky, 2009).

Para estudiar la manera en que se desarrollan las funciones psicológicas superiores, Vygotsky (2009) utilizó un método cualitativo de observación de la conducta, basado en la resolución de problemas en tareas que involucraban el uso de signos como dibujos, letras y números. En el primer estadio, el niño no cuenta con experiencias previas suficientes para resolver la tarea solicitada; sin embargo, tras su exposición prolongada a la misma logra comprender qué es lo que se requiere para resolver el problema y es entonces donde pasa al siguiente estadio, en el cual, el niño está consciente de la funcionalidad de los signos.

La perspectiva histórico-cultural reconoce a la escuela como una oportunidad importante para impulsar el desarrollo del pensamiento de las niñas y los niños y acompañarlos para alcanzar su máximo potencial. Para ello, es necesario considerar las implicaciones pedagógicas del concepto de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP). De acuerdo con Rojas (2018), la ZDP hace referencia a la distancia entre la capacidad de resolver independientemente un problema y la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz. Para su puesta en práctica es necesario identificar este distanciamiento y además proporcionar una variedad de ayudas y herramientas para que el alumno, de manera activa, logre resolver el problema planteado.

En relación con las funciones psicológicas superiores y el desarrollo del pensamiento matemático y sus conceptos asociados, es necesario plantear objetivos o metas de aprendizaje que constituyan una oportunidad no solo de poner en práctica la ZDP, sino que también sean congruentes con los métodos cualitativos de observación de conductas y recuperen la relación del alumno con el entorno y la escuela. Es por ello que se consideraron como referentes los contenidos curriculares de matemáticas en preescolar y las etapas de desarrollo cognoscitivo de Jean Piaget; particularmente la etapa preoperacional, que además de comprender la edad preescolar mantiene un paralelismo con la progresión lineal propuesta por la SEP para el logro del perfil de egreso en preescolar en la disciplina de matemáticas. A partir de este ejercicio de análisis, se definieron como objetivos de aprendizaje el trabajo con los conceptos de número, forma y suma/resta (Mejía y Jiménez, 2025).



Figura 1. Contenidos para la enseñanza de las matemáticas SEP (2022) en la Educación Preescolar y su relación con la etapa preoperacional de Jean Piaget (Papalia *et al.*, 2010). Fuente: Mejía y Jiménez (2025).

Como se puede apreciar, los cinco rasgos que componen la etapa preoperacional están estrechamente relacionados con los contenidos oficiales para la enseñanza de las matemáticas en preescolar, manteniendo concordancia con una postura lineal y progresiva del desarrollo del razonamiento matemático. Por su parte, Vygotsky considera los postulados genéticos de Jean Piaget en sus obras como un referente al hablar sobre los procesos biológicos y madurativos que intervienen en el desarrollo del pensamiento (2006), pero no se limita a ello. De tal forma que, al recuperar elementos socioculturales, este proceso responde más a una evolución del tipo espiral, pasando por diferentes estadios, independiente de la edad, como se abordó con anterioridad.

En la enseñanza para la formación de conceptos matemáticos, es bastante común que se considere como base a la perspectiva genética piagetana, ya que la seriación de procesos y conceptos, así como su articulación, fungen como base formativa (Talizina, 2001). Sin embargo, desde la perspectiva vigotskyana, la formación de conceptos científicos, entre ellos los matemáticos, no se desarrollan de forma espontánea o genética, sino que requiere de la enseñanza y guía; es decir, del proceso colectivo (Ursini, 1996).

De esta manera, en la formación de conceptos matemáticos debe considerarse, como base, las operaciones lógicas básicas, los tipos necesarios de la actividad simbólica y semiótica, y relaciones elementales; sin olvidar algunos axiomas para la descripción de las magnitudes y operaciones lógicas (Salmina, 2001). En la formación de estos elementos, que son la base para potenciar la formación de conceptos matemáticos de mayor complejidad en primaria y secundaria, la adquisición de signos es fundamental; los signos, herramienta propia que permite la interiorización de procesos psicológicos (Ursini, 1996), permitirán la codificación elemental para potenciar el pensamiento matemático (Salmina, 2001).

De acuerdo con Talizina (2001), la formación de conceptos matemáticos en el contexto escolar requiere alejarse de la memorización; en ese sentido, la figura docente debe buscar la manera en que las y los niños relacionen los conceptos con elementos tangibles para promover la abstracción que requieren las matemáticas. En ese mismo sentido, y con base en la postura histórico-cultural, Salmina (2001) sugiere que la formación de conceptos matemáticos incluye la codificación de signos y símbolos como medio de promoción de pensamiento, buscando su uso dentro de problemas propios de lo cotidiano. La simbolización a la cual refiere Salmina no se reduce solo al lenguaje, sino también a la utilización de dibujos, animales u otros objetos. De esta manera, una didáctica de esta naturaleza favorecerá que los estudiantes busquen comprender situaciones por medio del idioma matemático; en el caso de niveles educativos elementales, como preescolar y primaria, será importante rescatar la experiencia cotidiana de las y los estudiantes (por ejemplo, a través de ejercicios de compra-venta), poniendo como centro la estructura de la base orientadora para la solución de problemas, más que lo aritmético en sí (Nikola y Talizina, 2001).

Considerando los postulados de Vygotsky, se asume que el desarrollo del pensamiento matemático puede darse mediante la exposición de los conceptos espontáneos que los niños y las niñas poseen con aquellos de origen formal mediante tareas o retos que les demanden estimular su lenguaje, su inteligencia práctica (uso de herramientas) y el uso de signos, en experiencias de interacción social con adultos, pares más experimentados o mediante la interacción espontánea entre pares y su entorno. De esta manera, para el infante el significado de las palabras pasa de un estado primitivo a ser reemplazadas por generalizaciones más complejas al poner en práctica sus funciones intelectuales –la atención deliberada, la memoria lógica, la abstracción, la habilidad para comparar y diferenciar– avanzando en su desarrollo y a su vez, conduciéndose a la formación de verdaderos conceptos (Vygotsky, 2006). En lo particular, desde el enfoque

histórico-cultural, los conceptos matemáticos son una forma de conceptos científicos, los cuales, a diferencia de los espontáneos, se desarrollan de forma deliberada, con el apoyo de docentes y bajo una necesaria interacción social; de esta manera, el rol de la escuela es la de crear contextos y materiales con los que, las y los estudiantes se familiaricen con conceptos científicos (Ursini, 1996). El desarrollo de conceptos, tanto científicos como espontáneos, forman parte de la estructura que dan los procesos psicológicos superiores, característicos del desarrollo internalizado. Por lo tanto, y en concordancia con este panorama, el presente trabajo se estableció como objetivo favorecer el desarrollo del pensamiento matemático en los preescolares de una escuela rural en Ensenada, Baja California, bajo la perspectiva de la teoría histórico-cultural de Vygotsky.

Algunas experiencias recuperadas sobre el desarrollo del pensamiento matemático en infantes se desarrollaron en México, Chile y Colombia; no obstante, existe poca evidencia empírica sobre intervenciones fundamentadas únicamente en la perspectiva histórico-cultural, por lo que los referentes que se presentan constituyen aproximaciones al abordar elementos como el trabajo colaborativo, el diálogo y la recuperación de elementos contextuales para el abordaje de las matemáticas.

El estudio llevado a cabo en Chile por Mujica y Márquez (2022), se centró en analizar las características esenciales de las categorías del desarrollo del pensamiento matemático y las estrategias didácticas que emplean las educadoras con alumnos entre 2 y 4 años. Se entrevistó a siete educadoras, y los resultados mostraron tres tipos de situaciones didácticas implementadas: las *actividades concretas*, que implican la clasificación, seguimiento de patrones, conteo, resolución de problemas, reconocimiento de tamaños, orientación espacial y el trabajo con materiales concretos para construir y agrupar, las *actividades cotidianas*, como buscar pares de calcetines, ordenar objetos por color, poner cubiertos en la mesa (izquierda-derecha), clasificar juguetes, plantas o semillas y subir y bajar sillas; y *juegos* con tableros, de encaje y de construcción. De acuerdo los autores, los resultados obtenidos muestran que el desarrollo lógico matemático está concebido como un proceso cognitivo que requiere desarrollar competencias para la adquisición de conocimientos y no necesariamente procesos básicos de las matemáticas, de manera que pueda evolucionar otras áreas de aprendizaje a la par. Asimismo, reconoce que considerar las actividades cotidianas en los ambientes áulicos permite que los alumnos estén familiarizados con los procedimientos y operaciones a desarrollar a partir de su entorno social y cultural; sensibilizando a los niños hacia la utilidad y uso del pensamiento matemático en la vida cotidiana.

En lo que respecta a la investigación realizada en Colombia por Sánchez y García (2021), se llevó a cabo la validación de un protocolo para mejorar las habilidades matemáticas de 59 niños colombianos de escuelas públicas entre 7 y 10 años con bajo rendimiento. Se aplicó una prueba diagnóstica TEDI-MATH para evaluar competencias básicas, como: contar, enumerar, la comprensión del sistema numérico, operaciones lógicas, operaciones y estimación de tamaño. Posteriormente, se implementó un programa para desarrollar el valor numérico (mayor-menor, igual), medición, organización de series de números e identificación de números compuestos. La mediación se llevó a cabo mediante el diálogo con los niños. Entre los principales hallazgos, se evidenciaron mejoras en las diferentes competencias matemáticas, como la ejecución de sumas y restas, no obstante, en lo que respecta a los conocimientos conceptuales no existieron diferencias significativas. Lo cual, se atribuyó a un nivel de vocabulario medio-bajo en los niños que no les permitió beneficiarse del entrenamiento, concluyendo que un buen repertorio verbal es sumamente importante para el desarrollo de competencias matemáticas y el razonamiento para la extracción de reglas y resolución de problemas.

Finalmente, el estudio realizado en México por Albarrán (2022) consistió en un proyecto de intervención con alumnos de tercer grado en un preescolar público. El proceso comprendió la implementación de juegos en equipo bajo la guía de un docente con el objetivo de propiciar la colaboración entre los estudiantes para mejorar sus aprendizajes en el campo de matemáticas. Las actividades propuestas se relacionaron con problemáticas cercanas a los estudiantes y la propuesta curricular del Plan de Estudios 2017 para la Educación Preescolar. Los estudiantes eligieron con quién trabajar, en equipos de hasta cinco integrantes. Los juegos se realizaron dentro del aula y consistieron en juegos de mesa que les implicaron dialogar y tomar decisiones en conjunto para resolver problemas, siendo monitoreados por el docente y evaluados mediante la observación con una lista de cotejo, rúbricas y los trabajos de los estudiantes. Entre los principales hallazgos, se destacaron mejoras en la resolución de problemas en colaboración, utilizando marcas y recursos propios y se observaron avances en sus habilidades de conteo. Además, se percibió un incremento en el interés de los alumnos al manifestar gusto por trabajar en colaboración, observando una mejoría en la convivencia del aula. No obstante, se reconoció que el trabajo colaborativo representó un reto, especialmente en cuestiones relacionadas con su organización.

Las investigaciones referidas, si bien no parten desde el mismo marco teórico-conceptual que el presente trabajo, reafirman elementos importantes en la formación de conceptos matemáticos. Por ejemplo, la recuperación de elementos contextuales como antecedente a la formación de conceptos abstractos (Nikola y Talizina, 2001), así como el uso de signos y símbolos como precursores del aprendizaje matemático (Salmina, 2001). De esta manera, son consideraciones importantes en la implementación de estrategias didácticas para la formación matemática, ya que reafirman elementos clave por considerar dentro de la delimitación de propuestas orientadas a la formación de conceptos matemáticos.

MÉTODO

Con el fin de cumplir con el objetivo propuesto, se elaboraron materiales orientados principalmente a las docentes, con recursos pedagógicos y didácticos para fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje relacionados al pensamiento matemático. La metodología se basó en los postulados del paradigma histórico-cultural debido a las posibilidades que ofrece para el desarrollo y el aprendizaje en función de las interacciones que los estudiantes tienen con su medio, así como la incorporación de signos y símbolos como herramientas de consolidación de conceptos matemáticos. Su viabilidad radica en la convivencia entre pares y con el entorno para vincular las necesidades formativas en matemáticas con postulados sobre la ZDP y la interacción social, con la intención de brindar apoyo a la práctica docente en el contexto post-pandémico y las características normativas de la educación preescolar. Para ello se buscó la vinculación de los contenidos en la propuesta didáctica con algunos elementos del currículum vigente en ese momento, de manera que su implementación pudiera ser de utilidad para las docentes en los procesos normativos que su función les demanda. Finalmente, y en atención a los comentarios recibidos por las docentes participantes, se optó por concretar la propuesta didáctica en un libro de orientaciones con materiales anexos para trabajar con los preescolares y sus familias; de tal forma que puedan consultarlos las veces que deseen para trabajar con ellos dentro del aula de manera regular y con las familias en casa.

El escenario donde se llevó a cabo el proyecto consistió en un jardín de niños rural de organización completa ubicado en el poblado Lázaro Cárdenas, en el municipio de Ensenada, Baja California. El contexto en que se inscribe la escuela está caracterizado por una población con altos niveles de analfabetismo y

rezago educativo, ya que de acuerdo con las cifras publicadas por el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) durante la pandemia, de la población total, correspondiente a 3,381 habitantes, 213 personas de 15 años en adelante no saben leer ni escribir un recado; además, de un total de 220 niños y niñas con edades entre 3 y 5 años (edad preescolar) 127 no asistían a la escuela (INEGI, 2020).

Para determinar el contenido de la propuesta, se tuvo un acercamiento con una educadora, tres madres de familia y nueve estudiantes. Las técnicas e instrumentos empleados fueron la entrevista y un cuestionario tipo prueba, para tener una aproximación al nivel de logro en el aprendizaje de los preescolares con relación a los contenidos curriculares priorizados por la SEP para la enseñanza de las matemáticas en pandemia. La aplicación de los instrumentos se realizó mientras el centro escolar operaba bajo la modalidad de trabajo a distancia.

De manera general, los preescolares mostraron evidencia de desempeño básico en los aprendizajes matemáticos fundamentales establecidos por la SEP. Adicionalmente, mediante las entrevistas con las madres de familia y la educadora del grupo se encontró la existencia de algunas barreras comunes para implementar la ERE, como la falta de recursos tecnológicos disponibles, la ausencia de formación para su implementación y poca motivación por parte de los involucrados para continuar el proceso de enseñanza-aprendizaje bajo dicha modalidad (Mejía *et al.*, 2024). Por tal motivo, se consideró prioritario fortalecer en la institución la enseñanza de las matemáticas en los preescolares, recuperando como un elemento central la socialización entre pares para impulsar el desarrollo de conceptos matemáticos acordes con la edad preescolar.

En cuanto al desarrollo de los materiales, se consideró la colaboración con tres educadoras para valorar la viabilidad de la propuesta didáctica al compartir sus experiencias con los materiales y sugerencias para la mejora tras su implementación, buscando favorecer el aprendizaje entre pares y la colaboración con las familias al recuperar a estos últimos como parte del proceso de enseñanza-aprendizaje, por lo tanto, su actuación resultó crucial.

Derivado de este acercamiento se generó la propuesta didáctica. Su organización consiste en tres fichas de trabajo, presentadas a manera de cuadernillo, donde se buscó favorecer la apropiación de tres conceptos formales derivados del ejercicio previo de análisis: número, figura y suma/resta (figura I). Las temáticas de cada ficha se seleccionaron acorde a las principales actividades productivas de la localidad, considerando a su vez, situaciones cotidianas comunes y los intereses de los preescolares. De tal manera, la distribución consistió en lo

siguiente: para trabajar el concepto formal de número, se definió la temática “El Mercado”, para el concepto formal de figura “La Galería de Arte”, mientras que para el concepto formal de suma/resta, “La Granja”.

Cada ficha de trabajo está dividida en tres secciones: docente, alumnos y familias; de manera que el abordaje del concepto formal pueda ser trabajado por los preescolares desde esos tres escenarios bajo la guía del docente. A manera de presentación, se incluyó información sobre el sustento teórico de la propuesta didáctica, integrando algunos referentes teóricos de la Teoría Histórico-Cultural. En lo que respecta a la presentación de las fichas, se incluyó un listado de habilidades o conocimientos que se estarían movilizando al trabajar con cada concepto formal, enlistados con círculos de diferentes colores para ubicar con mayor facilidad cuáles se estarían poniendo en práctica en cada tarea de aprendizaje.

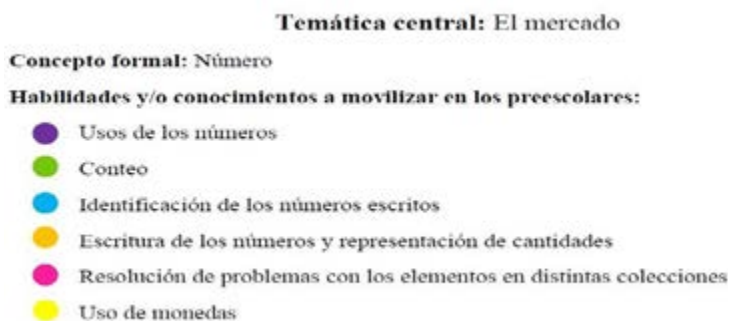


Figura II. Concepto formal y listado de conocimientos y/o habilidades a movilizar en la presentación de la ficha de trabajo “El Mercado”.

Las tareas de aprendizaje propuestas en cada ficha describen algunas sugerencias de actividades que podrían realizarse con los alumnos de manera grupal y mediante el trabajo colaborativo, incluyendo algunas preguntas que podrían propiciar el diálogo y la reflexión del concepto formal a trabajar. Para cada ficha se proponen hasta cuatro tareas de aprendizaje, las cuales pueden ser trabajadas de manera repetida y sin orden secuencial, de tal forma que el docente sea el responsable de su distribución. Las tareas propuestas varían en: espacios de diálogo, resolución de problemas con materiales concretos y/o herramientas didácticas de la sección de alumnos, momentos de registro, juego simbólico y

actividades para realizar con la familia desde casa o con su entorno. Asimismo, se enlistan imágenes en miniatura de los materiales didácticos anexos al cuadernillo correspondientes a cada ficha en las secciones de alumnos y familias al final de su presentación, para que el docente tenga mayor claridad sobre su distribución.

ALUMNOS

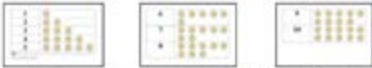
Para resolver las tareas anteriormente descritas, los alumnos contarán con diversos materiales (materiales físicos) y signos (números escritos del 1 al 10) que podrán utilizar. Los materiales se muestran en tamaño doble carta o tabloide (43 x 28 cm), para ser impresos en papel tipo cover y/o sellable, según sea el caso. (Documento Anexo)

Herramientas que se ofrecerán a los alumnos:

- ❖ Imágenes de posibles productos a ofertar en la tienda escolar



- ❖ Tabla de equivalencias (números del 1 al 10 y monedas de \$1 peso correspondientes)



- ❖ Tarjetas portátiles con los números del 1 al 10 y la cantidad de monedas correspondientes al reverso (con tamaño real para facilitar la yuxtaposición)



- ❖ Stickers de precios para los productos con cantidades predeterminadas y en blanco



- ❖ Moneda de \$1 peso en representación real (moneda nacional)



FAMILIAS

Con la finalidad de fortalecer lo visto en clase, se recomiendan las siguientes tareas para trabajarse en casa con el apoyo de los padres de familia:

- ❖ Identificación de algunos productos que existen en el mercado local y sus precios
- ❖ Registro de precios de los productos observados en el mercado local
- ❖ Comparación de costos entre productos



- ❖ Registro de precios de los productos observados en el mercado local
- ❖ Tablas de equivalencia entre precios de productos, con monedas de \$1 peso



Nota: La progresión de estas tareas de aprendizaje será propuesta por la docente a las familias de acuerdo al ritmo de trabajo que se lleve en el aula. De tal forma que se trate de un acompañamiento paralelo a la temática desde casa. Asimismo, las tareas pueden adaptarse de acuerdo a las necesidades de aprendizaje que los preescolares manifiesten.

Figura III. Presentación de los materiales anexos a utilizar en las secciones “alumnos” y “familias” en las tareas de aprendizaje correspondientes a la ficha de trabajo “El Mercado”.

Las tareas de aprendizaje donde se demanda el trabajo colaborativo, incluyen una serie de tablas donde se especifican: el objetivo o meta en común para cada equipo, los roles de participación y la cantidad sugerida de alumnos; así como las características que debe cumplir cada integrante para ser asignado a un rol. De esta manera, los equipos estarían conformados por alumnos con niveles de logro diversos para propiciar la puesta en marcha de la ZDP entre pares mediante el apoyo mutuo. Para llevar un mejor control y seguimiento de las manifestaciones de los estudiantes al interactuar con la propuesta didáctica, se presentan como anexos en cada una de las fichas, un listado de actividades exploratorias

e instrumentos para valorar de manera previa el nivel de logro de los alumnos con respecto al concepto formal a trabajar y el listado de conocimientos y habilidades que se movilizarán.

Tarea 4: ¡Vamos de compras! ●●●●●

En esta tarea de aprendizaje se deberá potenciar el juego simbólico, observando la manera en que los preescolares realizan sus compras. La organización del grupo sugerida es el trabajo por equipos. Algunas recomendaciones para su conformación son las siguientes:

☆ Vendedores

Cantidad de alumnos	Criterios a considerar	Roles
1	Alumno(a) con mayor nivel de logro en los criterios: identificación de números escritos, conteo y uso de monedas.	Área de cobro: Recibe el dinero del cliente y corrobora la cantidad pagada.
1	Alumno(a) con nivel de logro satisfactorio en los criterios: identificación de números escritos, conteo y uso de los números.	Área de cobro: Recibe el dinero del cliente y corrobora la cantidad pagada.
1	Alumno(a) con nivel de logro básico en los criterios: identificación de números escritos, conteo y uso de los números.	Caja: Coloca el dinero en la caja registradora.
1	Alumno(a) con nivel de logro insuficiente en los criterios: identificación de números escritos, conteo y uso de los números.	Caja: Coloca el dinero en la caja registradora.

☆ Compradores: Caso 1

Cantidad de alumnos	Criterios a considerar	Roles
1	Alumno(a) con nivel de logro sobresaliente en los criterios: identificación de números escritos, conteo y uso de monedas.	Comprador: Escoge los productos a comprar, observa el precio y menciona la cantidad al pagador. Corrobora la cantidad de monedas que éste le entrega y se las da los compañeros del área de cobro.
1	Alumno(a) con nivel de logro satisfactorio en los criterios: identificación de números escritos, conteo y uso de los números.	Pagador: Tiene el dinero para pagar, escucha la cantidad que el comprador le pide y le entrega las monedas correspondientes.

☆ Compradores: Caso 2

Cantidad de alumnos	Criterios a considerar	Roles
1	Alumno(a) con nivel de logro satisfactorio en los criterios: identificación de números escritos, conteo y uso de los números.	Comprador: Escoge los productos a comprar, observa el precio y menciona la cantidad al pagador.
1	Alumno(a) con nivel de logro básico en los criterios: identificación de números escritos, conteo y uso de los números.	Pagador: Tiene el dinero para pagar, escucha la cantidad que el comprador le pide y le entrega las monedas al revisor.
1	Alumno(a) con nivel de logro insuficiente en los criterios: identificación de números escritos, conteo y uso de los números.	Revisor: Corroborar la cantidad de monedas que el pagador le entrega y se las da a los compañeros del área de cobro.

Figura IV. Tablas de equipos, roles y especificaciones en la tarea de aprendizaje 4 correspondiente a la ficha “El Mercado”.

Para la ejecución de la tarea de aprendizaje señalada (figura IV), se brindaron como herramientas didácticas imágenes reales de los posibles productos a ofertar en la tienda escolar (frutas y vegetales variados), *stickers* de precios con números del 1 al 10 y en blanco para poner en práctica el registro de cantidades; monedas de 1 peso en representación real (moneda nacional mexicana), tarjetas portátiles con los números del 1 al 10 al frente y la cantidad de monedas correspondientes al reverso (en imágenes de tamaño real para facilitar la yuxtaposición); así como una tabla de equivalencias con los números del 1 al 10 y monedas de 1 peso correspondientes (figura III). La manera en que los preescolares utilicen las herramientas didácticas estará determinada por el docente, quien a lo largo de las tareas de aprendizaje se encargará de proporcionarlas a los estudiantes según las actividades a realizar, considerando las sugerencias establecidas en el cuadernillo. De manera específica, en la tarea 4 (figura IV), que implica el trabajo en equipo y el juego simbólico, se espera que los alumnos utilicen las imágenes de los productos y las etiquetas de precios para organizar la tienda escolar. Mientras que la tabla de equivalencias y las tarjetas portátiles sirvan de apoyo a los vendedores y compradores para corroborar las cantidades de dinero que reciben al cobrar, o bien, al pagar, según sea el caso, movilizando habilidades como el conteo, la identificación de los números escritos, la resolución de problemas con los elementos en distintas colecciones y el uso de monedas convencionales; tal

como se señala en la presentación de la ficha y en la tarea de la actividad con los círculos de colores (figuras II y IV).

Ahora bien, para valorar las manifestaciones de los preescolares durante la aplicación de las fichas y al finalizar cada tarea de aprendizaje, se incluyó una guía de observación como instrumento de evaluación, para incitar al docente a llevar un seguimiento evaluativo procesual, teniendo como único propósito la identificación de los cambios y/o permanencias en las manifestaciones de los preescolares. Es decir, en correspondencia con la perspectiva teórica seleccionada, no se buscó en ningún momento la comprobación de logro de cada elemento movilizado respecto a un estándar en particular, sino identificar si existieron cambios o mejoras en su aprendizaje.

Las secciones de alumnos y familias consisten en materiales didácticos de otra naturaleza, puesto que el principal destinatario de la propuesta didáctica es el docente. La sección de alumnos consistió en un cuadernillo anexo con materiales didácticos recortables y armables diseñados en hojas de tamaño tabloide, los cuales, como se mencionó anteriormente, forman parte del desarrollo de las actividades que se proponen en la sección del docente y tienen como propósito fungir como herramientas que apoyen la resolución de los problemas planteados en cada tarea. En cuanto a la sección de las familias, se incluyen tareas de aprendizaje que el docente puede imprimir y entregarles de manera directa, para realizar en casa y, llevar un seguimiento a las tareas de aprendizaje que se realizan en la escuela. De esta manera, el docente decide cómo gestionar la propuesta didáctica y el manejo de los materiales didácticos en cada sección de las fichas que la comprenden.



Figura V. Imagen de la propuesta didáctica y materiales anexos que se proporcionaron a las docentes para llevar a cabo el pilotaje.

Al concluir la etapa de diseño de la propuesta didáctica se realizó un acercamiento con las docentes para acordar la manera en que se llevaría a cabo el pilotaje. Por ejemplo, cada educadora trabajaría con una ficha durante un mes, con el fin de valorar su aplicación. Se invitó a las educadoras a poner en práctica el codiseño del material, al ajustar de acuerdo con su experiencia los materiales didácticos, las tareas de aprendizaje, instrumentos de evaluación y demás elementos que consideraran necesarios para la mejora de la propuesta; de manera que pudieran apropiarse del recurso didáctico y a su vez, este proceso impactara en su formación para la enseñanza de las matemáticas en preescolar.



Figura VI. Imagen de la reunión con las docentes donde se presentó la propuesta didáctica.

Finalmente, tomando como principal fuente de información las experiencias de las docentes con la propuesta didáctica se procedió con la última etapa del proyecto de intervención, centrando la atención en la evaluación de la propuesta para emitir una mejor versión y proporcionar información que no solo beneficie a la los involucrados, sino a futuras investigaciones.

RESULTADOS

Mediante las entrevistas con las educadoras que pilotaron la propuesta didáctica diseñada, se recabó información sobre su estructura, el proceso de codiseño que les implicó el llevar los materiales didácticos a la práctica y los resultados que obtuvieron mediante su implementación. Por tal motivo, la información se presenta organizada en las tres categorías de análisis anteriormente descritas.

Con relación a la estructura de la propuesta didáctica, específicamente sobre la claridad de la misma, los conceptos trabajados, las temáticas sugeridas y los instrumentos de evaluación que se incluyeron en cada una de las fichas, se encontró que las educadoras valoraron su presentación como concreta, ordenada, clara y específica; por lo que es posible afirmar que hubo una orientación

adecuada para el manejo de los materiales didácticos. Lo anterior muestra concordancia con los siguientes testimonios:

- E3: "Todo me pareció muy ordenado, muy específico y sobre todo ubicar las habilidades que se van a favorecer en los niños, eso me ayudó bastante".
- E2: "Me gusto que también venían las preguntas sugeridas para hacerle a los niños".
- E1: "Todas las actividades como venían ahí estaban bien explicadas, también los materiales estaban pues muy concreto y claro en las especificaciones".

Con respecto al manejo de los conceptos formales, expresaron haber experimentado complejidad para su abordaje, debido a no haberlos trabajado con anterioridad y en un caso, por tratarse de alumnos de segundo grado. Algunos comentarios fueron los siguientes:

- E3: "En cuestión de la maduración de mis niños, creo que todavía el uso del número es un poco difícil" (Concepto formal: número).
- E2: "Trabajé con un grupo de segundo, entonces, si se tuvo que, digamos, bajar un poquito de nivel" (Concepto formal: forma).
- E1: "Introducirllos como a esta parte de agregar y quitar números fue un reto" (Concepto formal: suma/resta).

En virtud de los testimonios de las docentes se puede apreciar la importancia que las educadoras le otorgan al grado escolar para el manejo de los contenidos de aprendizaje, de acuerdo con su experiencia, los preescolares requieren de mayores niveles de desarrollo para lograr la apropiación de los conceptos matemáticos que se plantearon, lo cual se observa en dificultades para llevar a cabo la realización de las diferentes tareas de aprendizaje que se proponen en las fichas de trabajo.

En lo que respecta a las temáticas propuestas, se encontró un consenso sobre la pertinencia de las mismas de acuerdo con el contexto en que se sitúa el centro escolar y los intereses de los preescolares:

- E3: "El mercado allá donde estamos es algo que ellos ven en su contexto" (Temática: El Mercado).
- E2: "Estuvo muy padre el que no se llamaba como típicamente lo trabajamos de 'las figuras geométricas son estas cuatro, conócelas' y '¿dónde más hay?', sino que lo vimos de otra manera las cosas y sentí que se vio más como a la realidad de los niños" (Temática: La Galería de Arte).

- E1: “Si se apegó totalmente al contexto de los alumnos y creo que esto permitió también que ellos mostraran mucho interés en hacer las actividades, incluso en algunas cosas ellos sabían más que lo que yo les estaba compartiendo, ya todos tenían conocimientos previos de esto, y si, por lo mismo creo que fue totalmente apegado a los intereses de ellos y su realidad” (Temática: La Granja).

En lo que respecta a los instrumentos de evaluación que se sugirieron en cada ficha, tanto para la valoración diagnóstica como para la evaluación procesual, se encontró que el diseño de los mismos les resultó adecuado para orientar los procesos de evaluación, así como para recabar información sobre los conocimientos previos de los estudiantes. Además, de acuerdo con una educadora existieron más elementos en la ficha que le permitieron llevar a cabo la valoración de las manifestaciones de sus alumnos:

- E1: “Con los cuestionamientos y los puntos que venían en la parte de arriba me fui guiando para hacer mis anotaciones e incluso también en los espacios que venían en las tareas que se les dejaban a los niños que se registraban tal cual las respuestas de los niños”.

En la categoría de análisis sobre el codiseño en la práctica docente, se recuperaron las experiencias de las educadoras al momento de trabajar la ficha seleccionada con los preescolares y sus familias. Se considera como un trabajo de codiseño por la naturaleza de sus comentarios, orientados en la búsqueda de la mejora de la propuesta didáctica; realizando énfasis en aquellos aspectos que consideraron funcionales y aquellos que podrían mejorarse o en su defecto, tuvieron que ajustar al momento de implementar la ficha. Entre los principales hallazgos, se encontró un consenso sobre las dificultades experimentadas en relación con el trabajo entre pares, principalmente por la falta de familiaridad con esta metodología de trabajo. Las siguientes afirmaciones pueden dar cuenta de ello:

- E3: “Lo que más me causó conflicto fue la organización en cuestión de los roles, en la organización de la dinámica para trabajar la ficha porque me impacientaba un poco, yo quería observar, quería estar atenta, pero todavía mis niños están como muy dependientes, y para todo están ‘profe, profe’ y para todo requerían que estuviera cerca”.
- E1: “Viene muy claro como la comisión de cada uno de los niños, pero no sabía si tal cual era trabajarlo de manera simultánea o cómo era que se tenía que llevar a cabo”.

Como se puede apreciar, existe confusión sobre la manera en que esta metodología de trabajo podría ser implementada con los preescolares, posiblemente como consecuencia del trabajo de formación de conceptos numéricos a través de la articulación lineal de la seriación de contenidos, cuya enseñanza tiende a la individualización y homogeneización, características acordes con la didáctica piagetana (Talizina, 2001); en ese mismo sentido, el trabajo entre pares fomenta el desarrollo de capacidades complejas, elemento no necesariamente considerado dentro de la didáctica piagetana. Por otra parte, dos educadoras mencionaron que existieron otros factores que influyeron en la manera en que propiciaron el trabajo entre pares: la baja asistencia de los estudiantes y por otro lado la numerosa cantidad de estudiantes en el grupo. Ante ello, ambas educadoras realizaron ajustes en la cantidad de preescolares para la conformación de los equipos de trabajo y asignaron los roles disponibles de acuerdo con sus necesidades de aprendizaje.

En adición a lo anterior, se recuperaron las experiencias de las educadoras con las diferentes tareas de aprendizaje en cada ficha de trabajo. Al respecto, todas realizaron ajustes relacionados con la presentación de los materiales de apoyo que se sugerían para los preescolares. En cuanto a la funcionalidad de los mismos, una educadora mencionó que los preescolares con quienes aplicó la ficha de trabajo utilizaron el material didáctico sugerido de una manera diferente a la esperada, es decir que los alumnos adaptaron el material de acuerdo a sus necesidades:

- E2: “Ellos tomaban el binocular y lo tenían así (hace seña de que lo están observando por la parte del lente), lo usaban más bien como apoyo visual pero no se lo ponían, sino que lo tenían en su mano e iban buscando algún objeto que se le pareciera (...) se lo ponían para hacerlo en el salón, pero luego lo bajaban para comprobar que sí era lo que estaban viendo”.



Figura VII. Imágenes sobre el uso de los binoculares en la ficha “La Galería de Arte”.

Nota: La imagen fue proporcionada por la educadora en cuestión.

Por otra parte, otra educadora expresó que uno de los materiales didácticos que trabajó resultó funcional para sus estudiantes sin necesidad de realizar algún ajuste:

- E3: “Me gustaron mucho los cuadritos de los números y las monedas atrás, fue muy funcional, lo utilizaban adecuadamente para establecer las comparaciones, checaban el precio en la etiqueta de la fruta y en la etiqueta grande”.

A propósito de los escenarios anteriores es importante reiterar que se buscó la apropiación de los materiales didácticos motivando a las educadoras a través de la descripción de las actividades a realizar los ajustes que consideraran necesarios para atender las características particulares de sus grupos. De tal forma que el proceso de codiseño, además de coadyuvar a la renovación de la propuesta didáctica mediante una nueva versión sustentada en los resultados del pilotaje, debe ser visto como un proceso continuo.

Finalmente, en relación con los resultados de la propuesta didáctica obtenidos en el pilotaje, las educadoras mencionaron información relacionada con la motivación y el aprendizaje de los preescolares, así como sobre el proceso de aprendizaje entre pares que los alumnos experimentaron y la participación de las familias.

Si bien de este punto no es posible realizar alguna inferencia sobre el grado de consolidación de conceptos matemáticos, entre los principales hallazgos, se encontró que todas las educadoras percibieron el interés y gusto en los preescolares para realizar las tareas de aprendizaje propuestas en las diferentes fichas. Incluso, dicha motivación pudo ser percibida desde casa por parte de las familias en un grupo, quienes lo expresaron con una de las educadoras:

E1: “No me habían hecho ese tipo de comentarios como de ‘ay mi niño está bien interesado’ y eso si lo noté como algo nuevo y algo bueno, ellos mismos notaron el interés de los niños por estar trabajando esta temática, estas actividades”.

Este escenario podría reflejar la importancia de considerar el entorno inmediato de los estudiantes a la hora de proponer situaciones de aprendizaje dentro del aula. De tal forma que, la ficha “La Granja”, resultó un tema de interés para los preescolares que trabajaron con las tareas de aprendizaje que ahí se proponen y, en consecuencia, podría ser un factor que incidiera en sus procesos de aprendizaje.



Figura VII. Producto de una tarea de aprendizaje en la ficha “La Granja”, elaborada por los preescolares y la educadora que la implementó durante el proceso de pilotaje. Nota: La imagen fue proporcionada por la educadora en cuestión.

En contraparte, una educadora pudo observar que los preescolares experimentaron dificultad para mantener la atención prolongada en algunos momentos, a pesar de haber percibido motivación en ellos al trabajar con la ficha seleccionada;

- E3: "Fue un poquito difícil que mantuvieran la atención (...) entonces traté de que fueran las sesiones cortas y de que tuvieran la oportunidad de participar en el rol que les interesaba"

Lo anterior, de acuerdo con sus comentarios, se atribuye al hecho de que todos los preescolares en el equipo se encontraban interesados en participar bajo el mismo rol, por lo que tuvo que realizar ajustes para que pudieran hacerlo de manera ordenada.

En cuanto a los resultados obtenidos relacionados con el aprendizaje de los preescolares, todas las educadoras identificaron cambios en sus manifestaciones al realizar una comparación entre el inicio de la aplicación de la ficha de trabajo y al finalizar su implementación:

- E1: "Creo que conforme avanzaron las actividades sí logre ver un avance en ellos en cuanto a sus aprendizajes. Al principio se les dificultaba mucho el recordar cuántos huevos produce cada gallina y al momento de plantearseles ya en un problema se les dificultaba el cómo conectar eso, pero ya al final casi la mayoría del grupo sí lo lograba, entonces sí hubo un avance" (Concepto formal: suma/resta).
- E3: "Logré observar y percatarme de ciertos aprendizajes en los niños y ciertos cambios, avanzaron más en el conteo ordenado, en la correspondencia de las monedas, en esos cuadritos que te digo que les sirvió mucho, donde están los números y las monedas y avanzaron también en la identificación del número" (Concepto formal: número).
- E2: "En la actividad uno, la de 'las formas en mi entorno' muchos se guiaron por el color, ya ves que está el binocular y en la parte de la figurita pues tiene distintos colores, ellos iban a explorar pero decían, 'es que es lo mismo', porque era el mismo color de lo que estaba en el salón, y yo de nuevo, pero mira la forma, mira los lados que tiene, y algunos no, pero muchos otros sí empezaron a encontrar distintos objetos que iban con esa figura del binocular y eventualmente sí lograron encontrar, a lo mejor no todos, pero aquellos que no lo lograron digamos que no lo logran en muchos temas" (Concepto formal: forma).

De acuerdo con el primer testimonio, los preescolares lograron llevar a cabo sumas y restas con materiales concretos, avanzando en la comprensión de su funcionalidad y los elementos que se necesitan para su operación, que se refleja en la capacidad de memorizar cuántos huevos produce una gallina

para tomarlo como referencia al agregar o quitar elementos de acuerdo con las consignas dadas en una tarea situada en un contexto real. En el caso del concepto formal de número, la educadora menciona cambios significativos observables con respecto a la funcionalidad del signo (números) para realizar actividades cotidianas como comprar o vender utilizando monedas, lo cual se manifiesta en la mejora de habilidades como el conteo, representación de cantidades e identificación de números escritos. En lo que respecta a la última aportación, se menciona que algunos preescolares avanzaron en discriminar objetos de acuerdo con sus características y las diferentes figuras geométricas proporcionadas, guiados también por los cuestionamientos de la docente, poniendo en práctica el intercambio de saberes al confrontar sus conceptos espontáneos y el concepto formal de forma al interactuar con el entorno. Si bien, estos testimonios no demuestran un dominio de los conceptos formales de número, forma y suma/resta, representan un primer acercamiento desde su funcionalidad en situaciones cotidianas que les resultan familiares. Por ello, se considera que la exposición prolongada con las tareas propuestas, guiadas mediante el diálogo e intercambio con otros, eventualmente permitiría la internalización de los mismos y su posterior dominio.

Por otro lado, y de acuerdo con el último testimonio, existieron preescolares en los que no se observaron avances relacionados con su aprendizaje. Al respecto, otra educadora expresó lo siguiente:

E3: "Tengo ciertos casos de niños que no logro ver avance, pero ahí depende ya de la maduración de los alumnos, son niños que han venido bajitos desde un principio y los cambios de ellos van muy lentos (...) son niños que los papás no tienen tiempo para atenderlos y se nota".

Es importante mencionar que la participación de las familias, específicamente para el caso de los preescolares que se mencionan, podría haber sido un factor que influye en el estancamiento de su desarrollo y sus procesos de aprendizaje. La ficha de trabajo implementada comprendió tareas de aprendizaje en la sección de las familias para continuar con la apropiación del concepto formal desde casa, por lo que valdría la pena indagar con los padres de familia sobre los resultados obtenidos en dichas tareas de aprendizaje y de esta manera establecer con mayor sustento una correlación.

En contraparte, existieron casos donde los preescolares manifestaron avances en habilidades o conocimientos relacionados a la temática de la ficha presentada; lo cual puede ser percibido mediante el siguiente comentario de una educadora:

- E3: "Ciertos niños ya lograban dar la feria [cambio], 'esto te sobra', 've a comprar otra cosa', ya empezaban a hacer ellos esa correspondencia y esa valoración de ver que tienes más dinero y ve a ver qué más te alcanza" (Temática: El Mercado).

De manera adicional, se recuperó información sobre los resultados obtenidos al propiciar el trabajo colaborativo dentro del aula, relacionada con el aprendizaje entre pares. De acuerdo con dos educadoras, los preescolares con mayor dominio del concepto formal o con mayor familiarización con las actividades lograron apoyar a quienes presentaban dificultades para realizar las tareas de aprendizaje propuestas en las fichas:

- E2: "Entre los dos o tres niños, yo apoyándome de quienes ya lo habían hecho el día anterior como que medio guiaran a los que no habían ido y se habían perdido la actividad (...) cada quien tenía una imagen distinta cada equipo y entre los dos o tres niños que eran tomaban las figuritas para hacer los dibujos".
- E1: "Algunos lograban hacer eso, apoyar a su compañero y le ayudaban, decían 'mira, ocu-pas tantas monedas', los que tienen mayor dominio lograban apoyar a los demás".

Otro de los hallazgos más relevantes consistió en el relato de una de las educadoras, al haber confrontado su percepción sobre la manera en que había estado propiciando el trabajo entre pares en su práctica diaria, reconociendo que haber trabajado con la ficha seleccionada representó un reto tanto para ella como para sus estudiantes:

- E1: "Yo no consideraba que fuera un área de oportunidad en mi grupo porque pues sí había implementado otras actividades de que trabajan en equipo, pero creo que tal cual estas actividades y estas fichas si propician el que sea un trabajo en colaborativo (...) fue un reto, pero sí se logró también al final".

Finalmente, se recabó información sobre la participación de las familias mediante la puesta en marcha de las tareas de aprendizaje en la sección "familias" de cada una de las fichas. Al respecto, dos educadoras manifestaron haber percibido una participación menor a la esperada:

- E3: "Tengo la verdad varios padres de familia que ambos trabajan y no tienen mucho tiempo, de hecho, no los veo, son niños que van por ellos las niñeras o cuidadoras, abuelitas, entonces yo sé que para ellos es difícil apoyarlos, por eso te comentaba que no todos cumplieron con la tarea (...) los que lo lograron hacer son los más participativos".
- E2: "Yo me doy cuenta que ellos son los que hacen las tareas. Que si bien, se las fui prestando para que las fueran haciendo con calma y todo, pero yo me doy cuenta (...) varios no se esforzaban un poquito más para profundizar ya sea porque ellos tampoco conocen tanto la información o porque no tienen ganas, entonces hubo pocos donde se veía reflejado el trabajo del niño".

Como se menciona en párrafos anteriores, este panorama podría ser un detonante en los resultados de aprendizaje de los preescolares que las educadoras percibieron como imperceptibles o inexistentes. Desde este planteamiento, resultaría interesante analizar la relación existente entre el contexto escolar y el entorno familiar de los preescolares para impulsar el desarrollo de su pensamiento matemático y niveles de aprovechamiento académico en el campo disciplinar de matemáticas.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Como se puede apreciar, el presente proyecto de intervención provee elementos novedosos, por el enfoque teórico que lo sustenta, los contenidos de aprendizaje que se proponen y los destinatarios (docente, alumnos y familias, de manera conjunta); componentes que le distinguen de los materiales didácticos distribuidos por la SEP para todo el sistema educativo. En cuanto al objetivo de la intervención educativa, que consistió en diseñar una propuesta didáctica que proporcionara tanto a las educadoras, como a sus alumnos y familias elementos para favorecer el pensamiento matemático, aprovechando los postulados vigotskianos en materia de la ZDP y la interacción social; conforme a los resultados obtenidos en el pilotaje de la misma, se puede afirmar que se alcanzó el propósito trazado.

Asimismo, se retomaron los planteamientos de Sánchez y García (2021) respecto a la importancia del vocabulario, como elemento base para la comprensión y resolución de problemas matemáticos. La propuesta centró sus objetivos en tres conceptos matemáticos: número, forma y suma/resta como metas de aprendizaje. Las educadoras manifestaron haber experimentado complejidad para su abordaje, a pesar de recibir una orientación clara sobre

cómo trabajarlos dentro del aula propiciando el diálogo, con preguntas clave. Ello podría dar cuenta de la necesidad de un vocabulario informal (aludiendo a los conceptos espontáneos) con los cuales establecer asociaciones para tener referencias que les permitan conectar sus saberes previos con los conceptos formales que la escuela propone. Es aquí donde se realza la importancia que el entorno familiar representa en los procesos de desarrollo de los infantes, puesto que estos agentes podrían posibilitar o limitar la adquisición de un bagaje cultural (representado en este caso, como un vocabulario amplio y variado) que le permita establecer relaciones entre sus experiencias y conocimientos y los contenidos o metas de aprendizaje que la escuela propone. En el mismo sentido, desde la perspectiva histórico-cultural, el lenguaje se erige como la herramienta intelectual más relevante para el desarrollo psicológico, ya que favorece la internalización; es decir, el tránsito de las funciones psicológicas desde el plano social, hacia el individual. De acuerdo con Vygotsky (2006), esto es crucial para lograr una convergencia entre los conceptos formales e informales, por lo que el rol de las familias puede ser determinante en los procesos de escolarización de las matemáticas y en sus procesos de aprendizaje en general.

Ahora bien, el considerar como objetivos de aprendizaje los conceptos matemáticos de número, forma y suma/resta, representa a su vez la oportunidad de ampliar las posibilidades de actuación de los docentes en educación preescolar para enseñar matemáticas. Lo anterior, debido a que brinda mayores oportunidades para proponer un abordaje centrado en la funcionalidad de las matemáticas, partiendo de elementos de su contexto y de sus saberes, sin importar su edad o grado escolar, propiciando la colaboración y la puesta en marcha de la ZDP, así como reconociendo el rol de las familias en el proceso de enseñanza-aprendizaje. De tal forma, se estaría pasando de un enfoque normativo y lineal, centrado en el manejo de técnicas o procedimientos específicos acordes a un tiempo y edad determinado y secuencial, a la aplicación misma de la matemática en la vida diaria y en la comprensión de su funcionalidad. La viabilidad de esta premisa radica en las manifestaciones percibidas por las educadoras en sus estudiantes y en las familias de los mismos, traducido en el incremento en la motivación de los alumnos para aprender matemáticas bajo esta perspectiva teórica, tal y como concluyeron Mujica y Márquez (2022) en su estudio.

En adición con lo anterior, se espera que, mediante la implementación prolongada de estos materiales didácticos, los docentes de educación preescolar puedan introducirse a nuevas prácticas que impacten de manera directa en el

proceso de enseñanza-aprendizaje de sus estudiantes, favoreciendo el trabajo colaborativo entre pares y con las familias. Para ello, se motiva a dichos actores a poner en práctica el codiseño de los materiales didácticos de manera indefinida; y que, de manera gradual y orgánica puedan incorporar elementos de la teoría histórico-cultural en su práctica para favorecer el pensamiento matemático con los preescolares a su cargo. A su vez, este proceso permite pasar de la reproducción del discurso Matemático Escolar a la problematización de la matemática escolar (Reyes-Gasperini, 2016), avanzando en prácticas que permitan otra manera de relacionarse con el conocimiento matemático escolar asumiendo liderazgo y autonomía.

La pandemia por la Covid-19 evidenció la gran influencia del espacio escolar como una oportunidad para desarrollar el aprendizaje de los estudiantes, especialmente en el campo disciplinar de matemáticas. Por ello, se resalta la necesidad de planificación de estrategias y uso de materiales didácticos que promuevan la convivencia, así como la internalización de las funciones psicológicas superiores. Asimismo, y de acuerdo con las percepciones de los sujetos participantes, se dio cuenta de la importancia de ofrecer oportunidades de interacción social entre pares como una estrategia metodológica en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por tal motivo, el trabajo colaborativo podría representar una modalidad de trabajo viable para el desarrollo del pensamiento matemático en preescolares. Sin embargo, para implementar esta estrategia didáctica de manera adecuada, debe ser vista como una metodología; es decir, debe ser considerada más allá de cuestiones organizativas a la hora de implementar las actividades escolares, asignando roles específicos a cada estudiante y ubicando a los mismos de acuerdo con sus habilidades y conocimientos previos. Lo anterior, como una forma de abonar a las dificultades que podrían experimentarse durante la puesta en marcha de esta metodología, como se menciona en Albarrán (2022), que responden mayormente a cuestiones de organización para su ejecución.

En cuanto a las limitaciones enfrentadas al desarrollar el proyecto, giran en torno al marco histórico contextual en que se situó, ya que durante la fase diagnóstica el centro escolar se encontraba implementando la ERE; por lo que al momento en que se procedió con el diseño de la propuesta didáctica para la fase de intervención se encontraban en los primeros meses de haber regresado a la escuela presencial, mientras que en el pilotaje de la misma a casi el término del ciclo escolar en cuestión. Por tal motivo, se considera que los cambios en la modalidad escolar ofertada por la unidad receptora podrían haber influido en los resultados obtenidos.

Finalmente, mediante los resultados obtenidos en la fase de intervención educativa, se pudo percibir que la perspectiva histórico-cultural representa un reto para el trabajo de la matemática escolar en las aulas de educación preescolar, por lo que la transición de una enseñanza de las matemáticas desde el saber matemático representa un desafío a enfrentar. No obstante, es importante reconocer la existencia de una necesidad latente por intervenir con respecto a la manera en que se ha abordado esta disciplina de manera histórica, puesto que, mediante pruebas estandarizadas y de manera regular en las aulas, sigue existiendo un nivel de aprovechamiento inferior al esperado, previo a la pandemia (como se identificó en el Programa Operativo Anual de Baja California) y posterior a ella; de acuerdo con la valoración diagnóstica realizada previo a la intervención en el centro escolar participante (Mejía *et al.*, 2024). De tal forma, la presente intervención educativa constituye una aproximación a prácticas fundamentadas en el rediseño del discurso matemático escolar, buscando el empoderamiento docente y la problematización de los contenidos curriculares (Reyes-Gasperini, 2016) correspondientes al campo formativo de pensamiento matemático para la educación preescolar.

AGRADECIMIENTOS

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT), a la institución que nos permitió realizar el estudio y agentes educativos participantes.

REFERENCIAS

- Albarrán, I. (2022). El trabajo colaborativo como recurso didáctico para el aprendizaje matemático en preescolar. *Revista Connexion*, 11(31), 35-48.
- Cazales, Z., Granados, H., y Pérez, L. (2020). Políticas implementadas por el gobierno mexicano frente al COVID-19. El caso de la educación básica. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 50(ESPECIAL), 143-172.
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI). (2021). *Principales resultados por localidad (ITER). Baja California Censos y Conteos de Población y Vivienda (datos de 2020)*. INEGI. Recuperado de: <https://www.inegi.org.mx/app/descarga/ficha.html?tit=325900&ag=0&f=csv>

- Mejía, Y., Jiménez, J. y Cordero, D. (2024). *Propuesta didáctica para la mejora del razonamiento matemático en escolares desde la perspectiva socio-cultural*. En *Congreso Nacional de Investigación Educativa*, Tabasco, México.
- Mejía, Y. y Jiménez, J. (2025). Aprendizaje y desarrollo del razonamiento matemático bajo el paradigma histórico-cultural. En Henríquez, P., del Cid, C., Serrano, D., Contreras, I., Garduño, Y. y Boroel, B. (Ed.), *Experiencias en intervención educativa: Agentes, procesos de cambio y perspectivas educativas* (pp. 19-38). Newton, Edición y Tecnología Educativa.
- Mujica, A. y Márquez, M. (2022). Pensamiento matemático en la primera infancia: Estrategias de enseñanza de las educadoras de párvulos. *Mendive. Revista de Educación*, 20(4), 1338-1352.
- Nikola, G. y Talizina, N. (2001). La formación de habilidades generales para la solución de problemas aritméticos. En Talizina, N. (Ed.), *La formación de habilidades del pensamiento matemático* (pp. 87-150). Universidad Autónoma de San Luis Potosí.
- Organización Panamericana de la Salud (OPS). (s/f) *Enfermedad por el Coronavirus (COVID-19)* [Nota informativa] © Organización Panamericana de la Salud (OPS). Recuperado de: <https://www.paho.org/es/enfermedad-por-coronavirus-covid-19> [27 de octubre de 2021].
- Papalia, D., Wendkos, S. y Duskin, R. (2010). *Desarrollo humano*. Mc Graw Hill.
- Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. Gedisa Editorial: Barcelona, España.
- Rojas, G. (2018). *Psicología de la Educación: Una mirada conceptual*. El Manual Moderno.
- Salmina, N. (2001). La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. En Talizina, N. (Ed.), *La formación de habilidades del pensamiento matemático* (pp. 40-86). Universidad Autónoma de San Luis Potosí.
- Sánchez, A., y García, M. (2021). Programa de entrenamiento en potencial de aprendizaje para niños colombianos con dificultades de aprendizaje en Matemáticas. *Interdisciplinaria*, 38(1), 163-180.
- Secretaría de Educación Pública (SEP). (2022). *Programa de Estudios de la Fase 2 Educación Preescolar*. Recuperado de: https://info-basica.seslp.gob.mx/wp-content/uploads/2022/07/Fase-2_Educacion-preescolar.pdf
- Secretaría de Educación Pública (SEP). (2022). *Plan de Estudio para la educación preescolar, primaria y secundaria 2022*. Recuperado de: https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/792397/plan_de_estudio_para_la_educacion_preescolar_primaria_secundaria_2022.pdf

- Talizina, N. (2001). La formación de conceptos matemáticos. En Talizina, N. (Ed.). *La formación de habilidades del pensamiento matemático* (pp. 21-39). Universidad Autónoma de San Luis Potosí.
- Ursini, S. (1996). Una perspectiva social para la educación matemática. La influencia de la teoría de LS Vygotsky. *Educación matemática*, 8(3), 42-49.
- Vygotsky, L. (2006). *Pensamiento y lenguaje*. México: Quinto Sol.
- Vygotsky, L. (2009). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Cole, M., Steiner, V., Scribner, S. y Souberman, E. (Ed.). Barcelona.
- Wertsch, J. (1985). *Vygotsky and the social formation of mind*. Harvard university press.

Autora de correspondencia:

YOLANDA MONTSERRAT MEJÍA CHÁVEZ

Dirección: Calz. Chapultepec, Col. Adolfo Ruiz Cortines, C.P. 22895,
Ensenada, Baja California, México.
ymejiac@edubc.mx

Representación individual y diádica de datos cuantitativos: Estudiantes de sexto y séptimo grado construyendo una tabla de contingencia

Individual and dyadic representation of quantitative data: Sixth and seventh grade students constructing a contingency table

Mariano Castellaro,¹ Nadia Soledad Peralta,² Juan Manuel Curcio,³ María Agustina Tuzinkievicz⁴

Resumen. Se compara la construcción de un sistema representativo de datos cuantitativos en condición individual y diádica, en sexto y séptimo grado. El propósito es analizar las posibilidades que plantea una condición con respecto a la otra. El estudio tuvo dos fases: individual ($n=102$) y diádica ($n=40$). La tarea proponía, a partir de un conjunto primario de datos, construir una tabla que vinculara las frecuencias de dos variables: grado (cualitativa nominal) y altura (cuantitativa discreta). Se analizó: (a) el tipo y nivel de formato representativo producido en condición individual y diádica; (b) el sistema

Fecha de recepción: 28 de febrero de 2024. **Fecha de aceptación:** 12 de mayo de 2025.

¹ Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas - Universidad Nacional de Rosario, castellaro@irice-conicet.gov.ar, <https://orcid.org/0000-0001-5470-9662>

² Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas - Universidad Nacional de Rosario, nperalta@irice-conicet.gov.ar, <https://orcid.org/0000-0001-9950-6949>

³ Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas - Universidad Nacional de Rosario, curcio@irice-conicet.gov.ar, <https://orcid.org/0000-0001-8871-5315>

⁴ Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas - Universidad Nacional de Rosario, tuzinkievicz@irice-conicet.gov.ar, matuzinkievicz@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-7443-9003>

representativo producido por la díada y su relación con las producciones individuales previas de sus integrantes. Se observó baja proporción general de formatos tabulares (<10%) y predominancia de listas, específicamente, basadas en intervalos de altura (58.8% individual; 75.0% diádico). Se corrobora la dificultad que plantea construir tablas como forma de ordenamiento de datos cuantitativos cruzados, observada en otros antecedentes. Aun así, el trabajo diádico (colaborativo), comparado con el individual, se asoció con una mayor proporción de producciones avanzadas, lo cual coincide con una perspectiva socioconstructivista del conocimiento.

Palabras clave. *Alfabetización estadística; Tablas; Listas; Sistemas externos de representación; Interacción entre pares; Transnumeración*

Abstract. The study aims to compare the construction of a representative system for quantitative data in individual and dyadic conditions among sixth and seventh-grade students. The purpose is to analyze the possibilities that one condition presents in relation to the other. The study comprised two phases: individual ($n=102$) and dyadic ($n=40$). The task involved constructing a table linking the frequencies of two variables, based on a primary set of data: grade (nominal qualitative variable) and height (discrete quantitative variable). The analysis included: (a) the type and level of representative format produced; (b) the representational system produced by the dyad and its relation to the prior individual productions of its members. A low overall proportion of tabular formats was observed (<10%) with a predominance of lists, specifically based on height intervals (58.8% individual; 75.0% dyadic). The difficulty involved in constructing tables as a way of organizing cross-tabulated quantitative data, as observed in previous studies, is confirmed. Nonetheless, dyadic (collaborative) work, compared to individual work, was associated with a higher proportion of advanced productions, which is consistent with a socio-constructivist perspective of knowledge.

Keywords. *Statistical literacy; Tables; Lists; External representation systems; Peer interaction; Transnumeration*

INTRODUCCIÓN

El estudio de tablas y gráficos estadísticos constituye un objeto de interés para la investigación educativa (Estrella *et al.*, 2017). La comprensión de tablas y gráficos es un punto central dentro de la enseñanza actual, por la exposición permanente de los estudiantes a diversos tipos de información provenientes de medios y redes sociales. Interpretar, construir, utilizar y comunicar tablas o gráficos no solo constituyen competencias estadísticas básicas, sino también requisitos cruciales para la vida social contemporánea, caracterizada por la abundancia de datos y noticias ambiguas (Gal, 2022; Gal y Geiger, 2022). Así, las tablas y gráficos constituyen objetos culturales (Arteaga *et al.*, 2011), cuya apropiación crítica es clave para la formación de una educación ciudadana o estadística cívica (Engel, 2019; Gal, 2002; Geiger *et al.*, 2023).

Desde una mirada psicológica, las tablas y gráficos constituyen sistemas externos de representación, es decir, herramientas que facilitan y organizan el pensamiento (Martí, 2009). Desde una perspectiva interaccionista (Andersen *et al.*, 2009; Pozo, 2017), el conocimiento se produce a partir de mediaciones representacionales objetivas y materiales aportadas por la propia cultura. Dichas mediaciones se corresponden con aquellos dispositivos culturales que soportan y extienden las funciones mentales, y que se constituyen como un elemento intrínseco de dichos procesos. Precisamente, las tablas y gráficos son ejemplos de tales dispositivos culturales.

El presente trabajo se interesa especialmente por un tipo particular de tablas, que son las tablas estadísticas (Lahanier-Reuter, 2006). Si bien existe una creencia generalizada sobre la simplicidad que implicaría interpretar o construir una tabla estadística, la identificación de diferentes procesos cognitivos involucrados sugiere un mayor grado de complejidad (Martí *et al.*, 2011). A su vez, las tablas estadísticas tienen una relación directa con el conocimiento científico, en tanto constituyen una de las formas privilegiadas de representación de conceptos abstractos y de los datos producidos en la investigación (Pallauta *et al.*, 2021). En el caso específico de Argentina (el contexto sociocultural del presente trabajo), los núcleos prioritarios de aprendizaje (Ministerio de Educación, 2011a, 2011b) incluyen, desde los últimos grados de primaria, contenidos relativos con la lectura de tablas y gráficos estadísticos.

Este estudio retoma el propósito de analizar la construcción de tablas como formas de ordenamiento de datos primarios. En la literatura, dicho proceso fue abordado principalmente en contexto de resolución individual, es decir, un

sujeto trabajando de manera solitaria. Este trabajo aborda dicho proceso en un marco intersubjetivo (específicamente, entre pares), lo cual es menos considerado en las investigaciones, a pesar de que en la actualidad es habitual el trabajo en equipo en las aulas. La consigna solicita, a estudiantes de sexto y séptimo grado, construir una tabla que combine las frecuencias de dos variables, presentes en un conjunto mayor de datos primarios. En este marco, se plantean las siguientes interrogantes: ¿qué tipos de formatos representacionales se producen? ¿Estas producciones presentan variaciones según ocurran en condición individual o diádica (con un compañero/a)? ¿De qué manera se integran las producciones iniciales de cada sujeto en la posterior producción diádica?

El estudio propone dos objetivos. El primero, es comparar la construcción de un sistema representativo de datos cuantitativos en condición individual y diádica. El segundo, es indagar la relación entre la producción diádica y las producciones individuales de los sujetos. Ambos objetivos refieren a estudiantes de sexto y séptimo grado de primaria que trabajaron en una consigna que solicitaba construir una tabla que vincule las frecuencias de las categorías de dos variables (coincidencia implícita con la noción de tabla de contingencia). A pesar de esta instrucción específica, la literatura sugiere que es esperable que los sujetos produzcan diferentes tipos de sistema de ordenamiento de datos, más y menos análogos al formato convencional de una tabla de contingencia (Martí *et al.*, 2011).

MARCO TEÓRICO

LAS TABLAS ESTADÍSTICAS COMO SISTEMAS EXTERNOS DE REPRESENTACIÓN

La apropiación cognitiva de tablas y gráficos se vincula con el concepto de alfabetización gráfica (Balchin y Coleman, 1966; Pérez-Echeverría *et al.*, 2010; Postigo y López-Manjón, 2015), lo que refiere a la capacidad para leer, comprender y construir representaciones visuales, es decir, para comunicar información que no puede transmitirse de forma eficaz mediante palabras o símbolos matemáticos. Las tablas y gráficos, al igual que otros soportes, han sido entendidos como sistemas externos de representación, que poseen una materialidad y especificidad inherentes, incluso irreductibles a los procesos cognitivos internos de referencia (Martí, 2009). Esto implica pensarlos como auténticas herramientas y soportes del pensamiento (Pérez-Echeverría *et al.*, 2010; Vygotsky, 1931/1988), lo que trasciende una función de facilitación del conocimiento, para ser pensados

como elementos intrínsecos de este. La apropiación de estos sistemas representacionales implica un proceso de reconstrucción, que –a su vez– repercute en las propias posibilidades cognitivas internas del sujeto (Pozo, 2017).

La apropiación de un sistema externo de representación puede vincularse con tres procesos cognitivos básicos y complementarios: su lectura (o comprensión), su producción y su uso (Martí, 2009). A nivel conceptual, existe un consenso general sobre los posibles niveles de lectura de gráficos, basado en Curcio (1989): nivel 1, describir (leer *los* datos); nivel 2, interpretar (leer *entre* los datos); nivel 3, inferir (leer *más allá* de los datos). A esto se puede agregar un nivel 4, vinculado con una lectura crítica del sistema y vinculada al contexto (leer *detrás* de los datos; Shaughnessy, 2007). Estos niveles pueden extrapolarse a la lectura de tablas (Batanero, 2001).

El concepto de tabla estadística refiere a una estructura gráfica rectangular bidimensional, integrada por filas y columnas, que permite representar los datos de una o más variables, y la relación entre estas (Estrella, 2014). Por lo general, dichas representaciones se basan en la combinación de elementos categóricos (como las categorías de variable) y cuantitativos (por ejemplo, valores de frecuencia correspondientes). Dentro de esta generalidad, es posible diferenciar tres tipos de tablas estadísticas (Lahanier-Reuter, 2006; Pallauta *et al.*, 2022a). La *tabla de datos* coincide con la noción clásica de matriz de datos. Cada fila contiene la información de un caso, excepto la primera que generalmente contiene las etiquetas de la o las variables consideradas. Cada columna contiene la información de una variable (excepto la primera que generalmente se utiliza para identificar cada caso). Por su parte, la *tabla de distribución de una variable* representa los valores de frecuencia de cada modalidad. La primera columna muestra las categorías de la variable. La o las columnas restantes pueden referir a diferentes tipos de frecuencia (por ejemplo, absolutas, relativas, acumuladas, etc.), e incluir una columna final derecha con los totales. Por último, la *tabla de doble entrada* representa la relación cruzada entre las frecuencias de dos variables, en general, categóricas. En este sentido, también se la entiende como una *tabla de contingencia*, aunque esta también puede combinar más de dos variables.

En la tabla de doble entrada, una variable se representa en las filas y la otra en las columnas, permitiendo observar la relación entre ellas y analizar su distribución conjunta. Las celdas contienen los valores de frecuencia resultantes del cruce de las correspondientes categorías de las variables. Además, presenta celdas marginales con los totales de frecuencia, por fila, por columna y generales. Las tablas de doble entrada son una representación tabular importante, pues

permiten visualizar y conectar la estadística descriptiva con las propiedades elementales de probabilidades (Calderón Torres *et al.*, 2023). Además, permiten interpretar la posible relación entre las variables categóricas.

LAS TABLAS EN LA ALFABETIZACIÓN ESTADÍSTICA Y EL PENSAMIENTO TRANSNUMERATIVO

El concepto de alfabetización estadística refiere a un conjunto de dimensiones (competencias) relacionadas con el manejo de datos estadísticos, que incluyen el muestreo de unidades, la representación de datos, su reducción, análisis de probabilidades, de inferencia, de variación y el pensamiento crítico en la toma de decisiones (Schield, 2006; Watson, 2009; Watson y Callingham, 2003). Particularmente, la lectura, interpretación y construcción de tablas estadísticas (Gea *et al.*, 2022; Pallauta *et al.*, 2023) son parte de la dimensión “representación de datos” (Callingham y Watson, 2017; Schield, 2011; Watson y Smith, 2022). Las tablas sirven como herramientas efectivas para resumir, organizar, comunicar y analizar datos (Estrella *et al.*, 2017; Garfield y Gal, 1999; Pallauta *et al.*, 2022a).

También, la lectura y construcción de tablas cuantitativas son parte del pensamiento estadístico (Wild y Pfannkuch, 1999). Desde esta perspectiva, una de las dimensiones del pensamiento estadístico son los “tipos fundamentales del pensamiento estadístico” (p. 227), y como parte de esos tipos se encuentra la transnumeración de datos. Esta remite al cambio entre representaciones de datos para obtener una mayor comprensión del fenómeno a investigar (Chick, 2004; Chick *et al.*, 2005; Estrella y Olfos, 2015). Chick (2004) postula un conjunto de diez técnicas transnumerativas, cada una de las cuales implica algún cambio en la representación. A continuación, se mencionan las más relevantes para este trabajo. *Clasificación*: los datos se organizan según un criterio (no surgen nuevas variables). *Agrupación*: los datos se agrupan según un criterio, como intervalos de clase; esto genera una nueva variable derivada de la original. *Selección de subconjunto*: se elige un subconjunto específico de datos para lograr mayor comprensión. *Cambio de tipo de variable*: una variable numérica se presenta en términos categóricos, o una categoría se presenta en términos numéricos u ordinales. *Cálculo de frecuencias*: se determinan las frecuencias de las categorías o valores de una variable; las frecuencias se pueden considerar como una nueva variable. *Cálculo de proporciones*: frecuencias en relación con un total, creando una nueva función variable. *Graficación*: se grafican algunas o todas las variables (en la forma actual).

Chick y Watson (2001) también proponen tres niveles en la producción de tablas y gráficos: uniestructural, centrado en un aspecto particular del conjunto de datos o un subconjunto; multiestructural, enfocado en varios aspectos de información, a menudo de manera secuencial, por ejemplo, representando una sola variable; relacional, que implica la comprensión integrada de las relaciones entre diferentes aspectos de la información, por ejemplo, realizando una tabla de doble entrada.

APRENDIZAJE A TRAVÉS DE LA INTERACCIÓN ENTRE PARES

Desde una perspectiva socioconstructivista, la interacción con otro/s constituye una experiencia central para la construcción del conocimiento (Doise y Mugny, 1984; Vygotsky, 1931/1988). Así, el sentido de estudiar la apropiación cognitiva de tablas estadísticas en un marco interactivo trasciende un cambio de escenario social y toma un significado teórico específico. Tradicionalmente, una visión constructivista clásica propone un concepto de experiencia que iguala la manipulación solitaria de los objetos físicos y la interacción con los demás, como factores del desarrollo cognitivo y de la construcción de conocimiento (Piaget, 1950/2001). En cambio, una posición socioconstructivista sostiene una diferencia cualitativa entre las dos formas de experiencia mencionadas, claramente en favor de la segunda (Psaltis *et al.*, 2009). Los contextos de interacción con otros/as, ya sea el adulto y los pares, serían ámbitos propicios para la construcción de conocimiento, porque los demás aportan puntos de vista alternativos al del propio sujeto, generando un proceso de descentración y posterior reestructuración cognitiva, o porque se generarían procesos de negociación compartida de significados. Por contrapartida, cuando un sujeto trabaja de manera individual con un objeto (sin mediación de otro), si bien son posibles ciertas reestructuraciones cognitivas, estas no poseerían el nivel de profundidad alcanzado cuando el entorno es social (Castellaro y Peralta, 2020; Doise y Mugny, 1984; Vygotsky, 1931/1988).

El trabajo con otro/s o intersubjetivo puede conceptualizarse de dos maneras, según la distinción propuesta por Mejía-Aráuz *et al.* (2018). Por un lado, el estar con otro/s puede entenderse como un proceso de *negociación* entre posiciones individuales para llegar a un acuerdo. Así, este logro implica una tensión o conflicto entre las propias posiciones epistémico-sociales de los sujetos que interactúan, cuya resolución exige un consenso basado en el intercambio de argumentos. Por otro lado, el trabajo intersubjetivo puede conceptualizarse como un proceso de complementación interpersonal, que emerge a partir de la

co-construcción de un campo de significación compartida, de carácter irreducible a las individualidades de quienes interactúan. Esta segunda conceptualización coincide mayormente con la noción de *colaboración*.

El presente trabajo asume una posición teórica que marca una diferencia cualitativa entre interacción social y trabajo individual. Así, una unidad social, aunque sea mínima como una díada, resulta emergente e irreducible con respecto a los individualidades que la integran (Rogoff, 2003; Wertsch, 1998). En términos figurados, el trabajo conjunto entre un “Sujeto A” y un “Sujeto B” implica una “Díada C”, y no simplemente a una “Díada AB”. Lo anterior fundamenta el sentido de comparar la producción de un sistema representacional estadístico en contexto individual (lo predominante en la literatura) y producirlo junto a otro/a, como ocurre en una díada. Precisamente, lo segundo es lo menos atendido en la literatura.

ANTECEDENTES

LA LITERATURA PREDOMINANTE: APROPIACIÓN DE TABLAS ESTADÍSTICAS COMO PROCESO INDIVIDUAL

El trabajo forma parte de un proyecto de investigación más amplio, cuyo propósito es el estudio de los procesos de apropiación de tablas estadísticas dentro del marco de interacción entre pares. La mayoría de los estudios analizaron este proceso en condición individual, es decir, un individuo trabajando de manera solitaria. A su vez, estos estudios se enfocan predominantemente en su lectura y refieren a diferentes niveles educativos: preescolar (Ruesga *et al.*, 2005), primario (Estrella y Estrella, 2020; Gabucio *et al.*, 2010; Sepúlveda *et al.*, 2018), secundario (Gabucio *et al.*, 2010; González *et al.*, 2021; Pallauta *et al.*, 2022b; Pallauta *et al.*, 2023) y superior (Cañadas *et al.*, 2013; García-García *et al.*, 2019).

La construcción de tablas (y gráficos) ha sido menos abordada que su lectura. Un antecedente clave es Martí *et al.* (2011), quienes estudiaron la producción individual de tablas de doble entrada a partir de una lista de datos primarios, en estudiantes catalanes de quinto y sexto (de primaria), séptimo y octavo (de secundaria). Los datos básicos a ordenar referían a un grupo escolar ficticio, ordenado en forma de lista (también podría considerarse como tabla o matriz de datos, siguiendo la clasificación antes mencionada). El conjunto de datos primarios estaba integrado por 25 nombres de estudiantes, el número ordinal de cada uno dentro de su clase, su edad y su altura. La consigna

solicitaba construir una tabla que indicara cuántos niños y cuántas niñas (variable nominal género) medían menos de 130 cm, cuántos medían entre 130 y 149 cm, cuántos medían entre 150 y 169 cm, y cuántos eran más altos que 169 cm (intervalos de una variable continua, recodificada en intervalos).

Aunque la consigna solicitaba construir una tabla que vinculara dos variables, lo cual coincidiría *a priori* con un formato de tabla de doble entrada, los sujetos realizaron diversos tipos de producciones. Esa diversidad respondió a dos formatos básicos: listas y tablas. Desde esta perspectiva, una lista se caracteriza por presentar información en una manera secuencial y lineal; enumera una serie de elementos; estos se organizan con base en una única dimensión espacial, que puede ser horizontal (por ejemplo, dividiendo los elementos con comas o guiones) o vertical (por ejemplo, con guiones verticales). Entre las listas, Martí *et al.* (2011) subdiferenciaron aquellas sin un criterio de agrupación definido, ordenadas según género, ordenadas según intervalos de altura, ordenadas según género y altura. Por su parte, el objeto “tabla” presenta información en una manera combinada o cruzada; no enumeran sino que combinan valores de recuento de categorías; se organizan con base en la combinación de las dimensiones horizontal y vertical; implica un mayor nivel de selección y síntesis que la lista. Entre las tablas se diferenciaron dos tipos principales: tablas cruzadas con los nombres de los casos en sus celdas y tablas cruzadas que contenían valores de frecuencia en las celdas (de doble entrada, en sentido estricto).

De manera complementaria, Martí *et al.* (2011) plantearon una relación entre tipos específicos de producción y niveles de competencia en el dominio de ese proceso. El criterio de base fue el nivel de ajuste de la producción a la consigna de la tarea (diferenciar intervalos de altura), lo que permitió distinguir entre producciones correctas e incorrectas. Las correctas fueron los dos tipos de tabla, y dos tipos de lista, ordenadas según intervalos de altura y según género y altura. Las demás producciones se consideraron como incorrectas. Uno de los principales resultados del estudio fue que la distribución de formatos producidos no varió significativamente entre los grados educativos considerados. Esto indicaría el importante desafío cognitivo que implica la construcción de una tabla cruzada de datos. Más allá de que la consigna indique construir una tabla que combine las frecuencias de dos variables (tabla cruzada), en muchos casos se producen sistemas alternativos cuyo formato se aleja del “ideal” o “esperado”.

Estrella y Estrella (2020) analizaron la producción de listas y tablas en sujetos más jóvenes, de tercer grado de primaria. El estudio se dio en el marco de una clase cuyo objetivo era ordenar y organizar datos para obtener información

sobre un contexto determinado. Para ello, se propuso un tema que resultara de interés para los estudiantes, relativo a las colaciones que estos y estas habían consumido el día previo a la lección. En base a la información brindada por cada estudiante, los profesores diseñaron una lámina que contenía un dibujo representativo de la colación que cada uno había consumido, es decir, había tantos íconos como alumnos/as (30). A partir de esa lámina inicial, se propuso una consigna de trabajo, consistente en ordenar y organizar los datos relativos a las colaciones para que los niños/as determinaran si su alimentación era saludable o no. También aquí se identificaron diferentes tipos de producción, listas y tablas, predominando las primeras (77%). En este caso, se trató de una tarea con una consigna más abierta que la propuesta por Martí *et al.* (2011), ya que no especificaba la construcción de un formato particular (tabla) sino que ello quedaba a criterio de los propios estudiantes.

Pallauta y otros también analizaron la construcción de tablas en estudiantes españoles de nivel secundario. Un ejemplo de estas tareas consistía en interpretar un diagrama de barras que reportaba información sobre el sexo y tipo de deporte preferido de un grupo de casos (Pallauta *et al.*, 2021). Con base en esa información, los estudiantes debían registrar las frecuencias absolutas cruzadas correspondientes en las celdas de un sistema tabular predefinido. Casi la mitad de los estudiantes tradujo correctamente un gráfico de barras dobles a una tabla de contingencia. En esa tarea, el principal conflicto semiótico observado fue el cálculo incorrecto de las frecuencias marginales. Además, aunque cerca del 40% de los estudiantes justificó correctamente una afirmación utilizando los datos del gráfico, alcanzando así el nivel superior de lectura del gráfico y la tabla, solo una minoría logró ese nivel cuando la pregunta requería conocimiento del contexto. En otro estudio, Pallauta *et al.* (2022c) analizaron la construcción de tablas univariadas, donde se requería registrar frecuencias absolutas y relativas de las categorías de una variable. Aunque la mitad de los participantes logró un correcto cálculo de las frecuencias absolutas, solo 15% lo alcanzó con respecto a las frecuencias relativas. También identificaron diversos conflictos semióticos como la confusión entre frecuencias relativas, porcentuales y absolutas, así como procedimientos erróneos en el cálculo de estas frecuencias.

A pesar de la relevancia de estos antecedentes, debe establecerse una diferenciación con respecto a Martí *et al.* (2011), Estrella y Estrella (2020) y el estudio que aquí se presenta. En estos últimos interesa especialmente captar la producción “espontánea” o “desde cero” del sistema representativo (por ejemplo, con formato de tabla). Por tal motivo, tiene sentido diferenciar, entre producciones tipo lista o tablas. En cambio, en los estudios de Pallauta y colaboradores

(Pallauta *et al.*, 2021; Pallauta *et al.*, 2022c), “construcción” se entiende como un proceso que ocurre sobre un formato tabular de base (filas, columnas y celdas) ya aportado por la propia consigna de la tarea. En dichos antecedentes, el foco estuvo en analizar la traducción de los datos presentes en un gráfico hacia una tabla, en forma de valores de frecuencia, pero no incluía la creación del formato base, como se propone en el presente estudio.

APROPIACIÓN COGNITIVA DE TABLAS ESTADÍSTICAS EN EL MARCO DE INTERACCIÓN ENTRE PARES

En relación con los contextos interactivos entre pares, hay antecedentes relativos a la lectura de tablas de doble entrada, en díadas de estudiantes de sexto y séptimo grado (Castellaro *et al.*, 2023, 2024; Castellaro y Roselli, 2019, 2020, 2022). Estos trabajos parten del supuesto de Curcio (1989), quien propone cuatro niveles de lectura gráfica, ya mencionados más arriba, y que aquí se aplican a las tablas. La tarea de lectura de la tabla de doble entrada estuvo inspirada en la propuesta por Gabucio *et al.* (2010). Castellaro *et al.* (2023, 2024) y Castellaro y Roselli (2019, 2022) se han ocupado especialmente de analizar las variaciones de la propia interacción sociocognitiva durante la lectura colaborativa de una tabla de doble entrada. Entre los principales hallazgos figura la influencia de la composición sociocognitiva de la díada (simetría-asimetría entre las competencias específicas de los sujetos) sobre la dinámica interactiva (Castellaro *et al.*, 2023, 2024); los efectos de la afinidad socioafectiva o amistad, como reguladora de las asimetrías relacionales que puedan darse durante la interacción (Castellaro y Roselli, 2019); la influencia del nivel de dificultad de los ítems sobre la ocurrencia de situaciones de conflicto sociocognitivo, y su posterior resolución de manera relacional o epistémica (Castellaro y Roselli, 2022).

Por su parte, Castellaro y Roselli (2020) estudiaron diferentes modalidades de integración entre las perspectivas individuales de los sujetos y la perspectiva construida posteriormente por la díada, sobre la lectura de la tabla de doble entrada. En otros términos, analizaron cómo se traslada la posición individual de cada uno de los sujetos sobre el problema, a la posición colectiva construida luego por ambos. Los resultados mostraron la superioridad del desempeño diádico sobre el individual, en términos del nivel de lectura de la tabla. También se identificaron diferentes modalidades de integración entre lectura individual y diádica. Por último, se observó la influencia del nivel de

complejidad del ítem y de la composición sociocognitiva de la díada sobre modalidades específicas de respuesta construidas por esta.

Los antecedentes mencionados en este subapartado abordaron la *lectura* de una tabla de contingencia ya construida, en un marco de interacción entre pares. El presente trabajo se diferencia de los anteriores en que se estudia un proceso distinto, como es la *construcción* de un sistema tabular, como forma de ordenamiento de un conjunto primario de datos. Incluso, podría postularse que construir una tabla resultaría *más demandante que leerla* (Salsa y Gariboldi, 2018) porque lo primero implica necesariamente lo segundo, pero no de manera inversa.

MÉTODO

PARTICIPANTES

El estudio tuvo dos fases: individual y diádica (se describen en el siguiente subapartado). En la fase individual participaron 102 estudiantes de sexto ($M=11.82$ años; $DE=0.36$) y séptimo ($M=12.99$ años; $DE=0.43$) grado, de una escuela de gestión oficial ubicada en una localidad cercana a Rosario (Santa Fe, Argentina). De esa cantidad inicial, 80 estudiantes participaron en la fase diádica posterior, agrupados en 40 díadas. La pérdida de casos desde la fase individual hacia la fase diádica se dio por ausencia escolar durante el día de realización de la segunda o por no prestar consentimiento (propio o del adulto responsable) para esa segunda etapa. Los sujetos fueron seleccionados por disponibilidad.

Dentro de la institución escolar, el estudio se realizó en dos años académicos consecutivos. En el primer año, sexto grado contaba con dos divisiones ("A" y "B") y séptimo con una única división ("A"); la investigación se realizó en esos tres cursos. En el segundo año, a los fines de ampliar la muestra, solo se relevó sexto grado, porque los estudiantes de séptimo ya habían participado en el año anterior en su condición de estudiantes de sexto grado. Esto explica que de los 102 casos que trabajaron en la fase individual, 76 eran de sexto y 26 de séptimo. Esta proporción fue similar en la fase diádica. A su vez, se optó por considerar a ambos grados como parte de una muestra única porque no había diferencias marcadas entre sus producciones (Castellaro *et al.*, 2025; Martí *et al.*, 2011). Además, esta ausencia de diferencias marcadas entre ambos grados se reconfirmó posteriormente a partir de los análisis preliminares de este estudio.

El estudio se enfocó en sexto y séptimo grado porque constituyen los dos grados escolares de finalización de primaria en los cuales el Ministerio de Educación (2011a) de Argentina plantea objetivos curriculares explícitos vinculados con "... interpretar y organizar información presentada en textos, tablas y distintos tipos de gráficos, incluyendo los estadísticos" (p. 26). Si bien lo anterior es parte de la planificación gubernamental, los participantes no habían recibido enseñanza sobre tablas estadísticas antes de comenzar la actividad aquí reportada. Esta información fue proporcionada por las docentes responsables de matemáticas.

Antes de comenzar la intervención se cumplieron los requerimientos éticos respectivos, que incluyó consentimiento informado de los propios participantes y de un/a adulto/a responsable.

FASES DEL ESTUDIO

El estudio tuvo dos fases. Primero, 102 sujetos produjeron un sistema de representación en condición individual. Luego, 80 de esos sujetos trabajaron junto con un compañero/a, en una tarea similar, pero de manera diádica (40 diadas). La lógica global del estudio fue experimental o manipulativa (Ato *et al.*, 2013) porque se analizó la variación intencional entre condición individual y diádica, sobre la producción del formato representacional estadístico, en condiciones relativamente controladas. En sentido estricto, se trató de un estudio cuasiexperimental porque no hubo conformación de las condiciones por azar (Ato *et al.*, 2013), y por la posible influencia de factores aleatorios que implica su realización en el propio contexto escolar.

Fase individual

La tarea fue una adaptación de la propuesta por Martí *et al.* (2011). Esta comenzaba por la siguiente consigna:

La siguiente lista presenta los datos de un grupo de estudiantes que asisten a otra escuela. Con esos datos CONSTRUYE UNA TABLA que muestre cuántos estudiantes de sexto grado y cuántos estudiantes de séptimo grado miden menos de 130 cm de altura, cuántos miden de 130 a 149 cm., cuántos miden de 150 a 169 cm y cuántos miden más de 169 cm.

El conjunto primario de datos estaba ordenado en forma de lista, integrada por 25 estudiantes. En relación con cada caso se especificaba: número ordinal dentro de la lista, nombre y apellido, grado escolar, edad y altura (figura 1).

	Nombre	Apellido	Grado	Edad	Altura
1	Ana	Aliaga	Sexto	11 años	126 cm.
2	Pablo	Blanco	Sexto	13 años	170 cm.
3	Ismael	Jiménez	Sexto	12 años	165 cm.
4	Oriana	García	Séptimo	13 años	171 cm.
5	Marta	Fernández	Sexto	12 años	154 cm.
6	Fátima	García	Sexto	12 años	148 cm.
7	Lucas	De los Santos	Sexto	12 años	172 cm.
8	Miguel	Gisbert	Séptimo	13 años	173 cm.
9	Andrés	Guillén	Sexto	12 años	156 cm.
10	Marcelo	Molero	Sexto	12 años	147 cm.
11	Nuria	Gómez	Séptimo	12 años	157 cm.
12	Silvia	Cano	Séptimo	12 años	165 cm.
13	Morena	Marian	Sexto	12 años	142 cm.
14	Juan	Pérez	Sexto	11 años	134 cm.
15	Aldana	Grisales	Séptimo	12 años	146 cm.
16	Enrique	Molina	Séptimo	12 años	141 cm.
17	Eva	Molina	Sexto	11 años	128 cm.
18	Alicia	Moreno	Sexto	12 años	151 cm.
19	Victor	Paredes	Séptimo	12 años	167 cm.
20	Sara	Pérez	Sexto	11 años	144 cm.
21	Josua	Martínez	Séptimo	12 años	134 cm.
22	Julia	Romero	Sexto	12 años	139 cm.
23	Francisco	Sánchez	Séptimo	12 años	149 cm.
24	Antemio	Toledo	Séptimo	13 años	160 cm.
25	Sergio	Vega	Séptimo	12 años	155 cm.

Figura 1. Conjunto de datos primarios a ordenar.

Adaptado de Martí *et al.*, 2011.

Debajo del conjunto de datos, se agregó un texto complementario, para reforzar la instrucción explícita de construir una tabla que combine las frecuencias de grado y altura (intervalo)

(!) PARA TENER EN CUENTA... Recuerda que una TABLA (como la que debes construir) permite ordenar la información en filas (horizontales) y columnas (verticales). La combinación de esas filas y columnas forman celdas o espacios, que te mostrarán cuántos estudiantes de cada grado miden determinada altura.

La consigna original propuesta por Martí *et al.* (2011) solicitaba diferenciar intervalos de altura (idénticos a los utilizados en este estudio), pero en función del género de los casos (niñas y niños). Además, la variable género no estaba explicitada en la lista original de datos, sino que debía inferirse a partir del nombre de cada sujeto presente en la lista. Por recomendaciones éticas y para evitar el sesgo de género, en el presente estudio se adecuó dicha consigna, sustituyendo la variable nominal género (niñas y niños) por otra de similar escala de medición, que fue el grado escolar (sexto grado y séptimo grado). Al mismo tiempo, como el grado escolar no podía inferirse de los datos explícitos de la lista (como sí era el caso del género en la versión anterior, que se deducía a partir del nombre de cada sujeto), se agregó una columna extra que explicitaba el grado escolar al que pertenecía cada caso.

El material incluía un cuadernillo que contenía la consigna correspondiente, la lista con los datos del grupo ficticio de estudiantes, una página en blanco con el título, *Construye la Tabla en esta hoja*, y una página final sin texto que podía utilizarse como borrador. Esta fase individual se realizó al interior de cada clase escolar y la administración fue colectiva (todos los estudiantes trabajando en simultáneo y en la misma aula). El tiempo de realización osciló entre 10 y 30 minutos, según el caso.

Fase diádica

Durante la semana posterior, los estudiantes realizaron la misma tarea pero en diádas, compuestas por dos compañeros/as de la misma clase. Estudios previos (e.g., Castellaro y Roselli, 2018, 2019) sugieren que una variable interviniente en el trabajo entre pares son los niveles de competencia específica (relativa a la tarea) de los sujetos, y la similaridad o diferencia entre estos. Por tal motivo, las diádas fueron conformadas tratando de distribuir de la manera más homogénea posible el nivel de producción individual de sus miembros (básico o avanzado; ver sección “Análisis de las producciones”). Así, se conformaron tres tipos de diáda: simetría básica ($n=13$), integradas por dos sujetos con producciones básicas; simetría avanzada ($n=11$), integradas por dos sujetos con producciones avanzadas, y asimetría ($n=16$), integradas por dos sujetos con diferentes niveles de producción. Esta conformación se dio independientemente del grado escolar, al considerar a todos los sujetos como parte de una muestra única, como se mencionó en la sección “Participantes”.

La actividad de la condición diádica fue idéntica a la propuesta en la fase individual, con excepción de dos puntos. Primero, el fragmento de la consigna

“...construye una tabla...” (variante individual) fue sustituido por “...construyan JUNTOS una tabla” (variante colaborativa). Segundo, se agregó una oración final que enfatizaba el carácter colaborativo de la actividad: “Es muy importante que trabajen juntos, dialogando y en equipo”.

La fase diádica se realizó en un lugar diferente al aula habitual de clases, que consistía en un salón de usos múltiples. No se estableció un tiempo límite para realizar la tarea, aunque esto se detuvo cuando se observó agotamiento o desmotivación persistente. En esta fase diádica, al igual que en la fase individual, la recopilación de datos fue realizada en equipo por los cuatro autores del trabajo, todos miembros del mismo grupo de investigación. Ningún investigador intervino durante la actividad, se limitaron a supervisar que los sujetos comprendieran la consigna del trabajo, al inicio de la actividad.

ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES

Los tipos de sistema producidos fueron categorizados según una adaptación de Martí *et al.* (2011) y se presentan en la tabla 1. El primer autor codificó el total de las producciones. Para evaluar concordancia entre observadores, 20% de las producciones fueron codificadas independientemente por el tercer autor. El acuerdo entre estos superó 90%. Cuando hubo discrepancias, estas fueron resueltas por discusión.

Tabla 1. Tipos de producciones observados

Categoría	Definición	Ejemplo*	Nivel de producción
Lista reproducción (LR).	Reproducción literal de la lista original de datos que integra la consigna.		Básico

Lista ordenada según curso (LC).

Ordenamiento de los casos según una única dimensión (horizontal o vertical), sin un intento de tabulación cruzada y diferenciados según el grado escolar (sexto o séptimo).

Básico

A handwritten list of names and grades, organized by grade. The text is written in Spanish and includes names like 'JUAN', 'MARIA', 'CARLOS', etc., followed by their respective grades.

Lista ordenada según altura (LA).

Ordenamiento de los casos según una única dimensión (horizontal o vertical), sin un intento de tabulación cruzada y diferenciados según altura.

Por alturas netas, ordenadas en sentido creciente o decreciente (LAN).

Básico

A handwritten list of names and heights, organized by height. The text is written in Spanish and includes names like 'JUAN', 'MARIA', 'CARLOS', etc., followed by their respective heights.

Por intervalos de altura implícitos, es decir, si bien no hay rótulos o encabezados, se observa un ordenamiento tácito (LAI)

Básico

A handwritten list of names and heights, organized by height intervals. The text is written in Spanish and includes names like 'JUAN', 'MARIA', 'CARLOS', etc., followed by their respective heights.

Por intervalos de altura explicitados como tales, es decir, por rótulos o encabezados (LAE)

Avanzado

A handwritten list of names and heights, organized by height intervals with explicit labels. The text is written in Spanish and includes names like 'JUAN', 'MARIA', 'CARLOS', etc., followed by their respective heights.

Lista ordenada según curso e intervalos de altura (LCA).

Ordenamiento de los casos según una única dimensión (horizontal o vertical), sin un intento de tabulación cruzada y diferenciados según altura y grado escolar.

Avanzado



Tabla cruzada con nombres (TN).

La información se presenta en celdas, resultantes del cruce de intervalos de altura y grado escolar. Sin embargo, estas contienen los nombres de los casos y no un valor de frecuencia o recuento de resumen.

Avanzado



Tabla de frecuencias cruzadas (TF).

La información se presenta en celdas, resultantes del cruce de intervalos de altura y grado escolar. Estas contienen valores de frecuencia o recuento, como resumen de casos (tabla convencional de doble entrada).

Avanzado



Otro (O).

Producciones sin un criterio definido o identificable de construcción. También incluye la no realización de la tarea, o solo una producción incipiente.

Básico

* Nota. Los ejemplos corresponden a producciones individuales o colaborativas.

Luego, los diferentes tipos de producciones fueron asociados con un nivel específico: básico o avanzado. Esto se determinó siguiendo a Martí *et al.* (2011), quienes propusieron diferenciar producciones “correctas” e “incorrectas”, según su adecuación al componente principal de la consigna, que era comparar el número de niños y niñas en cada intervalo de altura. En el presente estudio, la categoría “correcta” e “incorrecta” fue sustituida por “básica” y “avanzada”, respectivamente, y

se sustituyó la variable género (niñas y niños) por grado (sexto y séptimo). Así, se consideraron como “avanzadas” a las siguientes categorías: tablas con nombres, tablas de frecuencias, listas ordenadas por combinación de intervalos de altura y grado, listas ordenadas según intervalos de altura explícitos. En cambio, las producciones “básicas” fueron: listas reproducción, listas por grado escolar, listas por alturas netas y listas por intervalos implícitos.

LÓGICA DEL ANÁLISIS

Se propusieron dos pasos analíticos correspondientes con los dos objetivos del estudio. Primero, se comparó la proporción de formatos producidos en condición individual y diádica. Aunque las díadas estaban integradas por una parte de los sujetos que ya habían participado de la fase individual, inicialmente se consideró que las condiciones de estudio (individual y diádica) contaron con *unidades de análisis* diferentes entre sí. En la condición individual, la unidad de análisis fue la producción de cada *individuo* ($n=102$); en la condición diádica, la unidad de análisis fue la producción de cada *díada* ($n=40$). Un diseño clásico de medidas dependientes no solo incluiría los mismos participantes en ambas condiciones, sino también la misma unidad de medición. Por consiguiente, en este primer momento, se trataron a ambas condiciones como independientes, ya que la meta era comparar las distribuciones de respuestas entre dos “grupos”, es decir, respuestas individuales, versus, respuestas diádicas. El criterio de independencia aquí propuesto también encuentra fundamento a nivel conceptual. Como se planteó en la Introducción, se asume que una producción social (en este caso, díada) resulta emergente e irreducible con respecto a las individualidades de sus integrantes (Mejía-Aráuz *et al.*, 2018; Rogoff, 2003; Wertsch, 1998). En otras palabras, como las díadas son nuevas unidades (formadas por sujetos que antes participaron de manera individual), sus producciones no pueden emparejarse una a una con las producciones individuales.

El segundo paso analítico es complementario del anterior. En el primero, el foco estuvo puesto en evaluar si la distribución de los formatos cambia entre las condiciones, tratando las unidades de análisis como independientes. El nuevo análisis planteó un enfoque alternativo que relaciona las producciones individuales previas de los integrantes de la díada y la posterior producción de la propia díada (por ejemplo, qué tan frecuentemente un formato diádico coincide con ambos, uno o ninguno de los formatos individuales producidos previamente por sus integrantes). Esto se consideró desde dos criterios: (a) los tipos (cualidad) de formatos producidos;

(b) el nivel (calidad) de los formatos producidos. En cuanto al punto (a), se analizó la igualdad o diferencia entre los tipos de producción individuales previas de los integrantes de la díada, y si el tipo de producción diádica era nueva o similar con respecto a los primeros. Por su parte, en cuanto al punto (b), las producciones se agruparon en dos niveles de complejidad (básico-avanzado) según el criterio de la tabla 1. En este caso, se consideró el nivel de las producciones individuales previas de los integrantes de la díada (básico-básico, avanzado-avanzado y básico-avanzado) y el nivel de la producción lograda posteriormente por la propia díada (básico o avanzado). Más adelante, la Tabla 4 resume los dos criterios.

En síntesis, a través de ambos análisis se buscó aportar miradas complementarias. El primero, brinda un panorama general de las diferencias entre condiciones; el segundo, permite profundizar en cómo la díada construye su producción en función de las producciones individuales previas de sus integrantes.

RESULTADOS

COMPARACIÓN DE LAS PRODUCCIONES EN CONDICIÓN INDIVIDUAL Y DIÁDICA

La tabla 2 presenta los tipos de producciones observados en las condiciones individual y diádica.

Tabla 2. Frecuencias (con porcentajes por fila) de tipo de formato producido según condición.

Condición	LR	LC	LA	LCA	TN	TF	O	Total
Individual	7 (6.9)	4 (3.9)	60 (58.8)	3 (2.9)	7 (6.9)	1 (1.0)	20 (19.6)	102 (100.0)
Diádica	2 (5.0)	1 (2.5)	30 (75.0)	4 (10.0)	0 (0.0)	1 (2.5)	2 (5.0)	40 (100.0)
Total	9 (6.3)	5 (3.5)	90 (63.4)	7 (4.9)	7 (4.9)	2 (1.4)	22 (15.5)	142 (100.0)

Nota. (LR) Lista reproducción; (LC) Lista ordenada según curso; (LA) Lista ordenada según altura; (LCA) Lista ordenada según curso e intervalos de altura; (TN) Tabla cruzada con nombres; (TF) Tabla de frecuencias cruzadas; (O) Otro.

En ambas condiciones (individual y diádica), el formato más observado fue lista agrupada por altura (LA), incrementándose en las producciones diádicas (75.6%) por sobre las individuales (58.8%). De manera más específica, en relación con los subtipos de formatos de lista ordenados por altura (por intervalos explícitos, intervalos implícitos y valores netos) en condición individual, predominó aquel basado en intervalos explícitos de altura (LAE; $f=39$, 65.0%), seguido por intervalos implícitos (LAI; $f=12$, 20.0%) y, finalmente, por alturas netas (LAN; $f=9$, 15.0%). Estas proporciones fueron similares en la condición diádica (LAE; $f=20$, 66.7%; LAI; $f=3$, 10.0%; LAN; $f=7$, 23.3%). El resto de las producciones tipo lista (lista reproducción, lista por curso, lista por curso y altura) sumaron 13.7% de la condición individual y 17.5% de la condición diádica. La proporción total observada de formatos tipo tablas cruzadas (con nombres y de doble entrada) fue baja, considerando que representó 7.9% de las producciones individuales ($f=8$) y 2.5% de las diádicas ($f=1$). Incluso, predominaron las tablas con nombres (y no frecuencias) en sus celdas, sobre todo en la condición individual.

También, se propuso una agrupación de los datos anteriores, para incluir un análisis de la asociación entre condición de trabajo (individual y diádica) y el tipo de producción. El criterio de agrupamiento fue si las producciones proponían alguna forma de ordenamiento basado en alturas, acorde con la componente principal de la consigna de trabajo. De esta manera, por un lado, se agruparon las categorías que no cumplían este criterio (reproducción de lista, lista por curso y otros); por el otro, se agruparon las producciones que sí lo cumplían (listas por altura, listas por curso y altura, tablas cruzadas con nombres, tablas cruzadas de frecuencias). Como puede observarse en la tabla 3, las primeras predominaron en la condición individual, y las segundas predominaron en la condición diádica. Como se dijo, en este paso analítico las condiciones se consideraron como independientes por tratarse de unidades de análisis diferentes entre sí (individuo y diada, respectivamente). Bajo este supuesto, se utilizó la prueba Chi cuadrado para considerar una posible asociación entre la condición de trabajo y el nivel de las producciones, ambas variables consideradas como nominales. Esta prueba arrojó un resultado positivo ($\chi^2(1) = 4.86, p = 0.027$), lo que indica una asociación estadísticamente significativa entre el tipo de condición (individual o diádica) y el nivel alcanzado en las producciones. Es decir, los datos muestran que el nivel de producción tiende a variar según el tipo de participación: las producciones de nivel básico se observaron con mayor frecuencia en la condición individual, mientras que las de nivel avanzado fueron más frecuentes en la condición diádica.

Tabla 3. Frecuencias (con porcentajes por fila) de tipos de formato reagrupados, según condición.

Condición	LR/LC/O	LA/LCA/TN/TF	Total
Individual	31 (30.4)	71 (69.6)	102 (100.0)
Diádica	5 (12.5)	35 (87.5)	40 (100.0)
Total	36 (25.4)	106 (74.6)	142 (100.0)

Nota. (LR/LC/O) Agrupación de Lista reproducción, Lista ordenada según curso y Otros; (LA/LCA/TN/TF) Agrupación de Lista ordenada según altura, Lista ordenada según curso e intervalos de altura, Tabla cruzada con nombres, Tabla de frecuencias cruzadas.

RELACIÓN ENTRE PRODUCCIÓN DIÁDICA Y PRODUCCIONES INDIVIDUALES PREVIAS

Este análisis complementario relacionó la producción diádica con las producciones individuales previas de sus integrantes. Específicamente, se consideró si los *tipos* de producciones individuales previas eran similares o diferentes entre sí, y –a su vez– si el tipo de producción diádica posterior era nuevo o similar con respecto a las primeras. Las cuatro situaciones resultantes se mencionan en la tabla 4.

Tabla 4. Criterios de análisis de la relación entre producción diádica y producciones individuales previas.

Criterios de análisis	Producciones individuales previas	Producción diádica posterior
Tipo de producción	Similares entre sí	Nueva Similar (ejemplo en figura 2)
	Diferentes entre sí	Nueva (ejemplo en figura 3) Similar a una de las producciones individuales (ejemplo en figura 4)

En las diádas cuyos integrantes tuvieron producciones individuales similares entre sí, la producción diádica final tendió a reproducir ese mismo tipo inicial (16 de 17 casos). La figura 2 ilustra esta situación: cada sujeto produce individualmente una lista ordenada por altura, con base en recuentos netos, lo cual se traslada al formato diádico.



Figura 2. Ejemplo: Relación entre producciones individuales similares y reproducción de ese formato por la diada (lista por alturas netas).

En cambio, cuando los tipos de producciones individuales fueron diferentes entre sí, una parte de las producciones diádicas resultaron nuevas (10 de 23). La figura 3 muestra el caso del sujeto 1 que había producido una lista basada en altura (recuentos netos) y el sujeto 2 un intento de lista ordenada por curso; la producción diádica resultó nueva, puesto que lograron construir una lista basada en intervalos explícitos de altura.

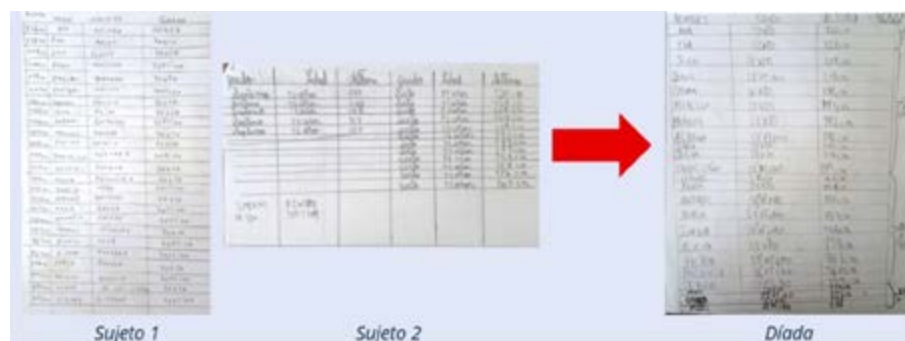


Figura 3. Ejemplo: Relación entre producciones individuales diferentes (lista por alturas netas - lista ordenada por curso) y producción de un formato nuevo por la diada (lista por intervalos explícitos de altura).

Por su parte, el resto de las diadas, cuyos integrantes tenían producciones iniciales diferentes entre sí, logró una producción diádica coincidente con la emitida por uno de los integrantes en la producción individual (13 de 23). La figura 4 presenta dicha situación.

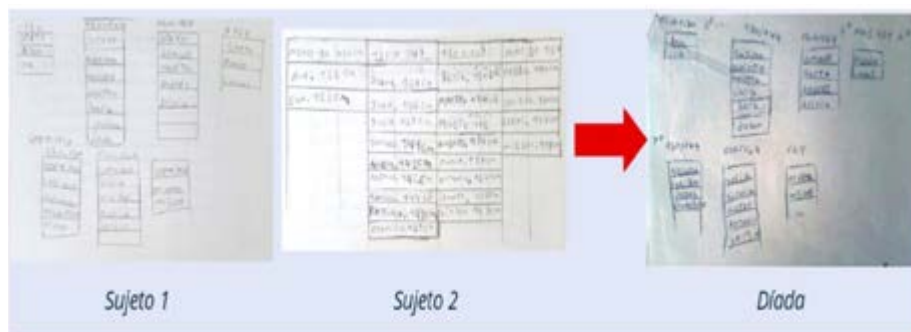


Figura 4. Ejemplo: Relación entre producciones individuales diferentes y producción diádica similar a una de las producciones individuales iniciales.

En síntesis, si las producciones individuales iniciales eran similares entre sí, fue más probable que la producción diádica repitiera o reprodujera ese mismo formato. En cambio, la posibilidad de que la diada genere una producción diádica nueva, con respecto a ambas producciones individuales anteriores, se

incrementó cuando estas eran diferentes entre sí; más allá de que también se hayan observado diádas que reprodujeron el formato producido previamente por uno de sus integrantes.

La relación entre producción diádica y producciones individuales previas también se indagó considerando el *nivel* de las mismas. Las producciones se agruparon en dos niveles de complejidad (básico y avanzado), según los criterios de la tabla 1. En general, las diádas cuyos integrantes contaban con producciones iniciales de similar nivel, tendieron a mantenerlo en la producción colaborativa. En este sentido, de las 13 diádas cuyos integrantes habían realizado formatos individuales básicos, dos lograron una producción colaborativa avanzada (el resto mostró producciones diádicas básicas). Por su parte, solo una de las once diádas con formatos individuales avanzados mostraron una producción diádica de nivel básico (retroceso). Finalmente, en las 16 diádas cuyos miembros contaban con producciones individuales de diferente nivel (básico-avanzado), 13 mostraron producciones avanzadas en la fase colaborativa (en tres diádas restantes predominó una producción básica).

Finalmente, se analizó la posibilidad de que la diáda propusiera un tipo de producción nuevo o ya propuesto en la fase individual, en combinación con el nivel de las producciones individuales previas (tabla 5).

Tabla 5. Relación entre producción diádica y producciones individuales

Producciones individuales de los integrantes de la diáda		Producción diádica posterior			Total
Nivel	Tipos	Nueva	Similar a una de las prod. indiv.	Similar a ambas prod. indiv.	
Dos básicas	Similares	1	—	4	5
	Diferentes	3	5	—	8
Dos avanzadas	Similares	0	—	7	7
	Diferentes	2	2	—	4
Una básica y una avanzada	Similares	—	—	—	—
	Diferentes	5	11	—	16
Total	Similares	1	0	11	12
	Diferentes	10	18	0	28

Nota. El signo — indica 'no aplica'.

La tabla 5 también permite observar la posibilidad de que la díada proponga un tipo de producción nuevo o ya propuesto en la fase individual, pero en combinación con el nivel de las producciones individuales. En este sentido, se habla de tres composiciones diádicas, según el nivel de las producciones individuales previas de los compañeros/as: simetría básica (ambos sujetos habían realizado producciones individuales de nivel básico), simetría avanzada (ambos sujetos habían realizado producciones individuales de nivel avanzado) y asimetría (un sujeto había realizado una producción individual de nivel básico y el otro una de nivel avanzado). En las díadas con simetría básica, cuando los sujetos habían realizado producciones individuales de un mismo tipo, la tendencia fue mantener ese mismo tipo en la fase diádica (4 de 5 casos). En cambio, si los tipos de respuestas básicas individuales eran diferentes entre sí, aumentó la posibilidad de una producción diádica nueva (3 de 8), aunque también se observó una tendencia a trasladar uno de los tipos producidos inicialmente por uno de los sujetos (5 de 8). En las díadas con simetría avanzada se observó una tendencia similar. Por su parte, en las díadas asimétricas, la mayor parte de las producciones diádicas coinciden con la perspectiva individual del sujeto de nivel avanzado (11 de 16).

DISCUSIÓN

El presente estudio propuso indagar los siguientes interrogantes: ¿qué tipos de formatos representacionales se producen? ¿Estas producciones presentan variaciones según ocurran en condición individual o diádica (con un compañero/a)? ¿De qué maneras se integran las producciones iniciales de cada sujeto en la posterior producción diádica? En este sentido, se propusieron dos objetivos. El primero, fue comparar la construcción de un sistema representativo de datos cuantitativos en condición individual y diádica. El segundo, fue analizar la relación entre la producción diádica y las producciones individuales de los sujetos. Ambos objetivos refieren a estudiantes de sexto y séptimo grado de primaria que trabajaron en una consigna que solicitaba construir una tabla que vinculara las frecuencias de las categorías de dos variables (coincidencia implícita con la noción de tabla de contingencia). El foco de interés estuvo puesto en la construcción de tablas de contingencia, puesto que la consigna solicitaba explícitamente construir una tabla que describiera las frecuencias ("cuántos/as") cruzadas de dos variables específicas, presentes en un conjunto primario de datos. La

dificultad que planteaba esta construcción implicó la observación de formatos alternativos, que se alejaron en mayor o menor medida al esperado, según las instrucciones de la tarea.

Uno de los principales hallazgos refiere a la baja proporción de formatos tabulares observados, tanto en condición individual como diádica. En ambos casos, el total de tablas, ya sea con nombres en sus celdas o con frecuencias, no superó el 10% de las producciones (tabla 2). Este resultado coincide con la literatura, en tanto ya se había reportado la dificultad para construir tablas en general, y especialmente de contingencia (Martí *et al.*, 2011). Parecería que los sujetos no tienen en cuenta a la tabla como una herramienta cognitiva que les permita organizar y clasificar variables. Tampoco parece que la tabla sea un objetivo enseñado en el aula escolar (como esta planteado en las planificaciones gubernamentales), aunque sea usada y/o aprendida por algunos/as estudiantes. Otros trabajos también han mostrado una menor predilección de los estudiantes a ordenar datos mediante la construcción de tablas, en comparación con otros sistemas (Chick y Watson, 2001; Estrella y Estrella, 2020; Pallauta *et al.*, 2022c). Más allá de estos antecedentes, una posible hipótesis era que el trabajo diádico facilitara la producción de dichos sistemas, pero esto no ocurrió en relación con el formato específico de tablas de contingencia.

El tipo de producción claramente predominante fue tipo lista (72.5% en condición individual; 92.5% en condición diádica), específicamente, aquellas agrupadas según altura. Esta tendencia se acentuó en la condición diádica. Si bien la construcción de una lista según altura se aleja del formato esperado para una tabla de contingencia (Estrella y Estrella, 2020), indica un intento de adhesión a lo planteado por la consigna que, en parte, requería ordenar los datos en intervalos de altura (Martí *et al.*, 2011). Parecería que para los estudiantes resulta más accesible pensar y organizar los datos a partir de una única dimensión, expresada horizontal o verticalmente, aun en niveles como sexto y séptimo grado. En cambio, organizar los datos a partir de la combinación de dos variables implica un auténtico desafío para la mayoría de los sujetos. Desde la perspectiva de Chick y Watson (2001), la distinción entre producir listas y tablas implicaría la contraposición entre, por un lado, los niveles uniestructural y multiestructural (mayormente asociados con la producción de listas), y por el otro, el nivel relacional (mayormente ligado a la producción de sistemas que cruzan dos variables, como es el caso de las tablas de contingencia).

También se analizó el nivel de las producciones. Partiendo del criterio de Martí *et al.* (2011), se distinguieron dos niveles, básico y avanzado, según el grado de

respuesta a la demanda principal de la consigna, que era comparar el número de estudiantes de sexto y séptimo grado en cada intervalo de altura. Por un lado, las producciones “avanzadas” fueron los dos tipos de tablas (con nombres y con frecuencias), lista ordenada por intervalos de altura explícitos y lista ordenada por altura y curso. Por el otro, las producciones “básicas” correspondieron a las categorías lista reproducción, lista por grado escolar, lista por alturas netas, lista por intervalos implícitos. En este aspecto, se observó que la condición diádica no siempre implica una producción de mayor complejidad que la lograda por sus integrantes en condición individual. En este sentido, los resultados remiten a las tres situaciones básicas propuestas por Watson y Chick (2001), quienes diferencian entre *lifting* (avance), *hovering* (mantenimiento) y *falling* (retroceso). Seguramente, estos desenlaces dependan de las dinámicas relacionales que dan lugar a estos procesos, lo cual será indagado en futuros trabajos.

La mayoría de los estudiantes con los que se trabajó fueron capaces de generar un ordenamiento de los datos de acuerdo con la demanda de la tarea, y esto se incrementó parcialmente en el trabajo entre pares. Ahora bien, la dificultad aparece cuando se trata de construir específicamente un sistema tabular, y más aún si deben reportarse valores de frecuencia. Desde la perspectiva de Chick (2004), podría afirmarse que los estudiantes de estos niveles (sexto o séptimo grado) logran las técnicas transnumerativas más simples, tales como ordenamiento, agrupamiento, selección de subconjunto de datos, cambio de tipo de variable (en este caso, la recodificación de la altura en intervalos) y graficación; sin embargo, la mayor dificultad aparece en torno a las técnicas más sofisticadas como cálculo de frecuencias y de proporciones, que aplican a tablas de contingencia.

Por último, este trabajo también analizó el pasaje de las producciones individuales de los sujetos y su integración en la producción diádica posterior. La principal conclusión es que la posibilidad de una construcción diádica nueva se da cuando hay diferencias entre las producciones iniciales individuales, es decir, a partir de la disidencia. De lo contrario, cuando estas últimas son similares, la tendencia a nivel diádico es mantener el mismo tipo de producción. Este resultado coincide con Castellaro y Roselli (2020), en el cual se había realizado un análisis similar, pero referido a la lectura (no la construcción) de una tabla de contingencia.

La disidencia entre las producciones individuales, entendida como un factor potencial de nuevas producciones diádicas, puede vincularse con ciertos aspectos del paradigma general sostenido por la teoría del conflicto sociocognitivo (Perret-Clermont, 2022). En este sentido, la diferencia inicial entre las posiciones de los sujetos es una condición para la construcción de una respuesta diádica

nueva (Peralta y Roselli, 2016). Más aún, cuando lo anterior aplicó a díadas cuyos integrantes habían logrado producciones individuales de nivel básico (simetría básica), en algunos casos la producción diádica nueva implicó un mayor nivel que las iniciales. También es posible que esta disidencia inicial entre los formatos individuales derive en una producción diádica similar a la propuesta previamente por uno de los sujetos. Esto correspondería con una situación de influencia social, positiva o negativa, dependiendo de si la díada logra construir un formato más o menos complejo. Dichos procesos de influencia social asimétrica pueden explicarse por diferentes factores, como ser relativos a la competencia específica (Asterhan *et al.*, 2014), o más ligados a aspectos psicosociales como personalidad (Nussbaum, 2002), afinidad socioafectiva (Castellaro y Roselli, 2019), género (Psaltis *et al.*, 2009), entre otros.

CONCLUSIÓN

Respecto a los interrogantes y objetivos planteados, el trabajo aporta tres conclusiones principales. Primero, la producción de tablas estadísticas, específicamente de contingencia, como sistema de representación de relaciones entre variables, constituyó un proceso de alta demanda cognitiva para los estudiantes de sexto y séptimo grado. En el caso de la tabla de contingencia, los datos representan la frecuencia con la que se observan las combinaciones de los valores de las categorías (o clases) de esas variables. Ante la dificultad que plantea la construcción de una tabla de doble entrada, el sistema representativo más recurrente, y de preferencia para los estudiantes, es el sistema tipo lista, basado en una sola variable y presentada horizontal o verticalmente, y organizado según intervalos de la variable en estudio. Esto último sugiere un intento de adhesión a la consigna, por lo cual se puede concluir que el nivel general de las producciones fue medio-avanzado (Martí *et al.*, 2011). En segundo lugar, el trabajo diádico se asoció con una mayor proporción de producciones avanzadas, en comparación con el trabajo individual; sin embargo, también se observaron situaciones de neutralidad –e incluso retroceso– de lo diádico sobre lo individual, por lo cual resta profundizar en las dinámicas relacionales involucradas. Y tercero, la posibilidad de una construcción diádica nueva, con respecto a las producciones individuales, aumenta cuando estas son diferentes entre sí, aunque en un marco de simetría de nivel básico o avanzado.

Aunque la producción de tablas fue analizada en el marco de interacción entre pares, debe recordarse que el foco del estudio estuvo puesto exclusivamente en el producto final logrado por la díada (el sistema representacional construido), quedando pendiente el análisis de la dinámica intersubjetiva ocurrida durante la actividad. Este punto constituye un elemento central para profundizar en la comprensión de la construcción colaborativa de listas y tablas, por ejemplo, analizando el discurso conversacional de los sujetos. Futuras investigaciones apuntarán en esta dirección. Además, el estudio se focalizó en estudiantes de sexto y séptimo grado, por lo cual sería interesante ampliarlo a cursos anteriores y posteriores dentro del sistema educativo.

En cuanto a las limitaciones del estudio, se identificaron dos principales. Una, se empleó un enfoque cuasiexperimental en contexto natural (aula escolar). Todo esto tuvo que llevarse a cabo para fomentar la factibilidad y ecología del estudio, aunque sin resignar requisitos básicos de validez interna. Y la otra, si bien se aseguró que los estudiantes no habían trabajado contenidos estadísticos durante el año académico (a través de una entrevista con la maestra responsable), no se controlaron directamente competencias matemáticas generales y/o específicas de los sujetos.

La investigación se centró en estudiantes de sexto y séptimo grado, resaltando la importancia de abordar estas habilidades desde temprana edad en el currículo educativo (Estrella y Estrella, 2020), en entornos individuales como colaborativos. Los hallazgos podrían tener implicaciones para el diseño de estrategias de enseñanza y evaluación en el ámbito de la lectura y representación de datos. A su vez, la identificación de diferentes niveles de competencia individual en la construcción de tablas sugiere la importancia de abordar las necesidades y habilidades específicas de cada estudiante. Fomentar que los estudiantes analicen datos en formatos diversos, se comuniquen eficazmente y aboguen por sus propias representaciones, es crucial para mejorar la alfabetización estadística (Watson, 2009; Watson y Smith, 2022). Como se mencionó al inicio del artículo, la mayor parte de los antecedentes (ajenos o propios) han abordado la *lectura* de tablas. El presente trabajo permitió abordar un proceso complementario, como es la *construcción* de un sistema tabular, como forma de ordenamiento de un conjunto primario de datos. Los resultados confirman la idea de la complejidad que implica dicho proceso, incluso más marcada que en relación a su lectura.

REFERENCIAS

- Andersen, C., Scheuer, N., Pérez, M., y Teubal, E. (2009). *Representational systems and practices as learning tools*. SensePublishers. <https://doi.org/10.1163/9789087905286>
- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números*, 76, 55-67. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/las-tablas-y-graficos-estadisticos-como-objetos-culturales/>
- Asterhan, C., Schwarz, B., y Cohen-Eliyahu, N. (2014). Outcome feedback during collaborative learning: Contingencies between feedback and dyad composition. *Learning and Instruction*, 34, 1-10. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.07.003>
- Ato, M., López, J. J., y Benavente, A. (2013). Un sistema de clasificación de los diseños de investigación en psicología. *Anales de Psicología*, 29(3), 1038-1059. <http://dx.doi.org/10.6018/analesps.29.3.178511>
- Balchin, W., y Coleman, A. (1966). Graphycacy should be the fourth ace in the pack. *Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization*, 3(1), 23-28. <https://www.semanticscholar.org/paper/GRAPHICACY-SHOULD-BE-THE-FOURTH-ACE-IN-THE-PACK-Balchin-Coleman/b5dee8b7323ca31767522d361e569cb-5ce71b70e>
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada.
- Calderón Torres, D., García-García, J. I., Fernández Coronado, N., y Arredondo, E. H. (2023). Tablas de doble entrada: lectura y cálculo de probabilidades por estudiantes de educación media. *Ensino em Re-vista*, 30, 1-24. <http://doi.org/10.14393/ER-v30a2023-32>
- Callingham, R., y Watson, J. (2017). The development of statistical literacy at school. *Statistics Education Research Journal*, 16(1), 181-201. <http://iase-web.org/Publications.php?p=SERJ>
- Cañadas, G., Batanero, M. C., Gea, M., y Contreras, J. (2013). Comprensión de frecuencias asociadas a las tablas de contingencia por estudiantes de Psicología. *Uni-pluri/versidad*, 13(3), 97-108. <https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.18623>
- Castellaro, M., y Peralta, N. (2020). Pensar el conocimiento escolar desde el socioconstructivismo: Interacción, construcción y contexto. *Perfiles Educativos*, 42(168), 140-156. <https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2020.168.59439>
- Castellaro, M., Peralta, N., y Curcio, J. M. (2024). Competence symmetry in peer collaboration: A micro-sequential approach. *European Journal of Psychology of Education*, 39(2), 1371-1396. <https://doi.org/10.1007/s10212-023-00746-w>
- Castellaro, M., Peralta, N., Tuzinkievicz, M. A., y Curcio, J.M. (2025). Between lists and tables: In what ways do sixth- and seventh-grade students represent quantitative

- data? *Journal for the Study of Education and Development: Infancia y Aprendizaje*, 48(1) 184–218. <https://doi.org/10.1177/02103702241302301>
- Castellaro, M., Peralta, N., Tuzinkiewicz, M. A., y Fariz, G. (2023). Una perspectiva micro-secuencial de la interacción sociocognitiva en situaciones de asimetría de competencia. *Psykhé*, 32(2), 1-16. <https://doi.org/10.7764/psykhe.2021.35645>
- Castellaro, M., y Roselli, N. (2018). Interacción sociocognitiva entre pares en situaciones simétricas y asimétricas de competencia epistémica. *Revista de Psicología*, 36(1), 333-365. <http://dx.doi.org/10.18800/psico.201801.011>
- Castellaro, M., y Roselli, N. (2019). Simetría-asimetría cognitiva y afinidad socioafectiva en la comprensión colaborativa de tablas de frecuencias. *Liberabit*, 25(2), 213-231. <https://doi.org/10.24265/liberabit.2019.v25n2.06>
- Castellaro, M., y Roselli, N. (2020). Comprensión individual y diádica de tablas de frecuencias en alumnos de escolaridad primaria. *Pensamiento Psicológico*, 18(1), 57-70. <https://doi.org/10.11144/Javerianacali.PPSI18-1.cidt>
- Castellaro, M., y Roselli, N. (2022). Lectura colaborativa de tablas de frecuencias: Análisis secuencial del proceso sociocognitivo. *Revista de Psicología Universidad de Antioquia*, 14(1), 1-29. <https://doi.org/10.17533/udea.rpe346667>
- Chick, H. (2004). Tools for transnumeration: Early stages in the art of data representation. En L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert, y J. Mousley (Eds.), *Mathematics education research: Innovation, networking, opportunity. Proceedings of the 26th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 167–174). MERGA.
- Chick, H., Pfannkuch, M., y Watson, J. (2005). Transnumerative thinking: Finding and telling stories within data. *Curriculum Matters*, 1, 87-108. <https://www.nzcer.org.nz/nzcerpress/curriculum-matters/articles/transnumerative-thinking-finding-and-telling-stories-within>
- Chick, H., y Watson, J. (2001). Data representation and interpretation by primary school students working in groups. *Mathematics Education Research Journal*, 13, 91–111. <https://doi.org/10.1007/BF03217101>
- Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. NCTM.
- Doise, W., y Mugny, G. (1984). *The social development of the intellect*. Pergamon. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-11024-3>
- Engel, J. (2019). Cultura estadística y sociedad. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. <https://www.ugr.es/~fqm126/civeest.html>
- Estrella, S. (2014). El formato tabular: Una revisión de literatura. *Actualidades Investigativas en Educación*, 14(2), 1-23. <https://doi.org/10.15517/aie.v14i2.14817>

- Estrella, S., y Estrella, P. (2020). Representaciones de datos en estadística: De listas a tablas. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 12(1), 21-34. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i1.20>
- Estrella, S., y Olfos, R. (2015). Transnumeración de los datos: El caso de las tablas de frecuencia. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. https://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1264/498
- Estrella, S., Olfos, R., Vidal-Szabó, P., Morales, S., y Estrella, P. (2017). Competencia meta-representacional en los primeros grados: Representaciones externas de datos y sus componentes. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(2), 143-163. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2143>
- Friel, S., Curcio, F., y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158. <https://doi.org/10.2307/749671>
- Gabucio, F., Martí, E., Enfedaque, J., Gilabert, S., yKonstantinidou, A. (2010). Niveles de comprensión de las tablas en alumnos de primaria y secundaria. *Infancia y Aprendizaje*, 22(2), 183-197. <https://doi.org/10.1174/113564010791304528>
- Gal, I. (2002). Adults'statisticalliteracy: Meanings, components, responsibilities. *International StatisticalReview*, 70(1), 1-51. <https://doi.org/10.2307/1403713>
- Gal, I. (2022). Critical understanding of civic statistics: Engaging with important contexts, texts, and opinion questions. En J. Ridgway (Ed.), *Statistics for Empowerment and Social Engagement*(pp. 323-343). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-20748-8_13
- Gal, I., y Geiger, V. (2022). Welcome to the era of vague news: A study of the demands of statistical and mathematical products in the COVID-19 pandemic media. *EducationalStudies in Mathematics*, 111, 5-28. <https://doi.org/10.1007/s10649-022-10151-7>
- García-García, J. I., Imilpán Rivera, I., Fernández Coronado, N., y Arredondo, E. H. (2019). Comprensión de una tabla estadística por estudiantes universitarios en México y Chile. *REVEMAT*, 14, 1-16. <http://doi.org/105007/1981-1322.2019.e62811>
- Garfield, J. B., y Gal, I. (1999). Teaching and assessing statistical reasoning: National council teachers of Mathematics 1999 year. En L. Stiff (Ed.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12: National Council Teachers of Mathematics 1999 Year* (pp. 207-219).<https://experts.umn.edu/en/publications/teaching-and-assessing-statistical-reasoning-national-council-tea>
- Gea, M. M., Pallauta, J. D., Batanero, C., y Valenzuela-Ruiz, S. M. (2022). Statistical tables in Spanish primary school textbooks. *Mathematics*, 10(15), 2809. <https://doi.org/10.3390/math10152809>

- Geiger, V., Gal, I., y Graven, M. (2023). The connections between citizenship education and mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 55(5), 923–940. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01521-3>
- González, C., Muñoz, R., y Muñoz, J. (2021). Características argumentativas de la interpretación de tablas de frecuencia en estudiantes chilenos de segundo año medio. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 13(1), 17-29. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v13i1.39>.
- Lahanier-Reuter, D. (2006). Listes et tableaux: Mise en perspective. *Pratiques*, 131-132, 174-186. https://www.persee.fr/doc/prati_0338-2389_2006_num_131_1_2126
- Martí, E. (2009). Tables as cognitive tools in primary education. En C. Andersen, N. Scheuer, M. Pérez, y E. Teubal (Eds.), *Representational Systems and Practices as Learning Tools* (pp. 133-148). SensePublishers.
- Martí, E., García-Milá, M., Gabucio, F., y Konstantinidou, K. (2011). The construction of a double-entry table: A study of primary and secondary school's students difficulties. *European Journal of Psychology of Education*, 26, 215-234. <https://doi.org/10.1007/s10212-010-0046-1>
- Mejía-Arauz, R., Rogoff, B., Dayton, A., y Henne-Ochoa, R. (2018). Collaboration or negotiation: Two ways of interacting suggest how shared thinking develops. *Current Opinion in Psychology*, 23, 117-123. <https://doi.org/10.1016/j.copsyc.2018.02.017>
- Ministerio de Educación (2011a). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. 2° Ciclo EGB / Nivel Primario. 4°, 5° y 6° Años*. Dirección Nacional de Gestión Curricular y Formación Docente. <https://www.educ.ar/recursos/132576/nap-educacion-primaria-segundo-ciclo>
- Ministerio de Educación (2011b). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. 7° Año Educación Primaria y 1° Año Educación Secundaria*. Dirección Nacional de Gestión Curricular y Formación Docente. <https://www.educ.ar/recursos/110560/nap-septimo-ano>
- Nussbaum, E. M. (2002). How introverts versus extroverts approach small-group argumentative discussions. *The Elementary School Journal*, 102(3), 183-197. <https://www.jstor.org/stable/1002215>
- Pallauta, J.D., Arteaga, P., y Garzón-Guerrero, J.A. (2021). Secondary school students' construction and interpretation of statistical tables. *Mathematics*, 9(24), 3197. <https://doi.org/10.3390/math9243197>
- Pallauta, J. D., Arteaga, P., Gea, M. M., y Begué, N. (2022a). Understanding statistical tables: A survey of research. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 38(2), 1-22. <https://www.seio.es/beio/understanding-statistical-tables-a-survey-of-research/>
- Pallauta, J. D., Batanero, C., y Gea, M. M. (2023). Un instrumento para evaluar la comprensión de tablas estadísticas en educación secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 41(3), 89-112. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5926>

- Pallauta, J. D., Gea, M. M., Arteaga, P., y Valenzuela-Ruiz, S. M. (2022b). Secondary school students' interpretation of the frequency table. En S. A. Peters, L. Zapata-Cardona, F. Bonafini, y A. Fan (Eds.), *Bridging the Gap: Empowering y Educating Today's Learners in Statistics. Proceedings of the 11th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS11 2022)*. <https://doi.org/10.52041/iase.icots11.t2c2>
- Pallauta, J. D., Gea, M. M., Batanero, C., y Arteaga, P. (2022c). How secondary school students build frequency tables? *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. <https://hal.science/hal-03751840v1>
- Peralta, N., y Roselli, N. (2016). Conflicto sociocognitivo e intersubjetividad: Análisis de las interacciones verbales en situaciones de aprendizaje colaborativo. *Psicología, Conocimiento y Sociedad*, 6(1), 90-113. <https://revista.psico.edu.uy/index.php/revpsicologia/article/view/313>
- Pérez-Echeverría, M. P., Postigo, Y., y Marín, C. (2010). Las habilidades gráficas de los estudiantes universitarios: ¿Cómo comprenden las gráficas los estudiantes de Psicología? *Cultura y Educación*, 22(2), 215-229. <https://doi.org/10.1174/113564010791304537>
- Perret-Clermont, A.-N. (2022). Socio-cognitive conflict. En V. P. Glăveanu (Ed.), *The Palgrave Encyclopedia of the Possible* (pp. 1-8). Palgrave Macmillan. <https://doi.org/j7rk>
- Piaget, J. (2001). *The psychology of intelligence*. Routledge. Trabajo original publicado en 1950. <https://doi.org/10.4324/9780203164730>
- Postigo, Y., y López-Manjón, A. (2015). Graphicacy in biology textbooks: análisis de actividades con imágenes/ Alfabetización gráfica en libros de texto de biología: análisis de las actividades con imágenes. *Journal for the Study of Education and Development*, 38(3), 509-541. <https://doi.org/10.1080/02103702.2015.1054667>
- Pozo, J. I. (2017). Aprender más allá del cuerpo: De las representaciones encarnadas a la explicitación mediada por representaciones externas. *Infancia y Aprendizaje*, 40(2), 219-276. <https://doi.org/10.1080/02103702.2017.1306942>
- Psaltis, C., Duveen, G., y Perret Clermont, A. (2009). The social and the psychological: Structure and context in intellectual development. *Human Development*, 52(5), 291-312. <https://doi.org/10.1159/000233261>
- Ruesga, M., Giménez, J., y Orozco, M. (2005). Las tablas de doble entrada en educación infantil: Procedimientos y argumentos de los niños. *Educación Matemática*, 17(1), 129-148. <https://doi.org/10.24844/EM1701.06>
- Rogoff, B. (2003). *The cultural nature of human development*. Oxford University Press.
- Salsa, A., y Gariboldi, M. B. (2018). Experiencia con símbolos y comprensión de dibujos en niños pequeños de distintos contextos socioeconómicos. *Avances en Psicología Latinoamericana*, 36(1), 29-43. <https://doi.org/10.12804/revistas.urosario.edu.co/apl/a.4332>

- Shaughnessy, J.M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1009). Information Age Publishing.
- Schiold, M. (2006). Statistical literacy survey analysis: Reading graphs and tables of rates and percentages. *Proceedings of the 7th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS7)*, Salvador, Brazil. International Association for Statistical Education. http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/6C4_SCHI.pdf
- Schiold, M. (2011). Statistical literacy: A new mission for data producers. *Statistical Journal of the IAOS*, 27, 173-183. <http://dx.doi.org/10.3233/SJI-2011-0732>
- Sepúlveda, A., Díaz-Levicoy, D., y Jara, D. (2018). Evaluación de la comprensión sobre Tablas Estadísticas en estudiantes de Educación Primaria. *Bolema*, 32(62), 869-886. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n62a06>
- Vygotsky, L. S. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Crítica. Trabajo original publicado en 1931.
- Watson, J., y Chick, H. (2001). Factors influencing the outcomes of collaborative mathematical problem solving: An introduction. *Mathematical Thinking and Learning*, 3(2-3), 125-173. <http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2001.9679971>
- Watson, J. (2009). The development of statistical understanding at the elementary school level. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 8(1), 89-109.
- Watson, J., y Callingham, R. (2003). Statistical literacy: A complex hierarchical construct. *Statistics Education Research Journal*, 2(2), 3-46.
- Watson, J., y Smith, C. (2022). Statistics education at a time of global disruption and crises: A growing challenge for the curriculum, classroom and beyond. *Curriculum Perspectives*, 42, 171-179. <https://doi.org/10.1007/s41297-022-00167-7>
- Wertsch, J. (1998). *Mind as action*. Oxford University Press.
- Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-248. <https://doi.org/10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x>

Autor de correspondencia

MARIANO CASTELLARO

Dirección: 27 de febrero 210 bis (Ocampo y Esmeralda)
Rosario, Santa Fe, Argentina
castellaro@irice-conicet.gov.ar

Estrategias que usan estudiantes de tercer año de Educación Primaria cuando resuelven una tarea de pensamiento funcional

Strategies used by third-year primary school students when solving a functional thinking task

Rodolfo Morales,¹ Ángela Agurto,² Isidora Mendoza,³ Catalina Olave,⁴ Lissett Valenzuela,⁵ Danilo Díaz-Levicoy⁶

Resumen: Esta investigación busca caracterizar las estrategias que manifiestan estudiantes de tercero de Educación Primaria en una tarea que implica pensamiento funcional. Para ello, se elaboró una entrevista semiestructurada que se aplicó de manera individual a cuatro estudiantes de tercero de primaria (8-9 años de edad). La entrevista llevó asociada una tarea de pensamiento funcional cuya función involucrada fue $f(x) = x+1$, en un contexto cercano a los estudiantes. Se realizó un análisis de contenido de las producciones de cada uno de los estudiantes a las siete preguntas que involucró la tarea. Entre los resultados se destaca que los estudiantes fueron capaces de utilizar estrategias centradas en las relaciones funcionales de correspondencia y covariación. Además, fueron

Fecha de recepción: 6 de agosto de 2024. **Fecha de aceptación:** 20 de marzo de 2025.

¹ Universidad Católica del Maule, Talca, Chile, rmoralesm@ucm.cl, <https://orcid.org/0000-0002-1892-1671>

² Universidad Católica del Maule, Talca, Chile, angela.agurto@alu.ucm.cl, <https://orcid.org/0009-0000-6827-4866>

³ Universidad Católica del Maule, Talca, Chile, isidora.mendoza@alu.ucm.cl, <https://orcid.org/0009-0004-2631-9455>

⁴ Universidad Católica del Maule, Talca, Chile, catalina.olave@alu.ucm.cl, <https://orcid.org/0000-0001-8365-2490>

⁵ Universidad Católica del Maule, Talca, Chile, lissettvalenzuela@alu.ucm.cl, <https://orcid.org/0009-0003-1019-1867>

⁶ Universidad Católica del Maule, Talca, Chile, ddiazl@ucm.cl, <https://orcid.org/0000-0001-8371-7899>

capaces de responder a una pregunta general desde la particularización y la generalización de una relación funcional. Los resultados sugieren que los estudiantes de estas edades educativas son capaces de involucrarse adecuadamente con tareas que llevan asociadas el concepto de función.

Palabras clave: *Pensamiento funcional, Pensamiento algebraico, Álgebra temprana, Generalización, Educación Primaria.*

Abstract: This study aims to characterize the strategies employed by third-grade elementary school students in a task involving functional thinking. To achieve this, a semi-structured interview was designed and individually administered to four third-grade students (ages 8–9). The interview was linked to a functional thinking task involving the function $f(x) = x+1$, presented in a familiar context for the students. A content analysis was conducted on each student's responses to the seven questions included in the task. The findings indicate that students were able to employ strategies focused on functional relationships of correspondence and covariation. Additionally, they successfully responded to a general question by particularizing and generalizing a functional relationship. These results suggest that students at this educational stage can effectively engage with tasks involving the concept of function.

Keywords: *Functional thinking, Algebraic thinking, Early algebra, Generalization, Primary Education.*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza tradicional del álgebra escolar basada en la manipulación del simbolismo algebraico y procesos mecánicos junto, con el enfoque curricular, donde la enseñanza de la aritmética que antecede a la enseñanza del álgebra, ha provocado durante años dificultades en los aprendizajes algebraicos de los estudiantes (Lins y Kaput, 2004; Molina, 2009; Kieran, 2007). Como una forma de abordar esta brecha surge la propuesta curricular *early algebra* (álgebra temprana) que pretende subsanar aquellas dificultades que los estudiantes enfrentan cuando abordan nociones algebraicas por primera vez. Particularmente, el lineamiento central del *early algebra* busca la promoción de modos de

pensamiento algebraico desde de los primeros niveles educativos. Se pretende otorgar un carácter algebraico a la aritmética presente en el currículum de matemática, de esta manera se invita a los estudiantes a resolver tareas que involucren: la identificación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas, fomentar hábitos de pensamiento centrados en la observación de la estructura que subyace a la matemática y realizar procesos de generalización de estructuras y relaciones matemáticas (Blanton y Kaput, 2005).

El pensamiento funcional es considerado un tipo de pensamiento algebraico y un enfoque para introducir ideas algebraicas a partir de los primeros niveles educativos (Cañadas *et al.*, 2018). Se centra en las relaciones entre cantidades que covarían y la generalización de las mismas y tiene a la función como contenido protagonista (Blanton, 2008; Smith, 2008). En este trabajo, siguiendo a Shliemann *et al.* (2011), asumimos que las operaciones aritméticas pueden ser consideradas como funciones. Dichos autores consideran que la aritmética se ocupa de esa parte del álgebra en la que números y medidas particulares, son tratados como instancias de ejemplos más generales, fomentando así procesos de representación y generalización, habilidades propias del pensamiento algebraico. Por ejemplo, la multiplicación por dos (la tabla del dos) puede ser concebida como una función de proporcionalidad (Morales *et al.*, 2023).

Las ventajas asociadas a este pensamiento en Educación Primaria son diversas, entre ellas se destacan: a) promueve de manera intuitiva el concepto de función a través de las relaciones entre las cantidades, la representación y la generalización; b) ayuda a desarrollar habilidades para distinguir la relación entre cantidades e identificar la regularidad de la situación dada; c) es un medio para promover la resolución de problema y, d) es considerada como una meta disciplinar (Kaput, 2008; Blanton, 2008; Rico 2006; Torres *et al.*, 2022). Dadas estas ventajas, no es de extrañar que varios países hayan incorporado elementos del pensamiento funcional en sus currículos (Merino *et al.*, 2013; Morales y Parra, 2022). Por ejemplo, el currículo chileno sugiere que los estudiantes deben ser capaces de identificar relaciones entre cantidades de tal manera que exploren cómo el cambio de una cantidad afecta a la otra (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2012).

Desde un punto de vista investigador, el pensamiento funcional ha sido motivo de interés en los últimos años, se han realizado esfuerzos considerables para caracterizarlo en estudiantes de edades escolar tempranas. Por ejemplo, hay estudios que sugieren que estudiantes de primero y segundo de Educación Primaria son capaces de abordar tareas de relaciones funcionales usando

estrategias basadas en la relación de correspondencia, evidenciando la estructura de la relación funcional y usando la representación verbal para generalizar dicha relación y estructura (p. ej., Morales *et al.*, 2018; Torres *et al.*, 2021). A pesar de estos esfuerzos, aún quedan líneas abiertas por explorar respecto a cómo estudiantes de niveles educativos iniciales son capaces de transitar desde la aritmética al álgebra a través del proceso de generalización, en un contexto funcional del álgebra escolar (Torres *et al.*, 2023).

Este estudio pretende, de acuerdo con las consideraciones anteriores, dar respuesta al siguiente objetivo de investigación: caracterizar las estrategias que manifiestan estudiantes de tercero de Educación Primaria en una tarea que implica pensamiento funcional. Al abordar este objetivo se busca aportar más evidencia al cuerpo de conocimiento existente sobre el pensamiento funcional de estudiantes de las primeras edades educativas. Además, intenta dar orientaciones novedosas para abordar la generalización de una relación funcional en el aula.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

EARLY ALGEBRA

El *early algebra* es una propuesta curricular que surge en los Estados Unidos como forma de potenciar el aprendizaje del álgebra a partir de los primeros niveles educativos, como consecuencia de las dificultades y los errores que han manifestado los estudiantes desde el enfoque tradicional y mecanicista del álgebra escolar (Kaput, 2000; Molina, 2009). En los últimos años, investigaciones en torno al *early algebra* han evidenciado que los estudiantes tienen capacidades para abordar de manera exitosa tareas con nociones algebraicas adecuadas a sus edades, en contraste con lo que se pensaba hace algunas décadas (Brizuela *et al.*, 2015). Por consiguiente, esta propuesta busca potenciar el currículo tradicional, de tal modo que le otorga a la aritmética un carácter fuertemente algebraico. Se pretende que los estudiantes puedan promover aprendizaje algebraico a través de distintas prácticas centradas en la justificación, representación, razonamientos y la generalización, esta última sobre las relaciones matemáticas a través de representaciones cada vez más sofisticadas. El *early algebra* posee un amplio abanico de posibilidades con las que se pretende la introducción de los elementos algebraicos, se tienen distintos enfoques como: el pensamiento relacional, el estudio de la aritmética generalizada y el pensamiento

funcional (Cañadas y Molina, 2016). Este trabajo se centra en el enfoque del pensamiento funcional y sus elementos, dado que es uno de los recomendados para abordar nociones algebraicas a partir de los primeros niveles educativos.

PENSAMIENTO FUNCIONAL

El pensamiento funcional se considera un tipo de pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que la constituyen (Cañadas y Molina, 2016). Tiene como objeto establecer relaciones de dependencia entre dos o más conjuntos de datos inmersos en situaciones cotidianas (Cañadas y Fuentes, año). Asimismo, el pensamiento funcional, se evidencia cuando un estudiante explicita la relación entre las cantidades variables y de esa manera puede abstraer el razonamiento hacia una regla general, que puede descubrirse mediante un proceso inductivo (Cañadas y Molina, 2016). Además, es cuando este mismo estudiante, una vez que ha centrado su atención en la relación entre las cantidades variables, es capaz de generalizar y justificar esas relaciones, usando representaciones que pueden abarcar el lenguaje natural u, otros centrados en lo pictórico, tabular, gráfico, simbólico o algebraico (Blanton *et al.*, 2015; Smith, 2008). En este sentido, la justificación es un elemento clave en el pensamiento funcional, dado que favorece su desarrollo y permite evidenciar cuando un estudiante resuelve tareas asociadas a este pensamiento (Pinto *et al.*, 2023; Thanheiser y Sugimoto, 2022). Además, de acuerdo con Blanton *et al.* (2011), la justificación busca la formulación de argumentos para validar conjeturas o afirmaciones.

RELACIONES FUNCIONALES COMO ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN

Las estrategias son secuencias de procedimientos que se realizan sobre conceptos y relaciones matemáticas (Rico, 1997). En este contexto, se considera como estrategia a la actuación que realiza un resolutor frente a una tarea matemática. En la enseñanza y estudio del álgebra escolar las formas de establecer relaciones funcionales (Kaput, 1998), suelen ser consideradas como estrategias de resolución de un problema que implica el concepto de función. Por ejemplo, en Morales y Parra (2022) se observa que futuros profesores emplean estrategias centradas en las relaciones entre cantidades que covarían. Diversos autores (p. ej., Amit y Neria, 2008; Merino *et al.*, 2013) destacan la necesidad de indagar sobre las estrategias que emplean estudiantes de primeros niveles educativos

en la resolución de problemas en el contexto funcional. En este sentido, las estrategias podrían implicar tres tipos de relaciones, estas son: recurrencia, correspondencia y covariación (Confrey y Smith, 1991). La primera de ellas, es la más elemental de todas e implica la localización de una relación entre las cantidades de la secuencia de una de las variables involucradas en la tarea (Blanton, 2008). Un ejemplo de este tipo de patrón se observa en la figura 1, la solución se logra enfocando la atención en la columna de la variable dependiente, usando el patrón de sumar uno a la cantidad anterior. La complejidad que tiene este patrón es que, para hallar una cantidad distante de una anterior, requiere el conocimiento de todas las cantidades anteriores de la secuencia de la variable.

Variable independiente (x)	Variable dependiente (y)
1	6
2	7
3	8
4	9

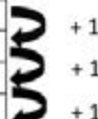


Figura 1. Relación de recurrencia

Por su parte, la correspondencia se refiere a la relación entre pares correspondientes de las cantidades de las variables involucradas (dependiente e independiente) (Confrey y Smith, 1991; Smith, 2008). Identificar la correspondencia implica encontrar una regla que permita determinar un valor de la variable dependiente dado un valor de la variable independiente (Blanton *et al.*, 2011). Por ejemplo, en la figura 2, se indica con la flecha horizontal la relación de correspondencia, está determinada por la regla de sumar cinco a cada una de las cantidades de variable independiente con el fin de hallar el valor de la variable dependiente correspondiente.

Variable independiente (x)	Variable dependiente (y)
1	6
2	7
3	8
4	9

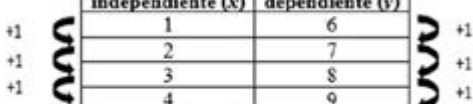



Figura 2. Relación funcional de covariación y correspondencia

La relación de covariación se asocia al cambio simultáneo y coordinado entre las cantidades de ambas variables. Es decir, determinar cómo las cantidades de las variables varían al mismo tiempo. Implica centrarse en cómo los cambios de las cantidades de la variable independiente influyen en las de la variable dependiente (Blanton *et al.*, 2011). Un ejemplo de este tipo de relación se observa en las flechas curvas de la tabla de la figura 2, a través de la variación entre las cantidades de la variable independiente se halla una cantidad de la variable dependiente. Es decir, se suma uno entre dos cantidades consecutivas de la variable independiente, por tanto, se suma uno entre dos cantidades consecutivas de la variable dependiente.

Para Smith (2008), un trabajo centrado en las relaciones funcionales de correspondencia y covariación, permite avanzar en la construcción de elementos clave de la noción de función y, evidenciar el pensamiento funcional de quienes las utilizan. Lo anterior se debe a que estas relaciones funcionales requieren enfocarse en las formas de variación entre las cantidades de las variables (Morales *et al.*, 2018).

En los últimos años diversos investigadores se han centrado en las relaciones funcionales de estudiantes de los primeros niveles educativos como una forma de evidenciar su pensamiento funcional. Por ejemplo, Stephens *et al.* (2012) evidenciaron que estudiantes entre 8 a 10 años, fueron capaces de transitar desde la recurrencia y covariación hasta la correspondencia, en un contexto de experimento de enseñanza. Resultados similares fueron encontrados por Tanışlı (2011) con estudiantes de entre 9 a 10 años, pero en una tarea de tablas de funciones. Pinto *et al.* (2019) establecieron que la relación funcional identificada con mayor frecuencia por estudiantes de 9 años es la correspondencia. Warren y Cooper (2006) encontraron que estudiantes de 9-10 años identificaron la recurrencia y correspondencia en una tarea de pensamiento funcional y alcanzaron la generalización de esta última relación. Incluso hay estudios con estudiantes de menos edades (6 años) que demuestran ser capaces de evidenciar relaciones funcionales de correspondencia y covariación en una tarea de pensamiento funcional (Morales *et al.*, 2018). Según los antecedentes consultados, todos los investigadores coinciden en que es necesario seguir ahondando en las relaciones funcionales de estudiantes de los primeros niveles educativos, como una forma de caracterizar el pensamiento funcional y generar un cuerpo de conocimiento consistente que permita su contribución en la enseñanza del álgebra escolar.

REPRESENTACIONES

Las representaciones externas se entienden como “notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes” (Castro y Castro, 1997, p. 96). Estas representaciones, por un lado, llevan a los estudiantes al descubrimiento de objetos matemáticos abstractos (Molina, 2014), y, por otro lado, son valiosas para la investigación, dado que evidencian en las producciones el pensamiento que manifiestan los estudiantes cuando resuelven tareas matemáticas (Merino *et al.*, 2013).

Desde el pensamiento funcional, las representaciones verbales, pictóricas, tabulares, gráficas y simbólicas adquieren relevancia, porque facilitan a los estudiantes entender el comportamiento de la función y a su vez demuestran la presencia de tales pensamientos (Blanton *et al.*, 2011; Cañadas *et al.*, 2016; Cañadas y Molina, 2016). Por ejemplo, la representación verbal, que refiere al lenguaje natural, oral o escrito, permite expresar los conceptos matemáticos, y, por ende, las relaciones funcionales y su generalización (Cañadas y Figueiras, 2011; Morales *et al.*, 2023). En cambio, la representación pictórica alude a recursos visuales como los dibujos, es primordial por ser propia y original de los estudiantes que resuelven tareas matemáticas (Blanton *et al.*, 2011; Cañadas y Figueiras, 2011). Por otro lado, la representación simbólica, aborda lo alfanumérico y su sintaxis, es descrita mediante una serie de reglas y procedimientos (Rico, 2009). Este sistema involucra símbolos y signos propios de la matemática, y requiere de un nivel de sofisticación mayor, dado que expresa de manera exacta y precisa las relaciones entre las cantidades variables en una tarea de pensamiento funcional (Azcárate y Deulofeu, 1990; Blanton, 2008).

Los estudios que hay en tareas de pensamiento funcional sugieren que estudiantes de edades entre 9 a 10 son capaces de usar representaciones simbólicas y verbales como formas de expresar la generalización de la relación funcional (Ureña *et al.*, 2019). Por su parte, Pinto *et al.* (2023), con estudiantes de las mismas edades que el estudio anterior, identificaron que al principio recurrían a una representación numérica y única, pero a medida que fueron avanzando en la tarea, los estudiantes lograron abordar una relación funcional expresando sus argumentos de manera cada vez más sofisticada, por ejemplo, como una representación simbólica. Medrano *et al.* (2022) sugieren que estudiantes de entre 8-9 años son capaces de producir representaciones más sofisticadas, es decir, usan letras para solucionar tareas en un contexto funcional del álgebra escolar.

GENERALIZACIÓN

Los estudiantes cuando ingresan a la escolaridad poseen capacidades naturales para realizar y expresar procesos de generalización de estructuras matemáticas (Mason, 1999; Socas, 2011). Desde esta perspectiva, se considera que el desarrollo del pensamiento algebraico consiste, en gran medida, en aprovechar y potenciar esas capacidades naturales de los estudiantes. Generar instancias de generalización en los estudiantes implica ofrecerles oportunidades para que busquen, identifiquen y expresen regularidades, con la finalidad de desarrollar su pensamiento crítico y capacidades para resolver problemas de manera más eficiente (Molina, 2009). En el contexto del pensamiento funcional, Kaput (2000) indica que la generalización es:

(...) extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos (p. 6).

En este sentido se considera que la generalización se logra, entre otros procesos, por medio de casos particulares, lo que implica un razonamiento inductivo. Esto es, a través del trabajo organizado de casos particulares se busca la identificación del patrón que se establece entre las cantidades que covarían y su relación con la regla general (Cañadas y Castro, 2007). Sin embargo, Mason (1996) menciona que también es posible llegar a la generalización a través de un ejemplo genérico, esto quiere decir que es posible generalizar por medio de un único ejemplo o caso particular con características determinadas.

Los estudios sobre generalización en pensamiento funcional dan cuenta de que los estudiantes de los primeros niveles educativos son capaces de generalizar, pero lo hacen de distintas formas. Por ejemplo, Morales *et al.* (2016) en un estudio con 30 estudiantes de 6 a 7 años, mostraron que algunos de ellos respondieron por medio de un caso particular (particularizaron), mientras que otros generalizaron verbalmente la relación funcional de correspondencia. Pinto y Cañadas (2018) evidenciaron que estudiantes de 9 años de edad fueron capaces de generalizar la relación de correspondencia y lo hicieron desde la espontaneidad (sin necesidad de preguntar de manera general) y desde una pregunta inducida para tal proceso. Por su parte, Morales *et al.* (2018), también

encontraron que estudiantes de 6 a 7 años expresaron la generalización de la relación de correspondencia de manera verbal. Torres *et al.* (2021) dieron cuenta que estudiantes de entre 7 a 8 años de edad son capaces de generalizar la estructura subyacente a una relación funcional que viene dada en la tarea propuesta. En un estudio posterior, los mismos autores (Torres *et al.*, 2023) evidenciaron que un estudiante de 7 años en una tarea cuya función fue $f(x) = x + 3$, generalizó verbalmente a partir de casos particulares, pasando de una generalización aritmética a una generalización algebraica. Esto quiere decir que el estudiante transitó desde la acción “sumar tres” a la acción “siempre más tres”, evidenciando así una transición del pensamiento aritmético al algebraico.

METODOLOGÍA

TIPO DE INVESTIGACIÓN

Esta investigación es de tipo cualitativa, dado que busca comprender opiniones, experiencias y significados que los participantes atribuyen a una tarea determinada (Monje, 2011). Por su parte, Hernández *et al.* (2014) indican que este tipo de investigación, con frecuencia, se basa en métodos de recolección de datos sin medición numérica, los cuales, además, no son estandarizados ni predeterminados completamente. Además, esta investigación se enmarcó en un estudio de casos, dado que buscamos indagar en profundidad el trabajo de estudiantes de tercero de Educación Primaria cuando resuelven tareas que implican relaciones funcionales (Stake, 1999).

SUJETOS DE INVESTIGACIÓN

Cuatro estudiantes de tercero de educación primaria (8 - 9 años) de un establecimiento municipal de la ciudad de Talca, Chile. Su selección fue de manera intencionada. Para obtener respuestas que caracterizaran al curso y evitar sesgos en las respuestas a la tarea se consideraron estudiantes que estaban en la media de rendimiento académico. De acuerdo con la información otorgada por la profesora del curso y de acuerdo con el programa curricular, estos estudiantes no contaban con experiencias previas en tareas relativas al pensamiento funcional. Sin embargo, contaban con experiencias en trabajos con tareas de patrones numéricos, cálculo de adición y sustracción tanto escrito como mental, y

además presentaban facilidad para verbalizar sus respuestas a las tareas. Esto último fue un elemento clave, porque la principal fuente de información fue la representación verbal.

ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA Y TAREA DE INVESTIGACIÓN

Se diseñó una tarea que promueve el pensamiento funcional en estudiantes de educación primaria y estuvo dada por la función $f(x)=x+1$. Se ha considerado esta función como una forma de corroborar las estrategias que emplean los estudiantes cuando resuelven dichas tareas. Se planteó esta tarea de manera individual a cada uno de los cuatro estudiantes, en el contexto de una entrevista semiestructurada, en una sala de clase de su establecimiento. La entrevista no tuvo límite de tiempo, su duración fue de entre 20 y 30 minutos. La tarea se refiere a un contexto cercano a ellos, el crecimiento de los círculos del cuerpo de una oruga (variable dependiente) y la cantidad de días que transcurrían (variable independiente): *esta es la historia de una oruga que cuando pasa un día su cuerpo crece, de modo que cuando pasa un día la oruga tiene dos círculos en su cuerpo y cuando pasan dos días la oruga tiene tres círculos en su cuerpo.*

En la entrevista, luego de plantear el enunciado, se propusieron siete preguntas elaboradas siguiendo las orientaciones del razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007). Esto es que, a partir de preguntas sobre casos particulares pequeños, grandes y un caso general, se pretendía que los estudiantes llegaran a la generalización de la relación funcional. En la tabla 1 se detalla el tipo de caso y su descripción, preguntas planteadas y las estrategias y la representación esperada por parte del estudiante.

Tabla 1. Descripción de las preguntas de la tarea

Tipo de caso	Descripción	Pregunta planteada	Estrategia y representación esperada
Caso pequeño consecutivo	Son aquellas preguntas en que se pide encontrar la cantidad de la variable dependiente en los primeros casos de la relación funcional. Se relacionan a un ámbito numérico pequeño de la relación funcional y a su vez consecutivos.	1. Ahora cuando pasan tres días ¿Cuántos círculos tendrá en su cuerpo? 2. Cuando pasan cuatro días ¿Cuántos círculos tendrá la oruga en su cuerpo? 3. Cuando pasan cinco días ¿Cuántos círculos tendrá la oruga en su cuerpo?	Se espera que los estudiantes manifiesten estrategias de covariación y correspondencia, usando una representación verbal, concreta, pictórica y/o simbólica.
Caso pequeño no consecutivo	Son aquellas preguntas en que se pide encontrar la cantidad de la variable dependiente en los primeros casos de la relación funcional. Se relacionan a un ámbito numérico pequeño de la relación funcional y no son consecutivos.	4. Ahora daremos un salto. Cuando pasan diez días ¿Cuántos círculos tendrá la oruga en su cuerpo?	Se espera que los estudiantes manifiesten estrategias de correspondencia, usando una representación verbal, pictórica y/o simbólica.
Caso grande no consecutivo	Son aquellas preguntas en que se pide encontrar casos grandes y aislados en la relación funcional, los cuales requieren la identificación de un patrón (relación funcional).	5. Cuando pasan 50 días ¿Cuántos círculos tendrá la oruga en su cuerpo? 6. Cuando pasan 100 días ¿Cuántos círculos tendrá la oruga en su cuerpo?	Se espera que los estudiantes manifiesten estrategias de correspondencia, usando una representación verbal o simbólicas.
Pregunta general	Es aquella pregunta que busca la generalidad de la relación funcional.	7. Si no conocemos la cantidad de días que ha pasado ¿Cómo podemos saber cuántos círculos tendrá el cuerpo de la oruga?	Se espera que los estudiantes manifiesten la generalización de la relación funcional de correspondencia, usando una representación verbal o simbólica.

Además, cada estudiante contó con material concreto que representaba a los círculos del cuerpo de la oruga, que, en caso de requerirlo, fueron utilizados al momento de responder las preguntas de la tarea. Es decir, cuando el estudiante requería representar los datos del problema, podía hacer uso del material concreto (figura 3).



Figura 3. Material concreto usado en la tarea: círculos que representan el cuerpo de la oruga.

TÉCNICA DE ANÁLISIS Y CATEGORIZACIÓN

Para el análisis de la información empleamos la técnica del análisis de contenido (Fernández, 2002). Se hizo la transcripción de cada una de las entrevistas. Posteriormente, cada integrante del grupo de investigación analizó las transcripciones y fotografías de las producciones de los estudiantes, para determinar evidencia, o no, de pensamiento funcional en las respuestas a cada pregunta de la tarea. A continuación, el grupo consensuó el análisis individual realizado para establecer las categorías definitivas. Las categorías se establecieron a partir de: el marco conceptual de esta investigación (Blanton *et al.*, 2015; Cañadas y Molina, 2016; Morales *et al.*, 2023; Smith, 2008); los antecedentes que sugieren indagar sobre las relaciones funcionales y representaciones de estudiantes de primeras edades educativas como una forma de caracterizar el pensamiento funcional (Blanton *et al.*, 2011; Morales *et al.*, 2023; Pinto *et al.*, 2023; Smith, 2008); un análisis a priori de las respuestas de los estudiantes permitió consolidar las categorías de análisis en estrategias funcionales y no funcionales. Las categorías de análisis se muestran en la tabla 2.

Tabla 2. Descripción de categorías de análisis

Categorías	Sub - categoría	Descripción
Estrategias	No funcionales	Sin evidencia de relación funcional: aplicación de operatoria sin relación entre cantidades. Respuesta directa: responde de manera adecuada, pero sin justificar. Patrón recursivo: sumar de uno en uno las cantidades de la variable dependiente, pero sin relación entre cantidades.
	Funcionales	Covariación: relación entre cómo la variación de la cantidad de la variable independiente afecta a la cantidad de la variable dependiente. Correspondencia directa: sumar uno a la cantidad de la variable independiente. Correspondencia inversa: Restar uno a la cantidad de la variable dependiente.
Generalización	Particulariza	Responde con un caso particular, por ejemplo: cuando pasan veinte días son veintiuno círculos en el cuerpo de la oruga, cuando pasan cincuenta días son cincuenta y un círculos en el cuerpo de la oruga. También se incluyen respuestas como: “porque los días aumentan en uno los círculos del cuerpo aumentan en uno también”.
	Generaliza	Generalización de la correspondencia: cuando responde “siempre hay que sumar uno a la cantidad de días para obtener la cantidad de círculos” o indicios de esta respuesta. Generalización de la covariación: cuando responde: “porque cambia la cantidad de días también cambia la cantidad de círculos en el cuerpo”.

RESULTADOS

En primer lugar, se muestran resultados de los cuatro estudiantes a cada una de las siete preguntas de la tarea (tabla 3). Se asignó a cada estudiante un número para respetar su anonimato y distinguirlo de otros. Finalmente, se muestra una comparación del trabajo realizado por cada uno de los estudiantes de acuerdo a las trayectorias de estrategias usadas en las preguntas de tarea.

Tabla 3. Respuesta de los estudiantes por preguntas

Estudiante (A)	Número de pregunta						
	1	2	3	4	5	6	7
A1	Cv	Cv*	Cv	Pr/Cv	Cv	Crd	Cri*
A2	Cv	Cv	Cv	Crd	Crd	Crd	Crd**
A3	Cv	Rd	Cv*	Cv	Crd	Crd	Cv*
A4	Pr	Cv	Cv	Crd	Crd	Crd	Crd**

Nota: Cv = Relación covariación; Pr = Patrón recursivo; Rd = Respuesta directa; Crd = Correspondencia directa; Cri = Correspondencia inversa; * = generaliza; ** = particulariza

Pregunta 1

En la tabla 3 se observa, que en la pregunta 1, tres estudiantes (A1, A2 y A3) utilizaron la estrategia de covariación. Estos estudiantes se centraron en la variación existente entre las cantidades de la variable independiente (cantidad de días) y su incidencia en las cantidades de la variable dependiente (cantidad de círculos de la oruga). Un ejemplo característico de esta estrategia fue la respuesta de A1, cuando se le preguntó por la cantidad de círculos que tendrá la oruga cuando han pasado tres días, respondió: “Cuatro [...], cada día se le agrega una pelotita”. A partir de esta respuesta se observa una relación entre la cantidad de días con la cantidad de círculos (variable dependiente), es decir, por cada día que pasa se deberá agregar un círculo (pelotita).

En esta pregunta, A4 fue el único que utilizó la estrategia de patrón recursivo, respondió “Cuatro [...] iba como uno en uno (referenciando a las cantidades de la variable dependiente)”. Este estudiante solo se enfocó en la relación existente entre las cantidades relativas a la variable dependiente que, en este caso, es sumar uno para hallar la cantidad siguiente.

Pregunta 2

En cuanto a la pregunta 2, tres estudiantes (A1, A2 y A4) utilizaron la estrategia de relación funcional de covariación. Una respuesta representativa de esta estrategia fue la manifestada por A1, como se muestra en el siguiente fragmento de entrevista.

1. Entrevistadora (E): ¿Y por qué crees que son 5 círculos?
2. A1: Porque se le agrega uno y pasa otro día (anteriormente, se había preguntado por la cantidad de círculos de la oruga cuando pasan cuatro días).
3. E: ¿Quieres decir que si pasa otro día se le agrega uno?
4. A1: Sí.

Cómo se observa, A1 solo se enfocó en la relación existente entre las cantidades relativas a la variable independiente, esto es, aumenta la cantidad de días en uno y la cantidad de círculos del cuerpo también lo hace en uno (ver línea 2). Este estudiante mostró consistencia en su respuesta ya que en la pregunta anterior también había usado esta estrategia. Además, se confirma esta estrategia en la representación verbal y pictórica realizada en la guía, como se observa en la figura 4.

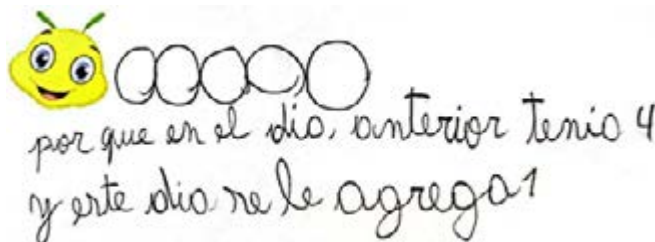


Figura 4. Representación pictórica y verbal estrategia covariación

Además, en la justificación de la respuesta de A1 se observa una generalización de la relación de covariación, cuando se le preguntó sobre la forma de hallar la cantidad de círculos de la oruga, respondió "Que crece una bolita cada día [...] va creciendo uno en uno al pasar los días". A1 entiende que la cantidad de

círculos dependerá de la variable independiente y, en este caso, si los días aumentan en uno, la cantidad de círculos también lo hace.

Finalmente, en esta pregunta se observa que solo uno de los cuatro estudiantes (A3) utilizó la estrategia de respuesta directa, respondió “cinco [...] tendrá cinco pelotitas”, sin justificar su respuesta.

Pregunta 3

Respecto a la pregunta 3, se observa que todos los estudiantes utilizaron la estrategia de covariación. Se destaca la respuesta de A3 porque generalizó esta relación funcional, cuando la entrevistadora le preguntó sobre cómo lo hizo, respondió: “ahora tiene 6 pelotitas porque cada día le agrego uno”, dejando en evidencia que cuando las cantidades de la variable independiente aumentan en uno, las cantidades de la variable dependiente también lo hacen en uno.

Pregunta 4

En esta pregunta se observan distintas estrategias manifestadas por los 4 estudiantes. Por ejemplo, se destacan las respuestas de A1 y A3 que emplearon la estrategia de covariación. Sin embargo, A1 empleó dos estrategias en esta pregunta, inicialmente, respondió con el patrón recursivo: “le agrego una pelota” (refiriéndose a la cantidad de la variable dependiente). Posteriormente, la entrevistadora le recordó que hay un salto de cinco a diez días y le repite la pregunta sobre la cantidad de círculos que tendrá la oruga, pasados diez días, A1 respondió nuevamente “del día cinco al llegar al diez [...] serían once”. En esta respuesta se observa una estrategia de covariación, a partir de la variación de las cantidades de la variable independiente (diferencia entre cinco y diez), obtuvo la cantidad de la variable dependiente, en este caso once (sumó cinco a seis, que estuvo dado por la pregunta anterior).

Por su parte, A2 y A4 utilizaron la estrategia de correspondencia directa, siendo la primera vez que emergió esta estrategia. Un ejemplo característico de esta estrategia es el de A4, cuando justificó su respuesta de la siguiente manera: “le agregué uno entonces ahora que son diez días para mí son once [haciendo mención de los círculos de la oruga]”. En la respuesta anterior se observa que A4 halló la cantidad de la variable dependiente con tan solo sumar uno a la cantidad de la variable independiente. Esta estrategia es relevante porque

permite hallar todas las cantidades de la variable dependiente dadas las de la variable independiente.

Pregunta 5

En esta pregunta relativa a un caso particular grande no consecutivo, A1 fue el único que utilizó la estrategia de covariación, esto demuestra consistencia entre sus respuestas, ya que en las preguntas anteriores también la utilizó. A continuación, se muestra un fragmento de entrevista que evidencia la relación de covariación empleada.

5. E: Entonces ¿Cuántas esferas tendría en el día 50?
6. A1: 51 bolitas.
7. E: Ahora explícame cómo sabes que son 51 bolitas.
8. A1: porque cada día va creciendo una bolita más.

Mientras que, A2, A3 y A4 utilizaron la estrategia de correspondencia directa. Un ejemplo característico de esta estrategia fue la respuesta de A2, cuando la entrevistadora le preguntó por la cantidad de círculos que tendrá la oruga cuando hayan pasado cincuenta días, él respondió “tiene 1 círculo más [...] cincuenta y va a tener 1 más”. Como se observa, para hallar la cantidad de círculos solicitados en la pregunta, le bastó solo con sumar uno a la cantidad de la variable independiente. Se destaca la consistencia en la respuesta de este estudiante pues en la pregunta anterior también respondió haciendo uso de esta estrategia. Así mismo se observa en la representación verbal y simbólica realizada en su ficha de trabajo (figura 5).

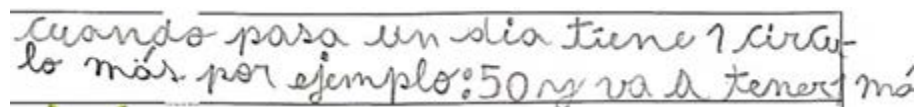


Figura 5. Estrategia de correspondencia directa usando la representación verbal y simbólica.

Pregunta 6

En esta pregunta relativa a un caso particular grande no consecutivo, se observó que los cuatro estudiantes utilizaron la estrategia de correspondencia directa, esto quiere decir que cuando se les preguntó por la cantidad de círculos pasados cien días, respondieron que la cantidad de círculos es cien más uno, es decir, ciento uno. Por ejemplo, A4 respondió lo siguiente:

9. E: Ahora A1 la oruga llegó al día cien. ¿Cuántos círculos tendrá en su cuerpo si han pasado 100 días?
10. A4: Ciento uno.
11. E: Explica cómo lo sabes.
12. A4: Porque le agrego uno.

Pregunta 7

En la pregunta que buscaba la generalización se observó que dos estudiantes (A1 y A3) generalizaron una relación funcional. A1 lo hizo a través de la estrategia de correspondencia inversa, tal como se observa en el siguiente fragmento de entrevista.

13. E: (...) Si no conocemos la cantidad de días que han pasado, ¿cómo podemos saber cuántos círculos tendrá el cuerpo de la oruga?
14. A1: Quitando la cantidad de círculos.
15. E: Pero, si no sabemos cuántos días son.
16. A1: Le quitamos una pelotita a la oruga y obtenemos el resultado.
17. E: ¿Y por qué ahora quitarías pelotitas si siempre agregas?
18. A1: Para saber el resultado de días que han pasado.

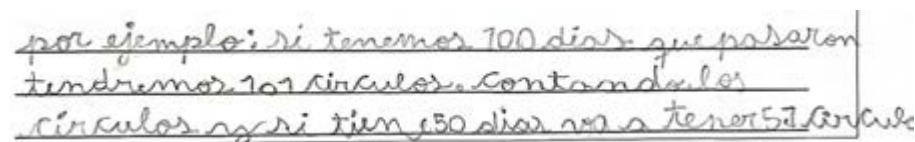
Como se observa en el fragmento anterior, A1 en lugar de justificar cómo se encuentra la cantidad de círculos cuando no se sabe la cantidad de días, lo hizo explicando la forma en que se halla la cantidad de días dada una cantidad indeterminada de círculos, tal como se observa en las líneas 16 y 18. Este estudiante entiende que para hallar la cantidad de días basta solo con quitar uno a la cantidad de círculos de la oruga.

Por su parte, A3 generalizó como se muestra en el siguiente fragmento de entrevista.

19. E: Si no sabemos cuántos días han pasado eso va a seguir, se le sigue agregando uno.
20. A3: Entonces pasa un día y se le agrega uno.
21. E: Ya ¿Se le agrega uno a qué entonces?
22. A3: A la oruga.
23. E: Pero, ¿con relación a qué?
24. A3: A los días.

En el fragmento anterior se observa que, frente a la pregunta general de la entrevistadora, A3 responde a través de la variación entre las cantidades variables. Esto es que cuando las cantidades de la variable independiente cambian en uno, las cantidades de la variable dependiente también lo hacen, tal como se observa en la línea 22. A3 entiende que un cambio en las cantidades de la variable independiente tiene una incidencia en las cantidades de la variable dependiente.

Por último, A2 y A4 solo particularizaron en la pregunta general. Ellos justificaron sus respuestas a través de un caso particular. Por ejemplo, cuando la entrevistadora les preguntó ¿cómo podemos saber cuántos círculos tendrá el cuerpo de la oruga? A2 mencionó “por ejemplo, si tenemos 100 días que pasaron tendremos 101 círculos [...] contando los círculos y si tiene 50 días va a tener 51 círculos”. Esta misma respuesta se muestra en la representación verbal que A2 escribió en la ficha (figura 6).



por ejemplo: si tenemos 100 días que pasaron
tendremos 101 círculos. Contando los
círculos y si tiene 50 días va a tener 51 círculos

Figura 6. Respuesta usando la particularización.

Por su parte, A4, ante la misma pregunta, respondió “sumándole un círculo”, pero no explicó a qué cantidad se le suma dicho círculo, la entrevistadora, para ahondar en su respuesta, le propuso diversos casos particulares, como se muestra en el siguiente fragmento de entrevista.

25. E: Por ejemplo, si yo tuviera 500, ¿cuántos círculos tendría la oruga?
 26. A4: 501.
 27. E: Y, ¿60?
 28. A4: 61.

Se observa que, si bien A4 entendió que para hallar la cantidad de círculos del cuerpo de la oruga se suma uno a la cantidad de la variable independiente, requirió de casos particulares para dar cuenta de este proceso.

TRAYECTORIA DE ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR LOS ESTUDIANTES

A partir de la tabla 3 se diseñó la tabla 4 que aborda las trayectorias de estrategias empleadas por cada uno de los cuatro estudiantes en las preguntas de la tarea.

Tabla 4. Trayectoria de estrategias utilizadas

Tipo de Trayectoria	Estudiante (estrategias)
1 cambio estrategia	A2 (Cv - Crd)
2 cambios estrategias	A4 (Pr - Cv - Crd)
3 o más cambios estrategias	A1 (Cv - Pr/Cv - Crd - Cri) A3 (Cv - Rd - Cv - Crd - Cv)

Nota: Cv = Relación covariación; Pr = Patrón recursivo; Rd = Respuesta directa; Crd = Correspondencia directa; Cri = Correspondencia inversa.

A nivel grupal se observa la flexibilidad que manifiestan los estudiantes al resolver la tarea propuesta en este estudio, dejando en evidencia que no hay una única forma de abordarla, dado que los estudiantes usaron distintos enfoques para su resolución.

A nivel individual, se observa que A2 fue el que realizó solo un cambio de estrategia, dado que pasó de la relación de covariación a la de correspondencia directa. Por su parte, A4 empleó dos cambios de estrategias, inicialmente evidenció

un patrón recursivo, pasando a una covariación y finalizando con una relación de correspondencia directa. Finalmente, se observó que dos estudiantes, A1 y A3, realizaron cuatro cambios de estrategia. A1 inició con una covariación, siguió con un patrón recursivo y una covariación, ambas en la misma pregunta (tabla 3), posteriormente, cambió a la estrategia de correspondencia directa, finalizando con una correspondencia inversa. Por su parte, A3 comenzó con la estrategia de covariación, a continuación, manifestó una respuesta directa (sin evidenciar relación funcional), seguidamente volvió a utilizar la covariación, posteriormente utilizó la estrategia de correspondencia directa y finalizó con una covariación.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

A la luz de los resultados obtenidos, se pone de manifiesto que estudiantes de tercero de Educación Primaria (8 a 9 años) evidencian estrategias relacionadas con el pensamiento funcional, tales como la covariación y la correspondencia. Este hallazgo es destacable porque implica que estudiantes de estas edades son capaces de involucrarse en tareas asociadas al concepto de función, contenido crítico en la enseñanza del álgebra escolar (Brizuela *et al.*, 2015; Cañadas y Molina, 2016). Se observa que todos los estudiantes manifestaron ambas estrategias funcionales centradas en la covariación y la correspondencia directa. Lo anterior confirma los hallazgos sobre el pensamiento funcional en estudiantes de Educación Primaria de investigaciones previas, en contextos internacionales y en el contexto chileno (p. ej., Pinto *et al.*, 2023). Lo que pone de relieve la capacidad de estudiantes de edades tempranas para responder satisfactoriamente a una tarea de funciones (p. ej., Cañadas *et al.*, 2016; Morales *et al.*, 2018; Pinto y Cañadas, 2018; Torres *et al.*, 2021).

Con respecto a la trayectoria de estrategias utilizadas por los cuatro estudiantes durante la tarea, se observó que todos ellos hicieron cambios en sus estrategias iniciales (tabla 4). Se destaca que A4 a pesar que comenzó la tarea con una estrategia no funcional (patrón recursivo), posteriormente logró emplear estrategias centradas en la relación funcional de covariación y correspondencia. A su vez, los estudiantes A2, A3 y A4 iniciaron la tarea con la estrategia funcional de covariación e hicieron el cambio a una estrategia de correspondencia directa. Esta situación se podría explicar porque, en las primeras preguntas, al estar compuestas por casos consecutivos, pudieron incidir las expresiones “los días aumentan en uno por tanto los círculos aumentan en uno también” (covariación) o “sumar

uno" (patrón recursivo). En las preguntas de casos particulares no consecutivos y grandes (de la pregunta 5 en adelante) los cuatro estudiantes cambiaron a la estrategia de correspondencia directa. El resultado anterior es relevante porque, por un lado, la forma en que se presentaron las preguntas de la tarea supone en los estudiantes un cambio de estrategia importante para abordarla. Por otro lado, una tarea de pensamiento funcional puede ser abordada desde diferentes estrategias funcionales como la covariación y correspondencia. Resultados similares a los anteriores se encuentran en Morales *et al.* (2018), cuando estudiantes de Educación Primaria abordan una tarea de pensamiento funcional desde la correspondencia y la covariación. En cuanto a la generalización, se observó que los estudiantes lo hicieron a través de las estrategias funcionales de covariación y correspondencia inversa. Este resultado resulta interesante porque los antecedentes de investigación sugieren que en una tarea de pensamiento funcional la estrategia más factible a ser generalizada es la correspondencia en lugar de la covariación (Morales *et al.*, 2018; Pinto y Cañada, 2018). Por su parte, hubo estudiantes (A2 y A3, tabla 3) que generalizaron la relación de covariación de manera espontánea, misma modalidad que se observa en el trabajo de Pinto y Cañada (2018), pero con la relación de correspondencia. Esto sugiere que puede haber estudiantes de estas edades que pueden llegar a la generalización de una relación funcional sin la necesidad de inducir dicho proceso. Si bien, hubo estudiantes (A2 y A4) que particularizaron en lugar de generalizar la relación funcional implicada en la tarea, creemos que ellos podrían hacerlo con un poco más de orientación por parte de la entrevistadora, dado que descubrieron la regularidad de sumar uno a la cantidad de la variable independiente, aunque solo en casos particulares. Lo anterior, sugiere que la generalización tal cual se propone no es una tarea fácil para algunos estudiantes y que requiere trabajo importante desde la instrucción.

Una línea de continuidad que permitiría describir el proceso de generalización de estudiantes de estas edades, sería profundizar en la forma en que logran pasar de la generalización aritmética a la generalización algebraica. En términos de Torres *et al.* (2023), lo anterior ocurre porque la forma de generalizar algebraica dio cuenta de la generalización aritmética realizada. Sería interesante generar instancias para que los estudiantes pasen de expresar "sumando uno" a la expresión "siempre se debe sumar uno".

Los resultados de este trabajo coinciden con los planteamientos de Blanton y Kaput (2005) quienes defienden que la evidencia de la capacidad de los estudiantes respecto al pensamiento funcional, puede responder a las preguntas sobre cómo el pensamiento funcional podría incorporarse en el programa de

estudio de matemática? y ¿cuáles serían las estrategias más adecuadas para tal fin en los primeros niveles educativos? Sin embargo, estas interrogantes suponen un desafío importante tanto para la continuación de la investigación en pensamiento funcional, como para la enseñanza del álgebra escolar.

De acuerdo con los resultados de esta investigación, se considera que actividades que promueven el pensamiento algebraico en edades tempranas, pueden ser un recurso que guíe a los profesores de Educación Primaria para favorecer este tipo de pensamiento en sus estudiantes. Por ejemplo, el profesor podría abordar situaciones centradas en las relaciones entre cantidades usando el razonamiento inductivo (Cañadas y Castro, 2007), como una forma de lograr la generalización a partir de casos particulares. Al considerar tareas de este tipo, se podrían ampliar aquellos enfoques con los cuales se acostumbra a promover el pensamiento algebraico en Educación Primaria, dado que, por lo general a nivel curricular, la enseñanza del álgebra está centrada solo en el estudio de patrones, ecuaciones e inecuaciones, relegando el trabajo sobre la generalización de relaciones funcionales a niveles educativos más avanzados (Morales y Parra, 2022).

Esta investigación busca contribuir a la caracterización del pensamiento funcional en edades tempranas a partir de la categorización de las estrategias que se evidenciaron en las producciones de los estudiantes. De esta manera, se aporta al cuerpo de conocimiento existente sobre el pensamiento funcional con el interés de que en un futuro próximo tenga una implicación curricular y sea un contenido protagonista en la promoción del álgebra escolar.

Finalmente, si bien se realizó un análisis detallado de las producciones de cuatro estudiantes, en futuras investigaciones se podría ampliar la cantidad de estudiantes para confirmar y profundizar en los resultados de este trabajo, considerando estudios cuantitativos y muestras probabilísticas. También, se podría abordar la tarea aquí presentada en una situación real de clases para indagar sobre las producciones de los estudiantes en contextos educativos habituales y el papel del profesor al orientar el proceso de generalización. Por otro lado, sería provechoso abordar estudios sobre el conocimiento didáctico-matemático en pensamiento funcional de profesores de Educación Primaria en formación y en activo, como una forma de detectar competencias para la promoción del álgebra escolar en niveles escolares tempranos.

REFERENCIAS

- Azcárate, C., y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Síntesis.
- Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.
- Blanton, M.L., Brizuela, B.M., Gardiner, A., Sawrey, K., y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-years-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511-558. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.5.0511>
- Blanton, M., y Kaput, J. (2005). *Helping elementary teachers build mathematical generality into curriculum and instruction*. *ZDM*, 37(1), 34-42.
- Blanton, M., Levi, L., Crites, T., y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Brizuela, B.M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A.M., y Gardiner, A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, 17, 1-30. <https://doi.org/10.1080/10986065.2015.981939>
- Cañadas, M.C., y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). SEIEM.
- Cañadas, M.C., y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J.L. Lupiáñez, J.F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *La noción de estructura en early algebra 139 Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.
- Cañadas, M. C., Brizuela, B., y Blanton, M (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematics Behavior*, 41, 87-103.
- Cañadas, M.C., Molina, M., y del Río, A. (2018). Meanings given to algebraic symbolism in problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 98, 19-37.
- Cañadas, M.C., y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje*, 34(4), 409-425.
- Cañadas, M.C., y Castro, E. (2007). A proposal of categorization for analyzing inductive reasoning, *PNA*, 1(2), 67-78.
- Castro, E., y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización [Representations and modeling]. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Horsori.

- Confrey, J., y Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations, En R.G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 57-63). Conference Committee.
- Fernández, S.P. (2002). Investigación cuantitativa y cualitativa. *Cuadernos de atención primaria*, 9(2), 76-78.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación*. McGraw-Hill.
- Kaput, J.J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kaput, J.J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J.J. Kaput, D.W. Carraher y M.L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). Routledge.
- Kaput, J.J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-62). Information Age Publishing.
- Lins, R., y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference: The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 47-70). Kluwer.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_5
- Mason, J. (1999). La incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: las secuencias de Tunja. *Revista EMA*, 4(3), 232-246.
- Medrano, A., Xolocotzin, U., y Flores-Macias, R. (2022). Un análisis de la producción de representaciones al solucionar problemas de álgebra temprana en estudiantes de primaria. *Educación Matemática*, 34(3), 10-41.
- Merino, E., Cañadas, M.C., y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. En A. Berciano, A. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). SEIEM.
- MINEDUC (2012). *Bases curriculares de matemática educación básica*. Unidad de Currículum y Evaluación.

- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *Gaceta de la RSME*, 17(3), 559-579.
- Monje, C.A. (2011). *Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa: Guía didáctica*. Universidad Surcolombiana, Facultad de Ciencias Sociales y Humanas.
- Morales, R., y Parra, J. (2022). Strategies employing prospective Primary Education teachers in a functional relationship task. *Acta Scientiae*, 24(3), 32-62. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6959>
- Morales, R., Cañadas, M.C., Brizuela, B.M., y Gómez, P. (2016). Relaciones funcionales identificadas por estudiantes de primero de educación primaria y estrategias de resolución de problemas que involucran funciones lineales. En J.A. Macías, A. Jiménez, J.L. González, M.T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F.J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 365-375). SEIEM.
- Morales, R., Cañadas, M.C., Brizuela, B.M., y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(3), 59-78. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2472>
- Morales, R., Pizarro, F., Díaz-Levicoy, D., y García-García, J.I. (2023). Strategies and representations used by early childhood education students in a functional thinking task: A case study. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 19(12), em2363.
- Pinto, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M., y Cañadas, M. C. (2023). Desarrollo del pensamiento algebraico a través de la justificación en educación primaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 41(1), 149-173. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5835>
- Pinto, E., Brizuela, B.M., y Cañadas, M.C. (2019). Representational variation among elementary school students: A study within a functional approach to Early algebra. En U.T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, y M. Veldhuis (Eds.), *The Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Freudenthal Group and Freudenthal Institute, Utrecht University y ERME.
- Pinto, E., y Cañadas, M. C. (2018). Generalization in fifth graders within a functional approach. *PNA*, 12(3), 173-184. <https://doi.org/10.30827/pna.v12i3.6643>
- Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.

- Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J.J. Kaput, D.W. Carraher, y M.L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Lawrence Erlbaum Associates.
- Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de las investigaciones. *Números*, 77, 5-34.
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Morata.
- Stephens, A., Isler, I., Marum, T., Blanton, M., Knuth, E., y Gardiner, A. (2012). From recursive pattern to correspondence rule: Developing students' abilities to engage in functional thinking, en L. R. Van Zoest, J. J. Lo y J. L. Kratky (Eds.), 34th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME.
- Tanişlı, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30(3), 206-223. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.001>
- Torres, M.D., Cañadas, M.C., y Moreno, A. (2022). Pensamiento funcional de estudiantes de 2º de primaria: estructuras y representaciones. *PNA*, 16(3), 215-236. <https://doi.org/10.30827/pna.v16i3.23637>
- Torres, M.D., Cañadas, M.C., Moreno, A., y Gómez, P. (2021). Estructuras en las formas directa e inversa de una función por estudiantes de 7-8 años. *Uniciencia*, 35(2), 237-252. <https://dx.doi.org/10.15359/ru.35-2.16>
- Torres, M.D., Moreno, A., Vergel, R., y Cañadas, M.C. (2023). The evolution from "I think it plus three" Towards "I think it is always plus three." Transition from arithmetic generalization to algebraic generalization. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 22, 971-991. <https://doi.org/10.1007/s10763-023-10414-6>
- Ureña, J., Ramirez, R., y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer 's mediation. *Infancia Aprendizaje*, 42(3), 1-21. <https://doi.org/10.1080/02103702>
- Warren, E., y Cooper, T.J. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 11(1), 9-14.

Autor de correspondencia

RODOLFO MORALES

Dirección: Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad Católica del Maule,
Avda. San Miguel 3605, Talca, Chile
rmoralesm@ucm.cl

Reflexiones para la planificación de la enseñanza de la geometría escolar: Un estudio de caso

Reflections for planning the teaching of school geometry:
A case study

Teresita Eugenia Méndez-Olave,¹ Claudia Estrella Valenzuela-Gaete,²
Isabel Margarita Vargas Calvert,³ Eduardo Israel Piña Flores⁴

Resumen: En las últimas décadas, la planificación de la enseñanza desafía a los profesores a poner en juego saberes disciplinarios, pedagógicos y didácticos adquiridos durante su formación y en su práctica docente. En este artículo se reportan resultados de una indagación, realizada en el marco de un acompañamiento docente que tuvo como objetivo colaborar con profesores de matemática de un liceo municipal, a reflexionar sobre la planificación de la enseñanza de la geometría. La metodología es cualitativa y corresponde a un estudio de caso. Se recoge información a partir de la planificación escrita por cada profesor y mediante una entrevista semiestructurada. Los resultados observados evidencian concepciones tradicionales de enseñanza de la geometría y débiles previsiones sobre las posibles respuestas de los alumnos ante lo planificado. Además, los profesores involucrados presentan una frágil cultura para reflexionar durante la planificación de la enseñanza, poniendo en evidencia

Fecha de recepción: 29 de junio de 2024. **Fecha de aceptación:** 30 de enero de 2025.

¹ Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, teresita.mendez@umce.cl, <https://orcid.org/0000-0001-9539-4134>

² Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, claudia.valenzuela@umce.cl, <https://orcid.org/0000-0002-2481-0062>

³ Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, isabel.vargas@umce.cl, <https://orcid.org/0000-0001-8831-9857>

⁴ Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, eduardo.pina@umce.cl, <https://orcid.org/0000-0002-4493-277X>

la inconsistencia entre las concepciones sobre la enseñanza de la geometría de los profesores y el enfoque constructivista del currículo escolar.

Palabras clave: *Reflexión, Planificación de la Enseñanza, Medio, Estructuración del Medio.*

Abstract: In recent decades, school teaching planning challenges teachers to put into play disciplinary, pedagogical and didactic knowledge acquired during their training and in their teaching practice. This article reports the results of an investigation carried out within the framework of a teaching accompaniment that aimed to collaborate with mathematics teachers from a municipal high school to reflect on the planning of the teaching of geometry. The Methodology is qualitative and corresponds to a case study. Information is collected from the written planning by each teacher and through a semi-structured interview. The observed results show traditional conceptions of geometry teaching and weak predictions about the possible responses of students to what is planned. Furthermore, the teachers involved have a weak culture to reflect during teaching planning, which would lead to managing the class in a traditional way, highlighting the inconsistency between the teachers' conceptions of teaching school geometry and the constructivist approach of the school curriculum.

Keywords: *Reflection, Teaching Planning, Milieu, Structuration du Milieu.*

INTRODUCCIÓN

Las primeras ideas acerca de la importancia de generar procesos reflexivos sobre la práctica de los profesores, y así evitar caer en improvisaciones y rutinas tradicionales, surgen de los trabajos de Schön (1983, 1987), Dewey (1989), Elliot (2005); Hart, Alston y Murata (2011), entre otros (citado en Seckel y Font, 2020).

Schön destaca que el pensamiento reflexivo se presenta en dos momentos: reflexión en la acción y reflexión sobre la acción (Ortiz, 2021, p. 44).

Para Dewey, el pensamiento reflexivo tiene cinco fases que describen un itinerario desde una idea heurística de lo que hay que hacer hasta la fase de comprobación de hipótesis levantadas en el transcurso de la reflexión. Las fases

son: Sugerencia, Intellectualización, Hipótesis, Razonamiento y Conclusión (ver detalle en Ortiz, 2021, p. 44).

Elliot (2005) plantea la existencia de dos tipos muy diferentes de desarrollo reflexivo de la práctica docente, uno en el que la reflexión inicia la acción y otro en el que la acción inicia la reflexión (p. 37). Hart, Alston y Murata reportan sus experiencias con el método del estudio de clases.

Otros aportes a esta línea de investigación son los de Perrenoud (2011), quien plantea, al igual que Schön (1983), que la práctica reflexiva es un elemento clave de la profesionalización, por tanto, debe desarrollarse desde la formación inicial del profesorado, considerando un método para la reflexión y un marco conceptual específico de la disciplina que se enseña. Él plantea que una gran capacidad de reflexionar en la acción y sobre la acción, implica desarrollar autonomía y responsabilidad profesional.

La investigación de Parada y Pluvínage (2014), focalizada en ayudar a profesores de educación básica a reflexionar sobre la actividad matemática que promueven en sus estudiantes, mostró el impacto que las reflexiones realizadas tuvieron en los esquemas de enseñanza de los profesores. Además, reconocieron que las actividades planeadas pueden transformarse por las interacciones que se dan en la clase y que sus esquemas pueden flexibilizarse para atender de la mejor manera las situaciones de aprendizaje.

Breda, Font y Pino-Fan (2018), dan cuenta de otras investigaciones (Giménez *et al.*, 2013; Pochulu *et al.*, 2016; Seckel, 2016) que señalan que la reflexión de los formadores de profesores, profesores y futuros profesores sobre su propia práctica se ha potenciado al utilizar como marco de referencia los criterios de idoneidad didáctica, y su desglose en componentes e indicadores, propuesto en el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS).

Hummes *et al.* (2019), indagaron en el desarrollo de la reflexión sobre la práctica en la formación de profesores de matemáticas, combinando el uso del Estudio de Clases y los Criterios de Idoneidad, esta última como herramienta metodológica para organizar la reflexión del profesor. Los resultados muestran que los Criterios de Idoneidad están presentes en la reflexión realizada por los participantes en el Estudio de Clase, aunque estos criterios aún no se les han enseñado.

Espinoza y Ríos (2017), se propusieron favorecer el análisis de la práctica de profesores en formación de octavo semestre, vinculando el uso del diario de campo con la reflexión sobre la práctica. Luego de elaborar criterios unificados para la elaboración de un diario que facilite la reflexión sobre la práctica, la implementación de la propuesta de intervención les permitió observar que la reflexión de los

estudiantes puntualizó de mejor manera aspectos relevantes de la práctica docente, analizando aspectos que los estudiantes no habían considerado.

Otra perspectiva es la de Schön (1987), citado en Espinoza y Ríos 2017, quien considera que la práctica reflexiva es un proceso crucial para perfeccionar nuestro trabajo; como ya se señaló, Schön distingue entre la reflexión para la acción y la reflexión sobre la acción (1987) y aboga por un docente que reflexione de modo permanente sobre su práctica de enseñanza con el fin de transformarla. Este investigador, describió la reflexión como “una continua interacción entre el pensamiento y la acción” (p. 281); y al “práctico reflexivo” como la persona que “reflexiona sobre las comprensiones implícitas en la propia acción, que las hace explícitas, las critica, reestructura y aplica en la acción futura” (Schön, 1983, p. 50).

Quijano y Corica (2023), analizan la entrevista realizada a un profesor de matemática de una institución de San Carlos de Bariloche, Argentina, desde la perspectiva de las nociones que aporta la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Las investigadoras se interesan en caracterizar las concepciones del profesor sobre cómo se debería estudiar geometría en el nivel secundario. Sus resultados muestran que el profesor otorga al estudio de la geometría, igual importancia que otras áreas de la matemática y permite el desarrollo de habilidades manuales vinculadas a la representación de objetos geométricos. Además, en sus reflexiones, el profesor señala la importancia de diseñar las tareas a partir de diferentes recursos y orientar la actividad de los estudiantes, sin anticipar los resultados que se espera que ellos encuentren.

Cuellar y Jiménez (2019), analizan su propia práctica. Para ello consideran la planificación de la enseñanza y la implementación de una secuencia de tareas para promover el proceso de definición, lo que requería el uso de un software de geometría dinámica y, dan cuenta de lo valioso del proceso de reflexión para sistematizar acciones en los momentos de diseño y de gestión de la clase. Además, plantean que esta sistematización les permitió tener una mirada crítica de la profesión y pudieron identificar sus falencias, aciertos, hábitos y sus propias concepciones sobre el proceso de definir una noción geométrica. Asimismo, hacen énfasis en la forma en que este proceso transformó su conocimiento profesional, dado que tomaron conciencia de las implicaciones y acciones que se ponen en juego al enseñar geometría.

A la luz de estos antecedentes, y en el marco de la ejecución del proyecto de investigación DIUMCE PMI-EXB/PNII/09/2017, presentamos un estudio exploratorio acerca de las reflexiones para la acción didáctica (Schön, 1983), que realizan dos profesores de matemática cuando planifican la enseñanza de la

geometría en dos tópicos curriculares de esta área. Para orientar nuestro trabajo, formulamos las siguientes preguntas: ¿Qué caracteriza a las reflexiones realizadas por los profesores cuando planifican la acción didáctica para la enseñanza? Y ¿sobre qué aspectos de la enseñanza de la geometría reflexionan los profesores al planificar sus clases?

MARCO TEÓRICO

A fin de sistematizar y orientar la descripción y análisis de las observaciones recogidas, nos apoyamos en la noción de Estructuración del Medio (EMD) de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Margolinas y Steinbring, 1993).

Esta teoría, la TSD, emerge en fuerte interacción con una metodología de ingeniería didáctica, desarrollo de conceptos y modelos que ayudan a conceptualizar la evolución del conocimiento matemático (formal o informal) e identificar los roles del profesor en diferentes fases de esta evolución (Mangiante-Orsola *et al.*, 2018, p. 146).

Estas ideas resuenan con el enfoque que Margolinas da a la estructura en capas definida por Brousseau (1988) para la modelización del medio didáctico, ella propone un modelo matricial organizado en fases y niveles para analizar la interacción didáctica en una clase e identificar y describir diferentes tipos de funcionamiento didáctico en la actividad del profesor y de los alumnos.

En esta teoría la noción de medio es una componente interna esencial para explicar el funcionamiento de una situación didáctica (Brousseau, 1988; Margolinas, 1995) y tiene un carácter integrador (Brousseau, 1988). Con el propósito de precisar estas características, Margolinas (1995) realiza una ampliación del modelo brousseauiano, en la que se pueden apreciar: los roles del profesor en relación al saber a enseñar y a su proyecto de clase; las posiciones del alumno en la relación didáctica y, además, pone en evidencia la interacción del profesor con medios que son propios de su ejercicio docente.

ESTRUCTURACIÓN DEL MEDIO DIDÁCTICO (EMD): EL MODELO DE MARGOLINAS

Comenzaremos recordando que, en la TSD, la situación didáctica (S) considera los sistemas profesor, alumno y medio, simbolizados como (P), (E) y (M) respectivamente.

En el modelo de la EMD, Margolinas (1995) se apoya en la situación didáctica, anotada (S0) y en el medio (M0), denominado medio de aprendizaje, además propone que a M0 lo antecedan tres medios inferiores, simbolizados por (M-3, M-2 y M-1), con los que el alumno interactúa en una fase adidáctica y lo sucedan tres medios superiores simbolizados por (M+1, M+2 y M+3) con los que el profesor interactúa en una instancia de reflexión para la planificación de la enseñanza.

El modelo de EMD, considera tres fases de interacción: adidáctica, didáctica y sobredidáctica. Las fases adidáctica y sobredidáctica se desarrollan en tres niveles cada una.

La **fase adidáctica** corresponde a la devolución de una situación, la que requiere de las interacciones autónomas del alumno con medios que lo confrontan en los niveles -3, -2 y -1 que están en correspondencia con las posiciones que los alumnos van adquiriendo a medida que el medio de la situación evoluciona para aproximarse al aprendizaje esperado. Esta fase les permite enfrentar la situación con sus conocimientos personales, estableciendo relaciones con necesidad de comunicarlas a otros y/o de justificarlas frente a la clase. En esta fase, el profesor pone en funcionamiento el contrato didáctico y el proceso de devolución. Los medios del profesor son las preguntas y respuesta de los estudiantes en los diferentes niveles.

La **fase didáctica** describe la acción del profesor enseñando. Se trata de un nivel de institucionalización que recoge lo esencial del aprendizaje en las interacciones del alumno con sus medios y de las acciones (a veces espontáneas) que el profesor pone en juego para hacer frente a las retroacciones de su medio y también las acciones de los alumnos. Esto le permite al profesor reconocer el saber que ha surgido de estas interacciones para luego institucionalizarlo.

Margolinas (1995) ha denominado **fase sobredidáctica** a una instancia de reflexión para la planificación de la enseñanza, donde la actividad del profesor, los medios, las interacciones y el funcionamiento de las situaciones son concebidas como objeto de estudio para el didacta.

En su modelo, Margolinas (1995) pone en evidencia el orden de evolución de la situación y las posiciones simétricas de las acciones del profesor y del alumno en relación a la situación didáctica S0. Para ello elabora la siguiente matriz.

Fase sobre didáctica (Reflexión para la planificación de la enseñanza)	M ₃ : Medio de construcción	S ₃ : Situación <u>noosférica</u>		P ₃ : Profesor noosférico
	M ₂ : Medio de proyecto	S ₂ : Situación de construcción		P ₂ : Profesor constructor
	M ₁ : Medio didáctico	S ₁ : Situación de proyecto	E ₁ : Estudiante reflexivo	P ₁ : Profesor proyectando
Fase didáctica	M ₀ : Medio de aprendizaje	S ₀ : Situación didáctica	E ₀ : Estudiante	P ₀ : Profesor
Fase <u>adidáctica</u> (actividad autónoma del alumno)	M ₋₁ : Medio de referencia	S ₋₁ : Situación de aprendizaje	E ₋₁ : Estudiante aprendiendo	P ₋₁ : Profesor observando
	M ₋₂ : Medio objetivo	S ₋₂ : Situación de referencia	E ₋₂ : Estudiante actuando	
	M ₋₃ : Medio material	S ₋₃ : Situación objetiva	E ₋₃ : Estudiante objetivo	

Figura 1. Matriz del modelo de Estructuración del Medio.

Fuente: Margolinas y Steinbring, 1993

FASE ADIDÁCTICA

Esta fase, caracteriza las interacciones del alumno con el medio que evoluciona en los niveles (-3), (-2) y (-1), aproximándose a la situación didáctica en el nivel 0. La flecha azul indica el sentido ascendente de esta fase. En el nivel -3 la actividad del alumno se inicia en la situación objetiva S-3, planteada por el profesor mediante la negociación de un contrato didáctico. En la interacción entre el sujeto objetivo E-3 y el medio material M-3, se espera que los estudiantes asuman la responsabilidad de interpretar y trabajar de acuerdo a lo que señala la consigna de la situación. Se produce la “devolución de una situación adidáctica” (Brousseau, 2004).

En el nivel -2, la situación S-3 ha evolucionado a una situación de referencia S-2, que focaliza el objeto del aprendizaje. El alumno en posición E-2, actúa sobre el medio objetivo M-2, toma decisiones y pone sus conocimientos al servicio de lo solicitado en la consigna, pero no es capaz de explicitar, en

particular sus operaciones cognitivas, puesto que E-2 se encuentra en una situación de acción y actúa en función de una estrategia, a menudo, no nombrada (Brousseau y Centeno, 1991; Margolinas, 1995).

En el nivel -1, la posición del alumno es E-1. Él se encuentra frente a situaciones de formulación y de prueba que caracterizan a la situación de aprendizaje S-1, produciendo relaciones reflexivas en sus interacciones con el medio de referencia M-1.

Brousseau y Centeno (1991), plantean que, “E-1 aprende de su acción y mientras está en esta posición es responsable de su aprendizaje, lo que se materializa en las decisiones que toma, en relación al conocimiento” (p. 194). Estas decisiones no dependen de la intervención del profesor.

En la situación de aprendizaje S-1, el alumno en posición E-1 discute sus hallazgos con sus pares, reutilizando los resultados que ha obtenido en posición E-2 y también las condiciones del medio objetivo.

En este nivel el profesor en posición P-1, interactúa con su medio, compuesto por la interacción del alumno y el medio de referencia M-1. Las intervenciones que P-1 realiza en este nivel son las devoluciones. En posición E-1, el alumno focaliza acciones de E-2 (el mismo si se presenta la ocasión), por ejemplo, para comunicar informaciones sobre la acción o bien para debatir su pertinencia.

FASE DIDÁCTICA

La situación del nivel cero, S0, es la de enseñanza. S0 corresponde a la interacción del medio de aprendizaje M0, el estudiante y el profesor en posiciones E0 y P0 respectivamente. Esta situación S0 es de institucionalización y M0 es el medio de aprendizaje, que se compone de los resultados que los estudiantes y eventualmente el profesor, produjeron en los niveles anteriores. E0 consolida su aprendizaje o lo modifica y P0 institucionaliza, es decir, enseña.

FASE SOBREDIDÁCTICA

Esta fase caracteriza las interacciones del profesor con los medios para preparar la enseñanza. Esta fase se compone de los niveles, +1, +2 y +3.

El tercer nivel +3 es ideológico y se denomina noosférico, el segundo nivel +2 es el pre diseño de la enseñanza y se denomina de construcción y el primer nivel +1 es el de la preparación del escenario de la clase, en el cual P+1 precisará la situación de aprendizaje, representada por S+1.

En la planificación de la enseñanza, el profesor adopta distintas posiciones. En el nivel N+3, “el profesor interpreta el conocimiento a enseñar a partir del currículo y de su propio conocimiento matemático” (Mangiante-Orsola *et al.*, 2018, pp. 150-151). La situación noosférica S+3 corresponde a una concepción del profesor sobre cómo aprenden matemática los alumnos, al respecto: “faire des mathématiques, ce n’est pas appliquer des règles”, “les élèves doivent s’exprimer et comprendre”, (Margolinas, 1995; Margolinas y Steinbring, 1993, p. 254) y también a una relación entre el profesor y algunos agentes de la noosfera, por ejemplo el currículo escolar o un profesor didacta. En concreto, estas son relaciones del profesor con la noosfera.

El medio de construcción M+3 corresponde a los objetos de enseñanza, sus proposiciones o propiedades matemáticas que el profesor va a enseñar.

El medio M+3 del profesor ha evolucionado y ahora en el nivel +2, la situación de construcción, $S+2 = M+3$, consiste en determinar la mejor actividad para que los estudiantes encuentren significado a los saberes y a las propiedades que intenta enseñar. En posición P+2, diseña o selecciona situaciones de enseñanza y debe construir una estrategia didáctica para gestionar su clase.

Mangiante-Orsola *et al.* (2018) plantean que:

El profesor construye o elige un medio (expresado en la forma de un juego) tal que el conocimiento generado por los estudiantes para ganar sea el conocimiento que ellos deben aprender y además, el conocimiento previo de los estudiantes pueda ayudarlos a jugar el juego e interpretar la retroalimentación del medio. (p. 150)

El medio de proyecto M+2, , corresponde a los conocimientos que el profesor tiene sobre la manera de implementar su estrategia de enseñanza; también corresponde a situaciones que P+2 conoce sobre los aprendizajes que intenta lograr en sus estudiantes.

Las interacciones de P+2 con el medio M+2 llevan al profesor a identificar metas de aprendizaje que le permiten concebir o seleccionar una situación de aprendizaje.

En el nivel +1, la posición del profesor es P+1, donde define una situación de proyecto S+1 y prepara el escenario de la clase, lo que significa precisar sus metas de aprendizaje y objetivos, los medios y tiempos didácticos de cada fase, si las tiene, y el contrato didáctico. También, prevé posibles respuestas de los estudiantes, anticipándose a las dificultades que puedan encontrar, para considerar algunas acciones en el proceso de devolución (Brousseau, 2004).

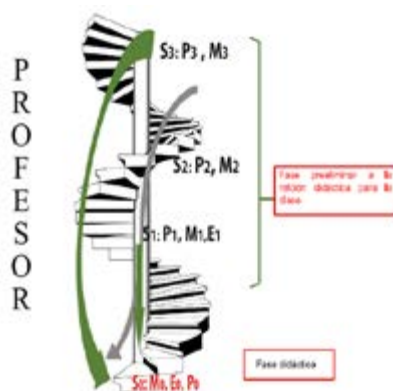
La situación S+1, de proyecto corresponde a una situación que se relaciona con los aprendizajes a lograr. Aquí $S+1 = M+2$.

En M+1 el profesor interactúa con medios para planificar la enseñanza. Estos se componen de las reacciones e interacciones de los alumnos que ha observado en clases anteriores, o bien en aquellas que considera similares (o de las que tiene conocimiento por sus pares, por investigaciones u otras fuentes).

El análisis de estas interacciones se inicia en el nivel +3 y evoluciona, considerando la flecha roja en forma descendente, en la matriz de la figura 1, hacia la situación didáctica, en el nivel 0.

ROL DEL PROFESOR PARA UNA RELACIÓN DIDÁCTICA

Anexamos el siguiente esquema para representar la actividad del profesor previa a la clase:



Fuente: Méndez (2019)

En él se indican los distintos niveles de actividad del profesor. La flecha verde curva, de la izquierda, representa la actividad de planificación de la enseñanza (la que es descendente), desde lo macro –representado por la noosfera– a lo micro caracterizado por la posición del profesor enseñando, en la fase didáctica. Con la línea gris curva se concibe que la reflexión para la enseñanza no es un proceso lineal, de hecho, el profesor puede subir y bajar por los niveles para definir la situación y la estrategia óptima al tipo de estudiante y al nivel del curso. La flecha verde, vertical, representa el pasaje de la fase sobredidáctica a la fase didáctica.

METODOLOGÍA

La metodología de investigación es cualitativa, corresponde a un estudio de caso, que propone describir la actividad del profesor en su reflexión para la planificación de la enseñanza de un objeto de la geometría y analizar las posiciones, en el modelo EMD, que este asume a partir de sus decisiones.

El caso corresponde a dos profesores de matemáticas de un liceo municipal de Santiago-Chile, quienes aceptaron una invitación para participar en un proyecto de vinculación entre la universidad y la escuela, PMI-EXB/PNII/09/2018.

El profesor, denominado P_A de ahora en adelante, es profesor de matemática, titulado en la Universidad Mayor el año 2015; al momento de participar en el proyecto tenía 7 años de experiencia y se encontraba realizando un reemplazo, asumiendo 30 horas pedagógicas semanales.

El profesor, denominado P_B, se tituló como profesor de matemática en la Universidad de Concepción el año 1988; tiene más de 30 años de experiencia profesional y al momento de participar en el proyecto tenía una carga horaria semanal de 44 horas. Además, estaba encargado de coordinar la preparación de estudiantes para participar en la Olimpiada Nacional de Matemática, que organiza la Sociedad de Matemática de Chile (SOMACHI).

Para analizar las respuestas de los profesores y determinar la posición en que se ubican al planificar la enseñanza, sintetizamos los aspectos teóricos en la tabla 1.

Tabla 1. Posiciones que adopta un profesor al planificar la enseñanza

Posición	Descripción	Ejemplos
P+3	En esta posición P+3 revisa las orientaciones emanadas del saber oficial para planificar la enseñanza; su concepción ideológica debería ser coherente con el modelo constructivista del currículo. Reflexiona sobre la complejidad de la tríada didáctica, del sistema educativo y su práctica pedagógica y didáctica.	El profesor, considera que los estudiantes deben: -Realizar una verdadera actividad matemática. -Expresar sus concepciones y resultados, comprender el significado de las nociones que aprenden. -Cuestionar las reglas con las que resuelven ejercicios y no solo aceptarlas y aplicarlas.
P+2	El profesor, reflexiona a fin de seleccionar o diseñar situaciones de enseñanza y una estrategia didáctica en coherencia con sus metas de aprendizajes, con su concepción sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática y lo que propone el currículo escolar.	El profesor analiza y evalúa si determinada actividad tiene el nivel adecuado de dificultad para sus estudiantes o si resulta lo suficientemente interesante para los fines de la enseñanza.
P+1	El profesor ha definido la situación de enseñanza, sus metas de aprendizaje, medios y tiempos didácticos. Se anticipa a las respuestas de los alumnos y a las posibles dificultades que los estudiantes puedan encontrar en el curso de la enseñanza.	El profesor prevé o se anticipa de manera activa a la forma en que los estudiantes pudieran abordar matemáticamente las tareas en las que estarán trabajando.

En este estudio, consideramos un diseño de investigación en 3 etapas; la primera fue una actividad de planificación de la enseñanza de dos objetivos de aprendizaje (O.A.), uno de séptimo y otro de octavo básico, realizada por los profesores individualmente y por escrito, durante la primera reunión de trabajo del citado proyecto PMI.

Cada profesor eligió un O.A. y dispuso de alrededor de 25 minutos, sin contar con textos de apoyo o recursos informáticos, para realizar un borrador de su planificación y posteriormente, durante 10 minutos, compartieron lo realizado, pero no hubo oportunidad de profundizar en ello.

Una vez que el equipo de investigación revisó las planificaciones, surgió la necesidad de contactar a los profesores para profundizar en sus propuestas didácticas.

La segunda etapa corresponde a una entrevista semiestructurada, grabada y transcrita, que fue realizada a cada profesor por separado y que surgió de la

necesidad de precisar de mejor manera las decisiones y reflexiones que ellos realizaron al planificar; las preguntas de la entrevista aparecerán a medida que analicemos el discurso de los profesores.

La tercera etapa corresponde al análisis de las respuestas recogidas.

ACTIVIDAD DE PLANIFICACIÓN PROPUESTA

La situación planteada es la siguiente: Usted es profesor de 7° (u 8°) básico y le corresponde planificar la enseñanza de la construcción de la bisectriz en 7° básico (o la enseñanza del vector en 8° básico). Especifique cuántas clases de 45 minutos dedicaría a este tema y realice el o los planes de clase(s) respectivos.

La construcción de la bisectriz se inscribe en el Aprendizaje Esperado: “Construir rectas perpendiculares, paralelas y bisectrices de ángulos, usando instrumentos manuales o procesadores geométricos”, programa 7° básico (2011, p. 50). El programa de curso plantea que los alumnos “Bisecan ángulos que se forman entre rectas oblicuas, utilizando regla y compás” (MINEDUC, 2011, p. 50).

El segundo objetivo de enseñanza, se inscribe en el Aprendizaje Esperado: “Caracterizar transformaciones isométricas de figuras planas y reconocerlas en diversas situaciones y contextos”, programa 8° básico (MINEDUC, 2011, p. 46). El programa de curso plantea que los alumnos enuncien características de los vectores en el plano, los reconozcan en contextos diversos y además caractericen las traslaciones en el plano.

En relación a lo anterior, el propósito de esta actividad, fue identificar las concepciones de los profesores sobre la planificación de la enseñanza, el lenguaje que utilizaron, las decisiones que tomaron, si consideraron los aprendizajes previos de los alumnos y los niveles y posiciones por los que transitaron, de acuerdo al Modelo de Estructuración del Medio.

Las decisiones de los profesores quedaron registradas en hojas de trabajo; a este material le llamaremos en lo sucesivo textualidades.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para analizar los aspectos de interés construimos dos tablas:

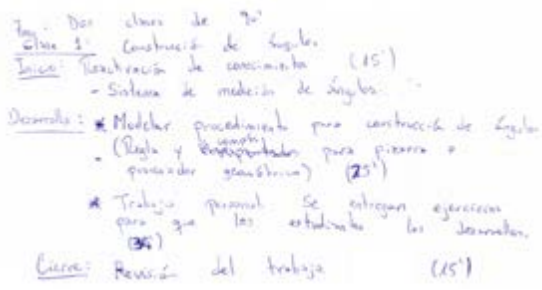
Textualidades, código de identificación del profesor	
<i>Imagen de la planificación escrita</i>	<i>Transcripción de la planificación escrita</i>
<i>Entrevista</i>	<i>Análisis didáctico</i>

En la primera fila de la tabla se identifica al profesor objeto del estudio; la segunda fila contiene la imagen de la planificación escrita y a continuación la transcripción de las textualidades, en la tercera fila en adelante, se transcribe la entrevista y se analizan las textualidades y las respuestas del profesor, considerando las nociones del modelo de Estructuración del Medio. Se han codificado las respuestas y el discurso de cada profesor como “P_A” y “P_B”; el código “I” representa las intervenciones de los/las investigadoras durante las entrevistas. Las respuestas de los profesores están numeradas con números arábigos.

ENTREVISTA AL PROFESOR A

En la actividad propuesta, el profesor P_A planificó el aprendizaje de la “Construcción de ángulos y simetrales”, con 2 clases de 90 minutos, para desarrollarlo. Para este artículo hemos considerado analizar la parte del objetivo de aprendizaje referente a la construcción de ángulos.

Tabla 2. Decisiones y reflexiones de P_A al planificar la enseñanza de la Construcción de ángulos en 7° básico

Textualidades profesor P_A	
Descripción de la imagen: La imagen contiene los momentos de la clase 1, inicio, desarrollo y cierre y el tiempo didáctico de cada uno de ellos	
 <u>Inicio:</u> Dos clases de 7° <u>Clase 1:</u> Construcción de ángulos (15') <u>Inicio:</u> Reactivación de conocimientos (15') - Sistema de medición de ángulos. <u>Desarrollo:</u> * Modelar procedimientos para construcción de ángulos. - (Regla y compás para pizarra o procesador geométrico) (25') * Trabajo personal. Se entregan ejercicios para que los estudiantes los desarrollen. (35') <u>Cierre:</u> Revisión del trabajo (15')	En el Inicio menciona dos actividades: - Activación de conocimientos y - Sistema de medida de ángulos. El tiempo didáctico es de 15 minutos.
	Para el Desarrollo plantea dos actividades: - Modelar procedimientos para la construcción de ángulos, con regla y compás para pizarra o procesador geométrico. El tiempo didáctico es de 25 minutos. - Trabajo personal. Se entregan ejercicios para que los estudiantes los desarrollen. El tiempo didáctico es de 35 minutos.
	En el cierre de la clase, la actividad consiste en revisar el trabajo de los alumnos. El tiempo didáctico es de 15 minutos.

Entrevista	Análisis didáctico
Pregunta 1. I: En la planificación, identificaste 3 momentos de la clase, con sus actividades. En el Inicio propones: reactivación de conocimientos (15 minutos) y Sistema de medida de ángulos, explícanos ¿cómo harías el inicio de esta clase? Respuesta 1. P_A: En la reactivación de conocimientos, les mostraría cómo se miden los ángulos, qué significa que un ángulo tenga cierta medida, ... En qué se basa el sistema de medición de ángulos, mostrarles qué significa una fracción de la circunferencia	La respuesta evidencia un modelo de enseñanza tradicional, lo que se manifiesta en la expresión "les mostraría ...". Esto podría significar que, en sus relaciones con la noósfera, P_A en posición P+3, requiere robustecer su comprensión sobre las tendencias actuales de la enseñanza, pues su estrategia didáctica es poco coherente con el enfoque de la propuesta constructivista de las bases curriculares. El medio M+3 corresponde al conocimiento que P_A tiene acerca de cómo medir ángulos y su significado respecto de esta medida. En posición P+2, la estrategia de enseñanza que P_A declara, es tradicional: mostrar a los alumnos "cómo se miden los ángulos y lo que significa que un ángulo tenga cierta medida", al respecto P_A no explicita la manera en que enseñará la medición de ángulos. P_A también se refiere al sistema de medida angular, como una fracción de la circunferencia, sin precisar el significado comparativo que tiene la medida ni cuál es la unidad de comparación angular. Sobre este último aspecto, hemos constatado, en los programas de estudio de educación básica, que el sistema de medida angular no forma parte de los objetos de enseñanza de 7° básico y que el grado sexagesimal aparece por primera vez en 4° básico, a raíz de la utilización del transportador para construir ángulos y compararlos. Además, el tiempo para realizar el inicio, podría exceder al tiempo didáctico programado para este momento de la clase.

Pregunta 2. I: En el desarrollo de la clase, tu planteaste, "modelar procedimientos para construir ángulos". Nos preguntamos: ¿Qué significa para ti modelar? ¿Cómo se modela ese procedimiento?

Respuesta 2. P_A: Básicamente la idea es mostrar un problema ... construir un ángulo de 35° ... con regla y compás para pizarra, o procesador geométrico, trabajando con Geogebra y data, ir mostrando cómo hacer el ángulo y medirlo. Entonces después, cómo con los elementos que voy a tener (instrumentos geométricos) puedo construir un ángulo de una medida dada.

Para P_A la situación de construcción S+2 correspondería a mostrar la construcción del ángulo de 35° y, el medio M+2 corresponde al problema "construir un ángulo de 35° con regla y compás o con software geométrico Geogebra".

La noción de modelar que P_A describe, podría corresponder a una mnemotecnia, un listado de pasos que los estudiantes deberían posteriormente reproducir en sus ejercicios personales.

Esta noción de modelar, no es coherente con lo que el currículo nacional plantea, "modelar consiste en descubrir regularidades o patrones y ser capaz de expresar esas características fluidamente, sea con sus propias palabras o con un lenguaje más formal"; además, la habilidad de modelar fomenta el desarrollo de un "tipo de pensamiento matemático, que permite generalizar inductivamente" (MINEDUC, BBCC, 2016, p. 98).

Por otra parte, nos parece que P_A no ha realizado la mejor elección, ya que para la construcción del ángulo de 35° , podría recurrir a: copiar un ángulo de 35° con regla y compás o trazarlo utilizando transportador, es decir midiendo. Por esta razón consideramos que P_A no establece la diferencia entre la construcción clásica de un ángulo y su trazado utilizando el transportador, herramienta que P_A no ha considerado explícitamente entre los instrumentos de construcción. Al respecto, Débora Ball advierte sobre la importancia de la elección de los ejemplos, al planificar la enseñanza. Para nuestro caso particular, P_A podría haber elegido un ángulo notable (30° , 45° , 60° 90°) cuya construcción se apoya en propiedades de segmentos secundarios del triángulo.

Pregunta 3. I: ¿Qué etapas tendría este procedimiento y cuánto tiempo aproximado involucraría cada una de ellas? Respuesta 3. P_A: Bueno, la primera etapa para construir un ángulo es elegir uno de los lados del ángulo, que puede ser una recta o un rayo. Elegir el vértice, que podría ser el origen del rayo u otro punto de él. Porque yo podría partir ese ángulo desde la mitad del rayo, o desde un extremo... Pregunta 4. I: ¿Y es importante la elección del vértice? Respuesta 4. P_A: Sí, es importante, ... de hecho el vértice es el centro del ángulo, lo que define el ángulo. ... y después el sistema de medición (aquí se refiere a utilizar el transportador para medir) y (para) trazar el rayo que falta.	En las respuestas 3 y 4, P_A, describe su método para construir ángulos, "elegir uno de los lados del ángulo", es decir, un rayo y determinar un punto que será "el vértice, que es el centro del ángulo, lo que define al ángulo". A continuación, P_A justifica, tácitamente la utilización del transportador para determinar un punto del plano que, al unirlo al origen del primer rayo (el vértice) determina el otro rayo de este ángulo. Este procedimiento claramente se apoya en la medida. Notar que P_A incurre en una imprecisión, que no corrige, al señalar que el vértice podría generar "... ese ángulo desde la mitad del rayo". Este hecho despierta el interés de estar alertas a las interacciones de los profesores con los objetos de enseñanza y sus propiedades, del medio de construcción M+3.
Pregunta 5. I: En la etapa de desarrollo dices: "Trabajo personal". Se entregan ejercicios para que los alumnos los desarrollen, entonces nos preguntamos ¿Qué tipo de ejercicios plantearías a los alumnos? ¿Podrías dar algunos ejemplos? Respuesta 5. P_A: Por ejemplo, una persona que quiere levantar una carpa y tiene que poner los tirantes en 45°, ese es un problema entonces entregar un esquema y que los chicos, dado ese esquema vayan eligiendo cuáles son los lados de este ángulo y cuál va a ser el vértice.	En posición P+2 de la construcción del proyecto de enseñanza, P_A plantea, una nueva situación S+2 "poner los tirantes de una carpa en 45°, es un problema", que los alumnos, de 12 y 13 años, podrían resolver. Esta situación puede provenir de una experiencia personal o escolar y se constituye en el medio M+2 del profesor, en esta planificación. Otros componentes de este medio pueden deberse a reacciones y respuestas de alumnos, que P_A ha podido observar en alguna clase anterior, donde ha utilizado como contexto, colocar los tirantes de una carpa en un ángulo de 45°. Se aprecia que P_A, en esta posición, reflexiona sobre la manera en que podría gestionar esta situación de modo que contenga un problema claro bien definido para los alumnos, con el esquema de la carpa, los elementos visuales y las tareas en las que el alumno tenga que generar una estrategia para determinar el ángulo de 45°. Sin embargo, se observa que P_A en posición P+1 no precisa las metas de aprendizaje, los medios y los tiempos didácticos, tampoco se anticipa a las posibles respuestas y dificultades que los estudiantes puedan encontrar en el curso de esta enseñanza.

	Consideramos que esta situación es más adecuada que la construcción del ángulo de 35° , dado que propone un contexto más relacionado con las experiencias de los estudiantes, en la que ellos podrían construir un ángulo de 45° utilizando diferentes estrategias propias.
Pregunta 6. I: En relación a estos ejercicios ¿Crees que estos permitirían desarrollar habilidades en los estudiantes? ¿Cuáles habilidades? Respuesta 6. P_A: Primero la habilidad de reconocer los elementos de un ángulo en un esquema. Segundo, la comprensión lectora que en el fondo es súper importante y lo veo con los alumnos que tengo ahora, que yo les doy un problema y ellos lo único que están buscando es donde está el número para poder sumarlo, restarlo, multiplicarlo o dividirlo, y no tienen la comprensión para decir: "significa esto, entonces va a ir acá". Es un problema que creo que es transversal en matemática, que los niños no se detienen a leer los problemas.	P_A integra algunos de los procesos de la taxonomía de Bloom – Anderson, reconocer y comprender, anticipándose a las dificultades que los alumnos podrían presentar ante la resolución de problemas de la clase de matemática. También enfatiza la actitud mecanicista de los alumnos frente a los datos que plantea un problema, mencionando que los alumnos no analizan la forma en la que se relacionan los datos y, de manera arbitraria, los operan obteniendo resultados que muchas veces no tienen sentido.
Pregunta 7. I: ¿Qué recursos didácticos utilizarías para las actividades que has propuesto? Respuesta 7. P_A: Usaría regla y compás e idealmente una hoja previamente impresa donde salgan las instrucciones y que tenga el espacio para hacerlo, sería lo ideal y, además, usaría hojas blancas, porque la cuadrícula va a ser un elemento distractor en el que los alumnos se pueden apoyar para hacerlo de una forma, que en el fondo no es la indicada. Por ejemplo, si yo les pido un ángulo de 45°, a lo mejor el alumno va a decir: "ah, pero si voy de vértice a vértice (en una cuadrícula) hago 45° y no es el objetivo".	P_A prevé recursos didácticos, la regla y el compás, lo que consideramos contradictorio pues anteriormente la construcción se había apoyado en el uso del transportador y, tanto la regla como el compás no serían útiles para resolver el caso práctico de la carpa. También reflexiona sobre la conveniencia de desarrollar la construcción en hoja blanca, respuesta 7, "... pues la hoja cuadrícula podría invisibilizar las propiedades previstas para el aprendizaje esperado". Estas anticipaciones forman parte del medio M+1 de P_A, en su planificación de la enseñanza.

Pregunta 8. I: ¿Qué información obtienes de los procedimientos que realizan los alumnos, al construir ángulos y de la forma en que los miden?

Respuesta 8. P_A: (Me daría información) Sobre los errores que cometieron, para ver cómo puedo evitar que los vuelvan a cometer. Y sobre mi misma práctica, a lo mejor en qué cosas no puse suficiente énfasis, tal vez asumí que todos los niños sabían que los ángulos se medían a contrarreloj y quizá no era tan obvio para un niño de 11 o 12 años. Ese tipo de cosas, cuando tenga que volver a ver el tema de ángulos decir: “acuérdense que el ángulo se mide contrarreloj” ... pasa que muchas veces el razonamiento del alumno puede estar correcto, por ejemplo, al medir un ángulo en sentido horario, podría estar técnicamente bueno, pero tengo que explicarle que existen convenciones, que el ángulo se mide en sentido anti horario y... entonces valorar lo que el alumno hizo, valorar que por ejemplo pudo haber entendido el concepto de que 35° significa $35/360$ de la circunferencia y, sin embargo, explicar que hay una convención ... que igual eso es súper importante.

P_A identifica errores que los alumnos cometen, párrafo 8, reconociendo y reflexionando que sus decisiones didácticas podrían estar influenciadas por supuestos que generarían dificultades y obstáculos para que los alumnos alcancen los aprendizajes previstos. P_A se encuentra en posición P+1, ya que prevé dificultades y reflexiona acerca de su práctica de la enseñanza.

El medio M+1 de P_A se compone de supuestos, “asumí que todos los niños sabían que los ángulos se medían a contrarreloj y ... no era tan obvio para un niño de 11 o 12 años”, sobre los cuales reflexiona, para mejorar su práctica.

En posición P+3, P_A reflexiona sobre su práctica, “los énfasis que hay que dar a las actividades, a los objetos del aprendizaje”, párrafo 8, evalúa su desempeño, “...asumí que todos los niños sabían que los ángulos se medían a contra reloj ... lo que no era tan obvio” y propone mejoras, “... cuando tenga que volver a ver el tema de ángulos les voy a decir que...”. En esta misma posición P_A plantea la importancia de las convenciones matemáticas, como una característica del rigor de la matemática escolar.

Síntesis de la entrevista a P_A

En el nivel +3, P_A describe su planificación considerando los momentos de la clase: inicio y desarrollo, en coherencia con aspectos formales del currículo. A partir de sus respuestas, se advierte que en ambos momentos, P_A tiene una concepción tradicional de la enseñanza, lo que podría significar que sus relaciones con la noosfera no han sido suficientes para modificar en la práctica su convicción de que el aprendizaje se logra por un mecanismo de comunicación propia de la enseñanza tradicional; así, para P_A la situación S+3 es lo que se va a comunicar y las componentes del medio M+3 son: el emisor (profesor), el mensaje y el receptor (el alumno).

En el nivel +2, P_A describe situaciones S+2, provistas de instrucciones, cuyos medios no son antagonísticos y es el mismo profesor quien realizaría la construcción de ángulos con base en un listado de pasos. De acuerdo a lo planteado por

Ratsimba-Rajohn (1977), esta construcción consistiría en instrucciones ostensivas, “el enseñante da todos los elementos y relaciones constitutivos de la noción visualizada” y además precisa: “la relación del sujeto y del objeto nuevo está instituida solamente a nivel de representación del objeto presuponiéndola independiente del sujeto” (Martínez y Porras, 1998). Además, son actividades incompletas que P_A ha generado, en el marco de un ejercicio de planificación.

En el nivel +1, P_A prevé comportamientos generales de acción de los alumnos, pero en el análisis didáctico de su planificación no se observa que se anticipe a las dificultades que los estudiantes puedan encontrar al reproducir la construcción de los ángulos de la situación planteada. En este sentido, la preparación del escenario de la clase no considera la previsión de las interacciones de los estudiantes.

Al final de la entrevista P_A reflexiona, criticando su propia acción (Perrenoud, 2011), y analizándola en relación a algunas decisiones en su práctica de enseñanza que estuvieron influenciadas por sus suposiciones, las cuales produjeron obstáculos y dificultades en el aprendizaje de sus estudiantes; P_A proyecta su acción pedagógica futura señalando que considerará estas reflexiones cuando tenga que enseñar nuevamente este mismo tema.

ENTREVISTA AL PROFESOR B

El profesor P_B consideró como objetivo de aprendizaje: caracterizar vectores en el plano, reconocerlos en contextos diversos y caracterizar sus traslaciones en el plano; para este artículo se analiza la parte del objetivo “caracterizar vectores en el plano”. El profesor P_B señala que planificaría 3 clases de 45 minutos para que los alumnos “Enuncien características de los vectores en el plano”.

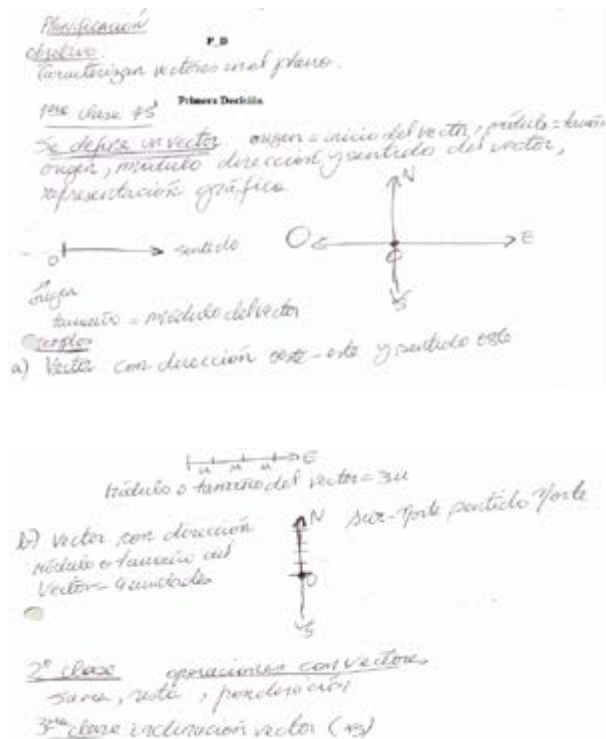
Las decisiones y reflexiones se han consignado en la tabla 3.

Tabla 3. Decisiones y reflexiones de P_B al planificar la enseñanza del vector

Textualidades, profesor P_B

Descripción de la imagen:

El borrador de planificación contiene; el objetivo de la clase, su desarrollo y el tiempo didáctico.

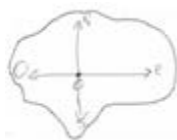


P_B plantea el objetivo "Caracterizar vectores en el plano".

En el desarrollo de la clase se aprecia que P_B pretende dar la definición de vector, pero solo escribe los elementos que lo caracterizan, describiendo verbalmente el módulo y el origen, y gráficamente el sentido y la dirección, para luego mostrar 2 ejemplos, a) y b), en los que se destaca la representación gráfica de los elementos de un vector.

Además, se aprecia que pretende planificar otras 2 clases; la primera, sobre operaciones con vectores y la segunda, acerca de la inclinación de un vector.

Entrevista	Análisis didáctico.
Pregunta 1. I: ¿Por qué elegiste ese orden al momento de planificar estas clases? Respuesta 1. P_B: Me parece más lógico partir definiendo lo que es un vector y luego indicar los elementos dirección y sentido. Por ejemplo, orientación geográfica para profundizar en el sentido derecha-Este, izquierda-Oeste. La dirección vertical es un sentido arriba-Norte, abajo-Sur.	P_B plantea una postura tradicional frente a la enseñanza del vector, pues para él, "lo lógico es definir vector e indicar sus elementos" sin que los alumnos construyan la noción, a partir de una situación que contenga elementos suficientes para que los alumnos descubran o redescubran al vector y sus elementos. Esto muestra que, en su relación con la noosfera, en posición P+3, su práctica ha sido débilmente influenciada por el modelo constructivista, que las actuales tendencias de la enseñanza de la matemática y las orientaciones curriculares promueven. El medio M+3 corresponde al orden que P_B establece al planificar su enseñanza: definir el concepto y luego identificar sus elementos, lo que también corresponde a una estrategia tradicional de enseñanza.
Pregunta 2. I: ¿Cuál sería la definición de vector que le darías a los alumnos? Respuesta 2. P_B: Parto definiendo, en lenguaje coloquial, un vector como una flecha o una recta o un rayo. En lenguaje coloquial es una flecha después en lenguaje matemático es un rayo, un segmento orientado donde el origen es la partida y el punto final donde está la flecha es el término del vector y le da el sentido al vector ..., y el tamaño lo defino después.	Su concepción de vector corresponde a una representación geométrica, se aprecia ausencia de otras representaciones, por ejemplo como par ordenado y de tipo algebraico, que necesitará para el estudio de las traslaciones.



Pregunta 3. I: ¿Este dibujo qué representa en tu planificación?

Respuesta 3. P_B: Dibujo eso para explicar los elementos del vector, el origen, la dirección horizontal... con un sentido hacia la derecha que sería el Este y a la izquierda el Oeste. ... o sea aplicando un poco la lógica que deben tener los alumnos en ese sentido.

Párrafo 1. También utilizo situaciones prácticas, reales como la rosa de los vientos, ya que lo que estamos definiendo está en la vida real. Lo que me gusta usar mucho con los niños son cosas que aparecen en televisión.

Párrafo 2. El vector de la influenza, la propagación de la influenza mediante un vector ...una persona que se contagió es normal que lo propague ... tiene una aplicación en lo real...

Párrafo 3. Otra aplicación con lo real son los viajes de los alumnos de la casa al colegio,... por ejemplo, un alumno viaja en metro desde La Cisterna hasta Los Héroes y, desde ahí, hasta República.

La textualidad "Yo dibujo eso para explicar los elementos de un vector: origen, dirección y sentido ...", da cuenta de parte de su estrategia de enseñanza, la que es tradicional.

Análisis párrafo 1: En posición P+2, P_B considera algunas aplicaciones a las que llama reales, las que permitirían al profesor ejemplificar y a los estudiantes, supuestamente, reconocer en la vida cotidiana, la noción de vector (párrafos 1 y 2). En esta posición, el o los medios M+2 corresponden a los ejemplos y representaciones que tiene pensado formular.

Con relación al contexto de vector que P_B considera de los medios de comunicación, advertimos que el significado que se da al término vector, podría ser diferente del significado escolar que se pretende que los estudiantes adquieran en este nivel.

Análisis párrafo 2: Así, el vector de propagación de la influenza es la persona que contagia, pero en la matemática escolar el vector es un ente geométrico-algebraico que permite explicar la traslación o el desplazamiento de una figura en el plano. Entonces estos diferentes significados, cotidianos de vector, en vez de ayudar a la comprensión, podrían dificultarla, generando, tal vez, un obstáculo didáctico. Por otra parte, los elementos del medio M+2: el dibujo geométrico de vector y sus elementos, no se aprecian lo suficientemente articulados para diseñar una situación de enseñanza S+1, que ayude a los alumnos a construir la noción de vector y, por lo tanto, P_B no puede prever cómo los alumnos podrían identificar el origen, la dirección y el sentido del vector desplazamiento, sin que exista una intervención ostensiva de su parte.

Análisis párrafo 3: P_B propone una situación de contexto realista, en la que los alumnos podrían construir un bosquejo o ruta que describa el desplazamiento por la ciudad, involucrando los elementos del vector, mas, el profesor no aprovecha esta oportunidad para que los alumnos se puedan aproximar a caracterizar al vector como un ente que desplaza o traslada objetos y reconocer sus características.

Pregunta 4. I: ¿Qué relevancia, para la enseñanza, le asigna a la representación gráfica del vector? Y ¿por qué?

Respuesta 4. P_B: Lo encuentro súper importante, porque lo gráfico me permite concretar situaciones un tanto abstractas, ... y además, ver cómo se da en la vida real, ... por ejemplo, en Chile, con el cuidado de la frontera ... no permite que ingrese el vector que propaga la enfermedad de la mosca de la fruta.

P_B describe la importancia que le atribuye a la representación gráfica, pero no reflexiona en específico sobre la manera en que los estudiantes reaccionarán ante estas representaciones. Tampoco reflexiona sobre la facilidad, dificultad o confusión que han tenido los estudiantes cuando P_B las ha utilizado en lecciones pasadas. Notar, que el ejemplo presentado, no concuerda con la noción matemática, pues el llamado vector de propagación (la mosca de la fruta) no se comporta como un vector con dirección, sentido y magnitud.

Pregunta 5. I: ¿Esos ejemplos, se los das a los estudiantes?

Respuesta 5. P_B: Claro, como conversación o sea inclusive trato de llevarlo al aspecto histórico. Es como un cuento.

En posición P+2, P_B se proyecta enseñando y, en la gestión de su práctica, los ejemplos verbales de contexto se presentan como anécdotas, que P_B utilizaría para mostrar la aplicación de este concepto, mas no corresponden a un medio M+2 para el diseño de situaciones que involucren al alumno(a) a tomar conciencia que su desplazamiento por la ciudad puede ser descrito a través de los elementos de un vector, como lo planteado en el párrafo 6.

Pregunta 6. I: ¿De qué manera las actividades que tú planificaste se relacionan con lo propuesto en las bases curriculares y en los programas de estudio?

Respuesta 6. P_B: Está relacionado como concepto, ... y que uno lo profundiza más interdisciplinariamente, yo diría como ubicando el currículum dentro de los valores transversales, porque estamos viendo cuestiones valóricas también, como en el caso de la influenza, viendo valores transversales, ... asociándolos un poco en forma constructivista en el ámbito de aplicación y a la idea de que la matemática la estamos redescubriendo, asociando conceptos, modelos que están, ya que son de la vida real.

En posición P+3, P_A concibe la planificación de la enseñanza desde el contenido y desde lo valórico, como lo señalan las orientaciones curriculares actuales y, en esta misma posición, declara un posicionamiento epistémico "constructivista" porque relaciona distintas aplicaciones y anécdotas al concepto de vector. Sin embargo, la construcción de conocimiento tiene distintas vertientes, entre ellas, la psicología genética de Piaget, la plantea como "... una organización constante de lo que conocemos, una asimilación o una interpretación y una integración de los objetos a la estructura anterior del conocimiento del sujeto".

Y en el ámbito de la enseñanza, el rol del profesor es "buscar métodos apropiados para que el estudiante sea capaz de desarrollar su inteligencia construyendo los conocimientos que necesita para su formación" (Saldarriaga *et al*, 2016, p. 136).

SÍNTESIS DE LA ENTREVISTA A P_B

En el nivel +3, se advierte que P_B concibe y planifica que los estudiantes memoricen la definición de vector y sus elementos lo que permitiría interpretar que los estudiantes no tendrían necesidad de expresar lo que entienden por vector.

Con relación a las decisiones didácticas tomadas por P_B, se aprecia que no concuerdan con las situaciones S+3 que considera el modelo de EMD. Esto también da cuenta de que las interacciones que ha mantenido con la noosfera, han sido insuficientes para que considere actividades matemáticas donde los estudiantes en forma autónoma caractericen al vector, para utilizarlo en la traslación de figuras en el plano y además deduzcan los vectores de traslación, que relacionan dos figuras, como sugiere el programa de estudio.

En el nivel +2, P_B en posición P+2, describe actividades de enseñanza, pero no concreta el diseño o elección de una situación, concebida como un medio antagónico o expresada en la forma de juego didáctico. En este caso P_B interactúa con un medio, que Fregona y Orus (2011) han denominado complaciente, porque proporciona de manera implícita o explícita pistas y conocimientos que el estudiante debería encontrar en el curso de su aprendizaje. Es decir, desvirtúa el objetivo del aprendizaje. Las interacciones de P_B con este medio no corresponden a las interacciones que caracterizan al medio de proyecto M+2 del modelo de la EMD y esto implicará que P_B no logre identificar metas de aprendizaje que le permitan concebir o seleccionar una situación que brinde a los estudiantes experiencias para interactuar con un medio desafiante, en relación a la funcionalidad del vector.

En posición P+1, el profesor P_B define la situación de enseñanza, sus metas de aprendizaje, medios y tiempos didácticos pero no se observa que anticipe las posibles respuestas de los estudiantes ni las dificultades que puedan encontrar en el curso de la enseñanza.

En ausencia de la situación de proyecto S+1 y sus implicancias sobre el análisis a priori de ésta, el medio M+1 que P_B plantea, no cumple la función de ser antagónico y por lo tanto P_B no concibe a este medio como un desafío para que sus estudiantes trasladen figuras en el plano.

Cabe destacar que como investigador/as estamos conscientes de que el tiempo de planificación de ambos profesores fue limitado y esto podría haber influido en las posiciones de la fase sobredidáctica, identificadas en sus respuestas. Durante la entrevista, las preguntas que guiaron la conversación, y que surgieron a raíz de la planificación del profesor, permitieron ampliar las

decisiones didácticas tomadas por P_B, al momento de planificar, pero sin poder precisar el nivel +1 en la preparación de la enseñanza.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Según los resultados encontrados, observamos en posición P+3, los profesores presentan concepciones tradicionales sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Las cuales les hacen concebir situaciones S+3 cuyos medios no son antagónicos y los conducen a practicar un modelo de transmisión de conocimiento que dificulta el protagonismo del estudiante al desarrollar una actividad matemática.

En posición P+2 los profesores utilizan estrategias didácticas en concordancia con su convicción ideológica, desarrollando a partir de diferentes instrucciones ostensivas, la actividad que el estudiante debería resolver. Bajo estas estrategias, las situaciones propuestas por P_A y P_B, carecen de tareas que podrían desafiar a los estudiantes a producir sus propias acciones y dar significado a sus observaciones y resultados encontrados.

Uno de los profesores justifica sus acciones didácticas en relación a las características del enfoque constructivista del aprendizaje, sin embargo, su concepción sobre esta perspectiva dista de los supuestos de este enfoque, donde les plantea a los profesores no enseñar en el sentido tradicional, como se ha constatado en este estudio, sino más bien que los profesores estructuren situaciones en las que los estudiantes participen de manera activa con el contenido a través de interacciones con medios materiales - cognitivos y de la interacción entre pares y también con el profesor.

En posición P+1, se concluye que los profesores no realizan una reflexión crítica, en el sentido de Schön, de Perrenoud ni del modelo de EMD, sobre diversas componentes que deberían considerar en su planificación, un ejemplo de ello es que no se anticipan a predecir los comportamientos y acciones de los estudiantes, frente a las situaciones planificadas, ni las dificultades que ellos pudieran tener ante la complejidad de las nociones que enseñan, ni la evolución del sistema de acciones didácticas, lo que implicaría una debilidad en la reflexión para la acción.

Por lo tanto, se concluye que los profesores no pueden prever la evolución de la situación ni la de sus medios.

Con relación a las preguntas de investigación, lo que caracteriza a las reflexiones realizadas por ambos profesores son descripciones de sus acciones

didácticas, las que no incorporan algún cuestionamiento crítico sobre su propia acción, ni un análisis que considere estándares y teorías para contrastarlas con su práctica.

En definitiva, las ideas planteadas por estos profesores distan del “práctico reflexivo” que describe Schön (1983), aquel profesional que “reflexiona sobre las comprensiones implícitas en la propia acción, que las hace explícitas, las critica, reestructura y aplica en la acción futura”.

Los aspectos sobre los cuales los profesores reflexionan al planificar estas clases se centran en describir el contenido a enseñar, sin relacionarlo con las habilidades curriculares ni de pensamiento geométrico a desarrollar, lo que muestra una clara inconsistencia entre la planificación descrita por ambos con la propuesta constructivista del currículo escolar.

Esta experiencia nos brindó la oportunidad de explorar en los procesos de toma de decisión generados por los profesores, al planificar la enseñanza y valoramos todo intento de ellos por reflexionar acerca de sus acciones para la enseñanza. También nos brindó la posibilidad de programar acciones con los docentes que lograron provocar la necesidad de generar procesos de reflexión didáctica, para que tomarán conciencia de sus debilidades (matemáticas, pedagógicas y didácticas) y pudieran enriquecer su práctica, considerando los cánones de las investigaciones en educación matemática y los actuales currículos de enseñanza. También destacamos que estas acciones influyeron positivamente en la actitud reflexiva de los profesores, quienes posteriormente describieron y reflexionaron acerca de sus interacciones didácticas sobre la implementación del currículo.

Como punto final, valorar la doble perspectiva que presenta el estudio de esta problemática, la articulación entre marcos teóricos con fines comunes, el modelo de estructuración del medio (EMD) de la TSD y el enfoque de la reflexión crítica sobre la práctica pedagógica, permitieron enriquecer los análisis y reflexiones finales de los resultados recogidos.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido posible gracias al Proyecto PMI-EXB/PNII/09/2017: La reflexión didáctica, un proceso favorecedor de comunidades de aprendizaje y centro de la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría escolar de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación.

REFERENCIAS

- Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, 32(60), 255-278. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Brousseau, G. (1988). El contrato didáctico: el medio. *Recherches en Didactique des mathématiques*, 9(3), 303 – 336.
- Brousseau, G. y Centeno, J. (1991). Role de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en Didactique des mathématiques*. 11(2-3).
- Brousseau, G. (1986). La relation didactique: le milieu. *4e École d'été de didactique des mathématiques*, 54-68. IREM de Paris 7.
- Brousseau, G. (2004). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage éditiores.
- Cuellar, J. y Jiménez J. (2019). *Desarrollo del proceso de definir con geometría dinámica: una reflexión desde nuestro rol como docentes*. Trabajo de grado para optar al Magister en Docencia de la Matemática. Universidad Pedagógica Nacional. Colombia.
- Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*. Paidós Ibérica.
- Elliot, J. (2005). El cambio educativo desde la investigación-acción. Ediciones Morata, S. L. 4ª edición.
- Espinoza, R. y Ríos, S. (2017). El diario de campo como instrumento para lograr una práctica reflexiva. XIV Congreso Nacional de Investigación Educativa, San Luis Potosí.
- Fregona, D. y Orus, P. (2011). *La noción de medio en la Teoría de Situaciones Didácticas*. Zorzal.
- Giménez, J., Font, V. y Vanegas, Y. (2013). Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process. En C. Margolinas (Ed.). *Task Design in Mathematics Education* (pp. 579-588). Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 22, <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.2660.4243>

- Gobierno de Chile-MINEDUC. (2011). Programa de estudio 7º Básico, Santiago de Chile, MINEDUC.
- Gobierno de Chile-MINEDUC. (2011). Programa de estudio 8º Básico, Santiago de Chile, MINEDUC.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Hart, L., Alston, A. y Murata, A. (2011). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education*. 1. ed. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9>
- Hummes, V., Font, V. y Breda, A. (2019). Uso combinado del estudio de clases la idoneidad didáctica para el desarrollo de la reflexión sobre la propia práctica en la formación de profesores de matemáticas. *Acta Scientiae*. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss1id4968>
- Mangiante-Orsola, C., Perrin-Glorian, M. y Stromskag, H. (2018). Theory of didactical situations as a tool to understand and develop mathematics teaching practices. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, Special Issue English-French, 145-174. [ffhal-03522594f](https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9)
- Margolinas, C. y Steinbring, H. (1993). Double analyse d'un episode: cercle épistémologique et structuration du milieu. En *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud, M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavinot & N. Balacheff (Ed.) (1994) pp. 250-258.
- Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. *Les débats de didactique des mathématiques*, La pensée sauvage editions, 89-102.
- Margolinas, C. (2002). *Situations, milieux, connaissances : analiza de l'activité du professeur*. J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot y R. Floris. Actes de la 11ème École d'été de Didactique des Mathématiques, La pensée sauvage, 141-156.
- Martínez, R. y Porras, M. (1998). La presentación ostensiva de las nociones geométricas en los textos de la escuela elemental. *Educación Matemática*. 1(3), 8-24.
- Méndez, T. (2019). *Nociones Intuitivas de Probabilidad en Educación Básica: estudio Psicogenético en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas*. Tesis doctoral. Universidad de los Lagos, Chile.
- Ministerio de Educación (2016). Bases Curriculares 7º básico a 2º medio, Ministerio de Educación 2015. Unidad de Currículum y Evaluación Ministerio de Educación, Primera edición. Santiago de Chile.
- Ortiz, M. (2021). Pensamiento reflexivo en la formación práctica de los maestros. *Revista boletín REDIPE*. 10(4), 42-59. <https://doi.org/10.36260/rbrv10i4.1248>

- Parada, S. y Pluvinau, F. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(1), 83-113. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1714>.
- Perrenoud, P. (2011). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar*. Edit. Grao.
- Pochulu, M., Font, V., y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME*, 19(1), 71-98.
- Quijano, M. y Corica, A. (2023). Enseñanza de la Geometría en la escuela secundaria: reflexiones de un profesor de Matemáticas. *Góndola, enseñanza y aprendizaje de las ciencias*, 18(2), 274-287. <https://doi.org/10.14483/23464712.19660>
- Ratsimba-Rajohn, H. (1977). Etude didactique de l' 'introduction ostensive des objets mathématiques'. *Memoire de D.E.A.*, IREM de Bordeaux - Francia.
- Saldarriaga-Zambrano, P., Bravo-Cedeño, G. y Llor-Rivadeneira, M. (2016). La teoría constructivista de Jean Piaget y su significación para la pedagogía contemporánea. *Dominio de las Ciencias*, 2, 127 - 137.
- Schön, D. (1983). *The reflective practitioner*. Basic Books, Paidós.
- Schön, D. A. (1987). *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Paidós.
- Seckel, M. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática*. Tesis doctoral, Universitat de Barcelona.
- Seckel, M. Font, V. (2020). Competencia reflexiva en formadores del profesorado de matemática. *Revista internacional de Investigación en Educación*. 12(25), 127-144. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.m1225.crfp>

Autora de correspondencia:

TERESITA MÉNDEZ OLAVE

Dirección: Av. José Pedro Alessandri 774, Ñuñoa, Santiago – Chile
Código Postal: 7760197, Departamento de Matemática.
teresita.mendez@umce.cl

La construcción mental de funciones exponenciales usando multiplicación repetida

The construction of exponential functions by secondary school students using repeated multiplication

Tomás Díaz-Berrios,¹ Rafael Martínez-Planell²

Resumen: Usamos la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Eschema) para analizar cómo estudiantes que cursan estudios de escuela superior (15-16 años) pueden construir función exponencial basándose en multiplicación repetida. En un ciclo de investigación previo, se propuso un modelo de construcciones mentales que un estudiante podría hacer para entender estas funciones. En este segundo ciclo de investigación ponemos a prueba el modelo. El modelo se utilizó para diseñar materiales didácticos que fomentaran las construcciones propuestas. Los materiales se implementaron en un curso preparatorio al cálculo. Se obtuvieron datos del trabajo colaborativo de los estudiantes a lo largo del semestre y de entrevistas semiestructuradas con ocho estudiantes. Los resultados muestran que los estudiantes de este segundo ciclo de investigación lograron hacer la mayor parte de las construcciones propuestas en el modelo. Este estudio pretende contribuir a entender cómo los estudiantes pueden construir su entendimiento de las funciones exponenciales.

Palabras claves: APOE, función exponencial, descomposición genética, exponentes racionales, función.

Fecha de recepción: 8 de febrero de 2024. **Fecha de aceptación:** 27 de marzo de 2025.

¹ Escuela Superior José Rojas Cortés, Oficina Regional Educativa de Bayamón, Departamento de Educación de Puerto Rico, tomasmat301@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-5046-014X>

² Departamento de Ciencias Matemáticas, Universidad de Puerto Rico, Mayaguez, Puerto Rico, mplanell@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5512-8405>

Abstract: We use Action-Process-Object-Schema (APOS) theory to study how high school students (15-16 years old) may construct exponential functions based on repeated multiplication. In a previous research cycle, a model of mental constructions a student may use to understand these functions was proposed. In this second research cycle, we test the model. The model was used to design didactical materials that foment the proposed constructions. The materials were implemented in a precalculus course. Data was obtained from students' collaborative work throughout the semester and from semi-structured interviews with eight students. The results show that students in this second research cycle could do most of the constructions proposed in the model, thereby improving the results of the first cycle. This study contributes to understanding how students may construct exponential functions.

Keywords: *APOS theory, exponential function, genetic decomposition, rational exponents, function.*

1. INTRODUCCIÓN

Las funciones exponenciales son una familia de funciones de gran importancia en la ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas, se pueden usar para modelar cantidades cuya tasa de cambio instantáneo es proporcional a la cantidad presente en ese momento. Como esto sucede con alguna frecuencia en la naturaleza, esto convierte a estas funciones en herramientas útiles para modelar una amplia gama de fenómenos de crecimiento y decrecimiento de diversas cantidades. Sin embargo, los estudiantes muestran dificultades cuando tratan con este tipo de función (Borji *et al.*, 2023; Confrey y Smith, 1994, 1995; Díaz-Berrios y Martínez-Planell, 2022; Ellis *et al.*, 2015, 2016; Ferrari-Escolá *et al.*, 2016; Weber, 2002). Hay varias posibles razones para estas dificultades. Entre ellas, no se está prestando suficiente atención a la covariación entre la sucesión aditiva de exponentes y la sucesión multiplicativa de potencias (Confrey y Smith, 1994, 1995); no se está ayudando a que los estudiantes construyan las propiedades de exponentes como un proceso donde puedan imaginarlas y justificarlas sin depender de la memorización (Ferrari-Escolá *et al.*, 2016; Weber, 2002); contrario a lo que a veces se asume, los estudiantes inicialmente no relacionan la multiplicación repetida con la exponenciación (Díaz-Berrios y Martínez-Planell, 2022); y no se está sacando

provecho a los contextos de aplicaciones o de la vida real para introducir las funciones exponenciales (Borji *et al.*, 2023; Ellis *et al.*, 2015, 2016). En este estudio se ampliaron y mejoraron las construcciones teóricas establecidas por Weber (2002), y se adaptó el acercamiento sugerido por Ferrari-Escolá *et al.* (2016) y Díaz-Berrios y Martínez-Planell (2022). También se tuvieron en cuenta los resultados aportados por Ellis *et al.* (2015, 2016) en el diseño de los materiales.

El objetivo de este estudio es proponer y poner a prueba un modelo de construcciones mentales (descomposición genética) de cómo los estudiantes pueden llegar a entender funciones exponenciales. El modelo se pone a prueba diseñando e implementando actividades para ayudar a que los estudiantes hagan las construcciones propuestas, y luego entrevistándolos para ver el efecto de las actividades en su entendimiento de función exponencial. Se estudia las construcciones que los estudiantes pueden hacer, las que le causan dificultad, y si el modelo permite describir adecuadamente el trabajo de los estudiantes. Como resultado, el modelo se puede aceptar, refinar, o descartar.

Este estudio puede considerarse como un segundo ciclo de investigación basado en el primer ciclo de Díaz-Berrios y Martínez-Planell (2022). En ese primer ciclo, los autores mostraron que dos de 16 estudiantes participantes evidenciaron construir su entendimiento (en el sentido de construir un Proceso o un Objeto, como definido más adelante en términos de APOE) de función exponencial en los enteros, pero ninguno lo extendió a los racionales debido a que no tenían un Objeto de potencia fraccionaria unitaria, o sea, no daban sentido a la potencia $1/n$ para enteros positivos n . El trabajo de esos estudiantes, así como los retos a los que se enfrentaron permitieron proponer un modelo (descomposición genética) de construcciones mentales que un estudiante podría hacer para entender funciones exponenciales utilizando multiplicación repetida. El modelo se puso a prueba en el estudio presente. Demostramos que usando esa descomposición genética como guía y rediseñando las actividades y materiales pedagógicos, se pudo ayudar a que los ocho estudiantes participantes lograsen construir su entendimiento de función exponencial en los enteros y cuatro de ellos lo extendieran a los racionales.

2. REVISIÓN DE LITERATURA

Confrey y Smith (1995) utilizaron la operación que llaman subdivisión (“splitting”) y la perspectiva de covariación de funciones para argumentar que la yuxtaposición de secuencias aditivas y multiplicativas puede conducir a un enfoque eficaz de funciones exponenciales. Discuten la “interpolación en los mundos de contar y subdividir” [nuestra traducción] para extender funciones exponenciales de los enteros positivos a los números racionales. Sus propuestas se reflejan en varios estudios posteriores que sugirieron la construcción de función exponencial a partir del razonamiento covariacional discreto y acercándose al razonamiento covariacional continuo, a medida que el conjunto de exponentes se vuelve denso en la recta real. Nuestro estudio sigue el mismo patrón. En un estudio de este tipo, Weber (2002) observó la necesidad de ayudar a los estudiantes a pensar en la exponenciación como un proceso. Luego usó actividades para que los estudiantes pensarán en b^x como x factores de b . Afirmó que esto ayudó a los estudiantes a pensar en el proceso de exponenciación como un objeto sobre el que se podía actuar, como puede ocurrir, por ejemplo, cuando los estudiantes dan sentido o reconstruyen las reglas de los exponentes. Sin embargo, no discutió en detalle la extensión de funciones exponenciales a exponentes racionales. En este estudio hacemos esa extensión a los exponentes racionales.

Ferrari-Escolá *et al.* (2016) también se basaron en las ideas de Confrey y Smith (1995) y Weber (2002) para diseñar actividades que ayuden a los estudiantes a yuxtaponer una secuencia aditiva de entradas (exponentes: $1, 2, \dots, n, \dots$) y una secuencia multiplicativa de salidas (potencias de una base dada: $b^1, b^2, \dots, b^n, \dots$) y pensar en la exponenciación como un proceso. Ferrari-Escolá *et al.* (2016) utilizaron conjuntos de fichas de la forma $(n|y)^3$ donde n es un número entero positivo y $y = 2^n$, y donde y o n podría faltar y pidieron a los estudiantes que los ordenaran, encontrarán las fichas o partes de las fichas faltantes, así como una operación entre pares de fichas que darían como resultado otra ficha del conjunto. Inspirándose en el desarrollo histórico de los logaritmos, también sugirieron que los estudiantes pueden descubrir la operación de multiplicar (la parte superior de dos fichas cualesquiera $(n|y)$) sumando (la parte inferior de las fichas) y dividir restando, que dan sentido a las reglas de las funciones exponenciales y logarítmicas,

³ Usaremos la notación $(n|y)$ para referirnos a una ficha de la forma $\begin{array}{|c|c|} \hline n & y \\ \hline \end{array}$ donde n es un exponente entero positivo y y es una potencia que puede ser (pero no está) escrita en la forma b^n , para alguna base b . Por ejemplo, $(3|8)$ es una ficha en el juego base 2.

sin que el estudiante tenga que depender de la memoria. Sin embargo, no usaron estos materiales para extender funciones exponenciales a los números racionales, algo que hacemos en nuestro estudio.

En vez de abordar las funciones exponenciales desde el punto de vista de la covariación discreta, Ellis *et al.* (2015, 2016) utilizaron el contexto de una planta que aumenta su altura exponencialmente con el tiempo para que los estudiantes perciban el crecimiento como continuo. Basándose en la intuición de crecimiento continuo de los estudiantes, estos autores proponen una trayectoria hipotética de aprendizaje para el crecimiento exponencial y observar etapas clave en el desarrollo de la comprensión del crecimiento exponencial en términos de covariación continua. Evitan el acercamiento al crecimiento exponencial como multiplicación repetida. En nuestro estudio exploramos la coordinación de ambos puntos de vista, las fichas de Ferrari-Escolá *et al.* (2016) basadas en la multiplicación repetida y el de crecimiento continuo de Ellis *et al.* (2015).

Borji *et al.* (2023) también se basaron en las ideas de Ellis *et al.* (2015) y Kuper y Carlson (2020) y utilizaron actividades de aprendizaje con problemas del mundo real para examinar la comprensión de estudiantes universitarios (futuros maestros de matemáticas de nivel preuniversitario) de expresiones exponenciales y logarítmicas. Borji *et al.* (2023), plantearon que la mayoría de los estudiantes tienen una comprensión procedimental de conceptos exponenciales y logarítmicos y argumentaron que la enseñanza de estas funciones presta poca atención a situaciones contextuales. En su estudio, una entrevista de entrada reflejó que los estudiantes no entendían los exponentes y logaritmos aplicados a situaciones contextuales. Para mejorar la comprensión de los estudiantes diseñaron actividades que involucraban problemas contextuales acompañados de lenguaje de *n*-plicar ("*n*-tupling"). Una entrevista de salida reflejó que las actividades de aprendizaje contribuyeron a un mejor entendimiento de los estudiantes. Como ellos, nuestro estudio también usa situaciones en contexto para mejorar el entendimiento de los estudiantes. Contrario a ellos, evitamos el lenguaje de *n*-plicar para basarnos en multiplicación repetida.

En este estudio, al igual que Confrey y Smith (1994, 1995), Weber (2002), y Ferrari-Escolá *et al.* (2016), inicialmente enfatizamos la covariación discreta haciendo que los estudiantes relacionen la secuencia aritmética de exponentes con una secuencia geométrica correspondiente de potencias de una base dada. Para ello, el proyecto utilizó materiales didácticos (fichas) para definir funciones exponenciales sobre los números naturales, extender a cero y luego a los enteros negativos. Sin embargo, a diferencia de Weber (2002) y Ferrari-Escolá *et al.* (2016), también se extienden funciones exponenciales a los números racionales.

3. MARCO TEÓRICO

La teoría utilizada en esta investigación es la teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE). Para más detalles puede consultar Arnon *et al.* (2014) o Dubinsky y McDonald (2001). Elegimos la teoría APOE en este estudio ya que se utilizó en el estudio sobre el cual basamos nuestra investigación (Díaz-Berrios y Martínez-Planell, 2022). APOE se ha usado con éxito para estudiar la construcción del conocimiento en múltiples tópicos de matemáticas y a diferentes niveles (Arnon *et al.*, 2014) es una teoría cognitiva y, como tal, tiene sus limitaciones. APOE no pretende modelar otros aspectos importantes como los aspectos institucionales o afectivos de los estudiantes.

En APOE, una Acción es una transformación de un objeto matemático que se percibe como externa. Esto es en el sentido de que la Acción está relativamente aislada de otros conocimientos matemáticos del individuo, de forma tal que éste no va a poder justificar la Acción o discutirla en términos generales. Una Acción puede ser llevar a cabo un procedimiento de forma rígida siguiendo paso a paso instrucciones explícitas o memorizadas. Por ejemplo, un estudiante que ha memorizado que un número como $27^{\frac{1}{5}}$ puede escribirse como $\sqrt[5]{27}$ y de ahí puede computarlo con una calculadora, pero no sabe que éste es un número que multiplicado por sí mismo cinco veces produce el número 27, está pensando en los exponentes fraccionarios unitarios como una Acción. Un estudiante que multiplica repetidamente un número por sí mismo sin darse cuenta que el número de veces que multiplica es un exponente, está pensando en multiplicación repetida como una Acción. Un estudiante que ha memorizado para qué valores de A y de b la función $f(x) = Ab^x$ es creciente o decreciente pero que no puede justificarlo, está pensando en función exponencial como una Acción. Frecuentemente las acciones se evidencian cuando los estudiantes se basan en ejemplos y cálculos específicos y no dan muestra de poder discutir la noción de interés en términos generales.

Cuando se repite una Acción y el individuo reflexiona sobre ella, puede que sea interiorizada en un Proceso. En este caso, el individuo puede pensar en realizar el mismo tipo de Acción, pero ya sin la necesidad de estímulos externos. Un Proceso permite que el estudiante imagine la transformación matemática sin tener que llevarla a cabo explícitamente, puede omitir pasos, anticipar resultados y, por ende, generar una imagen dinámica del Proceso. Un Proceso implica que se han hecho conexiones significativas con otros conocimientos matemáticos y, como consecuencia, el estudiante puede justificarlo o discutirlo en términos

generales. Percibir una transformación como independiente de representación, es consistente con pensar en la transformación como un Proceso. Diferentes Procesos se pueden coordinar y/o revertir para formar nuevos Procesos. Algunos ejemplos de Proceso son: un estudiante con una concepción de Proceso de la exponenciación puede imaginar que la multiplicación de un número A repetidamente por un número b produce números de la forma Ab^n , puede imaginar dinámicamente que n aumenta en uno con cada multiplicación sucesiva sin necesitar hacer esto explícitamente y, podrá anticipar y justificar que Ab^n multiplicado por b^m es igual a Ab^{n+m} para cualquier enteros positivos n y m ; con un Proceso de función exponencial podrá imaginar las características de la función $f(x) = Ab^x$ sin tener que llevar a cabo cálculos explícitos; un estudiante con una concepción de Proceso de exponenciación racional podrá pensar en una potencia racional, digamos $32^{\frac{3}{5}}$, en términos de multiplicación repetida: un número que multiplicado por sí mismo 5 veces produce 32 que también se multiplica por sí mismo 3 veces, y más generalmente ser capaz de dar sentido a las potencias racionales $a^{\frac{n}{m}}$ de esta manera, no simplemente como símbolos sin sentido.

Cuando un individuo puede pensar en el Proceso como una entidad en sí misma, una totalidad, y puede realizar o imaginar realizar Acciones sobre la totalidad, entonces se dice que el Proceso ha sido encapsulado en un Objeto. Un Objeto puede ser desencapsulado en el Proceso del que proviene, según sea necesario en un problema dado. Lo importante de un Objeto es que el individuo puede realizar Acciones sobre el Objeto. Algunos ejemplos de Objeto son: un estudiante necesitaría tener una concepción de Objeto de exponenciación (que se puede desencapsular para dar sentido a las potencias individuales) y pensar en cada expresión exponencial b^x como un número, una totalidad, antes de poder hacer Acciones sobre exponenciación para construir la noción de función exponencial $f(x) = b^x$; otro ejemplo: un estudiante deberá tener una concepción de Objeto de función para construir la composición de funciones (esto envuelve la desencapsulación de dos Objetos de función f y g , y la coordinación de los Procesos resultantes (ver detalles en Arnon *et al*, 2014, p. 23-24) o antes de poder revertir un Proceso f (desencapsulado) para construir la función inversa f^{-1} .

Un Esquema para un cierto concepto matemático es una colección coherente de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas que están vinculados por algunos principios generales para formar un marco en la mente del individuo que se puede aplicar a una situación problemática que involucra ese concepto.

En este estudio no haremos uso explícito de Esquemas porque el fenómeno didáctico de interés se puede modelar con la parte APO de la teoría.

El paso de la Acción al Proceso al Objeto puede parecer una progresión donde puede haber avances y retrocesos a medida que el individuo lucha por asimilar nuevas situaciones a las estructuras mentales existentes (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) o acomodar las estructuras mentales para dar cuenta de situaciones nuevas. Lo que dice APOE es que la tendencia general del individuo cuando trabaja en diferentes problemas que involucran una noción matemática específica será diferente, dependiendo de si el individuo piensa en la noción como una Acción, un Proceso o un Objeto.

Otra idea importante en APOE es la de descomposición genética (DG). Una DG es un modelo de cómo un estudiante puede construir una noción matemática específica, expresada en términos de las estructuras (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) y mecanismos (interiorización, coordinación, inversión, encapsulación, desencapsulación, ...) de APOE. Diferentes investigadores o incluso el mismo investigador pueden proponer diferentes descomposiciones genéticas para una misma noción. La DG no pretende ser la “mejor manera” en que un estudiante puede llegar a entender una noción matemática en particular. Una DG es esencialmente una hipótesis inicial que puede cambiar dependiendo de los resultados del estudio.

La investigación en APOE generalmente comienza proponiendo una DG basada en la noción matemática en sí, su historia, la experiencia docente del investigador, y cualquier dato disponible, incluida la literatura de investigación. Se diseñan materiales didácticos para ayudar a los estudiantes a realizar las construcciones propuestas en la DG. Luego, se obtienen datos de los estudiantes. Los datos pueden sugerir construcciones mentales (en términos de las estructuras de APOE) que los estudiantes hacen fácilmente (para que se les pueda quitar el énfasis en la DG), construcciones que los estudiantes encuentran difíciles (por lo que deben detallarse más en la DG), y construcciones inesperadas (que deben tenerse en cuenta en una futura DG). Los datos que se obtienen de una investigación sugieren cómo revisar la DG y los materiales didácticos. La DG revisada se puede utilizar en ciclos de investigación posteriores, y los ciclos de investigación se pueden realizar hasta obtener una DG que ya no amerite ser revisada. En ese momento, la DG describirá cómo la mayoría de los estudiantes construyen Procesos u Objetos de la noción matemática específica que se esté considerando.

En APOE se utiliza una estrategia pedagógica llamada ciclo ACE para fomentar la reflexión. Las actividades “A” diseñadas para fomentar las construcciones

propuestas en la DG se hacen colaborativamente en grupos de tres o cuatro estudiantes; hay discusiones en el pleno de la clase “C” para considerar soluciones de los grupos de estudiantes, dificultades comunes, o aspectos que el instructor quiera enfatizar; y ejercicios “E” para hacer en el hogar.

Las preguntas de investigación de este estudio son:

- 1) La descomposición genética que se propone en el estudio (que se detalla en la próxima sección), ¿qué tan bien describe cómo los estudiantes entienden⁴ la función exponencial?
- 2) De las construcciones mentales conjeturadas en la descomposición genética de función exponencial, ¿cuáles son las construcciones que estudiantes preuniversitarios dan muestra de poder hacer y cuáles les causan dificultad?

4. DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA REVISADA PARA EL SEGUNDO CICLO DE INVESTIGACIÓN

A continuación, solo incluimos la parte de una DG de función exponencial que ponemos a prueba en este estudio. Esto no incluye el entendimiento gráfico de funciones exponenciales ni el entendimiento de logaritmos, ya que a causa de la pandemia de Covid-19 no pudimos implementar las actividades que teníamos diseñadas para ello. Antes de entrar en detalles, resumimos la DG brevemente. La DG comienza con un listado de prerrequisitos que se asume que los estudiantes conocen antes de estudiar funciones exponenciales. Luego de eso proponemos que el estudiante use multiplicación repetida para construir función exponencial, primero en los enteros positivos, para luego, dividiendo repetidamente por el factor multiplicativo, extender la función exponencial a cero y a los enteros negativos. Coordinando Procesos de exponentes enteros, función exponencial en los enteros, y exponentes fraccionarios unitarios, se puede extender función exponencial a los racionales (figura 1). Los números racionales es el conjunto más amplio con el cual los estudiantes de esta edad (15 y 16 años) pueden hacer cálculos estando restringidos a la pantalla finita de una calculadora gráfica. En varias investigaciones (e.g., Kidron, 2018; Sirotic y Zazkis, 2007; Murmur y Zazkis, 2021) se muestra que los estudiantes tienen dificultad construyendo los números irracionales, entendiendo su relación con los racionales,

⁴ Por “entender” queremos decir construir procesos u objetos, según se define en la teoría.

así como tratando con exponentes irracionales. Por ello, no intentamos extender la construcción de exponentes a todos los reales, sino que esperamos que el uso de contextos donde la variable de entrada se perciba continua, como sería el caso del tiempo, permita a los estudiantes intuir la existencia de potencias reales (ver Ellis *et al.*, 2015, 2016). Los estudiantes pueden interiorizar acciones sobre exponentes racionales, para computar y entender lo que es un exponente racional, sin que necesariamente tengan que primero construir una conceptualización de Proceso del conjunto de números reales.

CONOCIMIENTOS PREVIOS PARA REVISAR O CONSTRUIR

1. Se necesita un proceso de exponentes enteros positivos. Para enteros positivos n y m , Acciones de expandir b^n y b^m como un producto de factores individuales b , y usar estas expansiones para explorar expresiones de la forma $b^n b^m$, $\frac{b^n}{b^m}$ y $(b^n)^m$ y tratar de encontrar fórmulas correspondientes, se pueden interiorizar en un Proceso que permite a los estudiantes imaginar que para un entero positivo n , multiplicar un número b por sí mismo n veces da como resultado b^n y dar sentido a las propiedades de los exponentes $b^n b^m = b^{n+m}$, $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$, y $(b^n)^m = b^{nm}$. Estudiantes con una conceptualización de Proceso de exponentes enteros positivos, pueden imaginar y darles sentido a esas propiedades sin depender de la memorización ni de hacer cálculos explícitos.
2. Se necesita un Proceso de exponentes enteros. Acciones de explorar la validez de las expresiones $b^n b^m = b^{n+m}$, $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$, para los casos donde uno o ambos de n y/o m es cero, o donde $m = -n$ (en la primera expresión), $m = n$ o $m > n$ (en la segunda expresión) pueden interiorizarse en un Proceso que permita justificar las definiciones $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$ y $b^0 = 1$ en términos de extender las propiedades de los exponentes naturales a los enteros. La necesidad de realizar Acciones sobre el Proceso de exponentes enteros, por ejemplo, para resolver problemas contextuales, fomenta su encapsulación en un Objeto de exponentes enteros.

FUNCIÓN EXPONENCIAL EN LOS NATURALES

La acción de ordenar y completar espacios en blanco en pares ordenados correspondientes a una sucesión geométrica (n, s_n) (es decir, donde $s_n = b^n$ para n un entero positivo, algunos $b > 0$, $b \neq 1$, y donde s_n podría no estar

expresado como una potencia), donde el factor multiplicativo común (la base b) se da verbal o simbólicamente, o donde se dan dos términos consecutivos (n, s_n) y $(n+1, s_{n+1})$ para permitir encontrar el factor multiplicativo b , se puede interiorizar en un Proceso de multiplicación repetida que permite imaginar que (n) crece aritméticamente mientras que (s_n) crece geoméricamente, permite relacionar n con s_n , y reconocer n como el número de veces que la base b es multiplicada por sí misma. En este momento, es posible que el estudiante no sepa que n es un exponente. Acciones de k -saltos a la derecha, es decir, completar algunos términos de sucesiones de la forma $(n, s_n), (n+k, s_{n+k}), (n+2k, s_{n+2k}) \dots$ para k suficientemente grande que no sea razonable hacer esto multiplicando repetidamente por b , puede hacer evidente la necesidad de la notación exponencial y así fomentar la coordinación del Proceso de multiplicación repetida con un Proceso prerequisite de exponentes enteros positivos para dar como resultado un Proceso de función exponencial en los naturales, que permite reconocer a n (en pares (n, s_n)) como un exponente.

EXTENSIÓN A LOS ENTEROS

La acción de usar multiplicación repetida para encontrar la parte que falta en el par ordenado $(0, ?)$ de forma tal que complete un conjunto dado de pares ordenados en una sucesión geométrica $(1, s_1), (2, s_2), (3, s_3)$ mientras que también hace que esta extensión sea consistente con el Proceso de exponentes enteros positivos, se pueden interiorizar en un Proceso que extiende el Proceso de función exponencial a cero. Acciones similares que extienden aún más la función a pares de la forma $(-1, s_{-1}), (-2, s_{-2}), (-3, s_{-3}) \dots$ se pueden interiorizar en un Proceso que extiende el Proceso de función exponencial en los naturales para formar un Proceso de función exponencial en los enteros. En este momento, el estudiante puede que no relacione los valores enteros negativos de n con exponentes enteros negativos. Acciones de k -saltos a la izquierda, es decir, completar algunos términos de sucesiones de la forma $(n, s_n), (n-k, s_{n-k}), (n-2k, s_{n-2k}), \dots$ partiendo de cualquier n , para k lo suficientemente grande como para que no sea razonable hacerlo dividiendo repetidamente por b , fomenta la coordinación de este Proceso con el Proceso prerequisite de exponentes enteros para dar como resultado un Proceso que reconoce que un entero negativo n en un par $(n, ?)$ es un exponente y que el par se completa de una manera consistente con propiedades de exponentes.

PROCESO DE POTENCIAS FRACCIONARIAS UNITARIAS

Se necesita un Proceso de potencias fraccionarias unitarias para permitir que los estudiantes imaginen que para $a > 0$, y n entero positivo, $a^{\frac{1}{n}}$ es un número que multiplicado por sí mismo n veces da como resultado a . Para construir este Proceso: dado un número positivo a y un entero positivo (pequeño) n , la Acción de usar tecnología de computación para tantear numéricamente o para analizar geométricamente (intersecando las gráficas de $y = x^n$ y $y = a$, por ejemplo) y encontrar o aproximar un número que al multiplicarse por sí mismo n veces produce el número dado a , puede interiorizarse en un Proceso que permite al alumno imaginar y anticipar la existencia de tales números. Otras Acciones de usar tecnología para calcular potencias fraccionarias unitarias, verificar que efectivamente tengan la propiedad esperada, y usarlas para resolver situaciones de problemas contextuales pueden ayudar a los estudiantes a encapsular el Proceso de potencias fraccionarias unitarias en un Objeto.

EXTENSIÓN A LOS NÚMEROS RACIONALES

El Proceso de multiplicación repetida se coordina con un Proceso de potencias fraccionarias unitarias mediante la aplicación del primero al encapsulamiento del segundo, para producir un Proceso de potencias fraccionarias repetidas. Este proceso permite pensar en $\underbrace{b^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \cdots b^{\frac{1}{n}}}_{m \text{ veces}}$ como $\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m = b^{\frac{m}{n}}$. El proceso de potencias fraccionarias repetidas se puede coordinar con el Proceso de función exponencial en los enteros para formar un nuevo Proceso que extiende función exponencial a los racionales. La DG se resume en la figura 1.

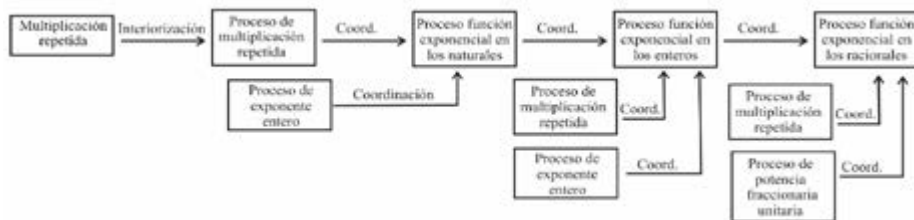


Figura 1. Resumen gráfico de la descomposición genética.

5. METODOLOGÍA

Durante el año escolar 2021-2022, se seleccionó por conveniencia una escuela privada de nivel superior en Puerto Rico para el estudio. La escuela atiende un estudiantado de nivel económico medio-alto, la mayor parte de los cuales espera seguir estudios universitarios. Puede esperarse que estos estudiantes estén mejor preparados que los estudiantes típicos del sistema de educación pública de Puerto Rico. Todos, los nueve estudiantes de undécimo grado (15-16 años de edad) que estaban tomando el curso de Precálculo y la maestra del curso, aceptaron participar voluntariamente. Sin embargo, un estudiante no culminó su participación en el estudio. Los ocho estudiantes que completaron su participación son los que llamaremos estudiantes participantes. La maestra aplicó la estrategia pedagógica ACE y administró todas las actividades de enseñanza. En particular, las actividades se hicieron colaborativamente en dos grupos, uno de tres estudiantes y el otro de cinco. El investigador principal trabajó de cerca con la maestra del curso para asegurar que las actividades se implantaran como fueron diseñadas. El estudio se llevó a cabo cumpliendo con todos los reglamentos de prácticas éticas, confidencialidad, y consentimiento informado, requeridos por la Junta de Revisión Institucional de la Universidad Interamericana de Puerto Rico.

Los estudiantes participaron en un conjunto de cinco actividades distribuidas en 10 sesiones, cada sesión de 1.5 horas de duración. Las actividades se describen más adelante. En la implementación de cada actividad de aprendizaje los primeros 50 minutos fueron para trabajar en grupos y los últimos 40 minutos para la discusión en clase. Las actividades se realizaron utilizando un manipulativo con fichas (figura 2) que muestran a una función como máquina. La

ficha en la figura 2 es parte del conjunto de fichas de la base 2 y representa el dato $2^3 = 8$. De ahora en adelante esta ficha se va a denotar de la forma $(3/8)$. Se está adaptando la idea de Ferrari-Escola *et al.* (2016) pues, como ellos, usamos “juegos” de fichas. Se mejoró el diseño de Díaz-Berríos y Martínez-Planell (2022) pues sus fichas tenían una raya en el medio, como las fichas de dominó, y esto confundía a los estudiantes que pensaban que la raya era para división. Se le añadió un diseño de función como máquina (figura 2), para propiciar que los estudiantes pensarán en exponentes como entradas y potencias como salidas. También, se usó una situación de crecimiento continuo, como sugieren Ellis *et al.* (2015, 2016) para ayudar a que los estudiantes piensen que cualquier número real (tiempo) puede ser un exponente.



Figura 2. Ficha (de la base 2) mostrando una función como máquina.

La tabla 1 resume las actividades de aprendizaje, propósito de la actividad, y problemas de muestra.

Tabla 1. Resumen de las actividades de aprendizaje implementadas, propósito, y problemas de muestra

Act	Propósito	Problemas de muestra																																																										
# 1	Prereq. expo- nente entero	1. Escribe en notación exponencial: $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$ 2. Expande y expresa sin usar notación de exponentes: $3(b^5)^2$ 3. Considere la expresión $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$. Indique si es o no es válida en el caso que $m = n$. Explique su respuesta.																																																										
# 2	Fn. exp. en enteros posi- tivos	“Moverse a la derecha en pasos unitarios” Se presenta al estudiante la situación de un globo aerostático cuya altura se duplica cada minuto de vuelo. Se le dan fichas sin ordenar, algunas incompletas y se les pide que las ordenen y completen. Ya ordenadas corresponden a las columnas de la siguiente tabla: <table><tr><td>Altura (metros)</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td>8</td><td></td><td>32</td><td></td><td>128</td><td></td><td>512</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>Tiempo de vuelo (min.)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td></td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td></td><td>9</td><td>10</td><td></td><td></td><td>13 14</td></tr></table> Otro ejemplo: <table><tr><td>Altura del globo (metros)</td><td>4</td><td>4.32</td><td>4.67</td><td>5.04</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>Tiempo de vuelo (minutos)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td></td><td></td></tr></table>	Altura (metros)	1	2		8		32		128		512					Tiempo de vuelo (min.)	0	1	2	3		5	6	7		9	10			13 14	Altura del globo (metros)	4	4.32	4.67	5.04										Tiempo de vuelo (minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
Altura (metros)	1	2		8		32		128		512																																																		
Tiempo de vuelo (min.)	0	1	2	3		5	6	7		9	10			13 14																																														
Altura del globo (metros)	4	4.32	4.67	5.04																																																								
Tiempo de vuelo (minutos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10																																																	
# 3	Extender fn. exp. a ente- ros	“Moverse hacia la izquierda en pasos unitarios.” En el contexto de un globo aerostá- tico que duplica su altura como función del tiempo. Se explica el tiempo negativo en términos de minutos antes de comenzar a tomar datos. <table><tr><td>Altura (metros)</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>4</td><td>8</td><td>16</td></tr><tr><td>Tiempo (minutos)</td><td>-5</td><td>-4</td><td>-3</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr></table> También se les dio fichas donde tenían que “dar saltos a la izquierda” para fomentar el uso de exponentes negativos. <table><tr><td>Altura (metros)</td><td></td><td></td><td></td><td>474.76</td><td></td><td></td><td>4,233</td><td>5,079.60</td></tr><tr><td>Tiempo (minutos)</td><td>1</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>41</td><td>42</td><td>43</td></tr></table>	Altura (metros)								4	8	16	Tiempo (minutos)	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	Altura (metros)				474.76			4,233	5,079.60	Tiempo (minutos)	1	10	20	30	40	41	42	43																		
Altura (metros)								4	8	16																																																		
Tiempo (minutos)	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4																																																		
Altura (metros)				474.76			4,233	5,079.60																																																				
Tiempo (minutos)	1	10	20	30	40	41	42	43																																																				
# 4	Proceso potencia fraccionaria unitaria	Primero el estudiante tantea con la calculadora para preguntas tales como: ¿Qué número positivo al multiplicarlo por sí mismo da 7? Complete la sucesión de forma tal que crezca siguiendo un patrón de siempre multi- plicar por el mismo número 3, __, __, __, 9.																																																										
# 5	Función exp. en números racionales	Finalmente, se trataron problemas como: ordene y complete las fichas si la altura de un globo aerostático se duplica cada tres minutos: <table><tr><td>Altura del globo (metros)</td><td>0.91</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>Tiempo de vuelo (minutos)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	Altura del globo (metros)	0.91				Tiempo de vuelo (minutos)	0	1	2	3																																																
Altura del globo (metros)	0.91																																																											
Tiempo de vuelo (minutos)	0	1	2	3																																																								

Los datos del estudio se obtuvieron del trabajo escrito de los participantes en las actividades de aprendizaje, grabaciones de voz del trabajo en grupo en la sala de clases, y de las entrevistas semi-estructuradas que se llevaron a cabo con cada estudiante a finales del semestre. Cada entrevista duró aproximadamente una hora. Para las entrevistas se diseñó un instrumento que permitió indagar cuáles de las construcciones propuestas en la DG los estudiantes pudieron hacer. El entrevistador también podía pedir que los estudiantes justificaran sus respuestas y podía indagar acerca del entendimiento de los estudiantes. Para analizar los datos, primero el autor principal transcribió las discusiones en grupo. Luego ambos autores, de forma independiente, separaron las transcripciones en episodios según los problemas que discutían los estudiantes y en cada episodio, añadieron notas a las transcripciones acerca del tipo de estructura (según APOE y según se describen en la DG) que los estudiantes individualmente en cada grupo estaban evidenciando. Después, en reuniones semanales, discutieron las notas, acordaron cómo recortar las transcripciones eliminando intercambios que no aportaron a la discusión, y escogieron citas que ejemplificaban las construcciones de los diferentes estudiantes. Finalmente, prepararon tablas, una por estudiante, donde se llevaba cuenta de los episodios, las estructuras que evidenciaban, y citas pertinentes. En cada espacio de las tablas se acordó un código para la estructura que evidenciaba el estudiante; el código incluía la letra "A" para Acción, "P" para Proceso, y "O" para Objeto e identificaba la estructura según definida en la DG. Así, por ejemplo, algunas entradas en la tabla leerían como A-MR (Acción de multiplicación repetida), P-FE-Z (Proceso de función exponencial en los enteros), A-PFU (Acción de potencia fraccionaria unitaria). Esto se hizo para todas las estructuras en la DG. Para completar el análisis de las entrevistas semiestructuradas, se señalaron construcciones donde los estudiantes mostraron dificultad, se tomó nota de construcciones inesperadas, y se buscaron patrones en la tabla de análisis.

Finalmente, se compararon las tablas correspondientes a las discusiones en clase con la tabla de la entrevista semiestructurada, buscando en las notas y transcripciones según necesario, se discutió la concordancia entre ambos conjuntos de datos, y se llegó a un acuerdo final.

6. RESULTADOS

Los datos los obtuvimos de las discusiones en grupos de trabajo colaborativo que se dieron en clase y de las entrevistas individuales al final del curso. En las discusiones en clase se formaron dos grupos de estudiantes. En el grupo 1 estaban Anita, Amara, y Alejandro. El grupo 2 contaba con Iván, Genaro, Camilo, Herminio, y Kenny.

CONSTRUCCIÓN DE FUNCIÓN EXPONENCIAL EN LOS ENTEROS COMO OBJETO

Para discutir la construcción de un Objeto de función exponencial en los enteros nos concentramos en analizar al grupo 1, pues en ese grupo estaba Alejandro, el único estudiante que no mostró hacer tal construcción. La construcción de este Objeto por parte de los estudiantes en el grupo 2 fue similar a las de Anita y Amara (grupo 1), que mostramos a continuación, así que no las repetimos.

En el primer problema de la primera actividad se les dijo a los estudiantes que en el pueblo de Ponce la altura en metros de un globo aerostático se duplica por minutos. Se le dieron fichas fuera de orden y se le pidió ordenar y completar los términos de las otras fichas que faltaban.

Altura del globo (metros)	1	2		8		32		128		512				
Tiempo de vuelo (min.)	0	1	2	3		5	6	7		9	10		13	14

La forma de “función como máquina” (figura 2) de las fichas propiciaron el pensamiento funcional:

Amara: La entrada es tiempo y la salida es la altura ...

Anita: ... Tenemos que velar que los de abajo, elementos de entrada, estén en orden ... Encontramos un patrón ... la base es 2 y entonces el de abajo, los de entrada, son sus exponentes

Anita: [Luego] ... de menor a mayor vamos multiplicando por 2 ... Y de mayor a menor ¿vamos?

Anita y Amara: Dividiendo entre 2.

Alejandro, que había permanecido callado, mostró compartir las construcciones de Anita y Amara en el siguiente ejercicio. Aquí se le dieron las fichas:

Altura del globo (metros)	4	4.43	4.67	5.04							
Tiempo de vuelo (min.)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Alejandro: Aquí se está dividiendo 5.04 entre 4.67, o también puede ser 5.04 entre 4.67... redondeado a dos lugares decimales es 1.08

Anita y Amara: 1.08

Alejandro y Anita: Multiplicamos 1.08 por cada elemento de salida en la tabla

Alejandro: [Luego, resumiendo] ... en el primer caso, el de Ponce el factor multiplicativo 2 se elevaba utilizando como exponente a cada uno de los números de entrada ... O sea que cada elemento de salida que se obtenía era el doble del anterior... En el segundo caso del globo aerostático en el pueblo de Mayagüez se multiplicaba la altura que te daban en la ficha por 1.08 para obtener cada uno de los elementos de salida...

En diferentes momentos durante sus discusiones en clase, los estudiantes del grupo 1 mostraron poder imaginar la multiplicación repetida sin tener que llevarla a cabo explícitamente, lo cual es consistente con un Proceso de multiplicación repetida. Por ejemplo, cuando Anita dice “de menor a mayor vamos multiplicando por 2”. También, todos mostraron evidencia de relacionar exponenciación con multiplicación repetida, como cuando Anita dice “son sus exponentes” o Alejandro cuando dijo “el factor multiplicativo 2 se elevaba utilizando como exponente a cada uno de los números de entrada”. Esto permitió a cada miembro del grupo coordinar el Proceso de multiplicación repetida con un Proceso de exponenciación para construir un Proceso de función exponencial en los naturales donde se reconocen a los elementos de entrada asociados al tiempo como exponentes. Además, cuando Anita y Amara dicen “y de mayor a menor ¿vamos? ... dividiendo entre 2” muestran evidencia consistente con un Proceso de reversión de multiplicación repetida. En otra ocasión, Alejandro dijo “el factor multiplicativo es el factor que nos permite encontrar los elementos de salida que faltan... ya sea dividiendo o multiplicando”. Que puedan revertir la multiplicación sugiere que han construido un Proceso de multiplicación repetida. Todos ellos reconocieron las entradas como exponentes, lo que en general no sucedió con los estudiantes del primer ciclo de investigación (Díaz-Berríos y Martínez-Planell, 2022).

En varios problemas en la clase y entrevistas, los estudiantes del grupo 1 fueron consistentes en mostrar su estructura de Proceso de función exponencial en los naturales. Anita y Amara también dieron muestras consistentes con

haber construido un Objeto de función exponencial en los naturales. En otro problema en el contexto del globo aerostático se le dieron fichas como en la siguiente tabla:

Altura (metros)	3	5.25	9.19	16.08						
Tiempo (minutos)	0	1	2	3	4	5	10	15	20	25

La figura 3 muestra el trabajo del grupo del grupo 1. Mientras discuten esta situación:

a. ¿Podrías determinar los términos que faltan de las fichas y escribirlos?

$f(t) = (altura \cdot minutos)^t$
 $g(t) = ab^t$

Altura (metros)	3	49.24	308.17	13.264.5	217712.0	1.468748
Tiempo (minutos)	0	5	10	15	20	25

Figura 3. Trabajo del grupo 1 en el ejercicio 1a de la actividad 2.

Amara: Podemos decir que $f(5) = 3(1.75)^5$

Anita: Exacto... $f(t) = (\text{factor multiplicativo})^t \cdot 3$, el factor multiplicativo elevado al tiempo por la salida cuando el tiempo es cero

Amara: El factor multiplicativo elevado a la entrada por la altura inicial será igual al elemento de salida que estás buscando

Cuando Anita y Amara hallan una fórmula, $f(t) = a(b)^t$, que modela la situación, muestran evidencia consistente con la construcción de un Objeto de función exponencial en los naturales. Parecen pensar en el Proceso de función exponencial en los naturales como una entidad en sí misma, una totalidad, que pueden encapsular en una fórmula. Cuando se les pide la altura del globo luego de una hora muestran poder hacer acciones sobre esa totalidad (figura 4):

Amara: Tienes que elevar 1.75 al exponente 60 y luego multiplicarlo por 3 y ¿el resultado es?... Recuerden que también tienen que multiplicarlo por la altura inicial que es 3

Anita: ... Espérate, sería tomar el factor multiplicativo por minutos y lo elevas por el tiempo que es 60 minutos y lo multiplicas luego por 3 ... Yo voy calculando el resultado porque nos tiene que dar un decimal ... $f(t) = a(b)^t$, esto es ... $f(60) = 3(1.75)^{60}$, $f(60) = 1.14658E15$ ese es el resultado final...

Inclusive, la figura 4 muestra que el grupo 1 pudo hacer acciones sobre su Objeto de función exponencial en los naturales al verificar su resultado “dando saltos a la derecha”, en este caso, hallando y usando el factor multiplicativo de un cuarto de hora.

e. ¿Si el factor de crecimiento continúa igual, que altura tendrá el globo aerostático con respecto al suelo luego de haber transcurrido 1 hora (usa notación de exponentes para dar tu respuesta)?

fact. mult. 15 min = $1.75^3 = 4421.51$

$$a(t) = ab^t$$

$$a(t) = 3(1.75)^{60}$$

$$a(4) = 3 \cdot (4421.51)^4$$

$$a(4) = 1.14658 E 15$$

Figura 4. Trabajo del grupo 1 en el ejercicio 1e de la actividad 2.

En el próximo ejemplo, Anita y Amara del grupo 1 muestran evidencia consistente con extender el Proceso de función exponencial en los naturales a cero y los enteros negativos. Se les dice: la siguiente sucesión crece exponencialmente con un factor multiplicativo de 2; complete la tabla.

Salidas								4	8	16
Entradas	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Anita: Empezamos aquí en la tabla cuando transcurrió 4 minutos de vuelo la altura de la cesta del globo aerostático era de 16 metros... El factor multiplicativo siempre va a ser 2 ... Pues vamos a dividir la altura de la cesta del globo aerostático de 16 metros entre 2 expandiendo los demás elementos de salida hacia la izquierda... 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$

Amara: [Leyendo] ¿Hay relación entre las entradas negativas con sus salidas correspondientes y lo que usted conoce de exponentes negativos? (figura 5)

Anita: ... cuando el 2 está elevado a la -1, que significa en la situación en contexto un minuto antes de vuelo, 2^{-1} pues va a dar como elemento de salida la altura inicial de la cesta del globo aerostático que sería $\frac{1}{2}$ metro ... y con el tiempo antes de t minutos de vuelo moviéndose hacia la izquierda, los negativos podemos evaluar esa expresión exponencial...

Amara: [Luego] Hacia la izquierda los elementos de salida están disminuyendo ... pues como lo estábamos viendo en fracción, pues va a aumentar el denominador de la fracción ... es lo mismo que si tuvieras un número con exponente negativo y lo inviertes a su recíproco

2. La siguiente sucesión crece exponencialmente con un factor multiplicativo de 2.

b. ¿Hay relación entre las entradas negativas con sus salidas correspondientes y lo que usted conoce de exponentes negativos? Explique. Sí, ya que es lo mismo que si tuvieras un número con exponente negativo y lo inviertes a la recíproca. También al ser 2 el factor multiplicativo los números van en aumento.

Figura 5. Trabajo del grupo 1 en el ejercicio 2b de la actividad 3.

Estas estudiantes revierten el Proceso de multiplicación repetida y dividiendo repetidamente extienden la tabla hacia la izquierda “8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ ”. Cuando Amara lee la próxima pregunta (¿Hay relación entre las entradas negativas ...?), muestra aceptar el resultado de Anita y luego ambas coordinan la multiplicación repetida con un Proceso de exponenciación. De esa forma construyen un Proceso de función exponencial en todos los enteros.

La extensión de los naturales a cero también se hace como un Proceso, como lo evidencia su argumento justificando esto. Amara usa la propiedad $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$ y sustituyendo por m argumenta (figura 6):

Amara: Pues que sea b^m ... pues entonces aquí sería b^{m-m} ... y eso es igual a b^0 ... [escribe 1].

Anita: Sí, porque cuando la base está elevado a el exponente 0 eso es igual a 1.

Aquí Anita muestra extender la función exponencial a cero como una Acción. Acto seguido, utilizando la propiedad $b^{(n+m)} = b^n \cdot b^m$, Anita justificó que $b^0 = 1$ (figura 6). Poder justificar y discutir en términos generales son características de un Proceso. Esto sugiere que la extensión al cero de función exponencial en los naturales la hicieron como un Proceso.

$$\begin{array}{l} \frac{b^m}{b^n} = b^{m-n} \\ \frac{b^m}{b^m} = b^{m-m} \\ 1 = b^0 \end{array} \quad \begin{array}{l} b^{n+m} = b^n b^m \\ b^{-n+n} = b^{-n} b^n \\ b^0 = \frac{b^n}{b^n} \\ b^0 = 1 \end{array}$$

Figura 6. Trabajo del grupo 1 en el ejercicio 2d de la actividad 3.

Los resultados de las discusiones en el salón de clase y en la entrevista semiestructurada sugieren que Anita y Amara construyeron un Objeto de función exponencial en los enteros. Mostramos el caso de Anita en la entrevista semiestructurada, porque podemos hacerlo de manera más clara y resumida.

Entrevistador: [Una cantidad C crece exponencialmente, triplicándose cada hora. En un momento inicial hay 15 kilos de la cantidad] ¿Cuántos kilos va a haber 5 horas después?

Anita: Me viene a mi mente una fórmula que nosotros utilizamos y que descubrimos durante la implantación de las actividades de aprendizaje de la investigación que era $f(x) = ab^x$ ó $f(t) = ab^t$, donde a representa el valor inicial, la b representa el factor multiplicativo y la x o t que representa el tiempo ... En este caso el valor inicial sería 15, el factor multiplicativo sería 3, y el tiempo sería h que no se ha determinado... [figura 7]

Entrevistador: ¿Cuántos kilos había 7 horas antes del momento inicial?

Anita: Ok ... Pues como ahí dice que es 7 horas antes del momento inicial el 7 sería un -7 como exponente ... Por el contrario, si fuese 7 horas después el exponente sería un 7 positivo... 7 horas antes del momento inicial habría $\frac{1}{1,458}$ kilos.

Entrevistador: Para llegar a esa respuesta ¿qué hiciste?

Anita: Para poder llegar a esta respuesta primero analicé la oración y como me está preguntando ¿cuántos kilos había 7 horas antes del momento inicial? yo al instante pensé que el 7 es como exponente y tiene que ser un siete negativo, -7 ... Y utilizando la misma fórmula que te facilité previamente que era $f(h) = 15(3)^h$ sustituí el exponente h por -7 y eso sería $f(-7) = 15(3)^{-7}$ y lo resuelvo ... [figura 7]

2) 5 hours later
 $f(x) = ab^x$
 $15 \cdot 3^5 = 3645$
 initial = 15 kilos
 Luego de 5 horas, habra una cantidad total de 3645 kilos

h horas después $\rightarrow 15 \times 3^h$ Kilos.
 O luego de h horas, habrá una cantidad total de 15×3^h Kilos.
 $f(h) = 15 \cdot 3^h$
 $h = -7 \leftarrow$ antes momento inicial = 15
 c. $f(h) = 15 \cdot 3^h$
 $f(-7) = 15 \cdot 3^{-7}$
 $= 15 \cdot \frac{1}{3^7}$
 $= 15 \cdot \frac{1}{2187}$
 $= \frac{15}{2187} = \frac{1}{145.8}$
 $f(-7) = \frac{1}{145.8} \rightarrow 7$ horas antes del momento inicial
 habían $\frac{1}{145.8}$ o 0.000685 Kilos.

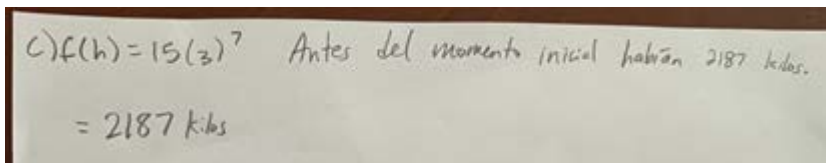
Figura 7. Trabajo de Anita en la pregunta 2(a, b, c) de la entrevista.

Anita muestra evidencia consistente con realizar acciones sobre el Objeto de función exponencial en los enteros, cuando dice “utilizando la misma fórmula que te facilité previamente que era $f(h) = 15(3)^h$ sustituí el exponente h por -7 y eso sería $f(-7) = 15(3)^{-7}$ ”. Anteriormente, Anita había dado muestra de tener al menos una conceptualización de Proceso de función exponencial en los enteros. Eso da confianza que no está usando la fórmula como algo memorizado, una Acción, sino que puede imaginar de dónde vino la fórmula. En este caso la fórmula $f(h) = 15(3)^h$ puede representar la encapsulación del Proceso de función exponencial en los enteros en un Objeto de función exponencial en los enteros.

CONSTRUCCIÓN DE FUNCIÓN EXPONENCIAL EN LOS ENTEROS COMO ACCIÓN

El caso de Alejandro, tercer miembro del grupo 1, es diferente. Alejandro se mantuvo bastante callado durante la actividad en clase y, a insistencia de sus compañeras, solo hizo algunos cálculos específicos como Acciones. Todavía en la entrevista final mostró evidencia consistente con una conceptualización de Acción de función exponencial en los enteros positivos. En el mismo problema:

- Alejandro: En la primera hora va a haber 45 kilos ... en la segunda hora sería 135 kilos... En la tercera 405 kilos ... En la cuarta 1,215 kilos... En la quinta 3,645 kilos ¿Cuántos kilos va a haber h horas luego del momento inicial?... $f(h) = 15(3)^h$... ¿Cuántos kilos había 7 horas antes del momento inicial?... “Antes del momento inicial había 2,187 kilos
- Entrevistador: ¿Qué tú entiendes por 7 horas antes del momento inicial?
- Alejandro: Pues yo lo que hice fue tomar el 3 y lo elevé a la potencia 7 y luego lo multipliqué por 15 que es la cantidad inicial [figura 8].



$c) f(h) = 15(3)^h$ Antes del momento inicial habrán 2187 kilos.
 $= 2187 \text{ kilos}$

Figura 8. Trabajo de Alejandro en la pregunta 2c de la entrevista.

En su respuesta, Alejandro muestra que puede hacer Acciones de multiplicación repetida y puede generalizar para describir lo que sucede h horas después, expresándolo en términos de una función exponencial. Esto podría ser consistente con un Proceso de función exponencial en los enteros positivos. Sin embargo, no extiende ese Proceso a los enteros negativos. Cuando se le pregunta por 7 horas antes, no revierte el Proceso de multiplicación repetida para dividir siete veces por 3, sino que aplica la Acción (sobre un Objeto de función exponencial en los enteros positivos) de sustituir ciegamente 7 por h . En resumen, Alejandro no muestra haber construido un Objeto de función exponencial en los enteros.

Como Anita y Amara del grupo 1, los cinco estudiantes del grupo 2 mostraron construir una función exponencial en los enteros como un Objeto. Como su trabajo fue similar al de Anita y Amara, solo mostramos un breve ejemplo de cómo los estudiantes del grupo 2 comenzaron a extender su noción de función exponencial a los enteros negativos:

- Genaro: La altura inicial del globo aerostático cuando el tiempo es 0 es de 24 metros... ¿Cuál es la altura de la cesta de un globo aerostático que puede esperarse que hubiese un minuto de vuelo antes, dos minutos de vuelo antes y tres minutos de vuelo antes ...?
- Iván: ¿Qué hacemos entonces? dividir cada elemento de salida hacia la izquierda entre 2.
- Camilo: Entonces aquí en la tabla los elementos de salida hacia la izquierda son 12, 6, 3.
- Genaro y Iván: Acá, sabemos que cuando el de entrada es 0 el de salida es 24... Cuando el de entrada es -1 el de salida es 12... Cuando el de entrada es -2 el de salida es 6... Y cuando el de entrada es -3 el de salida es 3.
- Iván: Es lo mismo, lo único es que vas hacia la izquierda... Ok, me imagino que se está aplicando aquí la regla de los exponentes negativos... Y esta regla de los exponentes negativos lo que nos dice de eso es que...
- Genaro: Es que cuando la base se está elevando a un exponente negativo a la base le buscamos el recíproco.

Todos los miembros del grupo 2 construyeron un Objeto de función exponencial en los enteros. Solo detallamos el ejemplo de Kenny. Las construcciones de los otros miembros son similares. En la entrevista se pregunta: una cantidad C crece exponencialmente, triplicándose cada hora. En un momento inicial hay 15 kilos de la cantidad. ¿Cuántos kilos va a haber 5 horas después? ¿ h horas después?

Kenny: Ok... me dio que va a ser 3,645 kilos en 5 horas... [se le pide que explique] multipliqué 15 por 3 cinco veces, $15 \cdot 3^5$.

Kenny: [h horas después] va a haber 15 kilos triplicándose a la cantidad de horas que se ha propuesto... pues voy a sustituir entonces sobre h , que sería 15 multiplicado por 3 elevado a la potencia h ... $15 \cdot 3^h$... en el contexto de función sería $f(h) = 15 \cdot 3^h$.

Kenny parece haber construido un Proceso de multiplicación repetida que le permite imaginar “multipliqué 15 por 3 cinco veces”, coordinar ese Proceso con uno de exponenciación cuando usa las 5 horas como exponente, y encapsularlo en un Objeto cuando habla de $f(h) = 15 \cdot 3^h$. También muestra que puede hacer Acciones sobre ese Objeto (de función exponencial en los enteros) cuando se le pregunta: ¿cuántos kilos había 7 horas antes del momento inicial?

Kenny: ¡Diantres! tú me estás diciendo 7 horas antes... Tendré que utilizar números negativos... lo que yo estoy haciendo es utilizar la misma función $f(h) = 15 \cdot 3^h$ solo que estoy elevándolo a la potencia -7 ... sería sustituir en h por -7 , $f(-7) = 15 \cdot 3^{-7}$ Luego de 7 horas del momento inicial habrá 5/709 kilos.

En el mismo problema, la construcción de Herminio fue similar:

Herminio: Como se está triplicando una cantidad cada hora, se estará triplicando cinco veces la cantidad inicial de 15 kilos y me dio a 3,645 kilos ... Sería 15 por 3 elevado a la potencia h , $15 \cdot 3^h$... Donde el exponente h sería sustituido por cualquier tiempo medido en horas... [7 horas antes] Ahí en vez de triplicarse se dividiría el valor inicial entre 3... lo dividí porque me está pidiendo lo opuesto... -7 porque son 7 horas antes...

CONSTRUCCIÓN DE FUNCIÓN EXPONENCIAL EN LOS RACIONALES COMO UN PROCESO

En las actividades en el salón de clase, Anita y Amara del grupo 1 comienzan a construir su Proceso de función exponencial en los racionales. Para ello, la DG propone que primero deben construir un Proceso de potencias fraccionarias unitarias. Para ayudar a que los estudiantes construyan este Proceso, un ejercicio les pide que completen la sucesión 3, $\frac{1}{3}$, 9 de forma tal que la sucesión crezca siguiendo un patrón de siempre multiplicar por el mismo número (figura 9).

Anita: Pues ya. El factor multiplicativo sería 1.73.

Amara: Aquí hay uno que es 1.7321, que si multiplicamos el valor inicial 3 por el factor multiplicativo 1.7321 a la potencia 2 nos daría a 9.00051... Ok... $(3)^{\frac{1}{2}} \approx 1.73205$...

Anita: ... Porque cuando el exponente es 1 para encontrar el segundo término de la sucesión sería $3(1.73205)^1$ ó $3(3^{1/2})^1$... y para encontrar el tercer término de la sucesión el exponente es 2 que sería $3(3^{1/2})^2$.

El próximo ejercicio les pide completar la sucesión 3, $\frac{1}{3}$, 9.

Anita: Yo pensé elevar el factor multiplicativo 3 a la un tercio, $3^{\frac{1}{3}}$...

Amara: Lo que podemos hacer también es buscar con números, por ejemplo 1.44×3 ...

Anita: Estamos buscando un número que sea un decimal... Ok, el número es 1.44... Espérame, déjame ver... Sí, cuando uno multiplica $3(1.44)^x$...

Luego de completar las sucesiones 3, $\frac{1}{3}$, 9; 3, $\frac{1}{3}$, 9; y 3, $\frac{1}{3}$, 9; Anita resume:

Anita: Es como si tu estuvieses buscando las raíces cuadradas, las raíces cúbicas y las raíces cuartas [figura 9] ... [Luego, explicando] Para calcular ese factor multiplicativo 1.316 en vez de elevar tres a $1/3$ lo que hicimos fue que la base 3 la elevamos a la $\frac{1}{4}$... Sería utilizando algo como esto $a(n) = a \cdot b^n$.

Amara: ... esta manera de expresar los elementos de salida en notación exponencial en cada uno de los términos que faltaban en las distintas sucesiones es más sencilla y más rápida para calcular el enésimo término que estábamos buscando en la sucesión ...

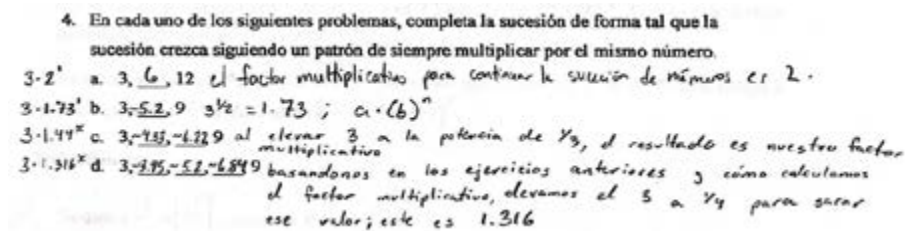


Figura 9. Trabajo del grupo 1 en el ejercicio 4 de la actividad 5.

El dialogo anterior sugiere que Anita y Amara pueden imaginar formar potencias fraccionarias unitarias como un Proceso. Anita muestra evidencia de coordinar el Proceso de potencias fraccionarias unitarias y el Proceso de función exponencial en los enteros, para formar un nuevo proceso de función exponencial en los racionales; por ejemplo, cuando en la entrevista se le pregunta qué entiende por $2^{0.65}$:

- Anita: ... lo que estoy pensando es en $2^{65/100}$... eso es equivalente a $2^{13/20}$ y todo eso elevado a la potencia 65, $(2^{13/20})^{65}$... eso me daría 2^{52} .
- Entrevistador: ¿Qué entiendes por eso?
- Anita: Que un número multiplicado por sí mismo 20 veces dé como resultado a 2 y luego el resultado de este es elevado por sí mismo 13 veces.

En la discusión anterior Anita muestra que puede imaginar el significado de una potencia racional sin tener que hacer cálculos explícitos, lo cual es consistente con un Proceso. De forma similar a Anita, Amara, e Iván (del grupo 2) mostraron construir un Proceso de función exponencial en los racionales. Anita además puede hacer Acciones sobre ese Proceso, como mostramos a continuación. Se le da la tabla:

t	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
$f(t)$	14					28

y se pregunta: Si la tabla corresponde a un modelo exponencial, ¿cómo hallar los valores que faltan?

Anita: Del elemento de salida cuando el de entrada es 2 al elemento de salida cuando el de entrada es 3 se están duplicando... Estaría buscando un número que cuando lo multiplique por sí mismo cinco veces y luego lo multiplique por el valor inicial que es 14 me dé a 28... el segundo elemento de salida cuando el de entrada es 2.2 sería tomar el valor inicial que es 14 y lo multiplicaría por $2^{1/5}$... 14 por 2 a la potencia 2/5... 14 por 2 a la potencia 3/5... 14 por 2 a la potencia 4/5... 14 por 2 a la potencia 5/5... da 28.

Anita fue la única que mostró construir un Objeto de función exponencial en los racionales.

7. DISCUSIÓN

Los ocho participantes construyeron un Proceso de multiplicación repetida que les permitió imaginar que en los pares (n, s_n) , n crecía aritméticamente mientras que s_n crecía geométricamente, relacionar a n con s_n y reconocer a n como el número de veces que la base b era multiplicada por sí misma. También pudieron coordinar un Proceso de multiplicación repetida con un Proceso prerequisite de exponenciación para construir un Proceso de función exponencial en los naturales, anticipando la forma general $s(t) = ab^t$. Esto verifica lo que se conjeturó en la DG. En comparación, la mitad de los estudiantes del primer ciclo (Díaz-Berríos y Martínez-Planell, 2022) no reconoció que la entrada n en un par (n, s_n) es un exponente. Estos estudiantes inicialmente construyeron el crecimiento exponencial como una multiplicación repetida sin dar evidencia de estar consciente de que la entrada n registra el número de factores b en un producto b^n , o que n podía considerarse como un exponente. La tabla 2 resume las construcciones que evidenciaron los estudiantes en los dos ciclos de investigación.

Tabla 2. Estructuras construidas por los estudiantes

Ciclo	Objeto de función exponencial en los naturales	Objeto de función exponencial en los enteros	Objeto de potencia fraccionaria unitaria	Proceso de función exponencial en los racionales
Ciclo 1	2/16	0/16	0/16	0/16
Ciclo 2	7/8	7/8	4/8	3/8

¿Cuáles fueron las diferencias en el tratamiento que recibieron los estudiantes en los dos ciclos? Primero, para el segundo ciclo de investigación cambiamos la adaptación que se hizo en Díaz-Berrios y Martínez-Planell (2022) de los materiales inspirados en Ferrari-Escolá *et al.* (2016). La representación de una función como máquina (figura 2), que es nueva en los materiales, contribuyó a una mejor comprensión de funciones exponenciales ya que desde temprano los estudiantes comenzaron a usar notación de función, cosa que no sucedió en el primer ciclo, y a tratar de simbolizar sus procedimientos. Esto ayudó a que siete de los ocho estudiantes del segundo ciclo extendieran función exponencial de los naturales a los enteros y que pudiesen conjeturar una regla general " $f(x) = ab^x$ " para calcular elementos de salida de la función exponencial. Otra modificación a los materiales fue el uso de una situación contextual. En este estudio, se modeló el crecimiento y decrecimiento exponencial adaptadas al entorno del estudiantado puertorriqueño (globo aerostático del pueblo de Jayuya). Esto facilitó el razonamiento en los estudiantes al permitir inquirir usando datos con significado para ellos, y relacionarlos a los parámetros de un modelo matemático exponencial $f(x) = ab^x$. Los estudiantes frecuentemente discutían en términos del significado concreto de los parámetros a y b . Esto sugiere que el contexto les ayudó a analizar y comprender mejor los comportamientos relacionados a crecimiento o decrecimiento exponencial. El uso de situaciones contextuales como apoyo es consistente con Borji *et al.* (2023).

Como sugiere Weber (2002), después de construir funciones exponenciales sobre los números enteros, la construcción puede extenderse a todos los números racionales. En la DG se conjeturó que, si primero los estudiantes construían un Objeto de potencia fraccionaria unitaria, luego podrían construir un Proceso de función exponencial en los racionales. La extensión a los racionales fue diferente en los dos ciclos. La construcción de potencia fraccionaria unitaria se describió en detalle en la DG para este segundo ciclo, pero no fue así para el primer ciclo. Ninguno de los estudiantes del primer ciclo construyó un Proceso de potencia fraccionaria unitaria. Posiblemente apoyados en las actividades de aprendizaje, cuatro de los ocho estudiantes del segundo ciclo evidenciaron pensar en $a^{1/n}$ como un número que multiplicado por sí mismo n veces da como resultado a . Tres de estos estudiantes lograron construir un Proceso de función exponencial en los racionales según se describe en la DG. El que tres de los ocho estudiantes participantes del segundo ciclo pudiera construir un Objeto de potencia fraccionaria unitaria y cuatro de los ocho un Proceso de función exponencial en los racionales muestra el potencial de considerar esta construcción explícitamente, pero también sugiere la necesidad de revisar las actividades para ayudar

a que más estudiantes construyan un Proceso de función exponencial en los racionales. La mayor dificultad que tuvieron los estudiantes extendiendo función exponencial a los racionales fue que no construyeron un Objeto de potencia fraccionaria unitaria. Se puede apoyar a los estudiantes enfatizando más el entendimiento verbal de las potencias fraccionarias unitarias.

Para extender el Proceso de función exponencial a todos los reales, los estudiantes podrían construir previamente un Esquema de estructura de los números reales, permitiéndoles razonar sobre números racionales, números irracionales y sus expansiones decimales, lo cual es difícil en el nivel de la escuela secundaria (Kidron, 2018). Esto sugiere que a nivel preuniversitario la extensión a exponentes reales se obtiene mejor construyendo sobre la comprensión intuitiva del tiempo (los exponentes) como una cantidad continua (Ellis *et al.*, 2015, 2016; Kuper y Carlson, 2020; Borji *et al.*, 2023). La intuición del tiempo como cantidad continua puede compensar su falta de conocimiento sobre la estructura de los números reales. Para esto, es imprescindible el tratamiento gráfico de las funciones exponenciales.

Una limitación importante del estudio fue que no se pudo culminar con la implementación de todas las actividades diseñadas para construir el entendimiento gráfico de las funciones exponenciales a causa de la pandemia del Covid-19. Los estudiantes necesitan construir gráficas de funciones exponenciales que modelan comportamientos de crecimiento y decrecimiento para poder entender la extensión de función exponencial a los reales. Esta experiencia sugiere en el futuro incluir la representación gráfica desde las primeras actividades, comenzando con gráficas discretas hasta llegar a gráficas continuas. Otra limitación es que las características de los ocho estudiantes participantes y de su escuela pueden ser diferentes a las de otros estudiantes y escuelas, lo que podría permitir cuestionar la aplicabilidad de nuestros resultados a este nivel. Esto requiere más estudio.

8. CONCLUSIÓN

En este estudio, mostramos que siete de ocho estudiantes participantes pudieron construir un Objeto de función exponencial en los enteros y tres pudieron construir un Proceso de función exponencial en los racionales. Esto es un logro porque en el primer ciclo, dos de 16 estudiantes pudieron construir un Objeto de función exponencial en los enteros y ningún estudiante alcanzó a construir un Proceso de función exponencial en los racionales. Este estudio nos permite ver

cómo el uso de manipulativos (similar a Ferrari-Escolá *et al.*, 2016; Díaz-Berrios y Martínez-Planell, 2022), situaciones en contextos continuos (como sugieren Ellis *et al.*, 2015, 2016; Borji *et al.*, 2023), y actividades de aprendizaje basadas en una descomposición genética, se pueden utilizar para ayudar a los estudiantes a construir función exponencial con sentido. Esto es una aportación del estudio.

El estudio y las actividades sirven de modelo a un acercamiento a las funciones exponenciales que puede ser efectivo ya que promueve el aprendizaje activo y con sentido. Fomenta el aprendizaje colaborativo en un formato innovador y ameno a los estudiantes. Aunque no tratamos logaritmos como parte del estudio, nuestro acercamiento enfatiza de forma natural la relación de inversa entre funciones exponenciales y logarítmicas, ya que las fichas que se usan para una función sirven para la otra intercambiando salidas por entradas.

Además, contribuye a la literatura al examinar cómo los estudiantes pueden extender la idea de multiplicación repetida a una función exponencial en los números racionales. Asimismo se constata que al utilizar material basado en las ideas de Ferrari-Escolá *et al.* (2016) con una estrategia pedagógica adecuada, la enseñanza utilizando el ciclo ACE (actividades en grupos, discusión en clase, y ejercicios), los estudiantes de nivel secundario pueden construir un Proceso de función exponencial en los racionales a partir de multiplicación repetida. En este estudio no se consideró el entendimiento gráfico de las funciones exponenciales y por lo tanto no se consideró la extensión de función exponencial de los racionales a todos los reales.

Las observaciones del estudio permiten refinar las actividades. Por ejemplo, proponemos que para que los estudiantes construyan un Proceso de potencia fraccionaria unitaria se debe dar énfasis a la representación verbal. Anticipamos que este énfasis va a contribuir a que los estudiantes construyan un Proceso de potencia fraccionaria unitaria que luego pueden encapsular en un Objeto sobre el cual hacer acciones para extender función exponencial a los racionales.

Para finalizar, los resultados de este estudio facilitaron datos que nos permitieron contestar la primera pregunta de investigación: La descomposición genética que se propone en este segundo ciclo, ¿qué tan bien describe cómo los estudiantes entienden función exponencial? Podemos afirmar que la DG describió efectivamente lo que la mayor parte de los estudiantes pudieron construir para entender función exponencial. También, los datos obtenidos en el estudio nos permitieron contestar la segunda pregunta de investigación: De las construcciones mentales conjeturadas en la descomposición genética de función exponencial, ¿cuáles son las construcciones que estudiantes de secundaria dan muestra

de poder hacer y las que les causan dificultad? Las construcciones mentales conjeturadas en la descomposición genética que los estudiantes evidenciaron poder hacer fueron: Proceso de multiplicación repetida, coordinación de un Proceso de multiplicación repetida con un Proceso de exponenciación para construir un Proceso de función exponencial en los naturales, extender el Proceso de función exponencial en los naturales a un Proceso de función exponencial en los enteros y, para la mitad de los estudiantes, construir un Proceso de potencia fraccionaria unitaria. Tres de los cuatro estudiantes que evidenciaron construir este último Proceso lo pudieron extender a un Proceso de función exponencial en los racionales. La construcción más difícil para los estudiantes resultó ser la de un Proceso de Potencia fraccionaria unitaria.

Una limitación del estudio es que trata solo un aspecto de las funciones exponenciales. La investigación debe expandirse para incluir gráficas de funciones exponenciales, funciones logarítmicas, y otros temas tales como ecuaciones exponenciales y logarítmicas y el uso de funciones exponenciales y logarítmicas para diversas aplicaciones de modelado.

REFERENCIAS

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS Theory A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer New York Heidelberg Dordrecht London. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6>
- Borji, V., Surynková, P., Kuper, E., y Robová, J. (2023). University students' understanding of exponential and logarithmic concepts: in case of real-world situations. *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*, 2291–2298. Alfréd Rényi Institute of Mathematics; Eötvös Loránd University of Budapest, Hungary. (hal-04404329)
- Confrey, J., y Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 135–164. <https://doi.org/10.1007/BF01273661>
- Confrey, J., y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66–86. <https://doi.org/10.2307/749228>
- Díaz-Berrios, T., y Martínez-Planell, R. (2022). High school student understanding of exponential and logarithmic functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 66, 1–20. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100953>

- Dubinsky, E., y McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergrad mathematics education. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 273–280). Kluwer. <https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7>
- Ellis, A. B., Özgür, Z., Kulow, T., Williams, C. C., y Amidon, J. (2015). Quantifying exponential growth: Three conceptual shifts in coordinating multiplicative and additive growth. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 135–155. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.004>
- Ellis, A. B., Özgür, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., y Amidon, J. (2016). An exponential growth learning trajectory: Students' emerging understanding of exponential growth through covariation. *Mathematical Thinking and Learning*, 18(3), 151–181. <https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1183090>
- Ferrari-Escolá, M., Martínez-Sierra, G., y Méndez-Guevara, M. E. M. (2016). Multiply by adding: Development of a logarithmic-exponential covariational reasoning in high school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, 42, 92–108. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.03.003>
- Kidron, I. (2018). Students' conceptions of irrational numbers. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4(1), 94–118. <https://doi.org/10.1007/s40753-018-0071-z>
- Kuper, E., y Carlson, M. (2020). Foundational ways of thinking for understanding the idea of logarithm. *Journal of Mathematical Behavior*, 57(100740) 1–18. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100740>
- Murmur, O., y Zazkis, R. (2021). Irrational gap: sensemaking trajectories of irrational exponents. *Educational Studies in Mathematics*, 107, 25–48. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10027-2>
- Sirotic, N., y Zazkis, R. (2007). Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 49–76. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9041-5>
- Weber, K. (2002). Students' understanding of exponential and logarithmic functions. En *Proceedings of the 24th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1019–1027, Athens, GA.

Autor de correspondencia

TOMÁS DÍAZ-BERRÍOS

Dirección Calle Juan D Rivera y Santiago, 00720,
Orocovis, Puerto Rico
tomasmat301@gmail.com

Evaluación de la Razonabilidad Numérica en alumnado de secundaria

Assessment of Numerical Reasonableness in secondary school students

Macarena Fariña,¹ Alicia Bruno²

Resumen: Este trabajo analiza cómo alumnado de secundaria (13-14 años) evalúa si el resultado de una repuesta numérica es razonable. Se realizó una prueba escrita con cinco actividades en las que aparecen operaciones con números decimales y fracciones. Las actividades están diseñadas para que el alumnado pueda utilizar justificaciones diferentes para evaluar la razonabilidad numérica. Entre estas justificaciones tenemos la adecuación al contexto, el cálculo operatorio, la estimación numérica y la estimación gráfica. También se analiza la seguridad que manifiesta el alumnado con su respuesta. Los resultados indican que la evaluación de la razonabilidad numérica y la seguridad de las repuestas varía según el tipo de actividades y que el alumnado es capaz de evaluar con seguridad la razonabilidad de una actividad numérica, aunque recurre mayoritariamente al uso de cálculos exactos por encima de otros tipos de justificaciones. Este resultado pone de manifiesto la importancia de fomentar en el alumnado el uso de diferentes estrategias para evaluar si una respuesta numérica es razonable.

Palabras claves: *razonabilidad numérica; seguridad; estimación numérica; estimación gráfica; cálculo.*

Fecha de recepción: 27 de febrero de 2024. **Fecha de aceptación:** 10 de abril de 2025.

¹ Universidad de la Laguna, Tenerife, España, macarena.farcast@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0008-8259-4258>

² Universidad de la Laguna, Tenerife, España, abruno@ull.edu.es, <https://orcid.org/0000-0002-0154-8073>

Abstract: This paper analyzes how secondary school students (13-14 years old) evaluate the result of a numerical answer in a reasonable way. A written test was conducted with five activities involving operations with decimal numbers and fractions. The activities were designed for students to employ different justifications to assess numerical reasonableness. These justifications include contextual appropriateness, operative calculation, numerical estimation, and graphical estimation. It also examines the confidence expressed by the students in the answers they have provided. The results indicate that the assessment of numerical reasonableness and confidence in responses varies according to the type of activities and students can assess the reasonableness of numerical tasks with confidence, although they mainly resort to the use of exact calculations over other types of justifications. This result highlights the importance of encouraging students to use different strategies to assess numerical reasonableness.

Keywords: *numerical reasonableness; confidence; numerical estimation; graphical estimation; calculation*

INTRODUCCIÓN

El sentido numérico se define como una red conceptual bien organizada que permite relacionar los números con las operaciones y sus propiedades para resolver problemas de una forma creativa y flexible (Swoder, 1992, p. 381). Tanto documentos curriculares como distintas investigaciones han caracterizado el sentido numérico a través de componentes con el fin de hacerlo operativo para organizar su desarrollo en el aula y en la investigación (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989; McIntosh, *et al.*, 1992; Reys y Yang, 1998; Yang, 2003). Aunque con algunas diferencias entre unos trabajos y otros, hay un consenso en señalar las siguientes componentes fundamentales: a) comprender el significado de los números; b) reconocer el tamaño relativo y absoluto de los números; c) usar puntos de referencia; d) usar representaciones de los números y las operaciones; e) identificar el efecto relativo de las operaciones; f) establecer relaciones entre las operaciones; g) hacer uso de las propiedades de las operaciones para facilitar un cálculo numérico; h) estimar el resultado de operaciones; comprender la relación entre el contexto del problema y la operación necesaria; i) ser consciente de que existen múltiples estrategias; j) evaluar

el resultado y reconocer si es razonable. Estas componentes no son independientes y suelen combinarse en la resolución de diferentes actividades numéricas, al tiempo que no deben considerarse cerradas (McIntosh, *et al.*, 1992). Este trabajo se centra en la última de las componentes citadas, la cual siguiendo la terminología de Alajmi (2009) denominaremos de forma más concisa evaluar la razonabilidad numérica de una tarea o actividad.

McIntosh, *et al.* (1992) indican que, cuando se llega a una solución, las personas con sentido numérico examinan su respuesta en función de la situación planteada originalmente (incluyendo los números y las preguntas formuladas), para determinar si su respuesta “tiene sentido”. Muchos estudiantes a menudo omiten esta evaluación quizás porque no sienten que el resultado sea importante, más allá de haber llegado a una solución, o puede que observen que esta acción no es requerida por el profesor de forma explícita. Para que el alumnado desarrolle la habilidad de evaluar un resultado numérico, debe fomentarse que se haga preguntas adecuadas antes del proceso de realización de la tarea: “¿qué resultado espero obtener?”, “¿a qué número estará próximo el resultado?”; y después de finalizar la resolución: “¿el resultado está próximo a lo que esperaba?” o “¿tiene sentido esta solución en este contexto?” Estas últimas preguntas pueden asociarse a la última fase del proceso de resolución de un problema indicado por Polya (1945), y que denomina “mirar hacia atrás” o “evaluar el resultado”. En este trabajo la entendemos de forma más amplia, pues es una reflexión que debe realizarse en cualquier ejercicio numérico, e incluso, en cualquier paso de su proceso de realización.

La evaluación del resultado numérico es importante en situaciones dentro y fuera del aula. De hecho, indica Grayer (2009) que, plantearse si un dato numérico o un resultado a una operación es razonable se utiliza en una amplia gama de actividades cotidianas, que van desde valorar si la cuenta en un restaurante es correcta, comprobar el cambio de dinero al pagar, decidir la dosis de un medicamento, etcétera.

Por otra parte, son varios los currículos europeos que incluyen el sentido numérico como uno de los objetivos a trabajar en el aula, sin embargo, en diversas ocasiones se promueven poco sus componentes, poniendo el foco en la enseñanza de procesos algorítmicos (Clarke *et al.*, 2012). En España, la nueva ley de Educación en el currículo de Matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria (Real Decreto 217/2022), incluye entre sus saberes básicos el sentido numérico, indicando que “se caracteriza por la aplicación del conocimiento sobre numeración y cálculo en distintos contextos, y por el

desarrollo de habilidades y modos de pensar basados en la comprensión, la representación y el uso flexible de los números y las operaciones”. Como se observa, se sitúa el sentido numérico muy próximo al indicado por Swoder (1992). A su vez, una de las competencias específicas de este nivel educativo hace referencia a que alumnado debe ser capaz de “analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para evaluar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global”.

Como veremos en el siguiente apartado, hasta el momento los estudios realizados sobre razonabilidad numérica se sitúan mayoritariamente en Asia y Estados Unidos (Alajmi y Reys, 2007, 2010; Sianturi *et al.*, 2023; Yang, 2022; Yang y Sianturi, 2019a, 2019b, 2021), y en menor medida en el contexto español (Almeida y Bruno, 2016, 2017). Teniendo en cuenta la gran importancia que tiene esta habilidad en la vida cotidiana, a nivel curricular y en el desarrollo del aprendizaje matemático en general, se muestra necesario avanzar en el conocimiento de cómo la aplican los estudiantes. En este caso, el presente trabajo expone los resultados de una prueba para observar la capacidad para valorar la razonabilidad de respuestas numéricas de alumnado de 2º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en España.

MARCO TEÓRICO

Evaluar de forma efectiva lo razonable de un resultado en una tarea numérica requiere conocer diferentes estrategias numéricas y tener la inclinación a dar argumentos matemáticos, más allá de volver a efectuar las operaciones ya realizadas (pues esto último, en ocasiones, es muy costoso en determinadas tareas). En este sentido, Alajmi y Reys (2010) estudiaron cómo 200 estudiantes de secundaria de Taiwán valoraban si sus respuestas a tareas numéricas eran o no razonables. Observaron que más del 60% de los estudiantes repetían los algoritmos escritos, sin poner en juego otras habilidades como cálculo mental, estimación, uso de puntos de referencia o aplicación de propiedades de las operaciones. Este mismo hecho ya había sido concluido con anterioridad por McIntosch *et al.* (1992), argumentando que el alumnado optaba por repetir sus cálculos, antes que usar otros argumentos basados en el contexto o en las propiedades numéricas. Del mismo modo, Yang y Sianturi (2019a, 2021) realizaron estudios con alumnado de 6º grado de primaria en Indonesia y Hong Kong llegando a la conclusión

de que la dificultad para valorar la razonabilidad de una respuesta numérica provenía principalmente de errores conceptuales y escasa comprensión de las propiedades de los números y las operaciones. En concreto, Yang y Sianturi (2019b) indican que el alumnado no desarrolla correctamente esta componente del sentido numérico debido: a) al arraigo que tienen en el uso de reglas o algoritmos escritos; b) a que poseen conceptos erróneos relacionados con contenidos matemáticos esenciales; y c) que están centrados en prepararse para realizar exámenes estatales en los que no es necesario usar estrategias más flexibles y propias de un adecuado sentido numérico. Este último hecho hace que el profesorado, e incluso los libros de texto, no los promuevan en el aula (Alajmi y Reys, 2007). Una razón puede ser que los propios profesores no están habituados a evaluar sus respuestas o incluso presentan ciertas debilidades matemáticas para ello. Así, Veloo (2010) en un estudio realizado en Brunei Darussalam comparó las habilidades de 237 profesores de primaria y 35 de secundaria, observando un mayor dominio del sentido numérico por parte de los segundos, aunque lo consideró bajo en ambos grupos. Además, señaló que las áreas de debilidad de los profesores de primaria eran similares a la de los estudiantes de secundaria. En concreto observó que la mayoría de ellos no demostraron el uso de estrategias de estimación para juzgar la razonabilidad de los resultados de cálculo. Por ejemplo, 39% de profesores de primaria entendieron que $589 \times 0.95 = 595.45$ era una respuesta razonable y 23% lo indicó para $45 \times 1.05 = 39.65$. Estos resultados se derivan de sus ideas previas sobre los números naturales, que los llevan a pensar que multiplicar siempre da un número mayor, mientras que dividir da un número menor (Bell *et al.*, 1984; Graeber *et al.*, 1989).

Por otro lado, Alajmi y Reys (2007), en su estudio realizado en Taiwán, constataron que, aunque el profesorado de matemáticas de secundaria consideraba útil saber valorar lo razonable de las respuestas numéricas, no trabaja estrategias para ello en el aula. En este mismo estudio, el profesorado afirmó que cuando un estudiante resuelve una tarea numérica eligiendo las operaciones adecuadas, aunque cometa un error de cálculo que le lleva a una respuesta alejada de la correcta, evaluará su respuesta como razonable. Es decir, para los docentes de dicho estudio una respuesta a una cuestión numérica es razonable si se realizan los cálculos que pretendía el enunciado, aunque el resultado se aleje bastante del correcto. Por otro lado, aunque estos profesores reconocían que la estimación es una herramienta útil en la vida cotidiana, consideraban que el aprendizaje en la escuela debe centrarse en adquirir otro tipo de conocimiento numérico, asociado

a la adquisición de procedimientos estándares curriculares. En este sentido, en el currículo español actual (Real Decreto 217/2022), se promueve una mirada alentadora hacia la promoción de esta componente del sentido numérico a través de una competencia específica.

Se han realizado pocas investigaciones sobre la capacidad del alumnado para juzgar la razonabilidad de las respuestas y, normalmente se ha estudiado como un aspecto secundario en estudios que analizan la comprensión y uso de la estimación numérica (Alajmi, 2009). También se ha analizado en relación con otras componentes del sentido numérico. Es el caso de Yang *et al.* (2008), quienes estudiaron la habilidad de los alumnos de quinto grado de primaria en Taiwán, respecto a las cuatro componentes del sentido numérico siguientes: “reconocer el tamaño relativo de los números”; “usar múltiples representaciones de los números y las operaciones”; “comprender el efecto relativo de las operaciones”; y “reconocer cuando un resultado obtenido es razonable”. Concluyeron que los mejores resultados se encuentran en las actividades sobre “reconocer el tamaño relativo de los números”, mientras que las mayores dificultades se referían a “reconocer cuando un resultado obtenido es razonable”.

Yang y Sianturi (2019b) invitan a priorizar el desarrollo de estrategias de sentido numérico en el aula por encima de la enseñanza de reglas y algoritmos. Entre las estrategias propuestas se encuentran usar la estimación numérica y las representaciones múltiples y valorar la razonabilidad de sus respuestas. Como se decía con anterioridad, las componentes del sentido numérico están relacionadas entre sí, por lo que es evidente que para desarrollar una correcta razonabilidad será necesario tener otras estrategias como la estimación numérica o las múltiples representaciones de los números y las operaciones.

Alajmi y Reys (2007, 2010) indican que los criterios que el alumnado tiene para valorar la razonabilidad de una respuesta numérica son: a) la relación entre los números y el efecto de las operaciones y b) el sentido práctico de la respuesta. El primero de los criterios se refiere al conocimiento del alumnado sobre la relación que existe entre los números y las operaciones, que le permite identificar la frontera de una respuesta razonable. Por ejemplo, si se pregunta si es razonable este resultado: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$, el alumnado capaz de establecer relaciones entre los números podría indicar, sin hacer cálculo, que, puesto que $\frac{1}{2}$ es la mitad de la unidad y se suma un poco más ($\frac{1}{3}$), no tendría sentido que la solución fuera inferior a la mitad de la unidad ($\frac{2}{5}$). Sin embargo, el alumnado suele recurrir a ideas erróneas sobre fracciones como la que se establece en el ejemplo anterior de sumar dos fracciones sumando numeradores y

denominadores por separado porque no ha desarrollado una representación mental adecuada del concepto de fracción (Cramer *et al.*, 2018) o por el fuerte arraigo del conocimiento previo de los números naturales que los lleva a aplicar reglas similares de operatoria (Vamvakoussi *et al.*, 2012). El segundo de los criterios se refiere a la capacidad del alumnado para establecer relaciones entre la solución obtenida y el contexto. Por ejemplo, una fracción no puede ser la respuesta razonable para un problema de división en el que se da un total de personas y un número de coches, y se quiere averiguar cuántas personas pueden ir en cada coche. Ambos criterios están interrelacionados y permiten al alumnado poner en práctica diferentes estrategias entre las que destacan la estimación numérica y el uso de puntos de referencia numéricos para determinar la razonabilidad de una respuesta. Por otra parte, diferentes estudios han mostrado que apoyarse en representaciones es una habilidad importante asociada al sentido numérico y se incluye como una de sus componentes. Akkaya (2016) observó que usar diferentes representaciones es una estrategia útil para valorar si un resultado es razonable en el contexto de tareas con números decimales. Por su parte, Cramer *et al.*, (2018) indican que cuando el alumnado conoce en profundidad una representación gráfica de un concepto matemático, es capaz de desarrollar habilidades de cálculo y estimación numérica que le permiten valorar lo razonable de las respuestas numéricas. Es por ello por lo que, en este trabajo, incluimos como tercer criterio para valorar la razonabilidad de una respuesta numérica: c) utilizar representaciones gráficas.

Por otro lado, el alumnado será incapaz de desarrollar estos criterios para valorar la razonabilidad de una respuesta numérica si posee ideas matemáticas erróneas. Varios estudios relacionan el éxito de los estudiantes a la hora de indicar una respuesta para resolución de un problema con la seguridad que manifiestan sobre dichas respuestas y razonamientos (Caleon y Subramaniam, 2010; Yang y Sianturi, 2019a, 2019b, 2021). Estos estudios se han llevado a cabo utilizando test de tres niveles (pregunta y respuesta, justificación de la respuesta, seguridad en la respuesta) con los que se posibilita identificar las ideas erróneas en relación con el tópico de estudio, presentando la siguiente clasificación del alumnado: (1) una respuesta correcta o incorrecta con bajo grado de seguridad indica lagunas de conocimiento; (2) una respuesta correcta con un alto grado de seguridad indica un profundo conocimiento de los conceptos; (3) una respuesta incorrecta con un grado de seguridad alto indica la presencia de ideas erróneas; (4) un grado de seguridad bajo con un desempeño alto puede atribuirse al estilo personal del alumnado (con escasa confianza en sí mismo)

o a una laguna de conocimiento que lo empuja a responder al azar y acertar en sus respuestas.

La evaluación de la confianza o seguridad de su respuesta promueve en el alumnado un pensamiento más profundo y juega un papel esencial en el desarrollo del aprendizaje (Foster, 2016). Además, conocer con qué seguridad el alumnado se está enfrentando a una actividad matemática, posibilita que los docentes puedan elegir la secuencia de aprendizaje más apropiada, adaptándola a las necesidades individuales. Esta adaptación es de suma importancia dado que el alumnado que ha desarrollado ideas erróneas con un alto grado de confianza suele considerar razonables sus argumentos, a pesar de que le lleve a dar respuestas incorrectas, y estos pensamientos son resistentes al cambio (González-Forte *et al.*, 2023).

OBJETIVOS

A pesar de la importancia que tiene evaluar las respuestas en cualquier tarea matemática y en especial aquellas que abordan cuestiones numéricas, encontramos escasos estudios que analicen directamente la razonabilidad numérica a nivel internacional. Este hecho cobra importancia en el ámbito español dado el énfasis en el currículo actual en el desarrollo de esta habilidad matemática. Por otra parte, el estudio sobre la seguridad del alumnado en sus valoraciones aporta una visión complementaria respecto a sus decisiones, sean correctas o no.

Tras hacer una revisión de la literatura concerniente a la razonabilidad y seguridad en sus respuestas del alumnado, podemos indicar los objetivos del presente estudio:

- Evaluar el éxito por parte del alumnado de secundaria para valorar la razonabilidad de la solución de una tarea numérica.
- Observar las justificaciones que elige el alumnado de secundaria para valorar la razonabilidad de una solución numérica.
- Relacionar las justificaciones que elige el alumnado de secundaria con la seguridad de su respuesta.

METODOLOGÍA

PARTICIPANTES

Se realizó un estudio descriptivo con 46 estudiantes (27 chicas y 19 chicos) de Segundo de Educación Secundaria Obligatoria de un colegio concertado de La Orotava (Tenerife). Se trata de un centro de línea 2 que abarca los estudios de Educación Infantil, Primaria y Secundaria. Los estudiantes de este centro educativo provienen mayoritariamente de la zona centro de La Orotava, donde la actividad económica radica en el sector servicios y la agricultura. Las familias participan, generalmente, en las actividades a las que se les convoca desde el centro y su nivel socioeconómico es medio-bajo.

En cuanto a sus resultados académicos en matemáticas, hay que indicar que se trata de un grupo heterogéneo en el que encontramos a 11 estudiantes con resultados académicos de sobresaliente y 10 estudiantes con resultados académicos bastante bajos.

INSTRUMENTO

Para llevar a cabo el estudio se realizó una prueba consistente en cinco actividades numéricas. En dos de ellas, el alumnado debía valorar si la solución ya dada era correcta, mientras que en las otras tres debía elegir la respuesta correcta entre varias opciones. En todos los casos, se solicitaba una justificación de su respuesta. Las actividades eran de respuesta múltiple, por lo que el alumnado ya tenía a su disposición algunos argumentos para justificar sus elecciones o bien podía indicar sus propios argumentos. La prueba se llevó a cabo realizando cada actividad un día diferente durante dos semanas consecutivas y dejando al alumnado un máximo de 15 minutos para resolverla. Previamente se les indicaba que no era necesario usar lápiz y papel para realizar cálculos y que el uso de la calculadora no estaba permitido. Las sesiones en las que se llevaba a cabo la prueba se intercalaron con sesiones habituales de estudio de otros contenidos matemáticos.

Para la elaboración de estas actividades se tomó como ejemplo la prueba en tres niveles de Yang y Sianturi (2019a, 2021) en la cual, en primer lugar, el alumnado elige una opción de respuesta, a continuación, elige una justificación y, por último, indica el grado de seguridad con el que ha respondido. Nuestro trabajo difiere del anterior en que se les permitió elegir más de una opción de justificación

y una opción abierta a “otros motivos o soluciones” en la que podía expresar sus propios argumentos. Se diseñó de esta forma porque, en estudios previos de las autoras (Fariña y Bruno, 2021), se constató que el alumnado puede tener más de una razón para justificar si una respuesta es razonable o no mostrar acuerdo con ninguna de ellas. Ambos aspectos podrían contribuir a que el alumnado mostrara una mayor seguridad en las respuestas. Además, también se cambió la forma de realizar la prueba, dado que se llevó a cabo en papel en la clase habitual, por parte de una investigadora que al tiempo es profesora de los estudiantes, en vez de hacerlo con ordenadores como en el caso de los autores citados. El hecho de realizarlo en papel puede contribuir a una mayor facilidad para realizar una representación gráfica o una expresión matemáticamente más compleja de escribir con el ordenador. Por otra parte, las actividades fueron de creación propia excepto la actividad 3, tomada de Yang y Sianturi (2019a).

Se presentan a continuación los enunciados de las diferentes actividades utilizadas, junto con una explicación de estas. En ellas indicamos lo que se ha considerado una respuesta correcta e incorrecta, respecto de lo razonable. En general, se considera que una respuesta es correcta cuando el estudiante elige una opción que valora lo razonable del resultado de la tarea con una justificación válida, e incorrecta en caso contrario. Esto se hace en cada actividad desde diferentes perspectivas que se detallan en la tabla 1.

Tabla 1. Tipos de actividades

Actividad	Tipo de actividad
1	Razonabilidad de la solución respecto al contexto
2	Razonabilidad de la solución respecto al resultado de las operaciones en un contexto
3	Razonabilidad de la solución respecto al resultado de las operaciones con estimación numérica
4	Razonabilidad de la solución a través de la estimación numérica en suma de fracciones
5	Razonabilidad de la solución a través de la estimación numérica y gráfica en suma de fracciones

En la Actividad 1 (figura 1) se muestra un problema de división medida ya resuelto. En este caso, la evaluación de la respuesta tiene que ver con la no adecuación al contexto, dado que no es razonable decir que “va a comprar 9,75 cajas” aunque este sea el resultado numérico de la operación. De este modo, consideramos como respuesta correcta cuando se elige la opción negativa n3. Las respuestas afirmativas a1 – a4 no se consideran correctas por no evaluar el resultado respecto al contexto, aunque se hayan evaluado los cálculos adecuadamente.

Andrés va a comprar cajas para guardar 234 bolígrafos. Quiere poner 24 bolígrafos en cada una. ¿Cuántas cajas necesita comprar Andrés? $234:24 = 9,75$ Solución: Andrés dice que va a comprar 9,75 cajas	
¿Crees que la respuesta de Andrés es correcta? ☐ Sí ☐ No	
En caso afirmativo, ¿por qué? a1) Ha elegido la operación adecuada a2) Ha resuelto correctamente la operación a3) El resultado es exacto a4) Otro motivo:	En caso negativo, ¿por qué? n1) No ha elegido la operación adecuada n2) No ha resuelto correctamente la operación n3) La operación y el resultado son correctos, pero no tiene sentido dar una solución decimal n4) Otro motivo
¿Cómo de seguro estás de tu respuesta? ☐ Nada seguro ☐ Poco seguro ☐ Neutral ☐ Seguro ☐ Muy seguro	

Figura 1. Actividad 1.

En la solución al problema de la Actividad 2 (figura 2) hay un error de cálculo en la resta $20 - 5,85 = 15,15$, que lleva a que la solución dada no sea razonable. Esto puede descubrirse por estimación, observando que el resultado no puede ser mayor de 15 dado que se está restando 5,85 a 20, o bien, realizando las operaciones. Por ello, se da a los estudiantes dos opciones correctas: n2) las operaciones elegidas son adecuadas, pero hay un error de cálculo en la devolución; y n3) en la que se razona empleando una estimación numérica en el contexto del dinero. Aunque previamente se informaba al alumnado que no era necesario el uso de lápiz y papel, se incluye esta opción para valorar el alumnado que sigue priorizando el uso del cálculo sobre otras estrategias.

Cinco amigos se reúnen para desayunar. Tres toman café mientras que el resto elige zumo. El precio de cada café es 0,85 € y el zumo 1,65 €. Si pagamos con un billete de 20€, ¿cuánto nos devuelven? $0,85 \cdot 3 = 2,55$ $1,65 \cdot 2 = 3,30$ Cuenta: $2,55 + 3,30 = 5,85\text{€}$ Devolución: $20 - 5,85 = 15,15\text{€}$ Solución: Si pagamos con un billete de 20€ nos devolverán 15,15€	
¿Crees que la solución dada es correcta? ☐ Sí ☐ No	
En caso afirmativo, ¿por qué? a1) Se han elegido las operaciones adecuadas a2) Se han resuelto correctamente las operaciones a3) La respuesta final es correcta a4) Otro motivo:	En caso negativo, ¿por qué? n1) Las operaciones elegidas no son adecuadas n2) Las operaciones elegidas son adecuadas, pero hay un error de cálculo en: A - el precio de cafés y zumos B - el precio final C - la devolución n3) No tiene sentido. Si cuesta más de 5€ el desayuno, no pueden devolverte 15€ n4) Otro motivo
¿Cómo de seguro estás de tu respuesta? ☐ Nada seguro ☐ Poco seguro ☐ Neutral ☐ Seguro ☐ Muy seguro	

Figura 2. Actividad 2.

En la Actividad 3 (figura 3), tomada de Yang y Sianturi (2019a), el alumnado debe elegir qué operación se aproxima más a un resultado dado, siendo operaciones de suma y multiplicación que involucran números decimales. En este caso la justificación de la opción se presenta para que el alumnado dé los argumentos que considere oportunos y de esta forma observar cómo argumentaban ellos mismos su respuesta. Codificamos como respuesta correcta cuando el estudiante elige la opción b), argumentando a través del cálculo o la estimación, generalmente usando la propiedad de que cualquier número multiplicado por 1 da el mismo número.

Sin usar lápiz y papel ni calculadora, ¿cuál de las siguientes operaciones se aproxima más a 1? a) $0,9 + 1$ b) $0,9 \cdot 1$ c) $0,9 + 0,9$ d) $0,9 \cdot 0,9$
¿En qué te has basado para dar tu respuesta?
¿Cómo de seguro estás de tu respuesta? ☐ Nada seguro ☐ Poco seguro ☐ Neutral ☐ Seguro ☐ Muy seguro

Figura 3. Actividad 3

La Actividad 4 (figura 4) proporciona cinco opciones para que el alumnado elija el resultado de una suma de fracciones junto a un argumento. En este caso, se considera como respuesta correcta aquella que opta por la realización del cálculo (opción c) o por una estimación numérica (opción d), dado que las otras opciones implican usar una regla operatoria incorrecta. Como en las actividades anteriores, se les da la posibilidad de elegir la opción del cálculo, aunque se les indique previamente que no es necesario usar lápiz y papel, para ver en qué proporción el alumnado se siente más seguro recurriendo exclusivamente al uso de cálculos frente al que se siente cómodo haciendo uso de estimaciones numéricas.

Estima el resultado de la siguiente operación con fracciones: $\frac{4}{5} + \frac{7}{6} = ?$
a) 11/11 porque sumamos los numeradores y denominadores entre sí. b) 11/30 porque calculamos el m.c.m. de los denominadores y sumamos los numeradores. c) 59/30 porque reducimos a común denominador y operamos las fracciones obtenidas. d) 2 aproximadamente, porque cada fracción representa casi la unidad, por lo que su suma está cerca de dos. e) Otra solución:
¿Cómo de seguro estás de tu respuesta? ☐ Nada seguro ☐ Poco seguro ☐ Neutral ☐ Seguro ☐ Muy seguro

Figura 4. Actividad 4.

La Actividad 5 (figura 5) se centra en la estimación decimal o en el uso de gráficas de rectángulos para estimar la solución de la suma de dos fracciones unitarias cuyo resultado es menor que la unidad. A diferencia de la actividad anterior, se busca alejar a los estudiantes de las justificaciones basadas en los cálculos de las reglas de suma de fracciones. Para ello se les ofrece dos opciones con estimaciones de tipo gráfico y una opción con estimación pasando las fracciones a su expresión decimal. Se darán como correctas las respuestas que indiquen las opciones a) y/o c), además de la d) con una explicación adecuada.

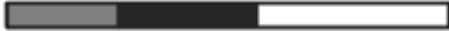
Estima el resultado de la siguiente operación con fracciones: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = ?$
a) 0,5 aproximadamente, porque cada fracción se aproxima a 0,25 por lo que su suma está cerca de 0,5 b) 0,75 aproximadamente, puesto que al realizar la gráfica tenemos: 
c) 0,6 aproximadamente, puesto que al realizar la gráfica tenemos: 
d) Otra solución:
¿Cómo de seguro estás de tu respuesta? ☐ Nada seguro ☐ Poco seguro ☐ Neutral ☐ Seguro ☐ Muy seguro

Figura 5. Actividad 5.

Al finalizar cada actividad, el estudiante debía indicar el grado de seguridad con el que había dado su respuesta. Las opciones eran: nada seguro, poco seguro, neutral, seguro o muy seguro. Este grado de seguridad nos indicaba si el alumnado tenía confianza en sus conocimientos para hacer la elección adecuada o no, a la vez que nos permitía comprobar si las respuestas más razonables se corresponden con el alumnado más seguro de sus capacidades o si, por el contrario, abunda una falsa seguridad entre estudiantes con pocas habilidades para valorar la razonabilidad de una respuesta numérica.

ANÁLISIS

Para llevar a cabo el análisis de los resultados se tuvo en cuenta dos aspectos. En primer lugar, se clasificaron las respuestas del alumnado en Correcta e Incorrecta, tal y como hemos detallado en el apartado de instrumento. Además, se subclasificaron sus respuestas, en aquellas actividades en las que fuera posible, según su tipo de argumento: contexto (CT), cálculo (C), estimación numérica (EN), estimación gráfica (EG) y mezcla o combinación de argumentos presentes en la actividad (M). En este caso, también fue preciso establecer una categoría de “Sin argumento” (A) para aquellos estudiantes que no elegían un argumento para su respuesta, y una categoría de “Incoherente” (I) para estudiantes que eligen un argumento que no tiene sentido según su primera elección de respuesta o que eligen dos argumentos incompatibles entre sí.

En segundo lugar, se analizó el grado de seguridad del alumnado en cada actividad y se relacionó con sus respuestas. Se codificaron como: Nada seguro (NS), Poco seguro (PS), Neutral (N), Seguro (S) o Muy seguro (MS). De esta forma, podemos valorar si el alumnado posee ideas erróneas en relación con las operaciones con números decimales y fracciones. Los estudios previos en los que se ha relacionado los resultados de los estudiantes con su grado de seguridad a través del uso de una prueba en tres niveles han sido cuantitativos, con un alto número de estudiantes respondiendo a las actividades (Sianturi *et al.*, 2024; Yang y Sianturi, 2019a, 2019b, 2021). En estos trabajos, se otorgaron diferentes puntuaciones a las justificaciones del alumnado en función de si estaban basadas en el uso del sentido numérico, el cálculo, conceptos erróneos (lo que nosotros hemos catalogado como incoherente) o si no aportaban un argumento para su respuesta.

En nuestro trabajo no seguimos ese análisis estadístico, puesto que trabajamos con una muestra de 46 estudiantes con un objetivo exploratorio y descriptivo. No obstante, si pudimos relacionar los resultados del alumnado con su seguridad adaptando la escala de desempeño respecto a la de los trabajos anteriormente citados. Para ello, consideramos si su respuesta es correcta o no. Se define la siguiente escala de desempeño:

- Desempeño alto: 4 o 5 respuestas correctas en las 5 actividades.
- Desempeño medio-alto: 3 respuestas correctas.
- Desempeño medio-bajo: 2 respuestas correctas.
- Desempeño bajo: 1 respuesta correcta o ninguna.

En cuanto a la escala de seguridad, coincide con la utilizada en los trabajos previamente citados, es decir, se otorga los valores de 1 punto para NS, 2 puntos para PS, 3 puntos para N, 4 puntos para S y 5 puntos para MS. Así, pudimos calcular la media de cada estudiante en las 5 actividades y clasificarlas de la siguiente forma:

- Seguridad alta: mayor o igual a 3.3
- Seguridad media: entre 2.9 y 3.3
- Seguridad baja: menor o igual que 2.9

RESULTADOS

Se presentan los resultados de las repuestas a las actividades de la prueba, observando la elección de respuestas correctas e incorrectas, así como el grado de seguridad del alumnado con su elección.

En la tabla 2 se recogen las repuestas del alumnado a cada una de las actividades, indicando los argumentos elegidos en cada una. En el caso de que no se dé un tipo de argumento en una actividad, se indica poniendo un guion.

Tabla 2. Respuestas correctas, incorrectas y argumentos de las Actividades

	Correcta						Incorrecta			Blanco
	CT	C	EN	EG	M	A	C	EG	I	
Actividad 1	26	-	-	-	-	-	18	-	2	-
Actividad 2	-	21	2	-	17	-	4	-	1	1
Actividad 3	-	24	4	-	-	3	8	-	3	4
Actividad 4	-	15	1	-	1	-	28	-	1	-
Actividad 5	-	2	7	12	5	-	-	12	8	-

Como se aprecia en la tabla 2, en las Actividades 2 y 3, la mayoría del alumnado opta por respuestas correctas. En las Actividades 1 y 5, aproximadamente la mitad del alumnado opta por respuestas correctas, mientras que en la Actividad 4 se encuentra un mayor número de respuestas incorrectas. Aunque se

evidencia que el alumnado es capaz de usar estimaciones numéricas y gráficas, la tendencia al uso del cálculo es alta.

Si profundizamos en estos resultados fijándonos en cada actividad, nos encontramos con que, en la Actividad 1, 26 de los 46 estudiantes eligen la opción correcta según el contexto, algunos ratificando en “otro motivo” que tendría que comprar 10 cajas (figura 6).

En caso negativo, ¿por qué?
☐ No ha elegido la operación adecuada
☐ No ha resuelto correctamente la operación
☒ La operación y el resultado son correctos, pero no tiene sentido dar una solución decimal
☒ Otro motivo: No puede comprar 9.75 cajas, tendría que comprar 10 cajas.

Figura 6. Respuesta correcta según el contexto de la Actividad 1.

También encontramos en esta Actividad 1 dos respuestas incoherentes al seleccionar al mismo tiempo dos opciones incompatibles y el caso de un estudiante que no termina de comprender el problema, tal y como se muestra en la figura 7.

¿Crees que la respuesta de Andrés es correcta? ☐ Sí ☒ No
En caso afirmativo, ¿por qué?
☐ Ha elegido la operación adecuada
☐ Ha resuelto correctamente la operación
☐ El resultado es exacto
☒ Otro motivo: La operación está bien pero tendrías que dividir los bolígrafos que tienes entre las cajas en las que los quieres colocar.

Figura 7. Respuesta incoherente por incomprensión del enunciado de la Actividad 1.

En la Actividad 2, 21 de los 46 estudiantes se sitúan en la categoría de Cálculo. Estos estudiantes repiten la operación para asegurarse de que el resultado es correcto. Al hacerlo, se dan cuenta de que el error radica en el cálculo de la devolución y eligen la opción n2)-C. Es el caso del estudiante de la figura 8 que además corrige el error de cálculo. Otros 17 estudiantes siguen esta misma

estrategia, pero optan al mismo tiempo por la estimación numérica, eligiendo la opción n3). Solo dos estudiantes eligen la estimación numérica n3) de forma única, por encima del cálculo. Los estudiantes que dan una respuesta incorrecta son los que no encuentran el error de cálculo, eligiendo opciones afirmativas, o bien, se contradicen en sus respuestas, eligiendo las opciones negativas n1) y n2)-B.

En caso negativo, ¿por qué?

- ☐ Las operaciones elegidas no son adecuadas
☒ Las operaciones elegidas son adecuadas pero hay un error de cálculo en ☐ el precio de cafés y zumos / ☐ el precio final / ☒ la devolución
☐ No tiene sentido. Si cuesta más de 5€ el desayuno, no pueden devolverte 15€
☒ Otro motivo: la solución de la devolución es 14'15€ y no 15'15€

Figura 8. Respuesta correcta basada en cálculos de la Actividad 2.

En la Actividad 3, se observa que 42 estudiantes respondieron a esta cuestión, mientras que 4 dejaron la respuesta en blanco. De los 31 estudiantes que eligieron la opción correcta (b), 24 de ellos manifiestan que han realizado cálculos para establecer cuál es la respuesta correcta. En algunos casos escriben los cálculos en el papel, obviando la indicación previa de no usar lápiz y papel, en otros casos podrían haberse realizado de forma mental. Estos cálculos implican, en múltiples ocasiones, descartar las otras opciones. Otros 4 estudiantes de estos 24 afirman que las soluciones de las opciones distintas a la b) son mayores que la unidad. Un ejemplo de esta justificación se observa en la figura 9 con un razonamiento incorrecto. Solamente 4 alumnos usaron una estimación numérica, centrándose en la propiedad de que cualquier número multiplicado por 1 da el número inicial.

B.- ¿Sin usar lápiz y papel, cuál de las siguientes operaciones se aproxima más a 1?

☐ $0,9 + 1$
☒ $0,9 \cdot 1$
☐ $0,9 + 0,9$
☐ $0,9 \cdot 0,9$

¿En qué te has basado para dar tu respuesta?

En la lógica de que $0,9 \cdot 1$ va a ser el mismo número, mientras que los otros se suman o se multiplican, lo que quiere decir que va a dar mayor resultado que (1).

Figura 9. Respuesta correcta en la Actividad 3 con razonamiento incorrecto.

Por otra parte, 11 estudiantes dan respuestas incorrectas: 5 estudiantes eligen la opción a), 3 la opción b), 1 la opción d) y 3 una elección múltiple. En estos casos se observa que el alumnado prefiere elegir las opciones de suma frente a la multiplicación y muestran dificultades en estas operaciones y sus propiedades.

En la Actividad 4, 17 estudiantes eligen una respuesta correcta frente a 29 que eligen explicaciones incorrectas. En concreto, 28 estudiantes señalaron las opciones a) o b) optando por una regla operatoria incorrecta. En la figura 10, observamos la respuesta de un alumno que manifestó aplicar la regla de la división ("multiplicar en cruz") para sumar las fracciones. En cuanto a la respuesta incoherente que aparece en esta actividad, el estudiante eligió dos respuestas contradictorias y escribió "No lo entiendo", lo que nos indica que existe un desconocimiento de la suma de fracciones o dudas en lo que debía contestar en la actividad.

Tu respuesta:

- ☐ $\frac{11}{11}$ porque sumamos los numeradores y denominadores entre sí.
- ☐ $\frac{11}{30}$ porque calculamos el m.c.m. de los denominadores y sumamos los numeradores.
- ☐ $\frac{59}{30}$ porque reducimos a común denominador y operamos las fracciones obtenidas.
- ☐ 2 aproximadamente, porque cada fracción es casi la unidad, por lo que su suma está cerca de dos.
- ☒ Otra solución: $\frac{10}{12}$. Porque se cruzan (???)

Figura 10. Respuesta incorrecta en la Actividad 4.

Con relación a los 15 estudiantes que realizaron los cálculos de manera correcta, y señalaron la opción c), argumentan el proceso para sumar fracciones, tal y como se muestra en la figura 11.

☒ Otra solución: calculamos m.c.m. se divide por el de abajo y se multiplica por el de arriba sumamos numeradores y se deja el m.c.m.

Figura 11. Reescritura del proceso de suma de fracciones de la Actividad 4.

En la Actividad 5, 26 estudiantes optaron por respuestas correctas frente a 20 que tuvieron respuestas incorrectas. Los resultados en este caso fueron diversos en cuanto a las respuestas correctas. Así, los 2 estudiantes bajo la categoría de Cálculo recurrieron a realizar el cálculo exacto de la suma de fracciones, usando el mínimo común múltiplo y escribiendo en la categoría "Otra solución" la respuesta $7/12$. Entre los 5 que combinan estrategias un estudiante realizó también el cálculo exacto combinado con la estimación gráfica c) (figura 12), mientras que los otros 4 señalaron las opciones a) y c).

Tu respuesta:

☐ 0,5 aproximadamente, porque cada fracción se aproxima a 0,25 por lo que su suma está cerca de 0,5

☐ 0,75 aproximadamente, puesto que al realizar la gráfica tenemos:



☒ 0,6 aproximadamente, puesto que al realizar la gráfica tenemos:



☐ Otra solución:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = ? \quad \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 3} \quad 4 \overline{) 2} \\ 1 \overline{) 2} \quad 2 \overline{) 2} \\ \quad 1 \overline{) 2} \end{array}$$

mcm = $3 \cdot 2^2 = 12$
 $12 : 3 = 4 \cdot 1 = 4$
 $12 : 4 = 3 \cdot 1 = 3$

Figura 12. Respuesta correcta según cálculo y estimación gráfica en Actividad 5.

En cuanto al alumnado que eligió respuestas incorrectas, 12 eligieron la estimación gráfica más alejada de la respuesta exacta (opción b), mientras que 6 de los 8 estudiantes señalaron dos respuestas poco relacionadas en este caso, como son la estimación numérica a) junto a la estimación gráfica b), lo que muestra una inadecuada estimación de las dos fracciones o del número decimal 0,25 en la barra. Los estudiantes restantes eligieron las dos estimaciones gráficas de rectángulos, es decir, que aceptan ambas aproximaciones como próximas entre sí, mostrando poca precisión en la búsqueda de la respuesta correcta.

SEGURIDAD DEL ALUMNADO

Se presentan a continuación los resultados del alumnado en cuanto a su seguridad a la hora de dar una respuesta en cada actividad (tabla 3). Para ello, hemos dividido al alumnado entre aquellos que dan una respuesta correcta y los que optan por una respuesta incorrecta, y codificado su grado de seguridad.

Tabla 3. Seguridad del alumnado con su respuesta en las Actividades

	Correcta					Incorrecta				
	NS	PS	N	S	MS	NS	PS	N	S	MS
Actividad 1	0	0	7	9	10	0	0	2	6	12
Actividad 2	1	2	4	10	23	0	0	1	2	1
Actividad 3	1	3	7	5	15	2	5	2	1	1
Actividad 4	0	4	5	2	6	4	3	9	7	6
Actividad 5	3	10	4	7	2	3	5	7	4	1

De forma general, se observa que es poco el alumnado que afirma estar nada seguro de sus respuestas. Se aprecia que el alumnado que da respuestas correctas mayoritariamente afirma estar seguro o muy seguro de ellas, mientras que hay una mayor variación del grado de seguridad en el alumnado que opta por respuestas incorrectas.

En la Actividad 1, podemos observar que 19 de los 26 estudiantes que eligieron una justificación correcta (es decir, 70% de las respuestas correctas) y 18 de los 20 con justificación incorrecta (es decir, 90% de las respuestas incorrectas), indican que están seguros o muy seguros de la elección.

En la Actividad 2, se observa que el alumnado mayoritariamente se siente seguro o muy seguro si ha elegido una respuesta correcta y también si ha elegido una respuesta incorrecta. Asimismo los dos estudiantes que basaron su respuesta únicamente en la estimación numérica indicaron que se sentían seguros o muy seguros. Por otra parte, aunque pocos, se dan casos de estudiantes que se sienten poco o nada seguros a pesar de haber repetido los cálculos.

En la Actividad 3, observamos que, de las respuestas correctas, la mayoría se corresponden con niveles más altos de seguridad (20 de 31, es decir, 64%), mientras que las elecciones de respuestas incorrectas señalan niveles bajos de seguridad, ya que solo 2 de 11 (18%) estudiantes responden que se sienten seguros o muy seguros de su respuesta, frente a 7 que optan por señalar poca o ninguna seguridad (63%).

En la Actividad 4, se comprueba que 47% del alumnado que dieron respuestas correctas se declara muy seguro o seguro de ellas, así como 44% de los que dieron respuestas incorrectas. En general, hay una mayor dispersión en sus opciones de seguridad que en las anteriores actividades. En relación con los dos

estudiantes que usaron la estimación numérica, su grado de seguridad es neutral, por lo que no podemos establecer ninguna conclusión en cuanto a la asimilación de esta estrategia.

En la Actividad 5, se observa, al igual que en la actividad anterior, una dispersión entre las opciones. En este caso con tendencia a sentirse neutro o nada-poco seguro, tanto en las respuestas correctas (50%) como en las incorrectas (40%).

VALORACIÓN DE LA SEGURIDAD DEL ALUMNADO EN FUNCIÓN DE SUS RESULTADOS

La media de seguridad de todo el alumnado fue 3.66, lo que indica que, por lo general, suelen estar muy seguros de sus respuestas.

En la tabla 4 se establece la relación entre el desempeño del alumnado y su seguridad siguiendo las escalas de desempeño y seguridad definidas en el apartado metodológico de análisis.

Tabla 4. Distribución del alumnado en función de sus respuestas y grado de seguridad

Categorías	Seguridad alta	Seguridad media	Seguridad baja	Total
Desempeño alto	12 (26.09%)	2 (4.35%)	4 (8.69%)	18 (39.13%)
Desempeño medio-alto	9 (19.57%)	2 (4.35%)	1 (2.17%)	12 (26.09%)
Desempeño medio-bajo	6 (13.04%)	4 (8.69%)	1 (2.17%)	11 (23.90%)
Desempeño bajo	3 (6.52%)	0 (0%)	2 (4.35%)	5 (10.87%)
Total	30 (65.22%)	8 (17.39%)	8 (17.39%)	46 (100%)

Se observa que 65.22% del alumnado (30 alumnos) presenta una seguridad alta en sus respuestas, frente a 17.39%, tanto en la seguridad media como en la baja. De los que se sitúan en la seguridad alta, 26.09% (12 alumnos) también han mostrado desempeño alto, lo que indica que este alumnado posee el conocimiento matemático necesario para juzgar correctamente la razonabilidad de las respuestas numéricas abordadas. En cambio, 13.04% (6 alumnos) y 6.52% (3 alumnos) del citado grupo, mostraron un desempeño medio-bajo y bajo, que indica que tienen ideas equivocadas que están arraigadas con certeza. También se observa que 4 estudiantes se sitúan en desempeño medio con seguridad media. Por último, solamente 4.35% presenta un desempeño bajo con un grado de seguridad bajo, lo que indica que podrían tener lagunas en sus conocimientos que no les permiten

juzgar adecuadamente lo razonable de una respuesta. También son llamativos los 5 estudiantes que, presentando un desempeño alto o medio-alto, tienen seguridad baja en sus respuestas, lo que podría asociarse a un tema personal de falta de confianza en sus capacidades matemáticas.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Se ha presentado un estudio descriptivo en el que se evalúa el éxito por parte de alumnado de secundaria para valorar la razonabilidad de la solución de una tarea numérica, observando las justificaciones que siguen en dichas valoraciones. Esto se ha analizado en cinco actividades con números decimales y fracciones, en las que se les ha dado diferentes opciones para basar su justificación (asociadas al contexto, apoyándose en una estimación gráfica, realizando una estimación numérica o efectuando los cálculos exactos). También se han relacionado las justificaciones que eligen con la seguridad de las repuestas.

En los resultados de este estudio destaca que, en cuatro de las actividades analizadas, más de la mitad del alumnado evalúa de manera correcta el resultado mostrado, siendo la actividad que implicaba estimar la suma de dos fracciones unitarias la que produjo peores resultados de valoración. En este último caso, la mayoría del alumnado (61%) optó por realizar los cálculos aplicando reglas operatorias incorrectas, por ejemplo, aplicar la regla asociada a la división de fracciones de “multiplicar en cruz” o sumar numeradores y denominadores. Vamvakoussi *et al.* (2012) señalan que algunas dificultades del alumnado para operar con fracciones son debidas a que aplican propiedades de los números naturales. Por otra parte, el mayor éxito de evaluación de la razonabilidad de la respuesta se produjo en la actividad sobre estimaciones de operaciones de números decimales, en la que 40 de los 46 estudiantes optaron por una respuesta correcta. Por lo tanto, evaluar lo razonable del resultado ha estado condicionado por el contenido numérico que implica la actividad.

La justificación por la que optan para realizar la valoración del resultado también ha presentado resultados diferentes, en función de la actividad. La justificación predominante en la mayoría de las actividades se basa en el uso de cálculos por encima de la estimación numérica o gráfica, por ejemplo. Estos resultados coinciden con los obtenidos por Alajmi y Reys (2010) en su estudio realizado en Taiwán en el que concluyeron que la mayoría del alumnado recurre a reglas y algoritmos para valorar la razonabilidad de sus respuestas antes que

usar otras estrategias. Se ha indicado que esa preferencia por los cálculos lo determinan los conceptos numéricos sobre los números y sus operaciones. Así, para el caso de las fracciones, Cramer *et al.* (2018) establecen que, el alumnado que no ha desarrollado una representación mental fuerte y consolidada del concepto de fracción y de sus operaciones, no logra realizar estimaciones numéricas o valorar la razonabilidad de una respuesta numérica con otras estrategias. En la actividad en la que debía estimar el resultado de una multiplicación de decimales (Actividad 3) un bajo porcentaje del alumnado mantiene la idea errónea de que la multiplicación da un resultado mayor siempre. Los resultados en esta actividad coinciden con los obtenidos en el estudio de Yang y Sianturi (2019a) cuyo alumnado obtuvo un alto índice de éxito, recurriendo a la estimación numérica y a la realización de los cálculos indicados para descartar otras opciones. En nuestro estudio, la estimación no se muestra predominante en determinadas actividades, lo que refleja que no es una habilidad desarrollada de forma habitual en sus clases de matemáticas.

El tercer objetivo de este estudio está relacionado con la seguridad del alumnado al decidir sus respuestas. En ello, parece dominar la idea de que, si la operación y los cálculos son correctos, el resultado es correcto, dado que la mayoría del alumnado repite los cálculos para valorar la razonabilidad de las respuestas, en especial en las tres primeras actividades, lo que les aporta seguridad. De nuevo observamos que la seguridad es menor en las actividades con fracciones, incluso entre aquellos que han optado por las opciones correctas. Probablemente se deba a que no estaban habituados a la realización de este tipo de estimaciones gráficas o porque la actividad requiere establecer relaciones numéricas: suma de fracciones, paso de fracción a decimal, relacionar decimales con la representación de barras. También es preciso indicar que un porcentaje menor del alumnado ha tenido un desempeño medio-bajo con un alto grado de confianza, lo que indica que posee ideas erróneas que considera correctas. En otros estudios se ha indicado que dicha situación produce que las ideas erróneas sean difíciles de modificar (González-Forte *et al.*, 2023). Los resultados sobre la seguridad de las repuestas del alumnado de este estudio difieren de los presentados por Yang y Sianturi (2019a) en la investigación realizada con 942 estudiantes de sexto grado en Hong Kong con tareas similares cuyo objetivo era valorar la razonabilidad del alumnado, si bien no se incluía la representación gráfica como estrategia. En dicho estudio se indica que 35.46% del alumnado presentaba un desempeño bajo y grado de seguridad alto frente al 5.73% del alumnado que presentaba desempeño y grado de seguridad altos. Resultados similares se han

obtenido en estudios en los que se ha usado una prueba en tres niveles para valorar el conocimiento del alumnado en función de sus argumentos y grado de seguridad (Sianturi *et al.*, 2024; Yang y Sianturi, 2021). Foster (2016) valora la importancia de conocer el grado de seguridad del alumnado al enfrentarse a una tarea numérica para diseñar actividades y secuencias de aprendizajes favorables para el desarrollo de diferentes habilidades matemáticas que permitan el análisis de sus respuestas.

Debe tenerse en cuenta que, pese a tener algunos puntos en común, el estudio de Yang y Sianturi (2019a), del que parte este estudio, estaba dirigido a una población mayor que la nuestra y las actividades estaban enfocadas de forma diferente, excluyendo las representaciones gráficas. Para poder hacer un estudio más exhaustivo y significativo de este aspecto, se considera necesaria una población mayor y adecuar las actividades de estudio. No obstante, este primer estudio será de gran ayuda para realizar una intervención de aula con el objetivo de desarrollar diferentes estrategias en el alumnado que les permita evaluar con seguridad la razonabilidad de sus respuestas numéricas.

Por otro lado, estudios más recientes (Yang, 2022) establecen la utilidad de realizar una prueba en cuatro niveles en lugar de en tres, haciendo hincapié en las creencias internas de precisión del alumnado o grado de seguridad. De este modo, el estudiante debe elegir una respuesta a la pregunta planteada, indicar su seguridad con la respuesta, elegir la justificación de su respuesta y, por último, indicar su seguridad con la justificación. De este modo, se podría evaluar mejor las concepciones del alumnado, el nivel conceptual de entendimiento y las concepciones erróneas significativas. Se abre aquí un nuevo campo de estudio en consonancia con el indicado anteriormente.

Pese a las limitaciones del presente estudio al tratarse de una prueba contestada por una muestra pequeña, los resultados ponen de manifiesto la importancia y necesidad de trabajar con el alumnado actividades que fomenten el uso de estrategias que les permita valorar la razonabilidad de una respuesta numérica más allá del cálculo algorítmico. Entre ellas destacan el uso de la estimación numérica y las representaciones gráficas, tal y como concluyen Yang y Sianturi (2019b). Los profesores deben promover que, en determinadas circunstancias, dar una respuesta exacta no es la única manera de valorar una respuesta razonable (Alajmi y Reys, 2010). Es necesario poner énfasis en la comprensión de los números, las operaciones y sus relaciones, y dar la oportunidad a los estudiantes de pensar en métodos alternativos para determinar si sus respuestas en tareas numéricas son razonables. Esto se convierte en un

aspecto importante del currículo en España, tanto de primaria como de secundaria (Real Decreto 217/2022). Así, se indica la importancia que tiene para la vida cotidiana desarrollar diferentes estrategias que permitan valorar lo razonable de una respuesta. Este trabajo tiene como fin contribuir a este campo de estudio, aunque es necesario profundizar en cómo ayudar al alumnado a desarrollar las habilidades matemáticas necesarias para realizar el proceso de evaluación, más allá de la aplicación de reglas y algoritmos.

AGRADECIMIENTOS

Proyectos PID2020-113601GB-I00 y PID2022-139007NB-I00, financiados por MCIN/AEI.

REFERENCIAS

- Akkaya, R. (2016). An investigation into the number sense performance of secondary school students in Turkey. *Journal of Education and Training Studies*, 4(2), 113-123. <https://doi.org/10.11114/jets.v4i2.1145>
- Alajmi, A., y Reys, R. (2007). Reasonable and reasonableness of answers: Kuwaiti middle school teachers' perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 77-94. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9042-4>
- Alajmi, A. H. (2009). Addressing computational estimation in the Kuwaiti curriculum: Teachers' views. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(4), 263-283. <https://doi.org/10.1007/s10857-009-9106-3>
- Alajmi, A., y Reys, R. (2010). Examining eighth grade Kuwaiti students' recognition and interpretation of reasonable answers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8, 117-139. <https://doi.org/10.1007/s10763-009-9165-z>
- Almeida, R., y Bruno, A. (2016). Uso de puntos de referencia y de representaciones gráficas para resolver tareas numéricas en secundaria. *PNA*, 10(3), 191-217. <https://doi.org/10.30827/pna.v10i3.6088>
- Almeida, R., y Bruno, A. (2017). Establishing profiles on the use of number sense. *REDIMAT*, 6(1), 56-84. <https://doi.org/10.17583/redimat.2017.1910>
- Bell, A., Fischbein, E., y Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 129-147. <https://doi.org/10.1007/BF00305893>

- Caleon, I., y Subramaniam, R. (2010). Development and application of three-tier diagnostic test to assess secondary students' understanding of waves. *International Journal of Science Education*, 32(7), 939-961. <https://doi.org/10.1080/09500690902890130>
- Clarke, D. M., Clarke, D. J., y Sullivan, P. (2012). Reasoning in the Australian curriculum: Understanding its meaning and using the relevant language. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 17(3), 28-32. <https://search.informit.org/doi/10.3316/aeipt.197602>
- Cramer, K., Wyberg, T., y Leavitt, S. (2018). The role of representations in fraction addition and subtraction. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 490-496. <https://doi.org/10.5951/MTMS.13.8.0490>
- Fariña, M., y Bruno, A. (2021). Respuestas numéricas razonables en alumnado de secundaria. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 261-268). SEIEM.
- Foster, C. (2016). Confidence and competence with mathematical procedures. *Educational Studies in Mathematics*, 91, 271-288. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9660-9>
- González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J., y Van Dooren, W. (2023). Incorrect ways of thinking about the size of fractions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 21, 2005-2025. <https://doi.org/10.1007/s10763-022-10338-7>
- Graeber, A. O., Tirosh, D., y Glover, R. (1989). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 95-102. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.20.1.0095>
- Grayer, M. (2009). Reasonable or not? A study of the use of teacher questioning to promote reasonable mathematical answers from sixth grade students (Master's thesis, University of Nebraska). DigitalCommons@University of Nebraska. <https://digitalcommons.unl.edu/mathmidactionresearch/70>
- McIntosh, A., Reys, B. J., y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*. <https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217>
- Reys, B. J., y Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth and eighth grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(2), 225-237. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.29.2.0225>

- Sianturi, I. A. J., Ismail, Z., y Yang, D. C. (2024). Examining fifth graders' conceptual understanding of numbers and operations using an online three-tier test. *Mathematics Education Research*, 36, 399-423. <https://doi.org/10.1007/s13394-023-00452-2>
- Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., y Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(3), 344-355. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.02.001>
- Veloo, P. K. (2010). The development of number sense and mental computation proficiencies: An intervention study with secondary one students in Brunei Darussalam (Doctoral thesis, University of Otago). University of Otago. <http://hdl.handle.net/10523/411>
- Yang, D. C. (2003). Teaching and learning number sense – An intervention study of fifth grade students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1(1), 115-134. <https://doi.org/10.1023/A:1026164808929>
- Yang, D. C. (2022). Investigating the differences between confidence ratings in the answer and reason tiers in fourth graders via online four-tier test. *Studies in Educational Evaluation*, 72, 101127. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2022.101127>
- Yang, D. C., y Sianturi, I. A. J. (2019a). Sixth grade students' performance, misconceptions, and confidence when judging the reasonableness of computer results. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(8), 1519-1540. <https://doi.org/10.1007/s10763-018-09941-4>
- Yang, D. C., y Sianturi, I. A. J. (2019b). Assessing students' conceptual understanding using an online three-tier diagnostic test. *Journal of Computer Assisted Learning*, 35(5), 678-689. <https://doi.org/10.1111/jcal.12368>
- Yang, D. C., y Sianturi, I. A. J. (2021). Sixth grade students' performance, misconception, and confidence on a three-tier number sense test. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19, 355-375. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10051-3>

Autora de correspondencia

ALICIA BRUNO

Dirección: Avenida Astrofísico Francisco Sánchez, s/n.
Facultad de Ciencias. Sección de Matemáticas.
Apartado 456. Código postal 38200.
San Cristóbal de La Laguna. S/C de Tenerife, España
abruno@ull.edu.es

Tras la indagación de significados. Tareas para la formación de profesores que revelan concepciones alternativas: el caso del número racional

In search of meaning: Tasks for teacher education that reveal
alternative conceptions – the case of rational numbers

Cristina Ochoviet Filgueiras,¹ Verónica Molfino Vigo²

Resumen: Existen abundantes evidencias sobre la importancia de las tareas que se proponen a los estudiantes para favorecer la enseñanza de las matemáticas. Las investigaciones profundizan en los diferentes tipos de tareas, su potencial, cómo gestionarlas en el aula, y cuáles son los resultados esperados de su inclusión en el aula. Sin embargo, son pocos los estudios relativos a qué tipo de tareas son propicios para enseñar didáctica de matemáticas. Este trabajo presenta una tarea propuesta en un curso de didáctica de matemáticas de un programa de formación de profesores, diseñada en cinco fases a partir de insumos específicos de la matemática educativa. Además, el estudio ilustra, a través de un estudio de caso, cómo esa tarea, que se articula con la práctica docente de una futura profesora, permitió evidenciar tanto sus concepciones sobre el concepto de fracciones equivalentes como las repercusiones que estas tienen sobre la enseñanza que imparte. El diseño de la clase planificada por la futura profesora estuvo guiado por la práctica de interrogar significados, que asumió en este trabajo un doble rol: como herramienta de

Fecha de recepción: 2 de febrero de 2024. **Fecha de aceptación:** 1 de abril de 2025.

¹ Instituto de Profesores Artigas, Consejo de Formación en Educación, Montevideo, Uruguay, cristinaochoviet@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-9069-3469>

² Instituto de Profesores Artigas, Consejo de Formación en Educación, Montevideo, Uruguay, veromolfino@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6672-762X>

indagación del pensamiento de los estudiantes para la docente y como herramienta de indagación del pensamiento de ella para las investigadoras.

Palabras clave: *Formación de profesores, concepciones alternativas, número racional, diseño de tareas.*

Abstract: There is abundant evidence on the importance of the tasks assigned to students to enhance the teaching of mathematics. Research delves into the different types of tasks, their potential, how to manage them, and the expected outcomes of their use in the classroom. However, few studies focus on what types of tasks are suitable for teaching Didactics of Mathematics. This paper presents a task proposed in a Mathematics Method course within a teacher training program, designed in five phases based on specific inputs from Mathematics Education. Furthermore, through a case study, the research illustrates how this task—connected to the teaching practice of a prospective teacher—revealed both her conceptions about the concept of equivalent fractions and the implications these have on her teaching. The design of the class planned by the prospective teacher was guided by the practice of questioning meanings, which played a dual role in this study: as a tool for the teacher to explore students' thinking and as a tool for the researchers to explore the teacher's thinking.

Keywords: *Teacher training, alternative conceptions, rational number, task design.*

INTRODUCCIÓN A LA PROBLEMÁTICA

Hace ya varias décadas que las tareas se posicionaron como un medio fundamental para viabilizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Las tareas propuestas determinan la naturaleza de las ideas matemáticas que circulan en una clase, y forman la base para el aprendizaje de los estudiantes (Stein y Smith, 1998a). En particular, algunos autores señalan que las “buenas tareas” son las cognitivamente demandantes (Stein y Smith, 1998b), y enfatizan la importancia de seleccionar, diseñar y gestionar adecuadamente tareas de ese tipo (Kilpatrick *et al.*, 2001). El argumento detrás de estas afirmaciones es el potencial que tienen las tareas para favorecer la comunicación entre profesores y estudiantes y, por tanto, la construcción de ideas matemáticas (Zaslavsky y Sullivan, 2011).

En esta misma línea, Zaslavsky (2008) afirma que en la formación docente las tareas juegan un rol esencial en el aprendizaje de los futuros profesores porque promueven conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas. Es en esa dirección que este escrito pretende aportar: sobre las tareas que los formadores de profesores de matemáticas proponen a sus estudiantes, futuros profesores, en cursos de didáctica de matemáticas. Esto es, tareas que tienen por objetivo acercar a los estudiantes de profesorado marcos conceptuales específicos de didáctica de matemáticas, y favorecer instancias de reflexión para articular los aportes de la investigación con los desafíos de la práctica docente.

La formación de profesores de matemáticas en Uruguay abarca cuatro años en los que los futuros profesores estudian *ciencias de la educación, didáctica de matemáticas/práctica docente y matemáticas*. Este último bloque formativo comprende cursos de análisis matemático, geometría, álgebra, álgebra lineal, probabilidad y estadística, topología y cursos de profundización optativos en geometría, análisis matemático o álgebra abstracta. El trayecto *didáctica de matemáticas/práctica docente* consta de cuatro cursos, uno introductorio en el primer año, sin práctica docente, y otros tres en los restantes tres años de la carrera, con una carga horaria de práctica docente ascendente a lo largo de la misma. Es en estos cursos en los que se proponen el tipo de tareas que mencionamos, diseñadas y gestionadas para la enseñanza de didáctica de matemáticas y su vinculación con aspectos relativos a la práctica docente. El componente práctico del último de esos cursos implica que el estudiante de profesorado de matemáticas (EPM) tiene un grupo de secundaria a su cargo (12-15 años) y, por tanto, es responsable del dictado de todas las clases de matemáticas de ese grupo a lo largo de un año escolar. Esta práctica preprofesional es supervisada por un formador de didáctica de matemáticas.

Presentamos el diseño y análisis de la implementación de una tarea que fuera propuesta en un curso del último año de la carrera de profesor de matemáticas, del trayecto *didáctica de matemáticas/práctica docente*, siguiendo aportes específicos relativos a la formación de profesores (Zaslavsky y Sullivan, 2011). Esa tarea requería, a los estudiantes de profesorado, estudio, diseño, implementación y análisis, reflexión y síntesis, a partir de constructos de la investigación en matemática educativa. A su vez, el análisis de la puesta en práctica de la tarea arrojó una situación que presentamos como el caso de una EPM, estudiante de cuarto año del programa de formación en Uruguay. En el marco de dicha tarea, la EPM propuso a sus estudiantes de séptimo grado de secundaria (entre 12 y 13 años) que discutieran si dos fracciones dadas eran equivalentes, utilizando la práctica de indagación de significados sugerida por Szydlik (2015).

En el diálogo que surgió en la clase con los alumnos, se pusieron en evidencia las concepciones de la docente y se hizo patente que la definición de fracciones equivalentes que había enseñado no era matemáticamente correcta. La EPM tenía, sin embargo, aprobados los cursos de álgebra, geometría y topología de la carrera, así como los tres cursos previos del trayecto *didáctica de matemáticas/práctica docente*.

Este trabajo se encuadra en la línea de investigación identidad y conocimiento del profesor (Molfino *et al.*, 2023; Molfino y Ochoviet, 2019a). En esa línea, dos antecedentes son especialmente relevantes. En Molfino y Ochoviet (2019b) se presentan dos tareas propuestas a estudiantes del último curso de didáctica de matemáticas/práctica docente que implicaban el acercamiento a reportes de investigación para su uso didáctico en el contexto de la práctica, en un caso el diseño de tareas para estudiantes de secundaria, en el otro el análisis de respuestas de sus estudiantes. Las autoras reportan que esas tareas resultaron sumamente potentes para que los estudiantes, futuros profesores, no solo conocieran marcos específicos del campo sino también que los emplearan y relacionaran con los saberes provenientes de la práctica docente.

En Ochoviet y Parodi (2024) se reportan los resultados de una investigación en la que se diseñó e implementó una secuencia de viñetas conceptuales para enseñar a futuros profesores resultados de investigación relativos al pensamiento algebraico, en particular sobre los diversos entendimientos del signo de igual. Los autores reportan que los estudiantes de profesorado:

...tomaron conciencia de las consecuencias que puede tener el lenguaje en el proceso de enseñanza, la precisión que es requerida para la correcta elección de las palabras que se utilizan en clase y cómo lo que se enseña en un curso puede obstaculizar lo que se aprenderá en cursos posteriores. (Ochoviet y Parodi, 2024, p. 411)

Estos trabajos aportan evidencia sobre el potencial que pueden tener las tareas para enriquecer el conocimiento pedagógico del contenido (Shulman, 1986) en estudiantes de profesorado de matemáticas.

En particular, sobre el contenido números racionales, la investigación ha puesto en evidencia las dificultades que tienen tanto los estudiantes de todos los niveles educativos así como los profesores en servicio para comprenderlos (Depaepe *et al.*, 2015). Por ejemplo, se ha reportado que tanto los futuros docentes de nivel primaria (maestros) como maestros en servicio poseen dificultades en la comprensión del concepto de fracción (Carvalho, 2023; Copur-Gencturk, 2021;

Tirosh y Tsamir, 2024), de la magnitud de las fracciones (Copur-Gencturk, 2022), en la identificación y tránsito entre las diferentes representaciones del número racional (Carvalho, 2023; Ryan y Williams, 2007), en el entendimiento de las operaciones con fracciones así como sus aplicaciones a la resolución de problemas (Ball, 1990; Borko *et al.*, 1992; Copur-Gencturk, 2021; Newton, 2008; Son y Crespo, 2009), en el establecimiento de conexiones entre la fracción vista como un proceso (en particular el de repartir) y la fracción vista como un número (Ryan y Williams, 2007), y con el concepto de densidad en el conjunto de los números racionales (Merenluoto y Lehtinen, 2002). En un estudio específico sobre cómo estudiantes para maestros definen el número racional y la consistencia con los ejemplos y no ejemplos que presentan, Tirosh y Tsamir (2024) consideran tres definiciones de número racional que involucran al concepto de fracción, pero en ninguna de ellas se problematiza el concepto de fracción equivalente.

Los estudiantes de profesorado de matemáticas para nivel secundario también muestran dificultades con el concepto de número racional. Depaepe *et al.* (2015) reportan que, si bien los estudiantes de profesorado para el nivel secundario presentan un mayor dominio de conocimiento del contenido que los estudiantes para docentes de nivel primario, el conocimiento pedagógico del contenido (Shulman, 1986) es similar. Tanto futuros profesores de matemáticas de enseñanza primaria como de secundaria presentan dificultades para comprender el razonamiento de los estudiantes y saber cómo intervenir en consecuencia para favorecer una mejor comprensión.

En suma, si bien varios estudios indagan sobre la conceptualización del número racional de estudiantes de profesorado y profesores en servicio, la mayoría de ellos lo hacen en relación a docentes de enseñanza primaria. Además, en los estudios analizados no se identifica ningún trabajo que haya abordado el estudio y comprensión de números racionales iguales y su relación con las fracciones equivalentes.

Considerando que el conocimiento matemático de los profesores incide directamente en las oportunidades de enseñanza que crean para sus estudiantes (Borko *et al.*, 1992; Murray y Baldinger, 2018), y que a su vez, la calidad de la enseñanza de las matemáticas depende directamente de las tareas que se proponen a los estudiantes (Kilpatrick *et al.*, 2001), atender a la problemática presentada resulta crucial para mejorar la formación matemática de todas las personas.

El objetivo de este trabajo consistió en explorar los efectos de la implementación de un tipo específico de tarea para la formación de profesores en la práctica docente de una EPM. La tarea utilizada constó de cinco fases: (1)

estudio, (2) diseño, (3) implementación y análisis, (4) reflexión y (5) síntesis, a partir de constructos de la investigación en matemática educativa. Nos cuestionamos ¿en qué sentido la tarea utilizada para la formación de profesores favorece la reflexión por parte de la EPM sobre su práctica docente y sobre sus concepciones matemáticas? ¿Es posible que un diseño apropiado favorezca el surgimiento de concepciones matemáticas de la EPM que sean inconsistentes con las aceptadas por la comunidad matemática? ¿De qué manera la tarea propuesta enriquece las concepciones matemáticas y didácticas de la EPM?

MARCO CONCEPTUAL

El marco conceptual se desarrolla en tres secciones. La primera refiere a los temas recomendados por Zaslavsky y Sullivan (2011) para el diseño de tareas en la formación docente. La segunda sección aborda el constructo concepciones alternativas, incluido a los efectos de contar con un instrumento para analizar las nociones matemáticas que circularon en la clase implementada por la EPM. Finalmente, la tercera sección reseña distintos enfoques en el abordaje de los números racionales en la formación de profesores de matemáticas en Uruguay.

LOS TEMAS DE LAS TAREAS EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Escudero-Ávila *et al.* (2021) señalan que enseñar a enseñar matemáticas demanda al formador el diseño e implementación de tareas “que satisfagan las necesidades específicas de los elementos de la profesión docente que se desean desarrollar. Estas tareas y la manera en que se utilizan, tienen un impacto en el aprendizaje de los futuros profesores” (p. 33). En relación al diseño de tareas, Zaslavsky y Sullivan (2011) sugieren ocho temas unificadores que abarcan el tipo de competencias y conocimientos que demanda la formación de profesores de matemáticas: (1) Desarrollar la adaptabilidad; (2) Fomentar la habilidad para advertir similitudes y diferencias; (3) Afrontar conflictos y dilemas; (4) Diseñar y resolver problemas para su uso en el aula de matemáticas; (5) Aprender del estudio de la práctica; (6) Seleccionar y utilizar herramientas y recursos apropiados para la enseñanza; (7) Identificar las barreras en el aprendizaje de los estudiantes y cómo ayudarlos a superarlas; (8) Compartir y revelar las disposiciones propias, de los compañeros y de los estudiantes. En la siguiente tabla se sintetizan los temas y su descripción (tabla 1).

Tabla. 1. Temas de las tareas utilizadas en la formación de profesores de matemáticas para enseñanza secundaria

Tema	Descripción
(1) Desarrollar la adaptabilidad	Correponde a ser capaz de variar la formulación de preguntas, variación en las tareas, con el objetivo de buscar alternativas para mejorar las propuestas didácticas así como la capacidad para adaptar recursos ya existentes de acuerdo a las metas formativas. También, para estar preparados para responder ante contingencias. Las tareas a proponer deberían demandar adaptabilidad a requerimientos pedagógicos, curriculares y matemáticos.
(2) Fomentar la habilidad para advertir similitudes y diferencias	Refiere al desarrollo de la habilidad de advertir similitudes y diferencias entre problemas, entre contextos, entre errores, entre situaciones de clase, entre objetos matemáticos para clasificarlos, para detectar patrones, para establecer conexiones curriculares, para definir abordajes didácticos. Las tareas a proponer demandan también la perspectiva pedagógica, curricular y matemática.
(3) Afrontar conflictos y dilemas	Alude a que los docentes deben estar preparados para enfrentar la toma de decisiones en situaciones conflictivas, complejas y deben saber lidiar con la incertidumbre: anticipar conflictos, diseñar tareas que impliquen conflictos para los alumnos, identificar inconsistencias en documentos curriculares. Las tareas a proponer demandan también la perspectiva pedagógica, curricular y matemática.
(4) Diseñar y resolver problemas para su uso en el aula de matemáticas	Son tareas que proponen: diseñar problemas y trabajar con ellos en sus clases, incorporar en el aula problemas con múltiples soluciones o estrategias de resolución, elevar el grado de apertura de los problemas que se encuentran en los libros de texto y utilizar juegos como contexto para la resolución de problemas.
(5) Aprender del estudio de la práctica	Considera las tareas que aportan un acceso a situaciones reales o simuladas de la práctica y promueven un análisis crítico y reflexivo de esta como, por ejemplo, el análisis de videos de clases, de clases ejemplares, <i>lesson study</i> , planificación conjunta de la enseñanza, observación, discusión y reflexión conjunta sobre una clase dictada, estudios de caso que permitan reflexionar sobre desafíos pedagógicos, curriculares o matemáticos de la práctica.

(6) Seleccionar y utilizar herramientas y recursos apropiados para la enseñanza	Herramientas como libros de texto, lecturas complementarias, materiales manipulativos, instrumentos para construir o medir, calculadoras gráficas u otros entornos tecnológicos, etcétera. Las herramientas incluyen distintos tipos de recursos como los humanos o culturales. Las tareas promueven la selección, diseño, implementación, análisis del potencial, entre otros aspectos.
(7) Identificar las barreras en el aprendizaje de los estudiantes y cómo ayudarlos a superarlas	Las barreras abordan aspectos epistemológicos de las matemáticas, factores culturales, de género, expectativas de la familia, el idioma, discapacidades físicas y de otro tipo, factores socioeconómicos, etcétera. La identificación de esas barreras puede realizarse desde la perspectiva pedagógica (género, lenguaje, aspectos socioeconómicos, etcétera) o matemáticos (tipos de tareas, representaciones, excesiva formalidad, etcétera).
(8) Compartir y revelar las disposiciones propias, de los compañeros y de los estudiantes	Refiere a que el proceso de enseñanza y el de aprendizaje tienen una dimensión actitudinal que incide en ambos. Incluye: las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas, su utilidad y aprendizaje, la capacidad propia de aprender matemáticas, los procesos de autorregulación relativos al aprendizaje, las actitudes hacia las matemáticas como el gusto por las mismas, la ansiedad matemática, etcétera.

Fuente: Adaptado de Ochoviet (2022) con base en Zaslavsky y Sullivan (2011).

Si bien estos ocho temas están íntimamente ligados y resulta complejo aislar uno del otro, la tarea que se propuso a la EPM prioriza los temas 4, 5 y 7, esto es, diseñar un problema con objetivos específicos para los estudiantes de secundaria, aprender de la práctica a través de la implementación en aula de ese problema y la reflexión posterior, y prestar especial atención a las respuestas de los estudiantes para identificar concepciones, obstáculos, dificultades, entre otros.

CONCEPCIONES ALTERNATIVAS

Los EPMs llegan al programa de formación con conocimientos previos producto de su experiencia y del tránsito por la enseñanza primaria y secundaria. En la formación docente avanzan en el estudio de las matemáticas del nivel superior, en cursos de didáctica de matemáticas y práctica docente. Esto implica que múltiples fuentes inciden en la construcción de sus concepciones sobre los temas matemáticos que el currículo les demanda enseñar y pueden existir inconsistencias con el conocimiento disciplinar.

Para el profesor de matemáticas de secundaria el desafío es enfrentar sus propias debilidades en el conocimiento pues es frecuente que el especialista encuentre que sus propias construcciones son defectuosas o que realiza generalizaciones matemáticamente incorrectas. Los estudiantes en formación docente inicial que quieren convertirse en profesores especializados de matemáticas suelen llegar con un historial satisfactorio de aprobación de exámenes escolares; desafortunadamente, su comprensión, a veces, es principalmente instrumental. (Ryan y Williams, 2007, p. 137)

Se ha reportado que las concepciones de los EPMs inciden en lo que enseñan en su práctica profesional (por ejemplo, Chhabra y Baveja, 2012; Ryan y Williams, 2007). Esto es, no es el conocimiento disciplinar el que es enseñado sino el que el docente ha construido, sumado a lo que entiende que es enseñar y aprender. Para conceptualizar teóricamente determinadas manifestaciones del conocimiento que los profesores, efectivamente, movilizan al enseñar matemáticas, utilizaremos la noción de *concepción alternativa*. Según Narjaikaew (2013) "El término concepciones alternativas en ciencias se refiere a conceptos que las personas tienen y que son inconsistentes con ideas científicamente aceptables" (p. 251). El término concepción alternativa es utilizado, muchas veces, como sinónimo de concepciones erróneas (Chhabra y Baveja, 2012). Cubero (2021) especifica que el término concepciones erróneas supone darle un estatus inferior a las concepciones que difieren del conocimiento disciplinar socialmente establecido, por ello, en este trabajo, optamos por el término concepción alternativa.

Según Ryan y Williams (2007), el proceso de enseñanza demanda al docente la elaboración de explicaciones y esto le requiere que sea capaz de establecer conexiones entre los contenidos matemáticos del currículo para estar bien preparado para responder las preguntas de sus estudiantes. A este respecto, los autores agregan que:

De hecho, estudios de investigación han informado que los docentes de matemáticas más efectivos son los "conexionistas", es decir, aquellos que establecen conexiones ricas (y correctas) a través del campo disciplinar, y pueden utilizar una variedad de representaciones y modelos en las conversaciones con niños. (p. 138)

A su vez, Ryan y Williams (2007) afirman que para formar docentes "conexionistas" es necesario que el entorno de formación los invite a cuestionarse sobre sus propios conocimientos, favoreciendo procesos de orden metacognitivo.

NÚMEROS RACIONALES: DIFERENTES ENFOQUES

En el discurso matemático escolar de la enseñanza de las matemáticas en la formación de profesores de matemáticas en Uruguay conviven al menos dos enfoques diferentes sobre el abordaje del conjunto de los números racionales. Uno de ellos es la definición por abstracción del conjunto de los números racionales. Esto implica considerar el producto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, definir la relación $\mathfrak{R}$ tal que $(a, b)\mathfrak{R}(c, d)$ si $a \cdot d = c \cdot b$, probar que es de equivalencia y considerar el conjunto Q como el conjunto cociente que queda definido (ver, por ejemplo, Lentin y Rivaud, 1982). El otro enfoque consiste en definir axiomáticamente el conjunto de los números reales y, a partir de este, considerar a Q como un subconjunto. El primero de los enfoques, conocido también como enfoque genético, supone la construcción previa de los conjuntos N y Z . En cambio, en el segundo enfoque, se define el conjunto de los números reales y luego se identifican los subconjuntos N , Z y Q . Así, en el primer abordaje aparecen los pares ordenados de enteros, que luego dan lugar a la notación fraccionaria, y entre estos pares es posible indicar si son o no equivalentes (según la relación definida), cuestión que luego se traslada a la notación fraccionaria.

El segundo enfoque define el conjunto Q como $\{x \in R; x = \frac{p}{q} \text{ con } p, q \in Z, q \neq 0\}$, obsérvese que esta definición hace uso de la división entre dos enteros, operación definida en R con anterioridad a la definición del conjunto de los números racionales. Según esa definición, dos racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales si el cociente de dividir a entre b , y c entre d es el mismo, sin invocar el concepto de equivalencia de fracciones.

MÉTODO

La población de estudio está constituida por una EPM (27 años de edad) cursando su cuarto curso de didáctica de matemáticas/práctica docente en un instituto de formación docente de Uruguay. Este curso tiene dos componentes: uno teórico y otro práctico, y se ubica en el cuarto y último año de la carrera de profesor. El componente teórico, en el que se abordan aspectos teóricos de didáctica de matemáticas y se vinculan con la práctica, se desarrolla en el instituto de formación docente y está a cargo de una formadora en didáctica de matemáticas. El componente práctico consiste en que la EPM desempeñe, a lo largo de un año lectivo, el rol de profesora de matemáticas en un grupo a su

cargo en la enseñanza secundaria. Esto implica las actividades de enseñanza, la evaluación de sus estudiantes, la asistencia a las reuniones de profesores del grupo de clase, la integración de tribunales de exámenes, entre otras responsabilidades del rol docente. Todas estas tareas las realiza bajo la supervisión de la formadora de didáctica de matemáticas. Además, la EPM tenía aprobados los cursos de geometría, álgebra y topología de la carrera.

En la clase teórica de didáctica de matemáticas se estudió la práctica de *interrogar significados* sugerida por Szydlik (2015), que consiste en dar espacio en el aula de matemáticas para el desarrollo de conversaciones entre estudiantes y profesor. Según la autora, esta práctica permite a los estudiantes reconocer sus propios supuestos sobre cómo, cuándo y para qué es empleada una notación, representación o término matemático, favorece que los alumnos concienticen sus propias interpretaciones y les da confianza para cambiarlas. En ese sentido, esta práctica se erige como una herramienta para los docentes que oficia como 'ventana' para conocer el pensamiento de sus estudiantes. En particular, en la clase teórica se estudiaron los tres tipos de conversaciones matemáticas que Szydlik (2015) propone: sobre el uso de los símbolos (en particular aborda el uso del signo igual), sobre una representación o sobre el lenguaje matemático.

Se solicitó a la EPM la lectura completa del artículo y que realizara una síntesis de las principales ideas (fase de estudio). Luego, se le propuso la siguiente tarea con las restantes cuatro fases (tabla 2).

Tabla 2. Tarea propuesta a la EPM

Consigna	Descripción de la consigna
Diseño y análisis a priori	Elija uno de los tres tipos de conversación ejemplificados en el artículo y diseñe una actividad apropiada para desarrollar esa conversación en una clase de su grupo de práctica. Presente la actividad, fundamente el diseño y realice el análisis a priori.
Implementación de la clase y análisis	Implemente la actividad en una clase de 45 minutos, en su grupo de práctica, para desarrollar la conversación matemática en cuestión. Tiene que evidenciarse la función de esa conversación como “ventana al pensamiento de nuestros estudiantes” (Szydlik, 2015, p. 656), así como las concepciones de los alumnos con respecto a la temática correspondiente. Grabe y transcriba el audio de la clase. Analice el desarrollo de la conversación matemática de la clase, qué ideas de los alumnos se evidenciaron respecto de la temática del tipo de conversación elegida y cómo se trabajaron esas ideas a lo largo de la conversación, mediante la práctica de interrogar significados, de acuerdo a las recomendaciones de la autora y sus sugerencias de trabajo en el aula.
Reflexión posterior a la clase	Realice una reflexión sobre la incidencia que tuvo la conversación matemática instrumentada en las ideas matemáticas de los estudiantes. Reseñe qué fortalezas y debilidades tuvo, como docente, en la implementación de la clase y cómo evolucionaron las concepciones alternativas de los estudiantes. Sea específico y concreto en sus observaciones. Fundamente y ejemplifique si es necesario.
Síntesis del trabajo realizado	Elabore un diálogo breve, como alguno de los que presenta la autora en el artículo, que funcione como síntesis del trabajo realizado y que ejemplifique un aspecto de lo sucedido en la clase. Para ello, imagine que usted es Szydlik y que está preparando un diálogo para incluir en su artículo. El diálogo puede seleccionarlo de la transcripción de la clase o puede reelaborarlo, pero debe reflejar algún aspecto surgido en la clase.

La primera parte de la consigna, diseño y análisis a priori, se ubica en el tema 4 (Zaslavsky y Sullivan, 2011), esto es, diseñar un problema para luego ponerlo en práctica en la clase. En la segunda parte, implementación de la clase y análisis, se movilizan los temas 5 y 7 (Zaslavsky y Sullivan, 2011), pues además de la puesta en práctica con una intención específica, se solicita que se ponga especial atención a las respuestas de los alumnos para tratar de identificar las concepciones matemáticas que se revelan. La tercera y cuarta parte de la consigna, reflexión y síntesis, se encuadran en el tema 5 (Zaslavsky y Sullivan, 2011):

aprender de la práctica a través de la reflexión sobre los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

La estudiante contó con cuatro semanas de tiempo para la realización de esta tarea. Entregó su trabajo por escrito dando cuenta de la clase que dictó bajo la práctica de interrogar significados en el grupo de séptimo grado que tenía a cargo (estudiantes de 12 y 13 años). Este escrito es el que se analiza en este estudio. Además, se realizó la audiograbación de la clase dictada por la EPM y su transcripción.

La tarea demandaba, además de la implementación de una clase, la presentación de un breve guion a modo de síntesis. Esto implicó la escritura de un diálogo en el que la participante de este estudio debía explicitar “la interacción entre un profesor-personaje imaginario y un estudiante-personaje” (Zazkis y Marmur, 2018, p. 294). La propuesta indicaba que para la redacción de estas interacciones podía tomarse información de lo efectivamente sucedido en la clase implementada o bien reelaborarlo. De acuerdo con Zazkis y Marmur (2018), la elaboración de guiones es una herramienta que permite la recolección de datos y el análisis de estos guiones proporciona “imágenes de la enseñanza y conocimiento sobre el entendimiento de las matemáticas de los guionistas” (p. 294). Adicionalmente, los autores observaron que los guiones aportan evidencia de la comprensión personal de los participantes de una investigación sobre los conceptos matemáticos que están implicados en la redacción del guion.

En suma, la tarea utilizada implicó: (1) el estudio de un documento proveniente del campo de la matemática educativa (Szydlik, 2015); (2) el diseño de una actividad por parte de la EPM que permitiera la interrogación de significados con base en Szydlik (2015), esto es, un diseño basado en aportes de la matemática educativa; (3) la implementación de la actividad diseñada en un grupo propio de enseñanza secundaria, así como el análisis de la clase implementada; (4) la reflexión sobre la clase implementada; (5) la elaboración de un mini-guion a manera de síntesis de los logros obtenidos en la clase implementada. Así, la arquitectura de la tarea propuesta a la EPM constó de las siguientes fases: estudio, diseño, implementación y análisis, reflexión y síntesis.

Dado el objetivo del estudio, la formadora a cargo del grupo no intervino sobre ninguna de las producciones de la estudiante hasta finalizadas las cinco fases. De manera posterior a la entrega de la tarea, se realizó una entrevista breve semiestructurada a la EPM en la que la pregunta disparadora fue: ¿Cuál es para ti la definición de fracciones equivalentes?

ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DE LA EPM A LA TAREA Y DISCUSIÓN

RELATIVO AL 'ANÁLISIS A PRIORI'

Dentro de las tareas de Szydlik (2015) la EPM seleccionó “la que refiere al significado y problematización del signo de igual” y diseñó la siguiente actividad para implementar en clase con sus estudiantes de enseñanza secundaria:

Actividad

Contesta si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.

$$\frac{20}{8} = \frac{50}{20}$$

$$\frac{6}{4} - \frac{1}{2} = -7 + 8$$

En este trabajo nos enfocamos solamente en la primera igualdad, porque es la que se pudo discutir cabalmente en 45 minutos de clase.

La EPM diseña una actividad que requiere señalar si una proposición es verdadera o falsa. Consideramos que es consistente con la indagación de significados pues los alumnos deberán fundamentar sus elecciones por una u otra opción. En este sentido, logra diseñar una situación con objetivos específicos que se enmarca en el tema 4 propuesto por Zaslavsky y Sullivan (2011). La EPM identifica correctamente que la primera igualdad es verdadera. Nos centraremos, entonces, en los argumentos que la EPM brinda tanto para justificar que es verdadera como en las explicaciones que, según ella, podrían conducir a sus estudiantes a pensar que es falsa; estos asuntos se encuadran en la temática 7 (Zaslavsky y Sullivan, 2011), relativa a identificar los obstáculos que podrían enfrentar los alumnos al resolver la situación.

En el análisis a priori de la actividad la EPM afirma:

Para la primera igualdad [los estudiantes] pueden responder falso porque es posible que entiendan que dos fracciones [solo] pueden ser igualadas si ambas fracciones son equivalentes, es decir, que exista un número entero por el cual multiplicar el denominador y el numerador de una de ellas para obtener la otra.

Esta afirmación nos permite deducir, por un lado, que la EPM está considerando la posibilidad de que sus estudiantes respondan –erróneamente– que la afirmación es falsa. Esto se fundamenta en que la EPM enseñó que las fracciones equivalentes son solo aquellas en las que es posible obtener una de la otra, multiplicando numerador y denominador por un mismo número entero, tal como ella lo explicita. Según la concepción de la EPM, las fracciones $\frac{20}{8}$ y $\frac{50}{20}$ no son equivalentes porque no existe un número entero tal que al multiplicar numerador y denominador de $\frac{20}{8}$ por ese número, se obtenga $\frac{50}{20}$. Esto es inconsistente con lo que nos dice la definición de fracciones equivalentes: $\frac{20}{8}$ y $\frac{50}{20}$ sí son equivalentes porque $20 \times 20 = 8 \times 50$. Entonces, si sus estudiantes entienden que solo “pueden ser igualadas si ambas fracciones son equivalentes”, y emplean la concepción de fracciones equivalentes enseñada por la EPM, la afirmación que involucra al signo de igual sería falsa.

Más adelante menciona razones por las que sus estudiantes podrían considerar que la afirmación es verdadera:

Por otro lado, pueden responder que es verdadera si observan las fichas de diferentes representaciones de un número racional y logran identificar que las fracciones que componen la igualdad están en la sección de fracciones equivalentes de $\frac{5}{2}$. Otra justificación para indicar que la igualdad es verdadera, es simplificar $\frac{50}{20}$, llegar a que es equivalente a $\frac{5}{2}$ y luego analizar qué número entero es el que permite asegurar que $\frac{5}{2} = \frac{20}{8}$.

Cuando la EPM habla de *fichas* se refiere a un material didáctico que entregó en clase en el que se podían visualizar distintas representaciones de un mismo número racional: fracciones equivalentes, expresión decimal, un punto en la recta numérica. Las dos justificaciones que aporta evidencian la concepción de la EPM, pues reconoce que ambas fracciones son equivalentes a $\frac{5}{2}$ porque se cumple la condición explícita en su definición personal de fracciones equivalentes: que exista un número entero que multiplicado por numerador y denominador permita obtener la otra. Sin embargo, la EPM no admite como equivalentes a las fracciones $\frac{20}{8}$ y $\frac{50}{20}$, y esto contradice la propiedad transitiva que es característica, precisamente, de las relaciones de equivalencia.

Al considerar otro tipo de respuestas posibles de sus estudiantes, la EPM afirma:

Se definió que dos fracciones son equivalentes si existe un número entero por el cual si se multiplica el numerador y el denominador de una de ellas se obtiene la restante, pero aquí sí existe un número que multiplicando numerador y denominador de $\frac{20}{8}$ me permite obtener $\frac{50}{20}$ que es el 2,5 pero no es un número entero, entonces aquellos estudiantes que no tengan presente ese detalle pueden responder verdadero mientras que los que se detengan en ese detalle pueden responder que es falso.

La EPM vuelve a explicitar su ‘definición’ de fracciones equivalentes, reforzando la idea de que para que sean equivalentes, el número por el cual hay que multiplicar numerador y denominador debe ser entero.

Por otro lado, la EPM indica que los estudiantes podrían decir que la afirmación es verdadera “realizando las divisiones (cincuenta dividido entre veinte y veinte dividido entre ocho) y llegar a que ambas fracciones representan a la expresión decimal 2,5”. Esto permite pensar que la EPM considera que, en definitiva, las fracciones sí son iguales por representar al mismo número.

En suma, la concepción que tiene la EPM de la definición de fracciones equivalentes no es consistente con la teoría matemática. Del primer enfoque para el estudio de los números racionales, desarrollado en la sección marco conceptual, se desprende que dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes, siguiendo la definición de equivalencia que se estableció entre pares, si $a \cdot d = c \cdot b$. En cambio, la EPM considera como definición de fracciones equivalentes lo que en realidad, en esa teoría, es un teorema: Si (a, b) es un par ordenado perteneciente a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ y n un número entero distinto de cero, entonces $(a, b) \sim (a \cdot n, b \cdot n)$. Obsérvese que este teorema permite obtener infinitas fracciones equivalentes a una dada, pero no necesariamente todas las de la clase de equivalencia a partir de esa fracción dada. Esto es, si partimos, por ejemplo, de la fracción $\frac{20}{8}$ y multiplicamos numerador y denominador por el mismo número entero distinto de cero, podremos obtener infinitas fracciones equivalentes como $\frac{40}{16}$, $\frac{60}{24}$, etcéte-

ra, pero no obtendremos otras fracciones equivalentes como ser $\frac{50}{24}$ o $\frac{15}{6}$.

La concepción de la EPM tampoco es parcialmente consistente con la teoría dado que si se aplicara como definición de fracciones equivalentes el teorema antes mencionado, entonces las fracciones $\frac{20}{8}$ y $\frac{50}{20}$ no serían equivalentes y, como es bien sabido, sí lo son.

En suma, el análisis a priori que la EPM realizó de la actividad diseñada juega un doble rol. A la EPM le permite anticipar las ideas matemáticas involucradas, las posibles respuestas que podrían dar los alumnos, así como las

distintas estrategias y representaciones que podrían emplear para resolver la actividad; al equipo de investigadoras le aporta información acerca de las concepciones de la EPM sobre fracciones equivalentes y números racionales iguales, y que estas no son consistentes con la teoría matemática.

RELATIVO A LA IMPLEMENTACIÓN Y EL ANÁLISIS

Después de exponer el análisis a priori, la EPM desarrolla lo acontecido en la implementación. En primer lugar, la EPM afirma que en la clase dictada “se analizó si la igualdad presentada estaba conformada por dos fracciones equivalentes, llegando a que no, a partir del razonamiento de los estudiantes”. Esto confirma lo dicho en el apartado anterior: la EPM considera que las fracciones $\frac{20}{8}$ y $\frac{50}{20}$ no son equivalentes pues no aplica la definición formal de fracciones equivalentes sino su definición personal, que en la teoría es un teorema. A continuación explica que uno de los razonamientos de sus estudiantes:

Fue multiplicar a $\frac{20}{8}$ por 2 obteniendo $\frac{40}{16}$ y $\frac{20}{8}$ por 3 obteniendo $\frac{60}{24}$. Esto les permitía concluir que dichas fracciones no son equivalentes, y fue uno de los motivos con más adhesiones para establecer que [la proposición] era falsa”.

Más allá del error de la EPM en la manera de expresarse (dice que multiplica la fracción por 2 en lugar de decir que multiplica numerador y denominador por 2), interpretamos que lo que quiso decir es que multiplicando por 2, o por 3, *numerador y denominador*, va hallando fracciones equivalentes a $\frac{20}{8}$ pero diferentes a $\frac{50}{20}$ y por ese motivo no son equivalentes. Esta descripción que hace la EPM de lo que sucedió en la clase, deja en evidencia que sus concepciones alternativas fueron trasladadas a sus estudiantes de enseñanza secundaria.

Más adelante, la EPM explica el segundo razonamiento que presentaron sus estudiantes: “hallar las expresiones decimales asociadas a dichas fracciones, arribando así a que ambas representan al número racional 2,5”. Esto refuerza la otra concepción de la EPM relativa a las fracciones: dividiendo numerador por denominador se obtiene la expresión decimal y, si coinciden, entonces las fracciones son iguales. En este momento la EPM concluye: “lo que permitió analizar que dos fracciones equivalentes son iguales, y que dos fracciones iguales no siempre deben ser equivalentes”. En esta afirmación se sintetiza otra concepción alternativa de la EPM relacionada con la anterior: dos fracciones pueden ser iguales (en el sentido de tener la misma representación decimal) sin ser equivalentes

(porque no hay un número entero tal que, al multiplicar numerador y denominador de una de esas fracciones por ese número, se obtenga la otra). La EPM señala de manera explícita que a los distintos razonamientos se llegó a partir de lo que los alumnos planteaban. Esto deja en evidencia la intención de la EPM para que en la clase se jerarquice y valore la participación de los alumnos, pues es a través de sus ideas y sugerencias que se arriba a conclusiones. Esto es consistente con la metodología de indagación de significados. A su vez, la implementación le permitió contrastar el análisis a priori con lo que efectivamente sucedió en clase: los alumnos utilizaron distintas aproximaciones para dar respuestas en las que las distintas representaciones del número racional tuvieron un papel relevante.

RELATIVO A LA REFLEXIÓN POSTERIOR A LA IMPLEMENTACIÓN

Después de la descripción de la implementación de la actividad en clase, la EPM reflexiona sobre la incidencia de la conversación en las ideas matemáticas de los estudiantes. Allí afirma que:

La discusión permitió que los estudiantes se cuestionaran que dos fracciones que no son equivalentes pueden ser iguales. Esto dio lugar a discutir que, si dos fracciones son equivalentes, son iguales, y que dos fracciones iguales, pueden no ser equivalentes.

Presenta entonces como un logro en sus estudiantes que identifiquen que dos fracciones no equivalentes pueden ser iguales (y recíprocamente), lo que devela una concepción alternativa, en el sentido de Narjaikaew (2013), de fracciones equivalentes. Esta concepción es alternativa respecto a las ideas científicamente aceptadas, que establecen que dos fracciones iguales, esto es, formadas por los mismos componentes, son, necesariamente, equivalentes. Además, dos fracciones equivalentes son representantes del mismo número racional, por lo que también se puede afirmar que representan números racionales iguales. A continuación agrega que “para establecer que, si dos fracciones están igualadas, debo recurrir a analizar sus expresiones decimales asociadas para poder establecer si esta es una igualdad verdadera o falsa”, lo que devela que domina una estrategia consistente con ideas científicamente aceptadas sobre la relación entre una fracción, su expresión decimal y el número racional que representa.

Como debilidad en el trabajo con los estudiantes, la EPM señala:

Me costó mucho no intervenir y actuar como guía, en lugar de corregir a los estudiantes, y en algunos momentos no pude evitar hacerlo. Considero que esa es mi principal debilidad, ya que en algunos momentos la clase se convirtió en una clase tradicional de matemáticas, en lugar de mantener el enfoque en la práctica “interrogando significados” de manera constante.

Esto nos informa acerca de las dificultades de quienes se inician en la docencia para romper con el modo tradicional de impartir las clases: un profesor que explica, estudiantes que escuchan y luego resuelven ejercicios similares a los que el profesor les explicó en la pizarra. Como fortaleza señala que logró que sus estudiantes evolucionaran en su concepción del signo igual como señal de realizar una operación a un signo que relaciona dos cantidades iguales, es decir, que pudieran pasar de una visión operacional a una visión relacional (Kieran, 1981). Para la EPM, la práctica de interrogar significados implicó un gran desafío que le permitió conocer un poco más el pensamiento de sus estudiantes. En este sentido, el propósito de la tarea propuesta por la formadora de didáctica fue logrado y se encuadra claramente en el tema 5 (Zaslavsky y Sullivan, 2011): aprender de la práctica.

RELATIVO A LA SÍNTESIS DEL TRABAJO REALIZADO

A la EPM se le propuso elaborar un breve diálogo con base en la clase dictada, aunque podían introducirse elementos ficcionales, que sintetizara y ejemplificara lo sucedido en la clase, considerando el objetivo de indagar significados contruidos por los estudiantes de enseñanza secundaria. Al respecto, presentó el siguiente diálogo:

Contesta si la siguiente igualdad es verdadera o falsa.

$$\frac{20}{8} = \frac{50}{20}$$

Profesora: ¿Pueden ser iguales, aunque no sean equivalentes?

Estudiante 1: Sí.

Estudiante: Son iguales, pero no son equivalentes.

Profesora: ¿Cuándo son equivalentes no son iguales?

- Estudiante 2: Sí, son iguales.
Profesora: Ahora, si no son equivalentes, ¿pueden ser iguales?
Estudiantes: Sí. No.
Profesora: Ya dijeron que si son equivalentes son iguales.
Estudiante 3: Entonces si no son equivalentes no son iguales.
Profesora: Estas dos fracciones, ¿son equivalentes?
Estudiante 2: Son iguales, pero no son equivalentes.
Profesora: Entonces si son iguales, ¿son equivalentes?
Estudiante 2: No siempre.

Este diálogo, que para la EPM sintetiza lo estudiado en la clase, también sintetiza lo que hemos expuesto en las secciones anteriores de este análisis: la EPM posee concepciones alternativas que son claramente inconsistentes con la teoría matemática y que la llevaron, en definitiva, a institucionalizar conocimientos matemáticamente incorrectos en el aula de clase. Sus concepciones alternativas sobre fracciones equivalentes y sobre números racionales iguales fueron institucionalizadas en el aula de enseñanza secundaria. Es decir, no enseñó conocimiento matemático sino sus concepciones acerca de ese conocimiento, institucionalizó en su grupo de clase que dos fracciones equivalentes representan el mismo número racional, lo que es matemáticamente correcto, y que dos fracciones que representan el mismo número racional no necesariamente son equivalentes (concepción alternativa, matemáticamente incorrecta). Para la EPM, dos fracciones son equivalentes si pueden obtenerse multiplicando el numerador y el denominador de una fracción dada por un mismo número entero distinto de cero, y esto hace que, para la EPM, fracciones como $\frac{20}{8}$ y $\frac{50}{20}$ no sean equivalentes. Las reconoce como iguales porque al dividir numerador entre denominador, en cada caso, obtiene la misma expresión decimal. Sin embargo, esas fracciones representan al mismo número racional pues se cumple que $20 \cdot 20 = 8 \cdot 50$ y por lo tanto las dos pertenecen a la misma clase de equivalencia. Aquí apreciamos una inconsistencia con el conocimiento científico aceptado por la comunidad matemática.

En suma, aún cuando la EPM trabajó desde una práctica de indagación y a partir de los aportes de sus alumnos, no surgieron dilemas que permitieran a los alumnos de secundaria advertir que las ideas que se discutieron eran matemáticamente incorrectas. Es importante señalar que la práctica de indagación recomendada por Szydlik (2015) resultó, en definitiva, de bajo impacto en el aprendizaje de los alumnos de secundaria debido a que las ideas matemáticas que la docente institucionalizó fueron incorrectas.

RELATIVO A LA ENTREVISTA

A la pregunta: ¿Cuál es para ti la definición de fracciones equivalentes?, la EPM reconoció que había tenido una interpretación incorrecta de lo que se mencionaba en el libro de texto utilizado por los alumnos. Explicó que ella distinguía entre equivalentes e iguales, “equivalentes como aquellas que son múltiplos e iguales las que tienen la misma expresión decimal”. El libro de texto que utilizaban los alumnos no presenta la definición de fracciones equivalentes y por ello, la EPM consideró como definición la propiedad que afirma que si tenemos una fracción y multiplicamos su numerador y su denominador por un número entero distinto de cero, entonces obtenemos una fracción equivalente. Como ya explicamos en apartados anteriores, esta propiedad permite obtener infinitas fracciones equivalentes a una dada, pero no necesariamente cualquiera de la clase de equivalencia. Al preguntarle cuál es la definición de fracciones iguales, la EPM respondió que son aquellas “asociadas a la misma expresión decimal”. Esto le permitió, entonces, afirmar que las fracciones $\frac{20}{8}$ y $\frac{50}{20}$ son iguales, y por lo expuesto en primer lugar, no son equivalentes. La EPM percibió, con angustia, ante las preguntas que había algo de lo que había enseñado que no era matemáticamente correcto y no pudo recuperar por sí la definición de fracciones equivalentes, ya fuere porque no la conocía o no la recordaba; solicitó a la entrevistadora que le explicara todos los conceptos correctamente para que cuando los tuviera que enseñar nuevamente pudiera hacerlo sin errores.

CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo consistió en explorar el efecto de la implementación de una tarea para la formación de profesores, con base en tres de los temas propuestos por Zaslavsky y Sullivan (2011), que abarcó cinco fases: estudio, diseño, implementación y análisis, reflexión y síntesis, a partir de constructos de la matemática educativa. La tarea le permitió a la EPM una reflexión acerca de aspectos didácticos relativos a la implementación de una clase con base en la indagación de significados. La EPM pudo reconocer la principal dificultad que vivió: sostener la metodología de trabajo para no instalar una clase tradicional. Reconoció que por momentos le costó actuar como guía de los estudiantes. En cuanto a las fortalezas, consideró que logró que sus alumnos evolucionaran de una visión operacional del signo de igual a una visión relacional dado que la igualdad con

la que trabajó no tenía operaciones en ninguno de los dos miembros. De estas observaciones realizadas por la EPM constatamos que la tarea propuesta efectivamente movilizó los temas 4, 5 y 7 sugeridos por Zaslavsky y Sullivan (2011) pues la EPM diseñó un problema consistente con la práctica de indagación (en la fase de diseño), reflexionó sobre las dificultades y logros en la implementación (en la fase de implementación y análisis) e identificó las ideas matemáticas que sus alumnos movilizaron en la resolución del problema (en las fases de reflexión y de síntesis). En este sentido, la tarea propuesta a la EPM resultó eficaz para promover una reflexión sobre su práctica, su hacer como docente y los logros de sus alumnos.

No obstante, se presentó un problema de naturaleza disciplinar pues las nociones matemáticas que la EPM enseñó a sus alumnos no fueron matemáticamente correctas, como, por ejemplo, que “dos fracciones iguales pueden no ser equivalentes”. En consecuencia, se detectó que la EPM posee concepciones alternativas que no son consistentes con la teoría matemática; por ello, afirmamos que, adicionalmente, la tarea propuesta permitió indagar las concepciones alternativas de la propia EPM sobre fracciones iguales y equivalencia de fracciones. Esta indagación se realizó a partir de las evidencias que surgieron de la implementación de la clase por parte de la EPM. Las concepciones alternativas son aquellos conceptos de las personas que no son consistentes con el conocimiento disciplinar (Narjaikaew, 2013). En este caso se identificó la siguiente concepción alternativa: dos fracciones pueden ser iguales (si tienen la misma expresión decimal) sin ser equivalentes (porque no hay un número entero tal que, al multiplicar numerador y denominador de una de esas fracciones por ese número, permita obtener la otra). Asimismo, se obtuvo evidencia de que la EPM enseñó esta concepción matemáticamente incorrecta a sus alumnos. Esta incidencia de las concepciones en la práctica profesional de la EPM son consistentes con lo reportado por Chhabra y Baveja (2012) y por Ryan y Williams (2007): los docentes no enseñan el conocimiento disciplinar sino las concepciones que han elaborado acerca de ese conocimiento.

A la luz de la problemática identificada, no solo en relación a las concepciones alternativas de la EPM sino también a cómo esas concepciones se trasladan a sus estudiantes de enseñanza secundaria, entendemos que este estudio aporta evidencia de que para un futuro profesor es ineludible un conocimiento profundo de las distintas construcciones del conjunto de los números racionales y de sus abordajes en la matemática escolar. Así, se abren preguntas que deberían ser atendidas por la investigación: ¿Cuáles podrían ser los enfoques de la enseñanza del número racional más pertinentes para una formación de profesorado en matemáticas? ¿Cómo puede el formador en matemáticas conectar con los contenidos que se

enseñan en didáctica de matemáticas? ¿Cómo puede el formador en matemáticas conectar con las prácticas de enseñanza de las matemáticas en el nivel secundario aun cuando no posea experiencia de trabajo en ese nivel?

En síntesis, la tarea presentada a la EPM permitió, por un lado, aportar a la experimentación de una futura profesora con la práctica de interrogar significados (Szydlik, 2015) para profundizar en el pensamiento de sus estudiantes y tomar decisiones con base en ese conocimiento. Por otro, permitió al equipo de investigación indagar sobre los significados de fracciones equivalentes, signo igual y número racional de la propia EPM. Esto es, los significados que había construido a lo largo de su trayectoria escolar sobre los conceptos que ella misma enseñó en la clase implementada. Así, la práctica de interrogar significados asumió en este trabajo un doble rol: como herramienta de indagación del pensamiento de los estudiantes para la EPM y como herramienta de indagación del pensamiento de la EPM para el equipo de investigadoras. En este doble rol, la tarea diseñada y propuesta demostró, en efecto, un enorme potencial, pues es a partir del pleno conocimiento de las dificultades de los EPMs que los formadores podrán ayudarlos a conquistar las habilidades profesionales. La práctica de interrogar significados no solo constituyó una “ventana al pensamiento de nuestros estudiantes [de enseñanza secundaria]” (Szydlik, 2015, p. 656), sino, también, una ventana al pensamiento de una EPM. Con esto se amplía el campo de aplicación de la práctica de interrogar significados al ámbito de la formación de profesores de matemáticas tanto con objetivos formativos como investigativos.

Este trabajo posee como limitante que se trata de un estudio de caso único, no obstante, se considera que es sumamente ilustrativo para quienes están interesados en la formación de profesores de matemáticas y también para aquellos que diseñan políticas públicas en torno a programas de formación de profesores o que se ocupan de los diseños curriculares de esos programas.

Finalmente, recomendamos a los formadores de matemáticas tener en cuenta para la planificación de sus cursos que los futuros profesores no enseñan los contenidos matemáticos sino las concepciones que elaboran sobre ellos y, por lo tanto, desde el aula de formación docente debería contribuirse para que las concepciones que construyen los EPMs sean consistentes con el conocimiento científico aceptado por la comunidad matemática, minimizando así los riesgos de que circule en las aulas de enseñanza secundaria un conocimiento que es matemáticamente incorrecto. Este estudio nos enseñó que no es posible una formación didáctica de los futuros profesores separada del conocimiento matemático, esto es, la formación didáctica es específica y debe abordar de manera interrelacionada

los conceptos matemáticos con los constructos provenientes de la matemática educativa, ya sea en las clases de didáctica de matemáticas como en las clases de matemáticas de la formación de profesores. Sostenemos que no hay metodologías de enseñanza que puedan circular de manera eficaz en el aula si el profesor no posee un profundo conocimiento de la matemática escolar.

REFERENCIAS

- Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 132–144.
- Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C., Underhill, R., Jones, D. y Agard, P. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(3), 194–222. <https://doi.org/10.2307/749118>
- Carvalho, R. (2023). Prospective teacher's representations of fractions. *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*, Alfréd Rényi Institute of Mathematics; Eötvös Loránd University of Budapest, Hungary. hal-04413461.
- Chhabra, M. y Baveja, B. (2012). Exploring Minds: Alternative Conceptions in Science. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 55, 1069 – 1078. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.09.599>
- Copur-Gencturk, Y. (2021). Teachers' conceptual understanding of fraction operations: results from a national sample of elementary school teachers. *Educational Studies in Mathematics* 107, 525–545. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10033-4>
- Copur-Gencturk, Y. (2022). Teachers' knowledge of fraction magnitude. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(5), 1021-1036. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10173-2>
- Cubero, R. (2021). Concepciones alternativas, preconceptos, errores conceptuales. ¿distinta terminología y un mismo significado? *Investigación En La Escuela*, 23, 33–42. <https://doi.org/10.12795/IE.1994.i23.03>
- Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Verschaffel, L. y Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education* 47, 82–92.
- Escudero-Ávila, D., Montes, M. y Contreras, L. (2021). What Do Mathematics Teacher Educators Need to Know? Reflections Emerging from the Content of Mathematics

- Teacher Education. En M. Goos y K. Beswick (Eds.), *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators. International Perspectives and Challenges* (pp. 23–40). Springer.
- Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 317–326. <https://doi.org/10.1007/BF00311062>
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.
- Lentin, A. y Rivaud, J. (1982). *Álgebra moderna*. Aguilar.
- Merenluoto, K. y Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: understanding the real numbers. En M. Limón y L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change. Issues in theory and practice* (pp. 233–258). Kluwer Academic Publishers.
- Molfino, V. y Ochoviet, C. (2019a). A mathematics teacher's identity study through their teaching practices in a postgraduate training course. *The Mathematics Enthusiast*, 16(1), 389–408. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1465>
- Molfino, V. y Ochoviet, C. (2019b). La producción de conocimiento didáctico en la formación de profesores de matemática: la investigación como herramienta. En Macedo, B.; Silveira, S.; García, M.; Meziat, D.; Bengochea, L. (Eds.). *Enseñanza y aprendizaje de las ciencias en debate. Volumen 1* (pp. 616–625). Alcalá, España: Servicio de comunicaciones Universidad de Alcalá.
- Molfino, V., Ochoviet, C. y Pagés, D. (2023). Exploración de las identidades profesionales de tres formadoras de profesores de Matemáticas a través de narrativas. *Revista da investigação às práticas*, 13(2), e-362. <https://doi.org/10.25757/invep.v13i2.362>
- Murray, E. y Baldinger, E. (2018). Impact of Abstract Algebra on Teachers' Understanding of and Approaches to Instruction in Solving Equations. En N. Wasserman (Ed.), *Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers* (pp. 403–429). Springer.
- Narjaikaew, P. (2013). Alternative Conceptions of Primary School Teachers of Science about Force and Motion. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 88, 250–257. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.08.503>
- Newton, K. J. (2008). An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fractions. *American Educational Research Journal*, 45(4), 1080–1110.
- Ochoviet, C. (2022). *Enseñar a enseñar en la formación inicial de profesores de matemática*. Informe final de proyecto por año sabático, Consejo de Formación en Educación, ANEP.
- Ochoviet, C. y Parodi, S. (2024). Vinhetas conceituais para o ensino de didática da Matemática. *Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo Entre As Ciências*, 13(01), 386–413. <https://doi.org/10.22481/rbbav13i01.14230>

- Ryan, J. y Williams, J. (2007). *Children's Mathematics 4-15. Learning From Errors and Misconceptions*. McGraw-Hill.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Son, J. W. y Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(4), 235-261. <https://doi.org/10.1007/s10857-009-9112-5>
- Stein, M. K. y Smith, M. S. (1998a). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275. <https://doi.org/10.5951/MTMS.3.4.0268>
- Stein, M. K. y Smith, M. S. (1998b). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5), 344-350.
- Szydlik, J. (2015). Mathematical Conversations To Transform Algebra Class. *Mathematics Teacher*, 108(9), 656-661.
- Tirosh, D. y Tsamir, P. (2024). Mis-Out and Mis-In Examples: The Case of Rational Numbers. *International Journal of Science and Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s10763-024-10479-x>
- Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 93-114). Sense Publishers.
- Zaslavsky, O. y Sullivan, P. (2011). Setting the stage: A conceptual framework for examining and developing tasks for mathematics teacher education. En O. Zaslavsky y P. Sullivan (Eds.), *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics* (pp. 1-19). Springer.
- Zazkis, R. y Marmur, O. (2018). Scripting tasks as a springboard for extending prospective teachers' example spaces: A case of generating functions. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 18(4), 291-312. <https://doi.org/10.1007/s42330-018-0019-y>

Autora de correspondencia

VERÓNICA MOLFINO VIGO

Dirección: Av. Libertador Brigadier General Lavalleja 2025,
Montevideo, Uruguay
veromolfino@gmail.com

Comparando y contrastando las teorías APOE y de Registros de Representación Semiótica: una posible integración

Comparing and contrasting APOS and Registers of Semiotic Representation theories: a possible integration

José David Morante Rodríguez,¹ Lidia Aurora Hernández Rebollar,² María Trigueros Gaisman³

Resumen: Se informan los resultados de la comparación y la contrastación de las teorías APOE y de Registros de Representación Semiótica los cuales servirán para establecer lazos entre ellas y reflexionar sobre la pertinencia de utilizarlas de manera conjunta en el estudio de la comprensión de conceptos matemáticos. Se exhibe el análisis de los fundamentos teóricos, principios, constructos, relaciones epistemológicas y metodológicas y su relación con la enseñanza usando la metodología del Networking of Theories. Los resultados muestran que la integración de estas teorías es viable para generar un marco coherente que permita explorar fenómenos educativos a través de una nueva lente.

Palabras clave: *Teoría APOE, teoría de los registros de representación semiótica, Networking of theories.*

Fecha de recepción: 10 de enero de 2024. **Fecha de aceptación:** 28 de marzo de 2025.

¹ Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México, morantert@gmail.com, <http://orcid.org/0000-0002-8089-0386>

² Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México, lidia.hernandez@correo.buap.mx, <http://orcid.org/0000-0003-0658-4396>

³ Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México, mtriguerosg@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-7527-6704>

Abstract: The results of the comparison and contrast of the APOS and Semiotic Representation Registers theories are reported, which will serve to establish links between them and reflect on the relevance of using them together in the study of the understanding of mathematical concepts. The analysis of the theoretical foundations, principles, constructs, epistemological and methodological relationships and their relationship with teaching using the Networking of Theories methodology is exhibited. The results show that the integration of these theories is viable to generate a coherent framework that allows exploring educational phenomena through a new lens.

Keywords: *APOS theory, theory of semiotic representation registers, Networking of theories.*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha sido abordada desde diferentes perspectivas, debido a la pluralidad de enfoques que obedecen tanto a regiones como aspectos culturales (Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2014; Krainer, 2003).

Esta diversidad de enfoques teóricos muestra la riqueza e interés creciente de la comunidad educativa pero, al mismo tiempo puede conducir a resultados someros o generar roces entre estos, debido a los aspectos parciales que cada uno aborda (Godino, 2022) y que en varias ocasiones resultan en una fragmentación del campo investigativo dentro de la matemática educativa (Noddings, 1996; Goldin, 2003; Lesh y Sriraman, 2005; Sriraman y English, 2010; Artigue y Mariotti, 2014; Krainer, 2003; Rasmussen *et al.*, 2014).

Las investigaciones del campo muestran un constante interés por abordar un mismo fenómeno usando distintos marcos teóricos (Artigue y Mariotti, 2014; Bakker y Zenger, 2021) con la finalidad de complementarse unos a otros en el estudio de una misma problemática. Otros trabajos han explorado una perspectiva más teórica en el sentido de explorar las posibilidades teóricas y metodológicas que puede ofrecer el trabajar con más de un enfoque (Font *et al.*, 2016; Godino, 2022). Finalmente, otros trabajos han expuesto esta necesidad a la luz de conceptos específicos en matemáticas (Martínez-Planell y Trigueros, 2012).

En este contexto, diversas investigaciones se han centrado en explorar cómo garantizar que la misma problemática abordada desde distintos enfoques

teóricos sea congruente y permita trascender más allá de una mera complementariedad de recursos u ornamentos investigativos.

Estas investigaciones han venido consolidando la denominada *Networking of Theories*, cuyos inicios se asocian con el contraste y establecimiento de conexiones entre las teorías y el diseño de metodologías que permitan articular enfoques teóricos de manera congruente (Prediger *et al.*, 2008).

Un aspecto por resaltar es que, en los casos en que se consigue dar paso a una relación entre enfoques teóricos, la rigurosidad o formalidad teórica se abandona y solo se enfatiza el papel pragmático de esta relación. Consecuentemente, las explicaciones o caracterizaciones de un fenómeno estudiado quedan poco exploradas dado que, no se da espacio a la modularidad y congruencia de la naturaleza ontológica, epistemológica y metodológica de los marcos usados que pueda servir como una nueva lente para estudiar fenómenos. Al respecto, Lester (2005) señala que el marco teórico es fundamental, pero al mismo tiempo puede ser el aspecto menos comprendido del proceso de investigación.

Estas ideas permiten enfatizar una problemática principal: cómo garantizar una correcta integración de enfoques teóricos que trascienda a la complementariedad o minimice la existencia de una relación incongruente.

En este contexto, es pertinente mencionar que el *Networking of Theories* ha venido desarrollando casos concretos de trabajo en red, por ejemplo, en Bikner-Ahsbahs y Prediger (2014) se reportan y discuten ampliamente cuatro casos de estudio sobre redes de trabajo a diferentes niveles y entre enfoques teóricos como: el Enfoque de Acción, Producción y Comunicación (APC) y la Introducción a la Abstracción en Contexto (AiC), capítulo 9. Otro caso de estudio es la red de trabajo entre la Teoría de Situaciones Didácticas (TDS) y la Introducción a la Abstracción en Contexto (AiC), capítulo 10. La red de trabajo entre la Introducción a la Teoría de Situaciones Densas en Interés (IDS) y el Enfoque de Acción, Producción y Comunicación (APC), capítulo 11. Por otra parte, el estudio de caso entre la Teoría de las Situaciones Densas en Interés (IDS) y la Teoría de Situaciones Didácticas (TDS) capítulo 12. En general, estos trabajos representan la primera oleada propuesta de sistematización de esta metodología.

Una segunda oleada de trabajos en los que se ha usado activamente esta metodología, son los de Drijvers *et al.* (2003), Maracaci (2008), Tabach y Nachlieli (2011), Fetzner (2013), Drayfus *et al.* (2014), Sabena *et al.* (2014), Alberto *et al.* (2019), Bingolbali *et al.* (2021), Bikner-Ahsbahs (2022), Ledezma *et al.* (2023), Rodríguez-Nieto *et al.* (2022). Un aspecto para destacar de estos estudios es que la mayoría reporta el uso de uno o dos niveles de estrategias de trabajo en red.

Otros trabajos han explorado las estrategias del Networking of Theories para impulsarla como una práctica de investigación, por ejemplo: Wedege (2010), Artigue y Bosh (2014), Kidron (2016, 2019), Godino *et al.* (2013), Artigue (2019), Bach *et al.* (2021).

Estos trabajos permiten dimensionar los esfuerzos por relacionar enfoques teóricos de manera más consistente y profunda para explorar sus alcances en la comprensión de fenómenos educativos o en la propuesta de nuevas perspectivas teóricas.

En este trabajo nos centramos en mostrar la posibilidad de la generación de una red de trabajo entre las teorías APOE y de Registros de Representación Semiótica que permita ofrecer una mirada de cómo estos enfoques teóricos pueden entrelazarse en el estudio de fenómenos interpretados a la luz de esta nueva lente.

La selección de las teorías APOE y de Registros de Representación Semiótica se fundamenta en investigaciones que evidencian su potencial complementario para analizar la comprensión de conceptos matemáticos. Estudios como los de Trigueros y Martínez-Planell (2010), Martínez-Planell y Trigueros (2012, 2019) con las funciones de dos variables, han demostrado la utilidad de combinar ambas perspectivas para comprender la relación entre la visualización gráfica y las estructuras cognitivas. Sin embargo, aunque estos trabajos abren camino para una integración más profunda, su objetivo principal ha sido el análisis de datos específicos, más que el desarrollo de un marco teórico unificado. En línea con esta necesidad, Hernández *et al.* (2023) resaltan la importancia de explicitar las estructuras mentales subyacentes a cada representación semiótica e incluirlas en el modelo de análisis de la teoría APOE, la descomposición genética.

Los estudios analizados, aunque exploran la relación entre las teorías APOE y de Registros de Representación Semiótica, no logran integrarlas de manera sistemática. Como resultado, las caracterizaciones del conocimiento se limitan a las estructuras mentales propuestas por la teoría APOE, dejando de lado las transformaciones semióticas. Esto impide una exploración profunda de la interrelación entre los planos semiótico y cognitivo, dado que carecemos de un modelo teórico que permita analizar ambas perspectivas de manera conjunta.

La construcción de un enfoque integrado es fundamental para superar las limitaciones actuales y lograr una comprensión más profunda de los procesos de aprendizaje matemático. Para esto, es necesario realizar un análisis comparativo exhaustivo de ambos enfoques, considerando sus fundamentos epistemológicos, metodologías, implicaciones pedagógicas y modelos de análisis. Este análisis

permitirá identificar tanto las convergencias como las divergencias entre ambas teorías, sentando las bases para la construcción de un marco teórico unificado. El Networking of Theories se presenta como una metodología especialmente prometedora para esta tarea, ya que permite articular de manera sistemática las relaciones entre diferentes teorías y construir modelos integrativos que superen las limitaciones de los enfoques individuales.

Este proyecto forma parte de una investigación más amplia en la que pretendemos dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación: ¿En qué medida el desarrollo de lazos entre los marcos teóricos APOE y registros de representación semiótica contribuye a enriquecer el marco teórico de ambas?

En este trabajo, nos centramos en las estrategias de *comparación* y *contrastación* para responder: ¿Qué diferencias y similitudes se encuentran en el análisis de estas teorías?

Para dar respuesta a la segunda pregunta de investigación se plantea el siguiente objetivo: identificar las diferencias y similitudes de ambas teorías como parte de las estrategias para explorar la viabilidad de su integración.

RED DE TRABAJO ENTRE TEORÍAS (NETWORKING OF THEORIES)

En este trabajo se adopta la metodología propuesta por el Networking of Theories para estudiar la posible red de trabajo entre la teoría APOE y de Registros de Representación Semiótica, en particular, para la etapa de la *comparación* y la *contrastación*.

A lo largo de distintas publicaciones Prediger *et al.* (2008); Bikner-Ahsbahr y Prediger (2009) se refieren al Networking of Theories, como: “el conjunto de prácticas de investigación que tienen como objetivo crear un diálogo y establecer relaciones entre partes de enfoques teóricos respetando la identidad de dichos enfoques”.

Para sistematizar y reflejar la manera en que se lleva a cabo el diálogo entre diferentes enfoques teóricos, el Networking of Theories proporciona un panorama de estrategias de trabajo en red a distintos niveles de profundidad. Su propuesta parte de dos posturas radicales, por un lado, el desconocimiento de otras teorías al momento de abordar una problemática y en el otro extremo una unificación global de las teorías.

Adoptando como punto de partida la premisa de que las teorías no están aisladas, sino que pueden aprender unas de otras, la atención se centra en

estrategias intermedias para encontrar conexiones, en la medida de lo posible, entre distintos enfoques teóricos. Todas estas estrategias intermedias se denominan estrategias de trabajo en red y su finalidad radica en respetar, por un lado, el pluralismo y/o modularidad de los enfoques teóricos autónomos, pero que, por otro lado, se preocupan por reducir la multiplicidad inconexa de enfoques teóricos en la ciencia (Prediger *et al.*, 2008, p. 170).

Con base en lo expuesto, las estrategias del trabajo en red se ordenan en función del grado de integración de las teorías respectivas y se estructuran por medio de las siguientes parejas: comprendiendo y haciendo comprensible; comparando y contrastando; combinando y coordinando; e integrando localmente y sintetizando (figura 1).

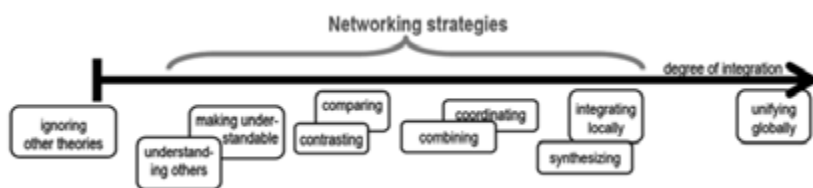


Figura 1. Un panorama de estrategias para conectar enfoques teóricos
(Tomado de Prediger *et al.*, 2008)

De acuerdo con esto, se comienza con el trabajo de *comprender* y *hacer comprensible* los enfoques con los que se pretende trabajar. Para ello es necesario entender los constructos clave, los principios, las preguntas, la metodología y la forma en que se ofrecen los resultados desde los diversos enfoques que se pretenden considerar. Esta primera estrategia de trabajo en red resulta fundamental si se quiere lograr una sinergia congruente entre los diversos enfoques.

El siguiente par de estrategias de trabajo en red es *comparar* y *contrastar* enfoques teóricos. La primera se refiere a similitudes y diferencias de forma general, por su parte, contrastar se centra más en extraer diferencias típicas entre los enfoques analizados. En síntesis, esta estrategia se utiliza principalmente para generar una mejor comprensión de las características de las teorías que se pretende utilizar (Bikner-Ahsbahr y Prediger, 2014).

En otra etapa, las estrategias de *combinación* y *coordinación* se utilizan para comprender un fenómeno o un conjunto de datos. De esta manera la combinación alude a la visión multifacética, pero no necesariamente compatible, que se

adquiere si se observa o analiza un fenómeno desde diversos marcos teóricos y la coordinación refiere a la construcción de un nuevo marco conceptual a la luz de la comprensión de estos enfoques (Bikner-Ahsbahr y Prediger, 2014).

Finalmente, se explican las estrategias de *síntesis* e *integración local*. De acuerdo con Bikner-Ahsbahr y Prediger (2014), la síntesis refiere a la situación en la que las teorías estudiadas dan origen a un nuevo marco teórico como consecuencia de la definición de conceptos a la luz de las teorías integradas. Sin embargo, esta integración a menudo no es simétrica o de alcances mayores, por lo que se enfatiza el término “local”.

En la práctica, la aplicación de estas estrategias resulta más complicada y regularmente no se sigue una estructura lineal entre pares de estrategias. Usualmente se aplica más de una estrategia a la vez ya que el grado de integración depende de las relaciones concretas encontradas (Bikner-Ahsbahr y Prediger, 2014). A pesar de lo anterior, este marco proporciona una sistematización útil para abordar el problema de la integración de marcos teóricos.

METODOLOGÍA

Esta investigación es de corte teórico-cualitativa, se basa en la metodología del Networking of Theories y reporta únicamente los resultados de la etapa de *comparación* y *contrastación*. Aunque, es importante aclarar que también se implementaron las estrategias de *comprender* y *hacer comprensibles las teorías*.

En este contexto en la etapa inicial se trabajó en el compendio y análisis de las investigaciones de corte teórico de cada una de las teorías consideradas en este trabajo, mismas que permitieron estudiar y comprender sus aproximaciones teóricas en cuanto a la manera en que buscan caracterizar sus objetos de estudio, la forma en que conciben el conocimiento matemático, sus elementos epistemológicos, cómo se formulan preguntas de investigación en estos enfoques, etc.

En una siguiente etapa se identificó la metodología de cada teoría, así como sus modelos de análisis y se revisó gran cantidad de investigaciones de corte pragmático, en el sentido de explorar cómo se usa dicha teoría en el estudio de fenómenos específicos. Esto permitió comprender de mejor manera la relación entre los constructos y modelos de análisis de cada marco teórico.

En la etapa de las estrategias *comparar* y *contrastar* se consideraron los siguientes elementos: antecedentes, epistemología, metodología, relación con la enseñanza y la comprensión de las relaciones entre conceptos matemáticos.

Estos son componentes importantes en ambas teorías (Asiala *et al.*, 1997; Duval 1995), los cuales se compararon usando matrices en las que se organizó cada idea con sus citas específicas.

Aunque las estrategias de trabajo en red parecen ir en progresión lineal en realidad el trabajo entre una etapa y otra fue cíclico en el sentido de que a mayor profundidad y comprensión se necesitó volver sobre los primeros análisis en un camino de ida y vuelta entre cada una de las estrategias mencionadas.

RESULTADOS

Para esta presentación, se asume un conocimiento previo de las teorías analizadas. El lector puede encontrar en: Arnon *et al.*, (2014) y Duval (1995, 2017) referencias básicas sobre estas teorías.

COMPARACIÓN Y CONTRASTACIÓN

De acuerdo con Bikner-Ahsbahr y Prediger (2014), *comparar* se refiere a comprender similitudes y diferencias sobre los componentes teóricos y *contrastar* se centra más en extraer diferencias representativas. Partiendo de esta definición, se discuten los siguientes elementos claves entre las teorías APOE y TRRS (ver tabla 1): antecedentes, epistemología, metodología, relación con la enseñanza y la comprensión de las relaciones entre conceptos matemáticos.

Tabla 1. Elementos de comparación y contrastación

Elementos de comparación/ contrastación	Teoría APOE	TRRS
Antecedentes teóricos (orígenes de las teorías)	Epistemología genética de Piaget	Vygotsky, Piaget, Bruner, Peirce y Saussure
Epistemología (naturaleza del conocimiento)	Relación sujeto-objeto	Relación objeto-representación
Metodología (se examina si las teorías cuentan con ella y cómo se implementa)	Sistematizada	No sistematizada

Relación con la enseñanza	Forma parte de la teoría en su ciclo de investigación (ciclo ACE)	No es explícita
Comprensión de las relaciones entre conceptos matemáticos	Ofrece elementos para modelar este tipo de relaciones (Esquema)	No es explícita en cómo esto debería llevarse a cabo.

ANTECEDENTES TEÓRICOS

La teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas) es un marco teórico que busca comprender cómo los estudiantes construyen activamente el conocimiento matemático. Basada en la psicología cognitiva y el constructivismo, esta teoría propone que el conocimiento matemático no es algo que se recibe de forma pasiva, sino que se construye a través de la interacción del estudiante con los objetos matemáticos y las acciones que realiza sobre ellos. Piaget, con su concepto de abstracción reflexiva, influyó significativamente en el desarrollo de la teoría (Amon *et al.*, 2014), al destacar cómo los estudiantes transforman acciones en procesos mentales y, finalmente, en objetos matemáticos.

La teoría APOE se centra en resolver la problemática de las dificultades que experimentan los estudiantes al aprender matemáticas, especialmente cuando memorizan procedimientos sin comprender los conceptos subyacentes. Al analizar cómo se construyen las ideas matemáticas en la mente de los estudiantes y los obstáculos que enfrentan, la teoría APOE busca diseñar actividades de aprendizaje que promuevan una comprensión más profunda. Los constructos de esta teoría proporcionan un marco para analizar las dificultades de los estudiantes y diseñar tareas que faciliten la transición de una comprensión más superficial a una más profunda.

La teoría APOE busca responder a preguntas como: ¿Cómo se construyen las ideas matemáticas en la mente de los estudiantes?, ¿Qué dificultades enfrentan los estudiantes al aprender conceptos matemáticos?, ¿Cómo podemos diseñar actividades de aprendizaje que promuevan una comprensión más profunda?

La Teoría de Registros de Representación Semiótica (TRRS) ofrece un marco conceptual sólido para analizar cómo los estudiantes construyen su conocimiento matemático a través de diferentes representaciones. Al basarse en las investigaciones de Peirce y Saussure sobre la semiosis, la TRRS destaca el papel fundamental que juegan los signos y los sistemas de signos en el pensamiento matemático. Esta teoría se inscribe en una larga tradición de investigación sobre

la representación mental y el aprendizaje y, se nutre de las ideas de autores como Vygotsky, Piaget y Bruner. Sin embargo, su enfoque reivindica el papel de la semiosis en el funcionamiento del pensamiento y los considera indisociables (Duval, 2017).

La TRRS afirma que los objetos matemáticos, al ser abstractos, requieren de diversas representaciones (gráficas, algebraicas, tabulares, etc.) para ser comunicados y manipulados. La comprensión profunda de un concepto matemático implica la capacidad de coordinar diferentes registros de representación, es decir, de establecer conexiones entre distintas representaciones y de utilizarlas de manera flexible para resolver problemas.

Al analizar cómo los estudiantes interactúan con diferentes representaciones, la TRRS busca responder a preguntas clave como: ¿Cómo influyen las diferentes representaciones en el aprendizaje matemático? ¿Cuáles son las dificultades que enfrentan los estudiantes al pasar de un registro a otro? Al responder a estas preguntas, la TRRS ofrece herramientas valiosas para diseñar actividades de enseñanza que promuevan la flexibilidad en el uso de diferentes representaciones y, en última instancia, una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos.

Lo anterior, exhibe la naturaleza constructivista de la teoría APOE y semiocognitiva (Duval, 2017) en el caso de la TRRS. A pesar de estas diferencias, ambas teorías convergen en la idea de que el conocimiento matemático no se transmite de manera pasiva, sino que se construye activamente a través de la interacción del estudiante con los objetos matemáticos y las representaciones que utiliza.

EPISTEMOLOGÍA

La teoría APOE acentúa el papel de la construcción del conocimiento a través de la noción de abstracción reflexiva y considera al individuo y al objeto de conocimiento como una unidad que no puede separarse. Desde esta perspectiva el conocimiento se construye por medio de estructuras y mecanismos mentales que la teoría define. Por otra parte, la TRRS postula que la actividad matemática consiste en la semiosis y no en la abstracción (Duval, 2017). Su enfoque centra su análisis en la dualidad objeto-representación al caracterizar el tipo de transformaciones semióticas propias de la actividad matemática.

Desde esta postura, un primer contraste refiere a que en la TRRS el individuo no asume un rol explícito en el desarrollo teórico. Situación que puede ilustrarse al notar que la teoría focaliza su análisis en las posibilidades que ofrece un

sistema semiótico en la actividad matemática. Lo anterior no significa que el individuo no tome parte del desarrollo, sino que su consideración se da en un plano diferente en este enfoque teórico, a pesar de reconocer el papel cognitivo en la comprensión.

Ahora se comparará el posicionamiento de cada teoría acerca del conocimiento. En la teoría APOE, el conocimiento matemático de un individuo es entendido como: “su tendencia a responder a las situaciones de problemas matemáticos percibidos al reflexionar sobre los problemas y sus soluciones en un contexto social y al construir o reconstruir acciones, procesos y objetos matemáticos y organizarlos en esquemas para usarlos al tratar con las situaciones” (Asiala, *et al.*, 1997). Tratándose de la TRRS no se pone de manifiesto una declaración en cuanto a lo que se entiende por conocimiento matemático, pero sostiene que “el quid está en si se considera o no la SEMIOSIS...este posicionamiento plantea la necesidad de una distinción epistemológica entre los objetos según sus modos cognitivos de acceso” (Duval, 2017).

Esta comparación permite, por un lado, reafirmar lo mencionado sobre el papel del sujeto en ambos marcos teóricos y, por el otro, enfatizar la noción del objeto matemático que cada teoría considera. De esta manera, para la teoría APOE, el objeto matemático es el resultado de una relación inseparable entre el objeto definido matemáticamente y el individuo que lo construye (Arnon *et al.*, 2014). En la TRRS, el objeto matemático se considera el invariante de una multitud de representaciones semióticas que surge cuando dos o más representaciones semióticas son reconocidas como representantes del mismo objeto (Duval, 2017).

En este contexto, otro contraste importante es que estos enfoques teóricos abordan su trabajo desde una relación dual, sujeto-objeto en el caso de la teoría APOE y objeto-representación en la TRRS.

La idea anterior es clave, ya que permite contrastar esta forma de interpretación. Por ejemplo, en la teoría APOE, las estructuras y mecanismos mentales permiten profundizar en el porqué de las dificultades, en tanto que en la TRRS se asume que estas dificultades se explican por la problemática para cambiar el registro de representación.

En otro aspecto, de manera general, se establece el contraste de acuerdo con el tipo de información del fenómeno cognitivo en el que se enfocan. La teoría APOE se cuestiona qué es lo que construye el aprendiz o, en otras palabras, ¿cuál es la naturaleza de las construcciones del sujeto?, destacando el énfasis en la actividad de los individuos cuando resuelven un problema y cómo ponen en juego aquello que han aprendido en nuevas situaciones. En este aspecto, la

TRRS se cuestiona la relación entre diferentes sistemas semióticos a través de las transformaciones en y entre registros de representación semiótica. En línea con Duval (2017, pág. 27) el análisis semiocognitivo de la actividad matemática en términos de registros describe la manera específica de trabajar en matemáticas.

METODOLOGÍA

Bajo el contexto anterior, se abre otro punto de comparación que consiste en examinar la metodología que cada enfoque teórico pone a disposición para el trabajo investigativo. Este elemento resulta sumamente importante, ya que su consistencia permite poner en práctica la teoría de forma sistemática.

La teoría APOE, ofrece una metodología de investigación explícita basada en un ciclo de investigación de tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de la instrucción, recopilación y análisis de datos. Para la intervención en el aula la teoría propone un ciclo de enseñanza denominado ciclo ACE. El ciclo de investigación se repite hasta que los datos muestren que los estudiantes realizan las construcciones mentales que la descomposición genética hipotetiza.

El análisis teórico inicial, primera etapa del ciclo, del concepto que se desea abordar y en el cual se explora lo que significa entender el concepto matemático y cómo un individuo puede construirlo, conduce a la propuesta de una descomposición genética preliminar. En la siguiente fase se procede al diseño instruccional que busca que los individuos construyan las estructuras mentales identificadas en el análisis teórico del concepto. Finalmente, los datos que se obtienen del tratamiento instruccional, como consecuencia de su aplicación, son analizados en el contexto de la teoría APOE y, en su caso, utilizados para reiniciar el ciclo antes descrito con el propósito de refinar la descomposición genética, si es necesario, y reformular la instrucción en relación con los cambios en la descomposición genética.

Tratándose de la TRRS, esta no ofrece una metodología explícita que permita implementar de forma sistemática sus constructos. Lo que ofrece son una serie de consideraciones en investigaciones con un enfoque semiótico (Duval, 2008). Al respecto, esta teoría plantea que deben distinguirse dos cuestiones. Por un lado, la identificación de variables que determinan el desarrollo de la comprensión en matemáticas y por el otro el análisis e interpretación de las producciones de los estudiantes (sin importar el medio por el cual se recojan). Señala que esta distinción es vital por tratarse de un modelo del funcionamiento cognitivo.

Siguiendo con esto, Duval (2008) menciona que un estudio de tipo semiótico puede realizarse en tres etapas que consideren lo siguiente: una necesidad inicial de identificar las variables que denotan comprensión conceptual basada en una red de registros que abarque sus reglas de formación, características de los tratamientos y conversiones y sus relaciones; dividir las producciones de los estudiantes en segmentos de lo que el estudiante hace o no entre los diferentes registros; finalmente, analizar las producciones en busca de relaciones que puedan asociarse con la evolución de la comprensión o no.

A partir de esto, pueden exhibirse diferencias significativas en el trabajo metodológico en ambos enfoques teóricos. Un primer elemento que considerar es enfatizar la metodología explícita que ofrece la teoría APOE en contraste con una metodología sugerida que ofrece la TRRS.

De manera más detallada, la TRRS hipotetiza, en una de sus etapas, la conformación de una red entre registros de representaciones, pero no proporciona una forma sistematizada de llevar a cabo esta tarea. En consecuencia, su implementación queda relegada a la interpretación que cada usuario, de la teoría, determine.

Por el contrario, la teoría APOE coloca por delante en todo momento su modelo de análisis (la descomposición genética), lo cual dota al investigador de una herramienta objetiva y sistematizada al momento de implementar la teoría en la práctica.

RELACIÓN CON LA ENSEÑANZA

La situación anterior, abre otro punto de contraste, ya que la teoría APOE está relacionada estrechamente con la enseñanza, situación enfatizada en su ciclo de investigación, al considerar la intervención en el aula como uno de sus elementos. Por el contrario, la TRRS busca explicar el porqué de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes, razón por la cual puede considerarse “resuelta” en el sentido de que su formulación ofrece una respuesta a esta cuestión. Esta condición hace que se restrinja a sugerir posibles formas de trabajar con las transformaciones semióticas en el aula, pero no a describir de forma detallada y particularizada cuál sería el camino para lograr el aprendizaje.

Otro punto que refuerza la idea anterior es que bajo el enfoque de la TRRS usualmente no se reporta o describe si la red entre registros siempre es funcional, es susceptible de mejoras o modificaciones.

Las cuestiones anteriores pueden relacionarse con la falta de una metodología explícita, pero también, obedecer a una naturaleza distinta de lo que la teoría se cuestiona y en la cual se observa que su génesis no está directamente relacionada con la enseñanza, aunque se preocupa por los problemas del aprendizaje. Esto puede dar idea de por qué su desarrollo metodológico es de otra índole.

COMPRENSIÓN DE LAS RELACIONES ENTRE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Una vertiente más por considerar es que muchos de los conceptos en matemáticas se relacionan entre sí, por medio de temas, problemáticas o como parte de estructuras más generales. Estas relaciones son abordadas, desde la teoría APOE, a partir de la noción de *Esquema*, la cual permite dar cuenta del estado de construcción de relaciones entre conceptos matemáticos que pueden asociarse con niveles que caracterizan su evolución.

Al respecto puede destacarse que en el caso de la TRRS no se explicita cómo puede explorarse el trabajo a nivel de estas relaciones.

DISCUSIÓN

En esta sección se presentan cuatro elementos que nos permiten concluir que la búsqueda de una integración de estas teorías en un nuevo marco teórico es viable, en el sentido de que sus principios pueden articularse de forma coherente en un marco de referencia que permita definir problemas a la luz de una nueva lente.

ELEMENTO EPISTEMOLÓGICO

Un fundamento sólido para proponer la integración de ambos marcos teóricos es que el análisis epistemológico muestra que los dos enfoques enfatizan el papel cognitivo en su génesis. Aunque con una clara diferencia en su aproximación a los fenómenos de estudio.

Retomando el énfasis del sujeto en la teoría APOE y un rol no explícito, de este, en el caso de la TRRS. Al tomar en cuenta esta observación para el nuevo marco teórico pretendido podríamos ampliar la caracterización acerca de la

complejidad de las transformaciones semióticas y resolver preguntas como ¿qué se necesita para que los individuos puedan realizar transformaciones semióticas?

De manera específica, el énfasis epistemológico de la teoría APOE en la relación indisociable del sujeto y el objeto de conocimiento puede aportar al marco pretendido una forma de tomar en consideración que la razón de las dificultades de los individuos trasciende las características semióticas y redimensiona el papel del sujeto.

Por otro lado, si se considera el principio de la TRRS de que la actividad matemática precisa de los registros de representación semiótica. Esta caracterización puede aprovecharse para que el nuevo marco de referencia tenga la posibilidad de considerar el papel fundamental de los registros y de las transformaciones semióticas en la actividad matemática.

Es importante mencionar que en diversas investigaciones fundamentadas en la teoría APOE se ha incluido, de alguna manera, el papel de las distintas representaciones de un concepto. Sin embargo, inicialmente, las descomposiciones genéticas no describían las Acciones o Procesos necesarios en la construcción de un concepto en términos de los diferentes registros semióticos.

Al generarse un nuevo enfoque teórico que en su génesis considere el papel de los registros de representación semiótica se puede extender la referencia al objeto construido en sus distintas representaciones y además profundizar en sus explicaciones. Por ejemplo, en la TRRS se reconoce que la demanda cognitiva necesaria para realizar las transformaciones semióticas en cada registro es diferente, pero no se caracteriza esta complejidad. De manera que el marco propuesto, al integrar los mecanismos cognitivos de la teoría APOE y al redimensionar su papel en los diferentes registros agregaría nuevos matices en la interpretación de los problemas sobre el aprendizaje de los objetos matemáticos.

ELEMENTO METODOLÓGICO

Otro elemento para considerar es lo que el modelo de análisis de cada teoría podría aportar al nuevo marco teórico posible. Desde la teoría APOE, la descomposición genética (modelo de análisis) hipotetiza la manera en que se da la construcción de conceptos matemáticos y, dado que los objetos matemáticos son inaccesibles físicamente, la descripción requiere del uso de, al menos, un registro de representación. Con base en ello, la descomposición genética puede ampliar su riqueza al incorporar explícitamente la descripción de la construcción

del concepto matemático en los distintos registros de representación y las transformaciones entre ellos.

En este contexto, cabe señalar que las teorías analizadas no se contraponen, dado que no se modifica la forma en que se caracteriza el modelo del pensamiento, sino que se podría extender y especificar la referencia al objeto que se desea construir.

ELEMENTO EDUCATIVO (ENSEÑANZA)

Otro punto importante es ser consciente de que la TRRS no ofrece una metodología para la enseñanza. Esto motiva más la pertinencia de proponer un nuevo marco de referencia que haga claros estos elementos, mismos que permitirían sistematizar la implementación de los principios de la TRRS.

Por lo tanto, creemos que no es necesario partir de planteamientos nuevos, sino que puede aprovecharse la metodología de enseñanza de la teoría APOE para que, en combinación con las nociones tomadas de la TRRS, se incluya una metodología de enseñanza que involucre el papel de los registros de representación semiótica de forma sistemática.

EL ELEMENTO ASOCIADO A LAS RELACIONES ENTRE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

El nuevo enfoque teórico pretendido podría integrar las ideas del estudio de evolución de un *Esquema*, propuesto en la teoría APOE, para profundizar y especificar las relaciones semióticas entre conceptos matemáticos.

Integrar este elemento a la lente de la TRRS podría dilucidar aún más las relaciones entre conceptos o temas a través de los diferentes registros semióticos.

CONCLUSIÓN

Subrayamos que los elementos aquí discutidos son el resultado de la implementación parcial de la metodología del Networking of Theories. Esto permitió el análisis que nos permitió aportar elementos que sustentan la idea de que una integración de la teoría APOE y la teoría de Registros de Representación Semiótica en un nuevo marco teórico es viable y consistente.

El nuevo enfoque teórico integraría principios medulares de dos teorías ampliamente reconocidas en la educación matemática para abordar el estudio

de problemas específicos dentro del área y contribuiría a enriquecer los elementos de estos enfoques.

Adicionalmente, se destaca que este trabajo contribuye a mostrar de manera más detallada cómo se desarrollaron los dos primeros pares de estrategias sugeridas por el marco de referencia.

Con fundamento en lo anterior, se pretende avanzar con las siguientes etapas del Networking of Theories. En particular se trabajará en la construcción y propuesta del nuevo enfoque teórico a la luz de los elementos aquí mostrados.

REFERENCIAS

- Alberto, R., Bakker, A., Aalst, O. W.-v, Boon, P., y Drijvers, P. (2019). Networking theories in design research: an embodied instrumentation case study in trigonometry. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, y M. Veldhuis, M. (Eds.). *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3088–3095).
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E. D., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*.
- Artigue, M., y Bosch, M. (2014). Reflection on Networking Through the Praxeological Lens. En A. Bikner-Ahsbahr, y S. Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 249–265). Springer.
- Artigue, M., y Mariotti, M. A. (2014). Networking theoretical frames: The ReMath enterprise. *Educational studies in mathematics*, 85, 329–355.
- Artigue, M. (2019). Reflecting on a Theoretical Approach from a Networking Perspective: The Case of the Documentational Approach to Didactics. En L. Trouche, G. Gueudet, y B. Pepin (Eds.), *The 'Resource' Approach to Mathematics Education* (pp. 89–118). Springer.
- Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education II* (pp. 1–32). American Mathematical Society.
- Bach, C. C., Pedersen, M. K., Gregersen, R. M., y Jankvist, U. T. (2021). On the notion of "background and foreground" in networking of theories. En Y. Liljekvist, L. B. Boistrup, J. Häggström, L. Mattsson, O. Olande, y H. Palmér (Eds.), *Sustainable mathematics education in a digitalized world: Proceedings of MADIF 12 The twelfth research seminar of the Swedish Society for Research in Mathematics Education* (pp. 163–172).

- Bakker, A., Cai, J., y Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: An international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics*, 107(1), 1-24.
- Bikner-Ahsbahs, A., y Prediger, S. (2009). Networking of theories—an approach for exploiting the diversity of theoretical approaches. En *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 483-506). Springer Berlin Heidelberg.
- Bikner-Ahsbahs, A., y Prediger, S. (Eds.). (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Springer International Publishing.
- Bikner-Ahsbahs, A. (2022). Adaptive teaching of covariational reasoning: Networking “the way of being” on two layers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 67.
- Bingolbali, E., Demir, G. y Monaghan, J. D. (2021). Knowledge of Sets: a Didactic Phenomenon. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19(6), 1187–1208.
- Dreyfus, T., Sabena, C., Kidron, I., y Arzarello, F. (2014). The Epistemic Role of Gestures: A Case Study on Networking of APC and AiC. En A. Bikner-Ahsbahs y S. Prediger. (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 127–151). Springer.
- Drijvers, P., Godino, J. D., Font, V., y Trouche, L. (2013). One episode, two lenses. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 23–49.
- Duval, R. (1995). *Semiosis y pensamiento humano. Registro semiótico y aprendizajes intelectuales*. Traducción Vega M. (2001). Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática.
- Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. *Semiotics in mathematics education*, 39-61.
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations*. Cham: Springer International Publishing.
- Fetzer, M. (2013). Counting on Objects in Mathematical Learning Processes. Network Theory and Networking Theories. En B. Ubuz, C. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2800–2809).
- Font, V., Trigueros, M., Badillo, E., y Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, 91(1), 107-122.
- Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E., y Wilhelmi, M. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. En *Proceedings of the eight Congress of the European society for research in mathematics education* (pp. 2810-2819).

- Godino, J. D. (2022). Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática*, 2(2), 1-24.
- Goldin, G. A. (2003). Developing complex understandings: On the relation of mathematics education research to mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 54(2-3), 171-202.
- Hernández, L. A., Trigueros, M., Ruiz, H., y Juárez, E. D. L. (2023). La concepción dinámica del límite de una función desde APOE y los registros semióticos. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*.
- Kidron, I. (2016). Epistemology and networking theories. *Educational Studies in Mathematics*, 91(2), 149-163.
- Kidron, I. (2019). Comparing a priori analyses. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3029-3037).
- Krainer, K. (2003). Teams, communities & networks. *Journal of mathematics teacher education*, 6(2), 93-105.
- Ledezma, C., Font, V., y Sala, G. (2023). Analysing the mathematical activity in a modelling process from the cognitive and onto-semiotic perspectives. *Mathematics Education Research Journal*, 35(4), 715-741.
- Lesh, R., y Sriraman, B. (2005). Mathematics education as a design science. *ZDM*, 37, 490-505.
- Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. *ZDM*, 37, 457-467.
- Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector spaces theory. *ZDM Mathematics Education*, 40(2), 265-276.
- Martínez-Planell, R., y Trigueros, M. (2012). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. *Educational Studies in Mathematics*, 81, 365-384.
- Martínez-Planell, R., y Trigueros, M. (2019). Using cycles of research in APOS: The case of functions of two variables. *The Journal of Mathematical Behavior*, 55, 100687.
- Noddings, N. (1996). Equity and mathematics: Not a simple issue. *Journal for research in mathematics education*, 27(5), 609-615.
- Prediger, S. (2008). How are theoretical approaches expressed in research practices? A report on an experience in comparing theoretical approaches with respect to the construction of research problems. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 40 (2), 277-286.
- Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM*, 40, 165-178.

- Rasmussen, C., Marrongelle, K., y Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM*, 46, 507-515.
- Rodríguez-Nieto, C. A., Font Moll, V., Borji, V., y Rodríguez-Vásquez, F. M. (2022). Mathematical connections from a networking of theories between extended theory of mathematical connections and onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(9), 2364-2390.
- Sabena, C., Arzarello, F., Bikner-Ahsbabs, A., y Schäfer, I. (2014). The Epistemological Gap: A Case Study on Networking of APC and IDS. En A. Bikner-Ahsbabs, y S. Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 179-200). Springer.
- Sriraman, B., y English, L. (2010). Surveying theories and philosophies of mathematics education. In *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 7-32). Springer Berlin Heidelberg.
- Tabach, M., y Nachlieli, T. (2011). Combining theories to analyze classroom discourse: a method to study learning process. En M. Pytlak, T. Rowland, y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2524-2532).
- Trigueros, M., Bosch, M., y Gascón, J. (2011). Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. *Un panorama de la TAD*, 10, 77-116.
- Trigueros, M., y Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, 73(1), 3-19.
- Wedege, T. (2010). Combining and Coordinating theoretical perspectives in mathematics education research. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1565-1574).

Autor de correspondencia

JOSÉ DAVID MORANTE RODRÍGUEZ

Dirección: Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Avenida San Claudio y 18 Sur, Colonia San Manuel, Edificio FM1-101B, Ciudad Universitaria, C.P. 72570 Puebla, México.
morantert@gmail.com

Teléfono: +52 (222) 2295500 ext. 7552

Secuencia de aprendizaje lúdica que desarrolla el razonamiento estadístico en estudiantes de 8 a 9 años

A playful learning sequence to foster statistical reasoning in students aged 8 to 9

Soledad Estrella,¹ Brahiam Ramírez,²
Alejandra Mondaca-Saavedra,³ Maritza Méndez-Reina,⁴
Pedro Vidal-Szabó,⁵ Sergio Morales⁶

Resumen: Se presenta una secuencia de aprendizaje con enfoque lúdico sobre el razonamiento inferencial informal, compuesta por dos lecciones que integran aspectos y conceptos clave de este razonamiento. La secuencia fue diseñada por profesoras de educación primaria, en el marco de un Grupo de Estudio de Clases, y se implementó con 23 estudiantes de 8 a 9 años (grados 3 y 4). Durante las lecciones, los estudiantes realizaron predicciones, registraron datos, obtuvieron muestras y las compararon a través del muestreo repetido. A partir

Fecha de recepción: 17 de marzo de 2024. **Fecha de aceptación:** 19 de mayo de 2025.

¹ Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, soledad.estrella@pucv.cl, <https://orcid.org/0000-0002-4567-2914>

² Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, brahiam.ramirez@pucv.cl, <http://orcid.org/0000-0002-7482-4067>

³ Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, alejandra.mondaca@pucv.cl, <http://orcid.org/0000-0001-5403-9646>

⁴ Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, maritzamendez@pensadoresmatematicos.com, <http://orcid.org/0000-0003-0830-0924>

⁵ Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile, pedro.vidal@ulagos.cl, <http://orcid.org/0000-0002-3320-9789>

⁶ Departamento de Didáctica, Currículum y Evaluación, Escuela de Educación, Universidad de Concepción, Chile, sergmmorales@udec.cl, <http://orcid.org/0000-0001-5980-6816>

del análisis de los episodios de interacción profesor-estudiante a lo largo de la progresión de la secuencia, se identificaron manifestaciones de conceptos centrales de inferencia informal. Algunos estudiantes mostraron comprensión de la variabilidad entre muestras, exploraron la incertidumbre de la situación, detectaron tendencias en las muestras, y expresaron las posibilidades al generalizar más allá de los datos. La secuencia favorece la expresión temprana de inferencias informales y orienta una enseñanza que busca desarrollar el razonamiento estadístico en los estudiantes.

Palabras claves: *educación estadística; estadística temprana; secuencia de aprendizaje; razonamiento inferencial informal; muestreo repetido.*

Abstract: A playful learning sequence on informal inferential reasoning is presented, consisting of two lessons that integrate key aspects and concepts of this reasoning. The sequence was designed by primary school teachers within the framework of a Lesson Study Group (LSG) and implemented with 23 students aged 8 to 9 (grades 3 and 4). During the lessons, students made predictions, recorded data, obtained samples, and compared them through repeated sampling. Through analyzing teacher-student interaction episodes throughout the sequence, manifestations of core concepts of informal inference were identified. Some students demonstrated an understanding of variability across samples, explored uncertainty in the situation, detected trends across samples, and expressed possibilities by generalizing beyond the data. The sequence fosters the early expression of informal inferences and guides instruction that seeks to develop students' statistical reasoning.

Keywords: *statistical education; early statistics; learning sequence; informal inferential reasoning; repeated sampling.*

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, urge una educación ciudadana que avance más allá de la alfabetización escolar y se enfoque en desarrollar habilidades críticas y argumentativas en los estudiantes (Weiland, 2017). El estudio de la estadística, desde edades tempranas, permite a los niños y niñas comprender su entorno, explorar y argumentar con datos, desarrollar competencias de investigación fundamentales, y despertar el interés por esta disciplina. En esta línea, uno de los razonamientos propios de la estadística es el razonamiento inferencial, entendido como una conclusión generalizada expresada con incertidumbre y respaldada por los datos disponibles, pero que los trasciende (Ben-Zvi *et al.*, 2015). Se distinguen dos tipos de inferencia estadística, la inferencia estadística formal, basada en pruebas estadísticas sustentadas en la teoría de la probabilidad, y la inferencia estadística informal (IEI). Mientras la primera suele considerarse fuera del alcance de estudiantes de primaria, la IEI involucra un razonamiento de menor complejidad, permitiendo expresiones cualitativas de incertidumbre y la realización de inferencias mediante simulaciones en lugar de fórmulas cerradas (Makar y Rubin, 2018). Los autores de este escrito, investigan sobre el razonamiento en el ámbito de la IEI en etapas tempranas del desarrollo educativo y exploran cómo los niños podrían beneficiarse de experiencias sustentadas en la inferencia estadística desde una perspectiva informal.

En el área de la educación estadística es cada vez más relevante la integración de los datos y el azar, especialmente en torno a los tópicos de IEI y el razonamiento inferencial informal (RII) (Makar *et al.*, 2011; Makar y Rubin, 2009, 2018). El presente estudio se sitúa en esta perspectiva, reconociendo que, a diferencia de la promoción de métodos estadísticos formales –alejados del currículo de educación primaria–, la IEI propone una aproximación exploratoria a la inferencia mediante el razonamiento basado en distribuciones muestrales empíricas o simuladas (Estrella *et al.*, 2024a, 2024b).

En el campo de la Estadística Temprana, se han llevado a cabo investigaciones que se centran en explorar datos y comprender las ideas fundamentales y los procedimientos comunes en los procesos estadísticos desde los primeros años de escolaridad (e.g., Estrella, 2018; Estrella *et al.*, 2015, 2018, 2023, 2024b; Leavy *et al.*, 2018). Dichas experiencias de aprendizaje familiarizan a los estudiantes con la IEI, para comenzar a comprender con cierta profundidad los procesos involucrados en este tipo de razonamiento, lo que facilitará el desarrollo progresivo de su razonamiento estadístico en general (Makar *et al.*, 2011).

El foco de la inferencia estadística reside en la formulación de afirmaciones probabilísticas sobre una población a partir de una muestra, lo que conlleva un complejo entramado de conceptos y procedimientos (Silvestre *et al.*, 2022). Desarrollar un razonamiento inferencial estadístico en los estudiantes implica ofrecer oportunidades de aprendizaje que conecten conceptos clave como la variabilidad, centralidad y el muestreo repetido. Aunque la comprensión de tales procesos es clave, se han reportado dificultades en el razonamiento de aspectos propios de la inferencia estadística (Castro Sotos *et al.*, 2007). Por ello, para que los estudiantes construyan con significado sus ideas y conceptos sobre la inferencia estadística, es necesario diseñar actividades y materiales adaptados a las características de interés y desarrollo de los estudiantes. En particular, desde el enfoque informal, se promueve la realización de generalizaciones probabilísticas con evidencia basada en datos que se extienden más allá de estos (Makar y Rubin, 2009, 2018).

El presente artículo es una contribución a la docencia, ya que presenta una secuencia de aprendizaje novedosa basada en una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre IEI (Estrella *et al.*, 2023, 2024) es novedosa porque utiliza el juego como estrategia pedagógica para activar el interés de los estudiantes en la recolección de datos, la obtención de muestras y el análisis de la variabilidad. Al comparar sus predicciones con los resultados del experimento, los estudiantes interactúan con conceptos fundamentales como la aleatoriedad, la incertidumbre y la distribución muestral. Estas experiencias les permiten desarrollar progresivamente una comprensión de conceptos estadísticos clave –variabilidad, centralidad y muestreo repetido– y, paulatinamente, llegar a comprender la naturaleza de la inferencia estadística.

El objetivo de este artículo es analizar cómo una secuencia de aprendizaje lúdica, centrada en conceptos clave de la IEI, fomenta el desarrollo del RII de estudiantes de 8 a 9 años.

2. MARCO PARA LA ELABORACIÓN DE LA SECUENCIA DE APRENDIZAJE DE IEI

2.1. RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL

La IEI tiene como propósito establecer las bases para desarrollar el razonamiento inferencial estadístico a partir de datos, e incluye la consideración de la incertidumbre y no involucra procedimientos formales (Ben-Zvi, 2016; Makar y Rubin, 2009, 2018) y, se ha consolidado como un enfoque educativo que integra aspectos del RII. Estos aspectos incluyen el uso de *datos como evidencia* para respaldar argumentos relacionados con problemas específicos, privilegiando la evidencia que ofrecen los datos por sobre experiencias personales u opiniones (Makar y Rubin, 2009; Pfannkuch *et al.*, 2006; Pfannkuch, 2015). Además, contempla realizar *generalizaciones más allá de los datos* para comunicar conclusiones inferidas de casos particulares, aplicables a un conjunto más amplio (Makar y Rubin, 2009; Rossman, 2008; Zieffler *et al.*, 2008). Otro aspecto que enfatiza el RII es la importancia de *expresar la incertidumbre* para reconocer la falta de certeza en las generalizaciones, considerando que las afirmaciones no son absolutas (Ben-Zvi *et al.*, 2012; Makar y Rubin, 2009).

El diseño de la secuencia de aprendizaje que se presenta, contempla los tres aspectos señalados: datos como evidencia, generalizaciones más allá de los datos y, la expresión de la incertidumbre.

2.2 INFERENCIA INFORMAL EN EL CURRÍCULO ESCOLAR CHILENO

En las bases curriculares chilenas de los grados 1 a 6 de la asignatura de Matemática, no se incluyen objetivos de aprendizaje orientados a la elaboración de inferencias estadísticas informales (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2018). Aunque los contenidos asociados a la IEI no se explicitan en este currículo escolar, es posible encontrar en otras áreas curriculares algunos contenidos relacionados. En la asignatura de Ciencias, la organización curricular presenta el uso de la inferencia en la habilidad de predecir y en la primera etapa de la investigación científica, correspondiente a observar y preguntar (Bases Curriculares de Ciencias Naturales, MINEDUC, 2018, p. 74). Asimismo, en la asignatura de Lenguaje se explicitan desempeños asociados con la construcción de inferencias, a partir de la información presentada en textos y, de sus experiencias y conocimientos (Bases Curriculares de Lenguaje y Comunicación, MINEDUC, 2018, p. 331).

En los recientes estándares de la formación inicial de profesores de primaria, relativos a matemática (MINEDUC, 2022), se presenta el estándar Datos y Probabilidades que comprende conceptos sobre probabilidad, proceso estadístico y la importancia de los datos y su variabilidad al hacer inferencias en contextos de incertidumbre. Este estándar promueve recolectar datos “para responder una pregunta del contexto escolar o comunitario, considerando toda la población o una muestra de ella, los organiza en tablas y/o gráficos, y discute su variabilidad, observando tendencias y realizando inferencias informales” (MINEDUC, 2022, p. 126). Respecto al estándar de Conocimiento Didáctico del Contenido estadístico, se sugiere que diseñen “Secuencia actividades de aprendizaje que involucren la recolección de datos de una muestra o la totalidad del curso, su representación y análisis, para incentivar que sus estudiantes realicen inferencias informales y tomen decisiones basadas en la evidencia obtenida” (MINEDUC, 2022, p. 127).

2.3 CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS ESTADÍSTICOS CLAVE DE LA IEI

El razonamiento inferencial estadístico implica la comprensión de una serie de conceptos estadísticos (e.g., muestreo repetido; distribución muestral empírica; variabilidad; incertidumbre) que respaldan las inferencias. El muestreo repetido permite obtener una muestra de una población, generando múltiples muestras bajo las mismas condiciones al repetir el proceso en varias ocasiones. A medida que se realiza el muestreo repetido, se obtiene una distribución muestral empírica, lo que ayuda a comprender la variabilidad presente en los datos y a reducir la incertidumbre en estimaciones, en particular, al visualizar el comportamiento de estadísticos muestrales entre diferentes muestras. Al respecto, Alvarado *et al.* (2013) señalan que las distribuciones muestrales permiten mejorar las predicciones y la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.

Comprender el muestreo involucra vincular la representatividad y la variabilidad de la muestra, ideas aparentemente opuestas (Chance *et al.*, 2004; Watson, 2000). La representatividad asegura que una muestra aleatoria de tamaño adecuado reflejará aproximadamente las características de la población, mientras que la variabilidad implica que las distintas muestras serán diferentes. Para comprender estas ideas, es importante distinguir entre tres tipos de distribuciones: la teórica de la población, la de los datos muestrales recolectados desde la población, y la muestral de estadísticos desde diferentes muestras (Batanero *et al.*, 2020). Para que los estudiantes puedan establecer sus relaciones conceptuales, se requiere que tengan múltiples experiencias trabajando con datos.

Una de estas experiencias podría consistir en un experimento aleatorio no equiprobable, que permita a los estudiantes familiarizarse con conceptos como muestra (relacionados con otros conceptos como aleatoriedad, predicción, incertidumbre y muestreo repetido), variabilidad muestral y distribución muestral empírica (asociados a frecuencia máxima, valor modal y visualización). En el contexto del razonamiento inferencial estadístico, el muestreo repetido desempeña un papel fundamental, pues permite generar distribuciones muestrales empíricas, aspecto crucial para analizar y desarrollar el razonamiento inferencial desde un enfoque informal.

El diseño de secuencia de aprendizaje que se reporta, contempló procedimientos del muestreo repetido, conceptos de distribución muestral empírica, variabilidad, incertidumbre, junto a la aleatoriedad propia del experimento no equiprobable de la tarea central. Además, se diferencian los conceptos de predecir, estimar e inferir, considerando que la predicción se refiere a lo que podría ocurrir (antes de observar los datos), la estimación proporciona un valor aproximado (usando los datos muestrales), y la inferencia conecta los datos muestrales con la formulación de conclusiones generalizables a un universo más amplio, basándose en evidencia empírica y considerando la variabilidad e incertidumbre.

3. METODOLOGÍA

Este estudio adoptó un enfoque cualitativo, enmarcado en un estudio de caso instrumental (Stake, 2020), pues buscó describir y comprender en profundidad el fenómeno del desarrollo del RII de estudiantes de primaria en el contexto del aula de clases. La investigación se centró en una secuencia de aprendizaje de dos lecciones, diseñada y refinada a lo largo de tres años (cf., Estrella *et al.*, 2023; 2024), que buscaba promover el desarrollo del RII en estudiantes de primaria. La secuencia fue implementada en tres escuelas chilenas, lo que permitió explorar su potencial en favorecer el desarrollo del razonamiento estadístico en edades tempranas.

3.1 PARTICIPANTES

En este estudio participaron 23 estudiantes de 8 a 9 años de edad, de dos cursos de una escuela rural, –un curso de grado 3 ($n = 12$), y otro de grado 4 ($n = 11$)– que experimentaron la secuencia de aprendizaje, implementada en dos sesiones por la profesora correspondiente, en el aula habitual. Se contó con

el consentimiento informado de la directora de la escuela, profesores y de todos los apoderados de los estudiantes que participaron de las lecciones.

3.2 ESTUDIO DE CLASES

Se reportan las lecciones de dos profesoras, quienes eran parte de un grupo de Estudio de Clases (Estrella y Olfos, 2023), con seis profesoras (de K a 5 grado) y cuatro investigadores, las cuales trabajaron colaborativamente en el diseño e implementación de las lecciones durante dos meses (8 sesiones). En este Grupo de Estudio de Clases se planificó la secuencia de dos lecciones (figura 1), que buscaba desarrollar el RII en los estudiantes, y fue implementada por todas las profesoras participantes.

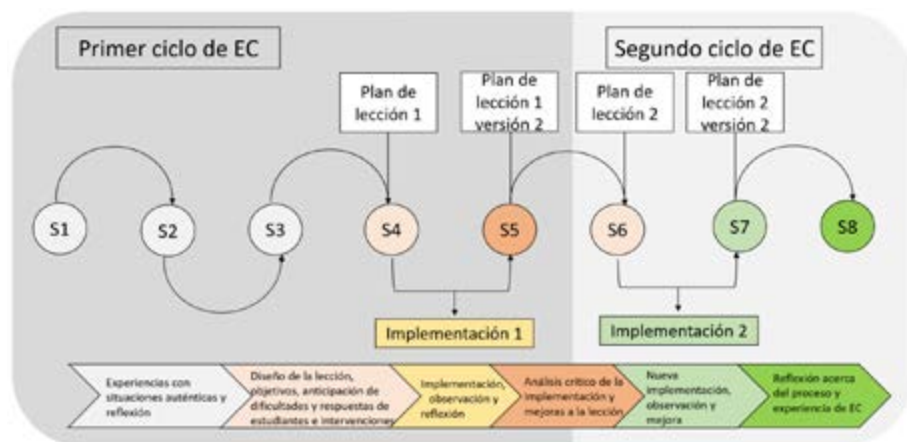


Figura 1. Modelo de Estudio de Clases (EC) de ocho sesiones y dos ciclos.

Fuente: Adaptación de Estrella y Olfos (2023).

En la sesión 1, las profesoras conocieron los tres aspectos clave del RII como base para el desarrollo de las tareas de los planes de clase; en las sesiones 2 y 3 realizaron los juegos, vivenciando las experiencias del plan de clase 1 y 2, considerando aspectos conceptuales y formales de su implementación. Luego, en la sesión 4, se revisó un plan de clase (surgido desde un EC previo, Estrella *et al.*, 2022), se anticiparon posibles respuestas de los estudiantes como también sus dificultades, se propusieron cambios y adaptaciones según el contexto de cada curso. En esta instancia, se elaboraron objetivos específicos para cada

momento de la lección y se establecieron metas de cómo se observaría el cumplimiento de tales objetivos, surgiendo un plan de clase 1.

Entre la sesión 4 y 5, se implementó el primer plan de clase. En cada implementación, la profesora de cada curso fue apoyada por un docente investigador (como participante). En la sesión 5, se hicieron cambios al primer plan de clase con un análisis crítico en conjunto con todos quienes conformaban el Grupo de Estudio de Clases, se revisaron episodios videograbados de la implementación y se reflexionó sobre la práctica docente, resultando una segunda versión del plan de clase de la lección 1. En la sesión 6, se incorporaron mejoras al plan de clase de la lección 2 (también surgido de un EC previo, Estrella *et al.*, 2022), considerando los objetivos específicos de cada momento y adaptando nuevas propuestas. Luego de las respectivas implementaciones, se reflexionó sobre las tareas realizadas y se añadieron mejoras durante la sesión 7. La sesión 8, se enfocó en la reflexión acerca del proceso y experiencia del Estudio de Clases desarrollado por las profesoras de la escuela y los investigadores participantes.

3.3. LA SECUENCIA DE APRENDIZAJE DE DOS LECCIONES

La secuencia está compuesta de dos lecciones interrelacionadas. La lección 1, se estructura en torno a dos momentos principales. En el primer momento, se promueve que los estudiantes usen un lenguaje de posibilidades para describir la probabilidad de extraer bolas de ciertos colores, fomentando –mediante material concreto y visual–, una aproximación intuitiva a la incertidumbre. En el segundo momento, se presenta a los estudiantes el juego no-equiprobable de lanzamiento de dos monedas, denominado “Carrera de los Conejos”, junto con sus reglas, entregándoles el tablero y dos monedas (artefacto aleatorio). Los estudiantes trabajan en grupos y predicen el posible conejo ganador y registran los datos en los tableros de juego a partir de su experiencia de muestreo. Así, podrán comparar sus predicciones con los resultados obtenidos en un primer tablero completado (su primera muestra) y continúan jugando hasta completar cuatro tableros de juego (cuatro muestras).

La lección 2, en continuidad, propicia que los estudiantes comparen las muestras obtenidas por sus compañeros de curso y las propias, a través de la proyección de todos los tableros completados. Finalmente, los estudiantes deben escribir una inferencia a modo de consejo para un/a amigo/a sobre cuál conejo elegir según sus mayores posibilidades de ganar, expresando algún nivel de posibilidad.

En cada tablero de juego, los estudiantes realizan predicciones, completan su tablero y comparan los resultados obtenidos en el juego aleatorio (en los cuatro tableros propios). De este modo, los estudiantes compararían los datos de sus muestras (registradas en los tableros de juego) con los resultados obtenidos por sus compañeros (otras muestras), basándose en la evidencia proporcionada por los datos muestrales. Estas lecciones buscan que los estudiantes argumenten sus decisiones acerca de las posibilidades de ganar, más allá de su experiencia individual, y lleguen a obtener una visión más global del comportamiento de los datos al identificar tendencias en las muestras.

Específicamente, se esperaba como resultado de aprendizaje que los estudiantes, en cinco momentos de la secuencia, pudieran principalmente:

(a) Momentos 1 y 2: Expresar la posibilidad de una situación de incertidumbre. Realizar predicciones sobre un juego aleatorio no-equiprobable y compararlas con algunos resultados obtenidos al jugar (muestras propias), expresando niveles de posibilidad.

(b) Momentos 3 y 4: Usar los resultados obtenidos por el grupo curso (muestras propias y de sus compañeros) con el propósito de comparar el comportamiento de los resultados de los juegos, y asignar un nivel de posibilidad (a tales posibles resultados).

(c) Momento 5: Generalizar, expresando las posibilidades de ganar más allá de los resultados de sus juegos, argumentando (en un consejo escrito) sobre el comportamiento de los datos (más allá de las muestras).

3.4 PROGRESIÓN DE LA COMPLEJIDAD DE LOS MOMENTOS Y CONCEPTOS IEI

Se anticipaba a lo largo de las dos lecciones, que los estudiantes emplearían material concreto y realizarían predicciones basadas en su intuición, para posteriormente contrastarlas con los resultados obtenidos en las muestras. De la observación y comparación de las muestras obtenidas desde el experimento aleatorio no-equiprobable, se preveía que los estudiantes llegarían a visualizar la variabilidad y detectarían tendencias en los datos.

Como se ha venido sosteniendo, no se pretendía que los estudiantes ni los profesores utilizaran el lenguaje técnico del muestreo, sino que tuvieran experiencias con la incertidumbre inherente a un experimento aleatorio no-equiprobable, con la toma de muestras y su análisis comparativo, que les permitiesen aplicar el razonamiento inferencial informal.

La figura 2 proporciona una descripción detallada de las dos lecciones que comprenden cinco momentos de la secuencia de aprendizaje.

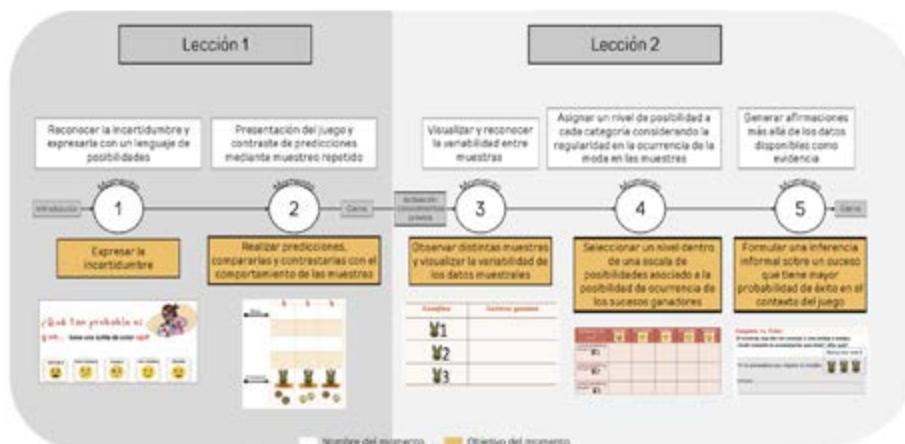


Figura 2. Dos lecciones que conforman la secuencia de aprendizaje mediante cinco momentos clave. Elaboración propia.

3.5 RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

Se videograbaron dos lecciones correspondientes a las lecciones 1 y 2, con una duración total de tres horas por cada grado educativo. La recolección de datos incluyó la transcripción completa de las lecciones, así como el registro fotográfico de momentos significativos (como el muestreo repetido, el registro de los datos en los tableros de juego, entre otros) y algunas producciones de los estudiantes. El análisis de las transcripciones de las videograbaciones se centró en identificar indicios o evidencias de la manifestación del RII de los estudiantes, y en seleccionar episodios vinculados con la IEI, que incluyen producciones verbales y escritas de los estudiantes durante las interacciones en el aula (entre profesora y estudiante, así como entre estudiantes).

Para el análisis de datos, se emplearon dos técnicas de triangulación: por investigadores y fuentes de datos. En la triangulación por investigadores, cuatro realizaron de forma independiente la identificación de los aspectos del RII en la transcripción de lecciones videograbadas –identificando evidencias de uso de lenguaje de posibilidades, justificación basada en datos propios o de los demás y generalizaciones más allá de los datos–, comparando sus resultados y

consensuando sobre episodios relevantes para el análisis. Por otro lado, la triangulación de fuentes de datos implicó el análisis de las transcripciones de las videograbaciones y los registros de datos en los tableros de juego (muestras y predicciones) de los estudiantes.

4. IMPLEMENTACIÓN DE LAS LECCIONES

A continuación, para cada uno de los momentos de la secuencia, se expone su objetivo específico relativo a uno de los aspectos del RII (datos como evidencia, generalizaciones más allá de los datos, y la expresión de la incertidumbre), la tarea correspondiente, el episodio que inicia con la intervención de la profesora, seguido de una transcripción y análisis del episodio que refleja cómo la profesora fomentó que los estudiantes expresen sus argumentos y cómo los estudiantes manifiestan su razonamiento inferencial informal, además de presentar una conclusión con un breve resumen de las acciones de los estudiantes.

Aunque se haya hecho uso del experimento aleatorio de lanzamiento de dos monedas, la intención en la secuencia no fue encontrar el valor de probabilidad, ni usar el enfoque frecuentista para estimar la probabilidad –centrado en la frecuencia relativa de ocurrencia de un suceso en una larga serie de ensayos independientes– sino usar el experimento como un medio facilitador de la obtención de muestras, para la visualización y análisis de su comportamiento.

4.1 LECCIÓN 1: MOMENTOS 1 Y 2 DE LA SECUENCIA DE APRENDIZAJE

Momento 1: Reconocer la incertidumbre y expresarla con un lenguaje de posibilidades

El primer momento de la secuencia tuvo como propósito promover la expresión consciente de la incertidumbre frente a fenómenos aleatorios, aspecto alejado de las prácticas tradicionales de la clase de matemáticas escolar. Se buscaba que los estudiantes se apropiaran de un repertorio lingüístico que reflejara distintos grados de certeza sobre la ocurrencia de un suceso, utilizando calificadores modales como “imposible”, “poco posible”, “posible”, “muy posible”, “seguro”. Asimismo, se incentivó el uso de adverbios de duda (quizás, acaso, probablemente, posiblemente, ojalá) y verbos modales (deber, querer, saber, poder, soler), favoreciendo una comunicación más matizada sobre situaciones de incertidumbre.

La tarea del Momento 1 consistió en presentar a los estudiantes imágenes asociadas a situaciones de incertidumbre (lado izquierdo de figura 3) junto a una urna transparente concreta que contenía cuatro bolas de igual tamaño en dos configuraciones distintas (dos rojas y dos azules; una azul y tres verdes) (lado derecho de figura 3). Ante cada situación, se formuló la pregunta “¿Qué tan probable es que se tome una bolita de color rojo [o azul]?”, solicitándoles responder mediante el uso de paletas con íconos representativos de diferentes niveles de posibilidad (“imposible”, “poco posible”, “posible”, “muy posible” o “seguro”), como se muestra en la figura 3.

Episodio Momento 1. La profesora presenta situaciones de urnas y pregunta al curso: ¿Qué tan posible es que ...? Los estudiantes responden eligiendo las paletas con íconos para expresar la posibilidad de ocurrencia del suceso.



Figura 3. Estudiantes aplican escala de posibilidades en contexto de urna con 4 bolas, lección 1

En este episodio, los estudiantes de grado 3 y 4 reconocieron las configuraciones de las urnas presentadas y mostraron al pleno su elección de un nivel de posibilidad asociado a la incertidumbre de la situación. La tabla 1 presenta los resultados de las respuestas de los estudiantes de ambos grados que evidencian la manifestación total de la escala de posibilidades, diferenciando dos formas de expresión: (1) el uso de paletas como material concreto, con las cuales todos los estudiantes seleccionan y muestran el nivel correspondiente, y (2) las intervenciones verbales, extraídas de las transcripciones, en las que algunos estudiantes enuncian oralmente el nivel de la escala. Además, en tabla 1 se contrasta la frecuencia de cada tipo de manifestación entre los grados evaluados.

Tabla 1. Manifestación del uso de escala de posibilidades en los grados 3 y 4, lección 1

Uso de la escala mediante las paletas por los estudiantes	Uso de escala mediante intervenciones verbales por los estudiantes
Grado 3: 100%	Grado 3: 14.9%
Grado 4: 100%	Grado 4: 14.7%

Los resultados de la lección 1 (tabla 1) evidencian que, mientras el 100% de los estudiantes de los grados 3 y 4 utilizaron las paletas (material concreto) para manifestar su nivel en la escala de posibilidades, solo 14.8% lo expresó verbalmente sin apoyo material. Esta marcada diferencia sugiere que, aunque el recurso concreto es efectivo para la representación física de la escala, la expresión verbal autónoma del razonamiento presenta mayores desafíos, en ambos grados.

Momento 2: Presentación del juego y contraste de predicciones mediante muestreo repetido

El objetivo fue que los estudiantes realizaran predicciones, las compararan y contrastaran con el comportamiento de sus muestras, para identificar tendencias en los datos. Para ello, los estudiantes registraron sus datos en cuatro tableros de juego (muestreo repetido) y comenzaron a visualizar el comportamiento de los datos, interpretaron su variabilidad y detectaron tendencias.

La tarea consistió en la obtención de muestras y, como medio para ello, se presentó el experimento aleatorio no equiprobable en un contexto lúdico, denominado la Carrera de los Conejos, relacionado con el lanzamiento de dos monedas. Desde una perspectiva inferencial, se obtuvieron muestras a través de los tableros de juego en que se registró el avance de los conejos, etiquetados como 1, 2 y 3. Cada conejo estaba asociado con una de las tres categorías, *Caras*, *Sellos* o *distintas* (Sello-Sello, Cara-Cara, Cara-Sello/Sello-Cara), de la variable *resultado del lanzamiento de dos monedas*.

Inicialmente, los estudiantes participaron de un juego grupal para comprender las reglas y el registro de los datos sobre el tablero de juego (figura 4). Cada tablero de juego se considera una muestra –de datos categóricos– y se solicita a cada estudiante jugar en tres ocasiones, obteniendo así tres muestras. Una vez que se completó uno de los cuatro tableros de juego, la profesora orientó a los estudiantes para que contrastaran los resultados empíricos con su predicción inicial.

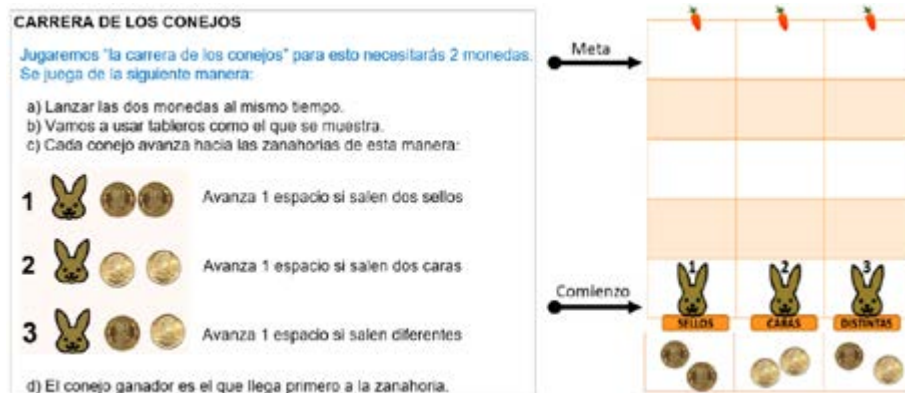


Figura 4. Instrucciones del juego, tablero y artefacto aleatorio, Lección 1.

Episodio Momento 2. Cada estudiante, previo al juego, realizó la predicción y la registró en el tablero, encerrando con un círculo al conejo que consideraba que puede resultar ganador (figura 5a). Posterior a ello, se inició el juego, el cual consistió en lanzar 2 monedas y registrar el resultado con una X en el tablero para señalar los avances de los conejos a lo largo de las carreras (figura 5b). El juego terminó cuando uno de los conejos llegó a la meta (figura 5c), lo que permitió a los estudiantes contrastar su elección inicial con los resultados obtenidos.

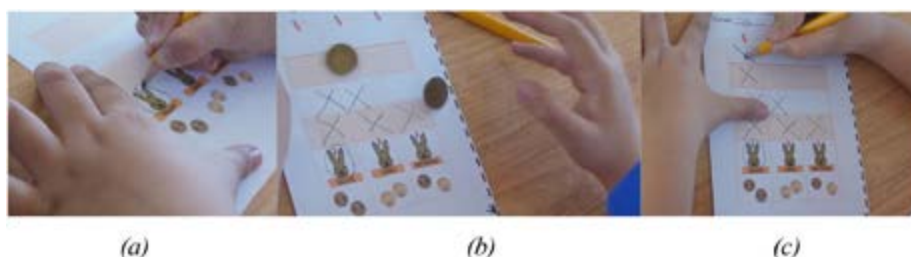


Figura 5. Predicción (5a), registro de resultados (5b) y obtención de primera muestra (5c) en juego de carreras de conejos.

En la columna “Análisis” de la tabla 2, se identifican las manifestaciones de un RII emergente de una estudiante (Catalina) cuando interactúa con la profesora B (investigador). En el extracto de la transcripción, la estudiante señala su siguiente predicción (en el segundo tablero que corresponde a la segunda muestra) y

explica su nueva elección a partir de los datos obtenidos en los juegos realizados (muestras propias de la estudiante).

Tabla 2. Transcripción de un episodio del momento 2 con análisis de las interacciones profesora y estudiante

	Transcripción en grado 3	Análisis
715	Profesora B: Catalina [mientras lanza las monedas], ¿cuál elegiste?	Promueve que los estudiantes hagan explícitas sus predicciones
717	Catalina: [señala el conejo 3 con su dedo en el tablero]	Indica su predicción
718	Profesora B: el tres y ¿por qué?	Pide justificaciones
719	Catalina: porque es el [conejo] que más gana	Justifica basándose en la evidencia de los datos, en la mayor frecuencia de resultados en los tableros anteriores
720	Profesora B: ¿Tú crees que va a ganar de nuevo?, ¿por qué?	Confronta al estudiante con la incertidumbre de la situación
723	Catalina: Sí, porque siempre salen esos números [caras distintas]	Justifica expresando cierto lenguaje de posibilidad “siempre” y notando una tendencia en los datos de sus muestras previas enuncia una inferencia “siempre salen esos números”
726	Profesora B: ¿Va a salir siempre así? [Catalina hace otros lanzamientos de monedas hasta obtener cara-cara]	Incentiva a comparar los tableros (las muestras) y a observar la variabilidad del comportamiento de los datos, enfrentándola a la incertidumbre presente en la situación
728	Profesora B: ¿Ahí qué dio? [en el segundo intento]	Invita a considerar evidencia basada en datos recolectados previamente
729	Catalina: cara-cara	Indica el resultado asociado a una categoría distinta del suceso ganador
730	Profesora B: ¿Siempre sale cara-sello?, ¿o no siempre?	Incentiva a notar la incertidumbre de la situación
731	Catalina: No siempre	Expresa cierto lenguaje de posibilidad “no siempre”, considerando la posibilidad de obtener resultados diferentes al previamente concebido

La estudiante articula su RII, combinando la tendencia que va observando en sus muestras con el lenguaje de posibilidades, aunque en el nivel de certezas. La intervención docente resulta clave para promover una mirada crítica hacia la variabilidad de los datos.

En esta primera lección, en ambos grados se observó que todos los estudiantes realizaron una predicción para cada tablero de juego, en los cuales identificaron la categoría resultante y registraron el dato proveniente de cada lanzamiento, hasta finalizar el juego (proceso de obtención de muestras propias), reconociendo la categoría ganadora en cada tablero.

4.2 LECCIÓN 2: MOMENTOS 3, 4 Y 5 DE LA SECUENCIA DE APRENDIZAJE

Momento 3: Visualizar y reconocer la variabilidad entre muestras

El objetivo fue que los estudiantes observaran distintas muestras y visualizaran la variabilidad de los datos muestrales, a medida que aumentaban las muestras, a través del registro simultáneo de los sucesos ganadores (moda) representados en un pictograma.

La tarea implicó que el estudiante visualizara los datos recolectados a través de las muestras de todo el grupo (una por estudiante, seleccionadas tras la lección 1 por la profesora). De esta manera, se introdujo a los estudiantes en el reconocimiento de la variabilidad muestral y variabilidad entre muestras. A su vez, se buscaba que al aumentar la cantidad de muestras y exhibirlas al pleno, los estudiantes visualizaran que el comportamiento de los datos de su muestra no necesariamente coincide con otras muestras, pudiendo detectar cierta tendencia entre ellas.

En esta lección 2, los estudiantes observaron desde su muestra la categoría de la frecuencia máxima (moda), y con ella, se fue completando el pictograma según el conejo ganador (figura 6).

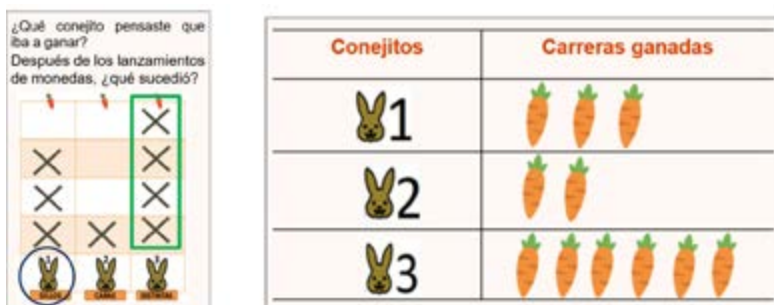


Figura 6. Tablero completado de un estudiante con su predicción (círculo sobre conejo elegido) y pictograma de sucesos ganadores de las muestras del grupo.

Completar el pictograma de los sucesos ganadores tuvo como finalidad que los estudiantes fueran comprendiendo tanto la frecuencia con la que ocurre la moda, como que la mayoría de los resultados de las muestras presentaban cierta tendencia –que se iba estabilizando a medida que aumentaba el número de muestras–. Así, el pictograma les proporcionó mayor información sobre la variabilidad en distintas muestras particulares, mostrando que existían escasas posibilidades de que emergieran otros sucesos ganadores.

Episodio del Momento 3. La profesora proyecta al pleno un tablero completado por estudiante y pregunta individualmente: “Su conejo que ganó en esta ocasión, ¿Creen que volverá a ganar?”. En esta instancia, varios estudiantes comentan el comportamiento de los datos de una muestra propia y la variabilidad presente entre sus muestras.

Tabla 3. Transcripción de un episodio del momento 3 con análisis de las interacciones profesora y estudiante

	Transcripción en grado 4	Análisis
326	Profesora: ¿Qué pasó en esa jugada, Juan? [se proyecta el tablero del estudiante]	Promueve que el estudiante visualice y analice el comportamiento de los datos de su tablero (muestra)
327	Juan: ganó [el conejo 3].	Justifica basándose en la evidencia de los datos, indicando el suceso ganador (moda) que tiene la frecuencia máxima en su tablero
328	Profesora: ¿Qué pasó aquí?, ¿por qué hay dos zanahorias? [se enfoca en el pictograma que se construye en presencia de los estudiantes según los resultados de los tableros]	Promueve que interpreten el pictograma, e identifiquen la categoría con una frecuencia dada
329	Rocío: porque el conejo 3 ganó dos veces	Identifica la categoría de la moda e interpreta los dos íconos del pictograma
330	Profesora: ya, porque el conejo 3 lleva dos victorias	Valida y repite la interpretación de la estudiante
331	Profesora: si jugáramos de nuevo, Juan, ¿crees que pasaría lo mismo?	Incentiva a conjeturar sobre el comportamiento más allá de los datos
332	Juan: no, porque es diferente el turno del juego	Justifica desde el contexto, indicando que los datos no necesariamente seguirán el mismo comportamiento
333	Profesor B: ¿Puedes dar un ejemplo?	Solicita explicación
334	Juan: si lanzáramos las monedas, no saldría lo mismo	Reconoce la aleatoriedad referida a la posibilidad de obtener diferentes resultados en cada intento
370	Rocío: [ganó el conejo] el 2 [aunque Rocío había predicho que ganaba el 3]	Indica la categoría que tiene la frecuencia máxima en su tablero y generaliza más allá de los datos, incluso cuando su predicción inicial no coincidió con el resultado
371	Profesora: Si jugáramos otra vez, con un tablero nuevo. Si hacemos todo de nuevo, lanzar las monedas... ¿Qué crees tú que pasaría?	Incentiva a imaginarse un nuevo tablero (muestra) y a conjeturar sobre el comportamiento de tales datos

372	Rocío: Podría que gane el [conejo] 1 que gane el 2, podría ser que gane el 1 o que el 3 gane. Hay probabilidades de que el 1 gane, de que el 3 gane, de que el 2 gane. O que [en un tablero] el 1 gane, el 3 quede sin nada y el 2 quede [solo] con 2	Usa lenguaje de posibilidades mediante los términos “podría ser que” y “probabilidades de que” que denotan incertidumbre. Reconoce la variabilidad muestral al referirse a las posibles diferencias de las categorías según las frecuencias máximas entre muestras más allá de los datos disponibles
-----	---	--

En este momento (tabla 3), se destaca el rol de la profesora que media a través del cuestionamiento como parte de una enseñanza basada en la exploración de los datos. Cada estudiante pudo identificar, en el contexto del juego, la categoría que tuvo mayores posibilidades de ocurrencia (moda) luego de varios muestreos, notando las diferencias entre las frecuencias de las distintas categorías, lo que les permitió ir reconociendo la variabilidad mediante la visualización de las muestras de sus compañeros y el comportamiento de los datos en la compleción del pictograma.

Ambos estudiantes movilizan el RII, Juan prioriza la aleatoriedad (evitando generalizaciones), mientras que Rocío integra el lenguaje de posibilidades y la variabilidad, avanzando hacia una comprensión más sofisticada de la inferencia. La intervención docente permitió guiarlos desde lo observado hacia lo posible.

Momento 4: Asignar un nivel de posibilidad a cada categoría considerando la tendencia en la ocurrencia de la moda en las muestras

El objetivo fue que los estudiantes seleccionaran un nivel dentro de una escala de posibilidades asociado a la posibilidad de ocurrencia de los sucesos ganadores (tabla proyectada de la figura 7), considerando el comportamiento regular y la variabilidad en la frecuencia con la que ocurre la moda en las muestras observadas, representada en el pictograma.

La tarea consistió en que cada estudiante asignará un nivel de posibilidad (“imposible”, “poco posible”, “posible”, “muy posible” y “seguro”) de ganar la carrera para cada uno de los tres conejos. Los estudiantes podían recurrir al pictograma proyectado (figura 6 visible en la parte superior de la figura 7b) en la pizarra del aula como recurso de apoyo para analizar los datos.



Figura 7. Tabla a completar con categorías y niveles de posibilidad (proyectada en pizarra)

Episodio del Momento 4. Una vez que los estudiantes observaron y compararon las frecuencias de las modas en el pictograma (Momento 3), la profesora les preguntó por el nivel de posibilidades asignado a las categorías (conejos 1, 2, 3). Por turno, los estudiantes asignaron un nivel elegido por ellos, y la profesora fue registrando el nombre del estudiante en la tabla proyectada en la pizarra (figura 7).

Tabla 4. Transcripción de un episodio del momento 4 con análisis de las interacciones profesora y estudiante

	Transcripción en grado 4	Análisis
993	Profesora: Recuerden que estamos tomando en cuenta el resultado general del curso [enfoca a los estudiantes en el pictograma construido]	Promueve que el estudiante visualice el pictograma, y lleguen a detectar la tendencia entre las muestras (el suceso ganador que tiene la frecuencia máxima en los tableros) y la variabilidad en el comportamiento de las modas
994	Profesor: Mateo, ¿sigues pensando que puede ser imposible que el conejo 2 gane?	Solicita explicación de una asignación de posibilidades
995	Mateo: [Hace gestos con la mano indicando más o menos]	Reevalúa gestualmente su asignación de posibilidad
996	Profesora: Ah, poco posible	Interpreta el gesto y lo asocia a un nivel de posibilidades
997	Profesora: [Mateo] ¿Entonces será imposible?	Confronta al estudiante con el nivel de posibilidades que asignó previamente

998	Mateo: Poco [posible]	Justifica basándose en la evidencia de los datos, cambia su asignación de “imposible” a “poco posible” para el conejo 2 después de observar los datos agregados del curso. Se expresa verbalmente usando lenguaje de posibilidades
999	Profesora: Ya, poco posible	Valida y repite verbalmente la asignación de posibilidad dada
1000	Profesora: ¿Y Judith? [solicita nivel de posibilidades para conejo 2]	Confronta a la estudiante con el nivel de posibilidades que asignó previamente
1001	Judith: El mío lo quiero cambiar [había señalado anteriormente imposible para el conejo 2]	Ajusta su generalización previa cambiando su asignación inicial de “imposible” mostrando capacidad de modificar sus conclusiones ante nueva evidencia de los datos, usando el lenguaje de posibilidades
1002	Profesora: ¿A cuál lo quieres cambiar?	Solicita que exprese verbalmente el nuevo nivel de posibilidad
1003	Judith: A poco posible	Usa lenguaje de posibilidades, al reevaluar expresa verbalmente su nueva asignación de posibilidad

La experiencia de registro de datos en los tableros, junto con la visualización y la construcción del pictograma, contribuyeron a que los estudiantes se enfocaran en el comportamiento de las modas, en cuanto a la tendencia y variabilidad (tabla 4).

En ambos grados, todos los estudiantes asignaron un nivel de posibilidad a cada categoría determinando su posibilidad de ocurrencia, registrando estos niveles en una tabla que todos pueden observar. Algunos de los estudiantes lograron comparar las frecuencias de cada categoría desde el pictograma y visualizaron la tendencia de los datos tras el muestreo repetido.

Este episodio evidencia componentes clave del RII en estudiantes de grado 4. Ambos estudiantes usaron el lenguaje de posibilidades sustentado en la interpretación de datos empíricos representados en pictogramas, modificando predicciones absolutas (“imposible”) por expresiones más matizadas (“poco posible”). La intervención docente permitió focalizar a los estudiantes en el análisis de las tendencias en los datos, promover la verbalización de razonamientos, y facilitar la transición desde un pensamiento determinista hacia uno no determinista.

Momento 5: Generar afirmaciones más allá de los datos disponibles como evidencia

El objetivo fue que los estudiantes formularan una inferencia informal sobre un suceso que tiene mayor probabilidad de éxito en el contexto del juego, de acuerdo con su análisis previo sobre el comportamiento de los datos y expresando cualitativamente el nivel de posibilidades de ganar.

La tarea consistió en que los estudiantes escribieran su inferencia futura (figura 8), como un consejo para un amigo/a sobre elegir un conejo para jugar según sus posibilidades de ganar. Se esperaba que los estudiantes se expresaran mediante la escala de niveles de posibilidades.



Figura 8. Inferencia informal escrita acerca de la ocurrencia futura de un suceso ganador (grado 3)

Episodio del Momento 5. La profesora interactúa con un estudiante y pregunta por el consejo que escribió, su justificación y nivel de posibilidad. En este episodio, un estudiante de tercer grado escribió su inferencia informal al identificar que el conejo 3 ha ganado más veces. Reconoció el comportamiento regular de las muestras y aconsejó elegir el conejo 3 pues “es muy posible” que siga ganando en un próximo juego (figura 8).

Tabla 5. Transcripción de un episodio del momento 5 con análisis de las interacciones profesora y estudiante

	Transcripción en grado 3	Análisis
1147	Profesor B: ¿Qué pusiste al final en tu consejo?	Solicita que verbalice la inferencia escrita
1148	Benjamín: Que es muy posible que gane el [conejo] tres. Que siga ganando	Usa lenguaje con un nivel de posibilidad “muy posible” expresando la tendencia detectada
1149	Profesor B: ¿Por qué?, ¿cómo lo sabes?	Pide justificación
1150	Benjamín: Porque ha ganado muchas veces. Así que es muy posible que siga ganando	Justifica usando la evidencia empírica en que el conejo 3 “ha ganado muchas veces” y reitera la inferencia futura expresándose mediante un lenguaje con nivel de posibilidad “muy posible”
1155	Profesor B: ¿Y cuál es el consejo [para este juego] que le dirías a tu mejor amigo?	Reitera que verbalice su inferencia más allá de los datos
1156	Benjamín: Que es muy probable que el 3 siga ganando [que elija el conejo 3]	Realiza una inferencia informal usando un lenguaje con nivel de posibilidad “muy probable” y señalando la tendencia detectada en las muestras

El episodio detallado en tabla 5 ejemplifica cómo los estudiantes integraron los aprendizajes alcanzados, respecto a: (1) generalizar más allá de los datos disponibles; (2) usar expresiones de incertidumbre; (3) usar los datos como evidencia al señalar la tendencia detectada en las muestras.

La progresión desde “muy posible” hasta “muy probable” sugiere un refinamiento de su lenguaje probabilístico durante la interacción, mientras que su consistencia al referirse a la frecuencia ganadora (“muchas veces”) revela una aproximación intuitiva a la ley de los grandes números. Este caso ilustra cómo niños pueden articular inferencias informales apoyándose en las tendencias observadas en los datos de las muestras. La intervención docente permitió solicitar justificaciones y promover el RII según lo anticipado previamente en el plan de clases.

Al terminar la secuencia de aprendizaje, los estudiantes abordaron con éxito las tareas con enfoque lúdico vinculadas al RII, pudieron detectar la tendencia con la que ocurre la moda en las muestras observadas, vivenciaron el muestreo repetido a través de una experiencia aleatoria, y lograron expresar inferencias informales.

4.3 RESULTADOS DE LA MANIFESTACIÓN DE CONCEPTOS ASOCIADOS A LA IEI Y AL RII

La secuencia de aprendizaje promovió que, durante las intervenciones de los estudiantes –tanto en la resolución de problemas como en los diálogos con sus compañeros y su profesora–, se manifestaran los aspectos del razonamiento inferencial informal (RII). El análisis de estas manifestaciones permitió observar que algunos estudiantes de tercero y cuarto grado lograron realizar generalizaciones más allá de los datos.

Durante el momento 3, algunos estudiantes visualizaron y reconocieron la variabilidad entre muestras (caso de tabla 3), y utilizando la evidencia de los datos al realizar inferencias informales. En el momento 5, por escrito, concluyeron más allá de los datos obtenidos (figura 8), justificando su inferencia a partir del comportamiento de las muestras, sin embargo, la mayoría de los estudiantes no expresaron un nivel de confianza. En el consejo escrito, es destacable que el 82% de los estudiantes de grado 3 justificaron el comportamiento de las muestras anteriores, concluyendo más allá de los datos y expresando un cierto nivel de confianza (C.f., Estrella *et al.*, 2024a). Sin embargo, en el grado 4 menos de la mitad de los estudiantes expresaron la generalización con incertidumbre, lo que da cuenta de cierta limitación del uso de lenguaje de posibilidades por parte de los estudiantes. Esta carencia podría estar vinculada a la necesidad de un periodo más prolongado de familiarización, dado que en el aula de matemáticas los estudiantes están más acostumbrados a contextos de certezas y respuestas numéricas, lo que contrasta con la naturaleza de incertidumbre y probabilística de las lecciones.

5. CONCLUSIONES

El análisis de la implementación de la secuencia de aprendizaje lúdica permitió investigar cómo los estudiantes de los grados 3 y 4 manifiestan conceptos asociados a la IEI y su razonamiento. Esta secuencia de dos lecciones se organizó en cinco momentos que integran de manera articulada conceptos fundamentales de la IEI y aspectos esenciales del RII.

Los cinco momentos de la secuencia de aprendizaje, que fomenta el desarrollo progresivo del RII, lograron que los estudiantes pudieran: (i) reconocer la incertidumbre y expresarla con un lenguaje de posibilidades; (ii) contrastar predicciones mediante muestreo repetido; (iii) visualizar y reconocer la variabilidad

entre muestras; (iv) asignar un nivel de posibilidad considerando la tendencia con la que se presenta la moda en las muestras, y (v) generar afirmaciones más allá de los datos disponibles. La secuencia de aprendizaje y el cuestionamiento de la profesora, lograron la manifestación del RII de algunos estudiantes, lo que evidencia que la secuencia les permitió trabajar de manera efectiva con datos y conceptos propios de la inferencia estadística. Ello va en concordancia con investigaciones que sugieren que participar en actividades que involucran inferencias informales en los primeros años escolares podría facilitar la comprensión de conceptos y el aprendizaje más complejo de la inferencia estadística formal (Makar y Rubin, 2009; Van Dijke-Droogers *et al.*, 2020, 2021).

Los análisis de los episodios permitieron dar cuenta de cómo los estudiantes manifiestan comprensión de algunos de los conceptos clave asociados a la IEI como la aleatoriedad, incertidumbre, tendencia y variabilidad muestral; así como de la aplicación del muestreo repetido para visualizar e interpretar la tendencia con la que ocurre la moda en las muestras observadas. En la resolución de las tareas con enfoque lúdico, las profesoras proveyeron experiencias a los estudiantes sobre cómo obtener datos reales y utilizar la evidencia obtenida del comportamiento de esos datos para formular predicciones, estimaciones y generar inferencias estadísticas informales, todo ello sin necesidad de realizar cálculos complejos (C.f., Estrella, 2018; Estrella *et al.*, 2021). De este modo, innovaron en la enseñanza de la resolución de problemas basados en datos, en línea con los planteamientos recientes de Fry *et al.* (2023).

Realizar el experimento aleatorio (lanzamiento de dos monedas) de carácter probabilístico como medio para permitir la obtención de muestras sin buscar determinar ni estimar el valor de probabilidad del suceso, permitió que los estudiantes exploraran, desde una perspectiva inferencial informal, el comportamiento de los datos a través del muestreo aleatorio. Esto facilitó la conexión con la observación de cómo un comportamiento aleatorio (del experimento de lanzamiento de dos monedas que subyace al juego de carrera de conejos) tiende a regularizarse tras muchas repeticiones (muestreo repetido y muestras obtenidas por todo el curso); así como también, permitió evidenciar la variabilidad de los resultados obtenidos después de un número reducido de repeticiones (pues cada estudiante tuvo la experiencia con solo tres muestras propias).

Para una nueva implementación de la secuencia propuesta, sería recomendable aumentar el tamaño de la muestra, ya que un mayor número de repeticiones reduce la variabilidad y permite obtener inferencias más precisas sobre el comportamiento del experimento aleatorio. Una limitación de esta propuesta

fue la cantidad de muestras recopiladas por estudiante, cuestión que consideró la comparación de solo cuatro muestras propias (cuatro tableros de juego), debido al espacio acotado de la mesa de trabajo en la escuela.

La aplicación de la secuencia de aprendizaje con un enfoque lúdico sobre IEI brinda a los profesores una estructura y orientación claras, pudiendo anticiparse a los éxitos y dificultades en el aula, desarrollando habilidades de observación y reflexión, lo cual promueve la innovación en su práctica docente y en el aprendizaje de sus estudiantes. Estudios como el presentado, son necesarios para describir las situaciones de aprendizaje y logros conceptuales individuales de cada niño, y permiten fundamentar investigaciones que describan experiencias de aprendizaje tanto de los estudiantes como de los docentes en la complejidad del aula.

Esta secuencia de aprendizaje activa la expresión de inferencias informales y constituye un valioso aporte para los docentes, al orientar el abordaje de una enseñanza que desarrolla progresivamente el razonamiento estadístico y la argumentación de los estudiantes. La experiencia busca contribuir a superar niveles tradicionales de alfabetización estadística escolar, trabajando de manera articulada nociones estadísticas e inferenciales a través de un tratamiento informal de las ideas asociadas a la inferencia estadística, y lleva al aula de matemática aspectos teóricos y prácticos que promueven –a través del juego– una educación estadística temprana de calidad.

AGRADECIMIENTOS

A Fondecyt 1200346; ANID/Apoyo 2024 AFB240004; FONDEF IT23i0067; VINCI 039.493/2024; y Grupo de Investigación en Estadística Temprana GIET-PUCV (www.estadisticatemprana.cl).

REFERENCIAS

- Alvarado, H., Galindo, M., y Retamal, L. (2013). Comprensión de la distribución muestral mediante configuraciones didácticas y su implicación en la inferencia estadística. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 31(2), 75–91. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v31n2.803>
- Batanero, C., Begue, N., Borovcnik, M., y Gea, M. (2020). Ways in which high-school students understand the sampling distribution for proportions. *Statistics Education Research Journal*, 19(3), 32–52. <https://doi.org/10.52041/serj.v19i3.55>
- Ben-Zvi, D. (2016). Three paradigms in developing student's statistical reasoning. En S. Estrella et al. (Eds.), *XX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 13–22). Universidad Católica de Valparaíso.
- Ben-Zvi, D., Aridor, K., y Makar, K. (2012). Students' emergent articulations of uncertainty while making informal statistical inferences. *ZDM Mathematics Education*, 44(1), 913–925. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0420-3>
- Ben-Zvi, D., Bakker, A., y Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 291–303. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9593-3>
- Castro Sotos, A., Vanhoof, S., Van den Noortgate, W., y Onghena, P. (2007). Students' misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education. *Educational Research Review*, 2(2), 98–113.
- Chance, B., del Mas, R., y Garfield, J. (2004). Reasoning about sampling distributions. En D. Ben-Zvi y J. B. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 295–323). Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_13
- Estrella, S. (2018). Data representations in Early Statistics: Data sense, meta-representational competence and transnumeration. En A. Leavy, A., M. Meletiou, y E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in Early Childhood and Primary Education – Supporting early statistical and probabilistic thinking* (pp. 239–256). Springer.
- Estrella, S., Méndez-Reina, M., y Vidal-Szabó, P. (2023). Exploring informal statistical inference in early statistics: A learning trajectory for third-grade students. *Statistics Education Research Journal*, 22(2), 1–16. <https://doi.org/10.52041/serj.v22i2.426>
- Estrella, S., Morales, S., Méndez-Reina, M., Vidal-Szabó, P., y Mondaca-Saavedra, A. (2024a). Collective argumentation in elementary school: An experience of reasoning with data in an online Open Class. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 13(3), 205–220. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-12-2023-0180>
- Estrella, S., Morales, S., Méndez-Reina, M., Vidal-Szabó, P., Ramírez, B., y Mondaca-Saavedra, A. (2024b). Diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para introducir la inferencia estadística informal en primaria. *RELIME, Revista Latinoamericana de*

- Investigación en Matemática Educativa*, 27(1), 11–42. <https://doi.org/10.12802/relime.24.2711>
- Estrella, S., y Olfos, R. (2023). Lecciones compartidas: Un modelo chileno de Lesson Study aplicado con profesores de primaria y con formadoras de profesores de primaria que enseñaran matemáticas. *Revista Paradigma*, 64(2), 110–130.
- Estrella, S., Olfos, R., y Mena-Lorca, A. (2015). Pedagogical knowledge of statistics content among primary school teachers. *Revista Educação e Pesquisa*, 41(2), 477–493. <https://doi.org/10.1590/S1517-97022015041858>
- Estrella, S., Olfos, R., Vidal-Szabó, P., Morales, S., y Estrella, P. (2018). Competencia meta-representacional en los primeros grados: Representaciones externas de datos y sus componentes. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 36(2), 143–163.
- Estrella, S., Vergara, A., y Gonzalez, O. (2021). Developing data sense: Making inferences from variability in tsunamis at primary school. *Statistics Education Research Journal*, 20(2), 16–16. <https://doi.org/10.52041/serj.v20i2.413>
- Fry, K., English, L., y Makar, K. (2023). Cognitive tuning in the STEM classroom: Communication processes supporting children's changing conceptions about data. *Mathematics Education Research Journal*, 36(1) 1–23. <https://doi.org/10.1007/s13394-023-00465-x>
- Leavy, A., Meletiou-Mavrotheris, M., y Paparistodemou, E. (Eds.). (2018). *Statistics in early childhood and primary education: Supporting early statistical and probabilistic thinking*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7>
- Makar, K., Bakker, A., y Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1), 152–173. <https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538301>
- Makar, K., y Rubin, A. (2018). Learning about statistical inference. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International handbook of research in statistics education* (pp. 261–294). Springer. http://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_8
- Makar, K., y Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 82–105. <https://doi.org/10.52041/serj.v8i1.457>
- Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2018). *Bases Curriculares Primero a Sexto básico*. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-22394_bases.pdf
- Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2022). *Estándares Pedagógicos y Disciplinarios para Carreras de Pedagogía en Educación General Básica*. https://estandaresdocentes.mineduc.cl/wp-content/uploads/2023/05/basica_2023_digital.pdf
- Pfannkuch, M. (2006). Informal inferential reasoning. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings International Conference On Teaching Statistics 7: Working cooperatively*

- in statistics education* (pp. 1–6). IASE. http://iase-web.org/documents/papers/icots7/6A2_PFAN.pdf
- Pfannkuch, M., Arnold, P., y Wild, C. (2015). What I see is not quite the way it really is: Students' emergent reasoning about sampling variability. *Educational Studies in Mathematics*, 88(1), 343–360. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9539-1>
- Rossman, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: A statistician's view. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 5–19. <https://doi.org/10.52041/serj.v7i2.467>
- Silvestre, E., Sánchez, E., e Inzunza, S. (2022). El razonamiento de estudiantes de bachillerato sobre el muestreo repetido y la distribución muestral empírica. *Educación Matemática*, 34(1), 100–130. <https://doi.org/10.24844/em3401.04>
- Stake, R. (2020). *Investigación con estudio de casos*. (6a ed.). Ediciones Morata.
- van Dijke-Droogers, M., Drijvers, P., y Bakker, A. (2020). Repeated sampling with a black box to the informal statistical inference accessible. *Mathematical Thinking and Learning*, 22(2), 116–138. <https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1617025>
- van Dijke-Droogers, M., Drijvers, P., y Bakker, A. (2021). Introducing statistical inference: Design of a theoretically and empirically based learning trajectory. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(4), 1743–1766. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10208-8>
- Watson, J. (2000). Developing concepts of sampling. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 44–70.
- Weiland, T. (2017). Problematizing statistical literacy: An intersection of critical and statistical literacies. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 33–47.
- Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R., y Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistic Education Research Journal*, 7(2), 40–58. <https://doi.org/10.52041/serj.v7i2.469>

Autora de correspondencia

SOLEDAD ESTRELLA

Dirección: Blanco Viel 596, Cerro Barón, Valparaíso, Chile.
soledad.estrella@pucv.cl

Apren- diendo teoría de grafos a través del béisbol

Learning graph theory through baseball

María Luisa Rodríguez Arévalo,¹ Teudys Ramón Pérez Méndez,² Javier García Maimó³

Resumen: Este artículo presenta una intervención didáctica titulada “*Apren-
diendo Teoría de Grafos a través del Béisbol*”, diseñada para abordar la falta
de motivación de los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas.
Aprovechando la popularidad del béisbol, la intervención utilizó este deporte
como un medio práctico y sencillo para introducir conceptos básicos de la
Teoría de Grafos, buscando despertar el interés de los estudiantes. La interven-
ción se realizó con 29 estudiantes de tercer curso de educación secundaria y
fue evaluada a través de un cuestionario de satisfacción y las observaciones
del docente anfitrión. Los resultados sugieren que integrar temas de interés
personal, como el béisbol, es una estrategia prometedora para incentivar el
aprendizaje de las matemáticas y hacerlas más atractivas para los estudiantes.

Palabras claves: *Teoría de Grafos, Educación Matemática, Béisbol, Innovación
didáctica.*

Abstract: This study presents a didactic intervention titled “*Learning Graph
Theory through Baseball*”, designed to address students’ lack of motivation
toward learning mathematics. Leveraging the popularity of baseball, the

Fecha de recepción: 6 de mayo de 2024. **Fecha de aceptación:** 1 de febrero de 2025.

¹ Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, República Dominicana, mariarodriguez@pucmm.edu.do,
<https://orcid.org/0000-0002-6831-0465>

² Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, República Dominicana, teudys20@outlook.com

³ Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, República Dominicana, jav.garcia@ce.pucmm.edu.do,
<https://orcid.org/0000-0003-4594-071X>

intervention used this sport as a practical and straightforward means to introduce basic concepts of Graph Theory, aiming to spark students' interest. The intervention was conducted with 29 third-year secondary school students and evaluated through a satisfaction questionnaire and observations by the host teacher. The results suggest that integrating topics of personal interest, such as baseball, is a promising strategy to foster interest in mathematics and make it more engaging for students.

Keywords: *Graph Theory, Mathematics Education, Baseball, Didactic innovation.*

INTRODUCCIÓN

La falta de motivación en los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas ha despertado un creciente interés en la investigación educativa, evidenciando que factores motivacionales y emocionales influyen significativamente en la actitud y en el desarrollo de competencias en esta disciplina. Abín *et al.* (2020) destacan que el rendimiento en matemáticas depende de variables cognitivas, motivacionales y emocionales, como la autoeficacia y las emociones positivas. Hannula, M.S. (2006) y Schukajlow *et al.* (2017) resaltan la importancia del interés genuino y las emociones para fomentar el compromiso y el éxito académico. Estudios como los de Becerra-González y Reidl (2015) y Villamizar Acevedo *et al.* (2020) identifican la ansiedad y las creencias sobre el éxito académico como factores clave en la motivación para aprender matemáticas. Además, Trías Seferian *et al.* (2024) enfatizan la relevancia de la autorregulación emocional y metacognitiva para mejorar el compromiso y los resultados académicos.

Además de los factores emocionales y motivacionales, las estrategias docentes son clave en la motivación estudiantil hacia las matemáticas. Ricoy y Couto (2018) y Castro-Velásquez y Rivadeneira-Loor (2022) destacan que la falta de contextualización de los contenidos influye en la motivación de los estudiantes por aprender esta materia. En esta línea, Muñoz *et al.* (2015) señalan que la percepción de irrelevancia en los contenidos genera desmotivación por las matemáticas entre los estudiantes, mientras que, Corredor-García y Bailey-Moreno (2020) afirman que metodologías de enseñanza que conectan las matemáticas con la vida cotidiana tienen un impacto positivo. Esta falta de estrategias didácticas contextualizadas dificulta que los estudiantes desarrollen una conexión significativa

con las matemáticas. Por ello, autores como Corbalán (1995) y Nimier (2007) han trabajado en la divulgación matemática, ofreciendo herramientas para acercar la disciplina a situaciones cotidianas y responder preguntas como “¿para qué sirven las matemáticas?”, ayudando a superar su carácter abstracto.

En este contexto, surge la pregunta: ¿cómo se puede despertar el interés de los estudiantes de secundaria hacia las matemáticas mediante temas que les resulten cercanos y relevantes? Una posible respuesta se encuentra en el béisbol, un deporte ampliamente popular en Estados Unidos y América Latina, cuyas jugadas estratégicas pueden ser relacionadas con las matemáticas a través de la Teoría de Grafos. Esta rama de las matemáticas estudia las propiedades de los grafos y tiene aplicaciones significativas en el análisis de redes, de datos y en la optimización de recursos. Aunque la Teoría de Grafos es un área avanzada, su relación con el béisbol puede hacerla sencilla y relevante para los estudiantes, conectando conceptos matemáticos abstractos con situaciones de su vida cotidiana y aumentando el interés por la disciplina.

Este artículo tiene como objetivo invitar a docentes e investigadores a fomentar la motivación y el interés de los estudiantes de educación secundaria por las matemáticas mediante una intervención didáctica que vincula la Teoría de Grafos con el béisbol. Además, se busca proporcionar herramientas para introducir de manera sencilla e intuitiva conceptos básicos de esta teoría, de modo que los estudiantes puedan conocer esta importante rama matemática de forma divertida.

ANTECEDENTES

La educación matemática ha enfrentado desafíos importantes en términos de motivación entre los estudiantes. Tradicionalmente, los conceptos matemáticos se han presentado de manera abstracta, lo que dificulta que los estudiantes perciban su relevancia en contextos reales. Diversos estudios han explorado métodos alternativos para mejorar la enseñanza de las matemáticas, integrando temas de interés personal y actividades prácticas. Un enfoque notable ha sido la integración de la música en la enseñanza de conceptos matemáticos, como lo demostraron Silva *et al.* (2023) y Luengo, G. *et al.*, (2024), quienes encontraron que los estudiantes mostraban una mayor motivación y comprensión cuando las matemáticas se relacionaban con la música. De manera similar, Tokac *et al.* (2019), White y McCoy (2019) y Álvarez-Rey y Muñoz-Rodríguez (2023), utilizaron juegos de estrategia y recursos lúdicos para enseñar matemáticas, observando que un alto porcentaje

de estudiantes no solo comprendía mejor los conceptos, sino que también mostraba un interés renovado en la materia.

Otro enfoque innovador ha sido el uso de herramientas tecnológicas en la educación matemática. Ali *et al.* (2023) realizaron una revisión sistemática que destaca el impacto positivo de la integración de la tecnología en la motivación y el rendimiento de los estudiantes en matemáticas. Pumacallahui *et al.*, (2021) concluyeron que la integración de herramientas tecnológicas como GeoGebra tiene un impacto positivo en el aprendizaje, destacando que este tipo de software no solo mejora la comprensión conceptual, sino que también aumenta la motivación y el interés de los estudiantes por la materia.

Diversos autores han explorado estrategias para hacer la Teoría de Grafos más sencilla y atractiva para los estudiantes, vinculando conceptos abstractos con situaciones cotidianas. Fernández *et al.* (2010) destacan el uso de laberintos y recorridos para comprender propiedades de los grafos de manera lúdica. De manera similar, Contreras-Beltrán *et al.* (2013) emplean la teoría de "los seis grados de separación" para ilustrar conexiones sociales a través de redes. En otra línea, Núñez *et al.* (2016) exploran cómo los grafos pueden ser introducidos mediante juegos interactivos que facilitan el aprendizaje de las estructuras de redes y conexiones. Finalmente, Bernal *et al.* (2018) proponen ejemplos prácticos de conexiones en redes de transporte y logística para visualizar aplicaciones reales de los grafos.

METODOLOGÍA

Para alcanzar el objetivo de este estudio, se llevó a cabo una intervención didáctica en forma de clase expositiva interactiva, donde el profesor utilizó ejemplos del béisbol para explicar conceptos básicos de la Teoría de Grafos. Este enfoque, que combina explicaciones con estrategias participativas, mejora la comprensión y retención del aprendizaje (Bligh, 1998; Freeman *et al.*, 2014; Prince, 2004). Además, el uso de contextos familiares como el béisbol facilita la comprensión de conceptos abstractos y aumenta la motivación al conectar el aprendizaje con experiencias previas (Bransford *et al.*, 2000; Posamentier y Smith, 2010).

Para el diseño de la intervención didáctica, se simplificaron los conceptos fundamentales de la Teoría de Grafos y se crearon ejemplos prácticos relacionados con el béisbol, facilitando su comprensión de manera intuitiva. Los conceptos seleccionados se presentaron de manera que ilustraran su aplicación en situaciones del béisbol, permitiendo a los estudiantes visualizar y entender las

ideas abstractas de la teoría de forma concreta. Los conceptos utilizados fueron: definición de grafo, orden y tamaño, subgrafo, grado de un vértice, grafo simple y multigrafo, grafo dirigido y conexo y diagrama de Voronoi.

PARTICIPANTES, TEMPORALIZACIÓN Y RECURSOS UTILIZADOS

La intervención didáctica se implementó durante una sesión de dos horas con un grupo de 29 estudiantes pertenecientes al tercer curso del nivel de educación secundaria del centro educativo Colegio Parroquial San José Patrocinio ubicado en Santo Domingo de Guzmán, República Dominicana. Para su implementación en el aula, se utilizaron recursos tecnológicos como PowerPoint y GeoGebra. Con respecto a los recursos físicos, la dirección del centro educativo facilitó el aula de tercero de secundaria.

EVALUACIÓN DE LA INTERVENCIÓN

Evaluar el impacto de la intervención didáctica es esencial para determinar su efectividad y realizar mejoras en futuras implementaciones. Para ello, se emplearon dos instrumentos: un cuestionario de satisfacción y la observación del docente anfitrión.

El cuestionario de satisfacción se diseñó para evaluar la motivación e interés de los estudiantes tras la intervención didáctica. La motivación, entendida en este contexto como el impulso para comprometerse con el aprendizaje, puede ser intrínseca, cuando el interés proviene del placer de la actividad, o extrínseca, cuando depende de factores externos como recompensas. En este caso, el enfoque fue la motivación intrínseca, buscando generar interés en los estudiantes a través de un contexto familiar y relevante como el béisbol. El cuestionario incluyó cinco ítems para evaluar la relevancia del contenido, el interés personal y la claridad de los conceptos, factores clave para fomentar el compromiso y la motivación (Deci y Ryan, 2000; Hidi y Renninger, 2006). A continuación, se describen los ítems y las dimensiones que buscaban explorar:

- Ítem 1: *Me siento motivado a aprender más sobre Teoría de Grafos o matemáticas después de esta exposición.*

Este ítem evaluaba la disposición de los estudiantes a seguir explorando temas matemáticos, lo cual está vinculado con la motivación para el

aprendizaje futuro. Según Deci y Ryan (2000), la motivación intrínseca se refleja en el deseo de continuar participando en actividades relacionadas con el tema.

- Ítem 2: *Siento que el vínculo entre matemáticas y béisbol me ayudó a valorar más el estudio de las matemáticas.*
Este ítem medía la relevancia percibida del contexto interdisciplinario, ya que vincular conceptos abstractos con temas significativos aumenta el interés de los estudiantes. Según Hidi y Renninger (2006), integrar intereses personales en el aprendizaje fomenta una percepción positiva del contenido y refuerza la motivación intrínseca.
- Ítem 3: *Los ejemplos y analogías utilizados durante la exposición fueron claros.*
Este ítem evaluaba la claridad percibida de los recursos didácticos, un aspecto clave para garantizar que los estudiantes encuentren los ejemplos no solo interesantes, sino también comprensibles. Según Mayer (2002), una presentación clara mejora la experiencia de aprendizaje y refuerza la motivación.
- Ítem 4: *Me gustaría participar en más actividades que relacionen las matemáticas con temas que me interesen.*
Este ítem evaluaba la aceptación de enfoques interdisciplinarios como estrategia motivacional, alineándose con el interés de los estudiantes por conectar las matemáticas con áreas de su interés. Según Renninger (2000) esta conexión puede generar un interés duradero por las matemáticas.
- Ítem 5: *Recomendaría esta exposición a otros estudiantes que estén aprendiendo Teoría de Grafos.*
Este ítem evaluaba la percepción del valor general de la intervención, reflejando la satisfacción de los estudiantes y su consideración de la actividad como significativa para compartirla. Según Deci y Ryan (2000), una evaluación positiva indica un alto nivel de motivación intrínseca.

Los resultados del cuestionario se analizaron utilizando una escala Likert con cuatro opciones de respuesta: “muy de acuerdo”, “bastante de acuerdo”, “poco de acuerdo” y “nada de acuerdo” (Likert, 1932). Esta escala permitió identificar patrones en las opiniones de los estudiantes sobre la intervención didáctica. El cuestionario se entregó al finalizar la exposición, tras explicar su contenido y

garantizar la sinceridad y anonimato de las respuestas. También se solicitó a los estudiantes que firmaran un consentimiento informado, asegurando el uso académico y anónimo de los datos.

El segundo instrumento utilizado fue la observación del docente anfitrión, quien, actuando como observador, proporcionó una evaluación cualitativa del comportamiento y actitud de los estudiantes durante la intervención. Según O'Leary (2020), la observación es una técnica eficaz para recopilar datos en contextos naturales, lo que permite obtener información rica y contextualizada sobre el impacto real de la intervención en el aula. Esta observación complementó la evaluación cuantitativa proporcionada por el cuestionario, brindando una visión más completa del impacto de la exposición activa en el interés y el aprendizaje de los estudiantes.

APRENDIENDO TEORÍA DE GRAFOS A TRAVÉS DEL BÉISBOL

En esta sección se presenta la exposición realizada en la intervención didáctica titulada “Aprendiendo Teoría de Grafos a través del Béisbol”. El béisbol es un deporte de estrategias y el análisis de estas es de suma importancia para los equipos. La Teoría de Grafos, a través de su representación minimalista, es de gran utilidad para realizar un seguimiento y un análisis de las jugadas y de la relación entre jugadores para poder obtener estrategias eficientes que logren cumplir con el objetivo del equipo.

El béisbol es un deporte entre dos equipos de nueve jugadores cada uno, que alternan entre posiciones ofensivas y defensivas. El objetivo del equipo ofensivo es anotar carreras, corriendo por las cuatro bases del campo, mientras que el equipo defensor busca eliminar al contrario con “outs”. Un “out” ocurre cuando un jugador es eliminado, impidiendo su avance hacia las bases. Existen “outs” simples y situaciones especiales como el “Doble Play” o “Triple Play”, donde se eliminan varios jugadores en una jugada. El equipo que anote más carreras y consiga al menos 27 “outs” gana.

A continuación, analizamos diferentes jugadas que pueden ocurrir durante un partido de béisbol y cómo pueden ser relacionadas con los conceptos básicos de la Teoría de Grafos.

GRAFO, ORDEN Y TAMAÑO

La figura 1 muestra un campo de béisbol donde los jugadores del equipo que juega a la defensiva están representados en color azul y los jugadores del equipo a la ofensiva en rojo. El lanzador está ubicado en el centro del campo, representado por el punto A, mientras que el bateador del equipo contrario se encuentra en la caja de bateo, señalada con el punto B. Los demás jugadores del equipo defensor están posicionados en distintas áreas del campo representados por puntos en color azul. Supongamos una jugada donde el lanzador A envía la pelota hacia el bateador B, quien la batea hacia el jugador E. Este jugador E recibe la pelota y, rápidamente, la lanza al jugador C, completando así la secuencia de la jugada. Las líneas que conectan estos puntos ilustran el recorrido de la pelota durante la jugada, destacando las interacciones entre los jugadores. Si eliminamos la representación del campo de béisbol podemos observar la representación de la jugada en forma de grafo.

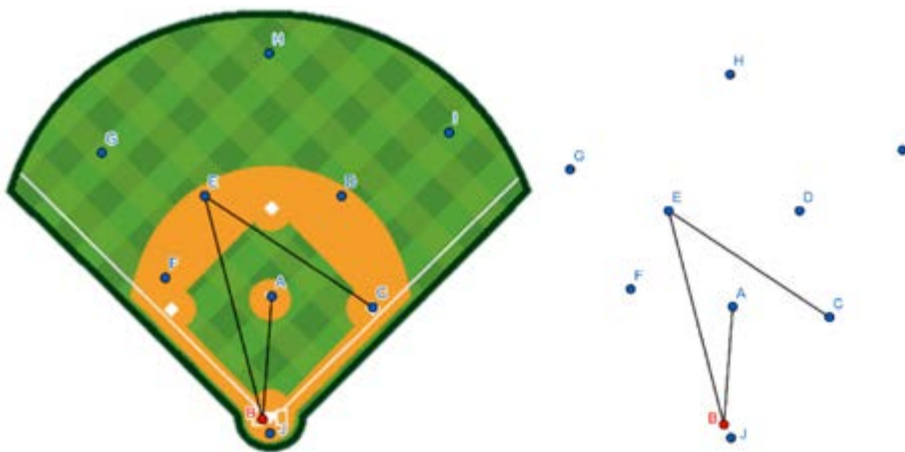


Figura 1: Ejemplo de jugada de béisbol y su representación en forma de grafo.

Concretamente, un grafo se define como una colección de puntos llamados vértices que se encuentran unidos por líneas o arcos llamadas aristas. Un grafo se denota matemáticamente por $G = (V, E)$ donde V es el conjunto de puntos y E es el conjunto de aristas.

En el caso anterior, si nos centramos en el grafo que representa el recorrido de la pelota, se obtiene el grafo que se muestra en la figura 2 (se ha cambiado la notación del punto E por K para evitar confusión con el conjunto E que denota las aristas).

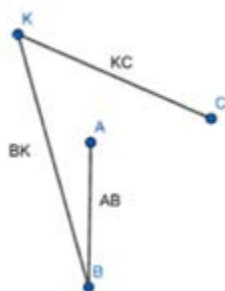


Figura 2: Grafo $G = (V, E)$.

En este caso, el conjunto de vértices del grafo $G = (V, E)$ está formado por los puntos $V(G) = \{A, B, K, C\}$ y el conjunto de aristas está formado las líneas que unen los puntos $E(G) = \{\{AB\}, \{BK\}, \{KC\}\}$.

Adicionalmente, el orden y el tamaño de un grafo se definen como el número de vértices y de aristas que tiene el grafo, respectivamente. Si observamos el grafo G , se puede deducir que el orden es $n(G) = 4$ y el tamaño es $m(G) = 3$.

SUBGRAFO

La anotación de las estrategias durante un juego de béisbol involucra a los jugadores que tuvieron acción en la jugada después de que la pelota es bateada. En la jugada considerada anteriormente, los jugadores implicados fueron los que se encontraban en la posición E y C (figura 1). En este caso, la anotación de esta jugada puede ser representada como un grafo H que se obtiene del grafo G considerado en el ejemplo anterior, eliminando algunos de sus vértices y aristas (figura 3).



Figura 3: Subgrafo $H = (V', E')$ en la jugada de béisbol.

En Teoría de Grafos esta situación se define como un subgrafo. Un grafo $H = (V', E')$ se denomina subgrafo del grafo $G = (V, E)$ si los vértices y las aristas de H están contenidos en los vértices y en las aristas de G , es decir, si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.

GRADO DE UN VÉRTICE

Imaginamos ahora una situación común en un juego real de béisbol que da lugar a una jugada conocida como “Doble Play”. En la jugada mostrada en la figura 4, el lanzador en el punto A envía la pelota al bateador K, quien la batea hacia el jugador en la tercera base F. Este jugador atrapa la pelota y la pasa al jugador en la posición D, quien a su vez la envía al jugador en la posición C. Al observar el recorrido de la pelota después de ser bateada, esta jugada puede anotarse como “Doble Play F – D – C” y representarse como un grafo donde los vértices $\{F, D, C\}$ indican las posiciones de los jugadores que intervienen en la jugada y las aristas $\{FD, DC\}$ muestran el trayecto de la pelota después de ser bateada resultando en un “out”.

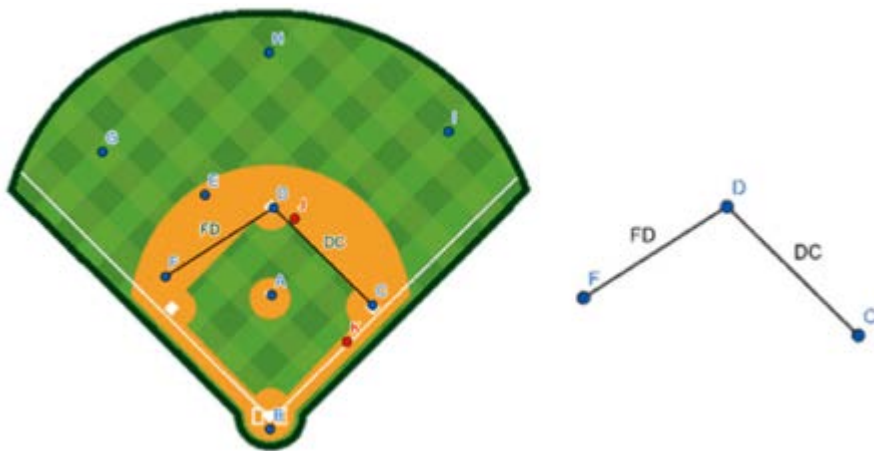


Figura 4: Jugada de Doble Play F – D – C y su representación como grafo.

Si observamos el grafo representado en la Figura 4, se puede conocer el número de “outs” en el que ha estado involucrado cada jugador. Por ejemplo, el jugador D, ha estado involucrado en dos “outs”, uno con el jugador J y otro con el jugador K.

Usando la terminología de Teoría de Grafos, el número de “outs” en el que está involucrado un jugador se puede representar como el grado de un vértice. El grado de un vértice de un grafo se define como el número de aristas que lo contienen y se denota por ***deg(V)***. En el caso del vértice D, su grado es ***deg(V) = 2***, es decir, el jugador que se encuentra en la posición D ha sido involucrado en dos “outs”.

De este modo, la representación de las jugadas como grafos pueden ser útiles para un entrenador para anotar cuál es la mayor combinación de “outs” del equipo contrario y así tener un mejor rendimiento en su equipo colocando de forma eficiente a sus jugadores dentro del campo.

GRAFO SIMPLE Y MULTIGRAFO

Los grafos pueden ser clasificados como un grafo simple o como un multigrafo. Un grafo simple es un tipo de grafo que no incluye ciclos ni aristas paralelas. Por otro lado, un multigrafo es un grafo con dos o más aristas que pueden conectar a un mismo vértice. Las jugadas expuestas anteriormente han sido representadas por grafos simples. A continuación, veremos una jugada que puede ser representada por un multigrafo.

Imaginamos una jugada donde las bases están llenas por los corredores L, K y J. El bateador representado por el punto M realiza un toque de bola por el suelo que es atrapada por el jugador en el punto B, quien la lanza al jugador C en la primera base para lograr el primer “out”. Este a su vez lanza la pelota al jugador B nuevamente para lograr el segundo “out”. En esta jugada tanto el jugador B como el jugador C están involucrados en la defensiva de los dos “out”. Así, esta jugada puede ser anotada como “Doble Play B – C – B” y representada por el multigrafo que se muestra en la figura 5.

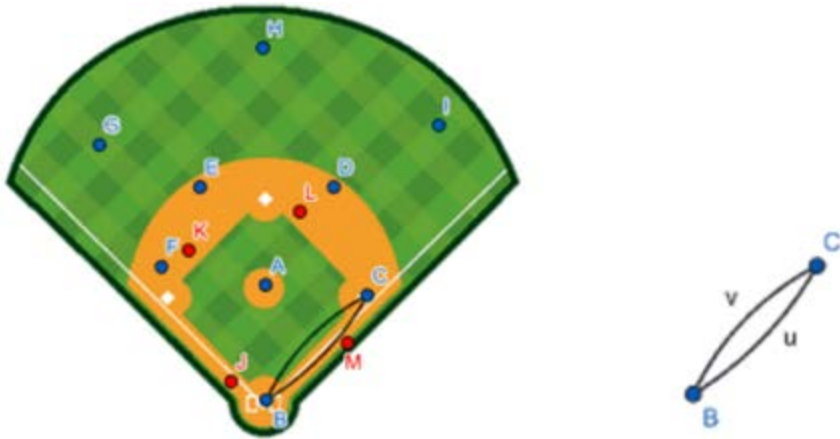


Figura 5: Jugada de Doble Play B – C – B y su representación como grafo.

GRAFO DIRIGIDO

Si observamos el grafo en la figura 5, se puede confundir la forma en la que sucedió la jugada debido a que podría ser iniciada desde el jugador C y terminar en el mismo C o iniciar en el jugador B y terminar en el B. Por ello, en algunas ocasiones es útil que las aristas muestren alguna dirección. En este caso, la arista que une los puntos B y C podría denotarse como una arista dirigida $\overrightarrow{BC}$ indicando que la pelota fue dirigida desde el punto B hasta el punto C. Este tipo de grafos que contienen aristas dirigidas se llaman grafos dirigidos. Por tanto, la jugada denotada anteriormente por “Doble Play B – C – B” puede ser representada por el grafo dirigido que se muestra en la figura 6.

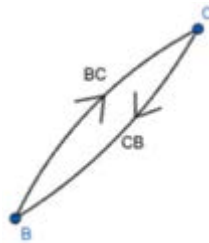


Figura 6: Grafo dirigido que representa la jugada Doble Play B – C – B.

Los grafos dirigidos también pueden representar jugadas más complejas en el béisbol como una de “Triple Play”. Un ejemplo destacado es el célebre “Triple Play” ejecutado por los Yankees de Nueva York en su enfrentamiento contra los Atléticos de Oakland en 2021. La jugada comienza cuando el bateador, representado por el punto Q, realiza un golpe que hace que la pelota ruede hacia el jugador de la tercera base en el punto A, este pisa la base para registrar el primer “out” y luego lanza la pelota al jugador de la segunda base en la posición B, quien la atrapa y consigue el segundo “out”. Finalmente, el jugador de segunda base pasa la pelota al jugador en la primera base en la posición C, completando así la jugada de “Triple Play” en la que los tres jugadores son eliminados en una secuencia.

En esta ocasión, para representar esta jugada con un grafo es necesario tener en cuenta que el primer jugador hizo un “out” sin la asistencia de otro jugador. Para poder representar esta primera parte de la jugada se debe definir el concepto de bucle o lazo. Un bucle o lazo en un grafo es una arista que relaciona al mismo vértice, es decir, una arista donde el vértice inicial y el vértice final coinciden.

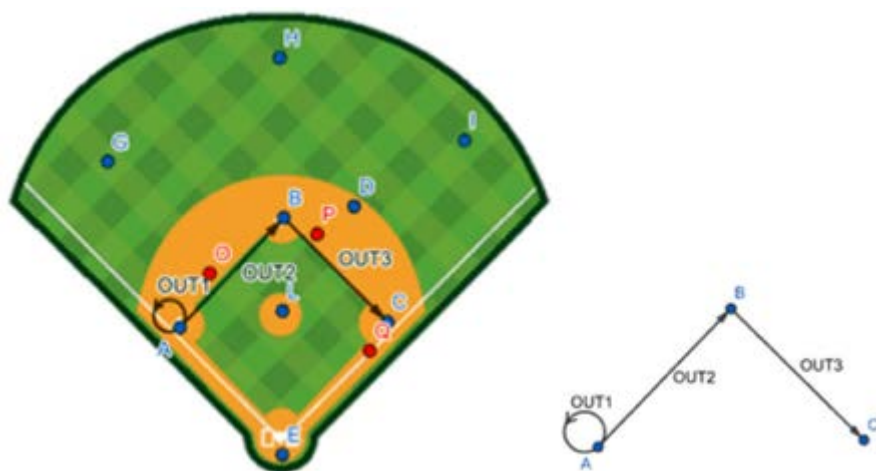


Figura 7: Jugada de “Triple Play A – A – B – C” y su representación como grafo dirigido.

Aplicando el concepto de bucle y de arista dirigida, el grafo mostrado en la figura 7 representa la jugada donde, en primer lugar, el jugador ocupando el vértice A hace el primer “out” con él mismo en la tercera base. Luego, el mismo jugador

A lanza la pelota al jugador B que se encuentra en la segunda base y realizan el segundo “out”. Para finalizar la jugada de “Triple Play”, el jugador B de la segunda base lanza la pelota al jugador C de la primera base para así lograr el tercer “out”.

GRAFO CONEXO: RELACIÓN ENTRE EL PITCHER PLINKO Y LA TEORÍA DE GRAFOS

A continuación, consideramos la representación visual y analítica que ofrece la herramienta Pitcher Plinko disponible en la página web de Baseball Savant (MLB Advanced Media, LP). Esta herramienta permite analizar las decisiones estratégicas de un lanzador al mostrar cómo se distribuyen sus lanzamientos según los conteos de bolas y strikes, además de evaluar los resultados obtenidos frente a los bateadores. Esta información se puede relacionar directamente con la Teoría de Grafos, donde los conteos y las transiciones entre ellos se representan como vértices y aristas, respectivamente, formando un grafo que muestra el comportamiento del lanzador en un turno al bate.

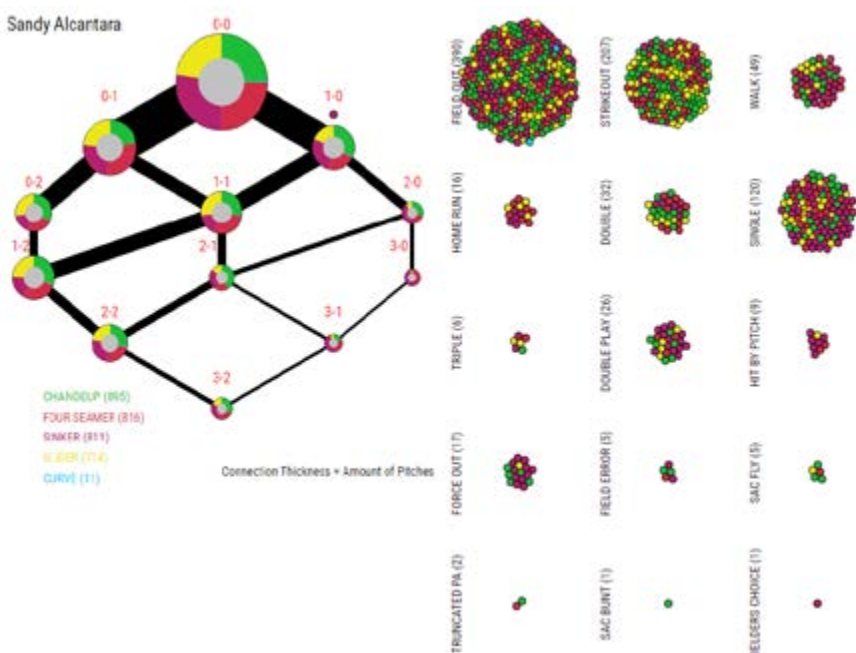


Figura 8: Modelo de Pitcher Plinko para Sandy Alcántara.

Fuente: Baseball Savant MLB Advanced Media, LP.

En la figura 8, se observa el análisis del Pitcher Plinko para el jugador Sandy Alcántara. Cada nodo circular representa un conteo específico de bolas y strikes, como 0-0, 0-1 o 1-1, y su distribución de lanzamientos está codificada por colores según el tipo de lanzamiento: changeup (verde), four seamer (rosado), sinker (morado), slider (amarillo) y curve (azul). Por ejemplo, el changeup fue el lanzamiento más utilizado por Alcántara con 895 envíos, seguido por la recta four seamer con 816. Estos lanzamientos están distribuidos en cada conteo, siendo 0-0 el nodo más grande, ya que representa el inicio de todos los turnos, y las líneas conectando los nodos indican las transiciones entre conteos. El grosor de estas líneas refleja la frecuencia de dichas transiciones. Por ejemplo, las conexiones desde 0-0 hacia 0-1 o 1-0 son las más gruesas, ya que representan los lanzamientos iniciales más comunes.

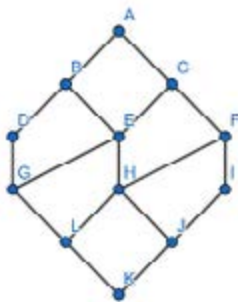


Figura 9: Grafo asociado al Pitcher Plinko de Sandy Alcántara.

En la figura 9, se presenta un grafo abstracto que modela las transiciones entre conteos en el Pitcher Plinko de Sandy Alcántara. Cada vértice del grafo representa un estado de conteo, mientras que las aristas indican las posibles progresiones entre estos estados. Por ejemplo, la conexión entre los vértices A y B representa la transición de 0-0 a 0-1, equivalente a una de las rutas más comunes observadas en la figura 8. Este tipo de grafo cumple la característica de ser un grafo conexo. Por definición, un grafo conexo es aquel en el que todos sus vértices están conectados, es decir, hay un camino que une cualquier par de vértices. Por tanto, este grafo conexo permite que cualquier conteo inicial conduzca a cualquier conteo final dentro de un turno, dependiendo de las decisiones del lanzador y las acciones del bateador. Por ejemplo, para ir desde el vértice A al vértice H hay diferentes caminos que se pueden recorrer, como A-B-E-H o A-C-F-H, entre otros. Estos caminos representan las diferentes

combinaciones de conteos que un lanzador enfrenta y las decisiones que toma al adaptarse a las circunstancias de cada turno. La relación entre ambas figuras destaca cómo la Teoría de Grafos permite abstraer y analizar los patrones estratégicos del lanzador. Mientras la figura 8 proporciona un análisis visual detallado, la figura 9 sintetiza esta información en un grafo que facilita el estudio de las trayectorias posibles dentro de un turno.

Adicionalmente, los grafos pueden utilizarse para profundizar aún más en el análisis de la herramienta Pitcher Plinko, no solo en las transiciones entre conteos, sino también en los resultados de los lanzamientos y su impacto en el juego. La figura 8 muestra un análisis detallado de los lanzamientos de Alcántara, destacando que permitió 16 jonrones con tipos de lanzamiento como four seamer, sinker y slider, mientras que los lanzamientos más efectivos para evitar cuadrangulares fueron el changeup y la curve. Esta información podría integrarse en el grafo como pesos en los vértices y aristas, lo que permitiría optimizar decisiones estratégicas basadas en los riesgos y beneficios de cada tipo de lanzamiento.

DIAGRAMA DE VORONOI APLICADO AL BÉISBOL

En el béisbol, es fundamental que los jugadores tengan un claro entendimiento del terreno de juego bajo su dominio, es decir, de las áreas donde cada jugador es el responsable de interceptar una pelota en movimiento. Esta distribución estratégica del terreno es crucial para coordinar una defensa eficiente y minimizar errores. Para modelar matemáticamente estas áreas de influencia, el concepto geométrico de Diagrama de Voronoi resulta especialmente útil.

Un diagrama de Voronoi divide un espacio en regiones basadas en la proximidad a un conjunto de puntos. En este caso, los puntos representan las posiciones de los jugadores en el campo. La construcción de estas regiones se realiza trazando mediatrices entre los puntos más cercanos, creando fronteras que delimitan el área de influencia de cada jugador (Úbeda *et al.*, 2017). Cada región contiene todos los puntos del terreno que están más cerca de un jugador específico que de cualquier otro.

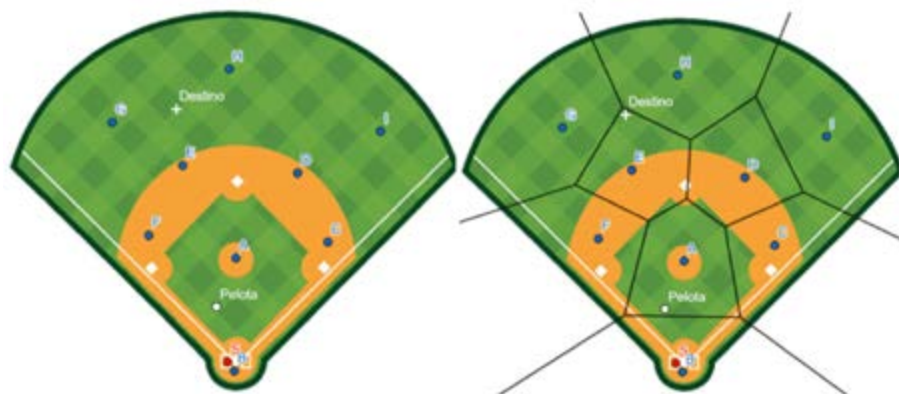


Figura 10: Diagrama de Voronoi del terreno de juego en béisbol.

En la figura 10, se muestra un ejemplo del terreno de juego dividido en regiones mediante un diagrama de Voronoi. Supongamos que los jugadores están ubicados en sus respectivas posiciones defensivas, y la pelota es bateada hacia un destino específico dentro del campo, indicado en la figura con una cruz. Al observar el punto donde caerá la pelota, notamos que los jugadores en las posiciones G, E y H parecen ser los más cercanos al destino. Sin embargo, ¿cuál de ellos tiene mayor probabilidad de atrapar la pelota?

Aquí es donde el diagrama de Voronoi ofrece una herramienta visual y analítica para resolver esta pregunta. Según la división del terreno, el destino de la pelota está dentro de la región asociada al jugador en la posición E. Esto indica que E es el jugador más cercano y, por lo tanto, el que tiene mayor probabilidad de interceptar la pelota. De esta manera, el diagrama no solo proporciona un análisis geométrico del terreno, sino que también refuerza la importancia de la ubicación precisa de los jugadores para una defensa eficaz.

El uso de diagramas de Voronoi en el béisbol, permite a los entrenadores y analistas evaluar cómo optimizar las posiciones defensivas para cubrir mejor el terreno. Por ejemplo, se podría ajustar la ubicación de los jugadores para equilibrar las áreas de dominio y reducir huecos vulnerables en el campo.

ANÁLISIS DE LA INTERVENCIÓN DIDÁCTICA

Esta sección analiza la intervención didáctica realizada a partir de las respuestas de los estudiantes en un cuestionario de satisfacción y la observación realizada por el docente anfitrión. Los resultados reflejan una percepción positiva, evidenciando que los estudiantes encontraron la actividad motivadora y relevante. Adicionalmente, el testimonio del docente anfitrión destacó la activa participación de los estudiantes, señalando que la exposición realizada despertó el interés y curiosidad en ellos por seguir explorando el tema.

A continuación, se presenta un análisis detallado de ambas herramientas de evaluación, destacando los hallazgos principales.

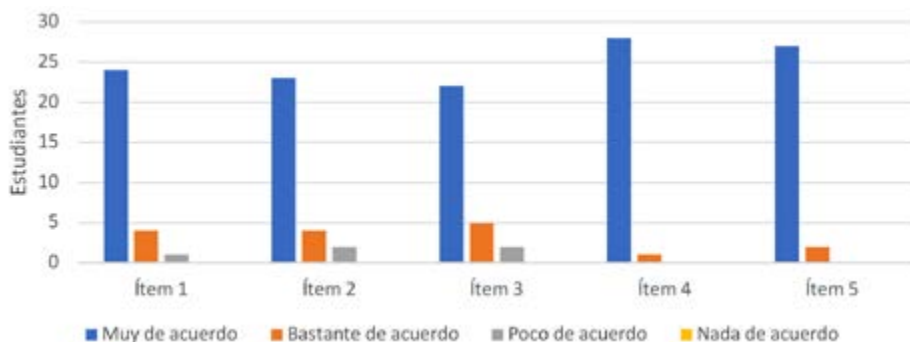


Figura 11: Resultados del cuestionario realizado a los estudiantes.

Los resultados de la encuesta mostrados en la figura 11, revelan una fuerte aceptación y satisfacción de los estudiantes con la exposición realizada. En el primer ítem, *Me siento motivado a aprender más sobre Teoría de Grafos o matemáticas después de esta exposición*, 83% de los estudiantes (24 de 29) se sintieron estar muy de acuerdo con que la intervención didáctica los motivó a querer aprender más sobre matemáticas, mientras que 14% restante (4 de 29) estuvo bastante de acuerdo. Esto indica que la intervención didáctica logró el objetivo principal de motivar a los estudiantes por el aprendizaje de las matemáticas a través de un enfoque innovador y relevante. Solo hubo una respuesta en la categoría estar poco de acuerdo y ninguna en la de estar nada de acuerdo, lo que refuerza la efectividad de la actividad para despertar el interés de los estudiantes hacia las matemáticas.

En cuanto a la percepción que tuvieron los estudiantes sobre el vínculo entre los conceptos matemáticos y el béisbol, las respuestas al segundo ítem *Siento que el vínculo entre matemáticas y béisbol me ayudó a valorar más el estudio de las matemáticas*, mostraron que 79% de los estudiantes (23 de 29) estuvieron muy de acuerdo en que el vínculo los ayudó a valorar el estudio de esta ciencia. Esto sugiere que el uso de ejemplos prácticos y contextos familiares para los estudiantes, puede ser una estrategia poderosa para despertar el interés en el aprendizaje de las matemáticas.

Los resultados del cuestionario también destacaron la claridad de los ejemplos utilizados, con 76% de las respuestas de los estudiantes (22 de 29) en la categoría estar muy de acuerdo, y 17% (5 de 29) en estar bastante de acuerdo, en respuesta al tercer ítem *Los ejemplos y analogías utilizados en la exposición fueron claros*, lo que subraya la importancia de una enseñanza con un lenguaje sencillo y contextualizado.

Finalmente, las respuestas a las preguntas sobre la participación en futuras actividades y la recomendación de la exposición a otros estudiantes fueron igualmente positivas. En el cuarto ítem, *Me gustaría participar en más actividades que relacionen las matemáticas con temas que me interesen*, sobre el interés en participar en actividades similares, el 97% de los estudiantes (28 de 29) estuvieron muy de acuerdo en participar en actividades que relacionen las matemáticas con temas que les resulten interesantes. En términos de recomendación, en las respuestas de los estudiantes al sexto ítem, *Recomendaría esta exposición a otros estudiantes que estén aprendiendo Teoría de Grafos*, 93% (27 de 29) recomendarían la exposición a otros estudiantes. Estos resultados indican no solo una alta satisfacción con la intervención didáctica realizada, sino también un interés significativo en la continuidad de este enfoque educativo.

Por otro lado, se recogió el testimonio del docente que participó como observador en la exposición, quien expresó su sorpresa y satisfacción con la participación de los estudiantes, comentando textualmente: “Me sorprendió lo involucrados que estuvieron los estudiantes. Es interesante ver cómo responden cuando pueden relacionar los conceptos abstractos con algo tangible y familiar para ellos. A pesar de la dificultad del contenido para su nivel académico, han respondido de manera satisfactoria durante todo el taller y han mostrado interés en seguir investigando sobre el tema tratado. Estoy agradecido de que hayas traído una perspectiva fresca y efectiva a nuestra clase. Creo firmemente en usar métodos que despierten esa curiosidad y ganas de aprender, y este taller fue un excelente ejemplo de eso”. Este testimonio resalta la efectividad del enfoque

utilizado en la intervención didáctica y el impacto positivo que tuvo en los estudiantes, reforzando la importancia de metodologías innovadoras en la educación matemática.

CONCLUSIÓN

En este artículo se ha demostrado cómo es posible ilustrar definiciones básicas de la Teoría de Grafos a partir de situaciones reales que ocurren en un juego de béisbol. Los resultados de este estudio destacan una respuesta positiva de los estudiantes hacia la intervención didáctica, subrayando el impacto motivador de vincular las matemáticas con temas de interés personal, como el béisbol. Estos hallazgos coinciden con investigaciones previas que demuestran que integrar temas cercanos a los estudiantes, como la música (Silva *et al.*, 2023; Luengo *et al.*, 2024), los juegos de estrategia (Tokac *et al.*, 2019; White y McCoy, 2019), o la tecnología (Ali *et al.*, 2023; Pumacallahui *et al.*, 2021), puede aumentar su motivación e interés por las matemáticas. Estos estudios sugieren que el vínculo entre los temas elegidos y los conceptos matemáticos es clave para mejorar el aprendizaje y la motivación en contextos educativos diversos. Nuestro estudio refuerza esta idea, al mostrar cómo el béisbol puede ser una herramienta eficaz para enseñar matemáticas y fomentar el interés de los estudiantes por esta disciplina.

A partir de los resultados obtenidos y la comparación con estudios similares, emergen varias recomendaciones para futuras intervenciones que integren conceptos matemáticos con temas de interés personal. Primero, diversificar los temas, como deportes, música, tecnología y juegos de estrategia, entre otros, para atraer la atención de un público más amplio y despertar el interés por las matemáticas. Segundo, priorizar la claridad en los ejemplos y analogías utilizados, complementándolos con actividades prácticas y demostraciones. Tercero, promover la participación activa de los estudiantes mediante dinámicas interactivas y discusiones grupales que fomenten el intercambio de ideas. Finalmente, incorporar herramientas tecnológicas que enriquezcan la experiencia y la hagan más atractiva. Siguiendo estas recomendaciones, las futuras intervenciones didácticas podrán mantener y superar los niveles de motivación y satisfacción alcanzados en este estudio, adaptándose continuamente a las necesidades e intereses de los estudiantes.

REFERENCIAS

- Abín, A., Núñez, J. C., Rodríguez, C., Cueli, M., García, T. y Rosário, P. (2020). Predicting mathematics achievement in secondary education: The role of cognitive, motivational, and emotional variables. *Frontiers in Psychology*, 11, 876. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.00876>
- Ali, M. S. B., Yasmeen, R., y Munawar, Z. (2023). The impact of technology integration on student engagement and achievement in mathematics education: A systematic review. *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, 6(3), 222-232. <https://journals.researchparks.org/index.php/IJIE>
- Álvarez-Rey, I., y Muñiz-Rodríguez, L. (2023). Los recursos lúdicos para la mejora de la actitud del alumnado de Educación Primaria hacia el aprendizaje de la geometría. *Educación matemática*, 35(2), 268-292. <https://doi.org/10.24844/EM3502.11>
- Baseball Savant. Sandy Alcantara Pitcher Plinko, 2022. MLB Advanced Media, LP, <https://baseballsavant.mlb.com/visuals/pitch-plinko?playerId=645261&playerName=-Sandy%20Alcantara&year=2022&swarm=false&interval=250>
- Becerra-González, C. y Reidl, L. (2015). Motivación, autoeficacia, estilo atribucional y rendimiento escolar de estudiantes de bachillerato. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 17(3), 79-93. <https://redie.uabc.mx/redie/article/view/664>
- Bernal, E. F., Astudillo, M. T. G., del Rey, Á. M. M., y Martín, M. T. S. (2018). Una experiencia divulgativa basada en la teoría de grafos. En XIV congreso regional de matemáticas de Castilla y León. León, 9 y 10 de noviembre de 2018 (p. 221). Junta de Castilla y León. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8589257>
- Bligh, D. A. (1998). *What's the Use of Lectures?*. Intellect Books.
- Bransford, J. D., Brown, A. L., y Cocking, R. R. (Eds.). (2000). *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School: Expanded Edition*. National Academy Press.
- Castro-Velásquez, M. J., y Rivadeneira-Loor, F. Y. (2022). Posibles Causas del Bajo Rendimiento en las Matemáticas: Una Revisión a la Literatura. *Polo del Conocimiento: Revista científico - profesional*, 7(2), 1089-1098. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8354915>
- Contreras Beltrán, J. M., Duarte Tosso, I., y Núñez Valdés, J. (2013). ¿Bastan solo seis enlaces para conectar a dos personas cualesquiera en el mundo? Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 33, 103-118. <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/808>
- Corbalán, F. (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Graó.
- Corredor-García, M. S., y Bailey-Moreno, J. (2020). Motivación y concepciones que alumnos de educación básica atribuyen a su rendimiento académico en matemáticas. *Revista fuentes*, 22(1), 127-141. <https://doi.org/10.12795/revistafuentes.2020.v22.i1.10>

- Deci, E. L., y Ryan, R. M. (2000). The “What” and “Why” of Goal Pursuits: Human Needs and the Self-Determination of Behavior. *Psychological Inquiry*, 11(4), 227-268. https://doi.org/10.1207/S15327965PLI1104_01
- Fernández, I. H., Contreras, C. M., y Valdés, J. N. (2010). ¿Perderse en un laberinto? No con las matemáticas. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 6(21). <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1040>
- Freeman, S., Eddy, S. L., McDonough, M., Smith, M. K., Okoroafor, N., Jordt, H., y Wenderoth, M. P. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(23), 8410–8415. <https://doi.org/10.1073/pnas.1319030111>
- Hannula, M.S. (2006). Motivation in Mathematics: Goals Reflected in Emotions. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 165–178. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-9019-8>
- Hidi, S., y Renninger, K. A. (2006). The four-phase model of interest development. *Educational Psychologist*, 41(2), 111-127. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4102_4
- Likert, R. (1932). *A technique for the measurement of attitudes*. *Archives of Psychology*, 140, 1–55.
- Luengo, G., Sanz, M. T., Valenzuela, C., y López-Iñesta, E. (2024). La notación musical: herramienta para el aprendizaje de las fracciones. *Educación Matemática*, 36(1). <https://doi.org/10.24844/EM3601.07>
- Mayer, R. E. (2002). *Multimedia Learning*. Cambridge University Press.
- Muñoz, F. L. M., Montenegro, M. J. B., y Blanco-Álvarez, H. (2015). Estudio sobre los factores que influyen en la pérdida de interés hacia las matemáticas. *Amauta*, 13(26), 149-166. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5440957>
- Nimier, J. (2007). *Las matemáticas, el español, los idiomas, ¿para qué me sirven?* (2nd ed.). Universidad del Valle. <https://www.jstor.org/stable/j.ctv14nphjf>
- Núñez, R., Núñez, J., Paluzo, E., y Salguero, E. (2016). Jugueteando con grafos. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 46, 188-204. <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/568>
- O’Leary, M. (2020). *Classroom Observation: A Guide to the Effective Observation of Teaching and Learning* (2nd ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315630243>
- Posamentier, A. S., y Smith, B. S. (2010). *Teaching Secondary Mathematics: Techniques and Enrichment Units* (8th ed.). Pearson Education.
- Prince, M. (2004). Does active learning work? A review of the research. *Journal of Engineering Education*, 93(3), 223–231. <https://doi.org/10.1002/j.2168-9830.2004.tb00809.x>
- Pumacallahui Salcedo, E., Acuña Quispe, C. I., y Calcina Álvarez, D. A. (2021). Influencia del software GeoGebra en el aprendizaje de la geometría en estudiantes de cuarto grado de secundaria en el distrito de Tambopata de la región de Madre de Dios. *Educación Matemática*, 33(2), 245-273. <https://doi.org/10.24844/em3302.10>

- Renninger, K. A. (2000). Individual interest and its implications for understanding intrinsic motivation. In C. Sansone y J. M. Harackiewicz (Eds.), *Intrinsic and extrinsic motivation: The search for optimal motivation and performance* (pp. 373-404). Academic Press. <https://doi.org/10.1016/B978-012619070-0/50035-0>
- Ricoy, M. C., y Couto, M. J. V. (2018). Desmotivación del alumnado de secundaria en la materia de matemáticas. *Revista electrónica de investigación educativa*, 20(3), 69-79. <https://doi.org/10.24320/redie.2018.20.3.1650>
- Ryan, R. M., y Deci, E. L. (2000). Intrinsic and extrinsic motivations: Classic definitions and new directions. *Contemporary Educational Psychology*, 25(1), 54-67. <https://doi.org/10.1006/ceps.1999.1020>
- Shukajlow, S., Rakoczy, K. y Pekrun, R. (2017). Emotions and motivation in mathematics education: Theoretical considerations and empirical contributions. *ZDM Mathematics Education*, 49(3), 307-322. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0864-6>
- Silva, M., Lopes, R., y Costa, A. (2023). Doing mathematics with music: Creating epistemic environments. *Journal of Educational Research*, 45(3), 231-250. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12034>
- Tokac, U., Novak, E., y Thompson, C. G. (2019). Effects of game-based learning on students' mathematics achievement: A meta-analysis. *Journal of Educational Psychology*, 111(7), 1171-1183. <https://doi.org/10.1037/edu0000339>
- Trías Seferian, D., Sastre Abreu, H. y Cuadros-Jiménez, O. E. (2024). Motivación y autorregulación en el desempeño en matemáticas en estudiantes de Educación Secundaria. *Revista Colombiana de Educación*, 92, 209-232. <https://doi.org/10.17227/rce.num92-17121>
- Ubeda, L. M., Guinjoan, M., y Alacañiz, C. (2017). Mediatrix, Circuncentro y Diagrama de Voronoi en Educación Primaria: experimento con M&M's. In *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática: Libro de actas* (pp. 24-32). Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESMP).
- Villamizar Acevedo, G., Araujo Arenas, T. Y., y Trujillo Calderón, W. J. (2020). Relación entre ansiedad matemática y rendimiento académico en matemáticas en estudiantes de secundaria. *Ciencias Psicológicas*, 14(1), e-2174. <https://doi.org/10.22235/cp.v14i1.2174>
- White, J., y McCoy, J. (2019). Effects of game-based learning on attitude and achievement in elementary mathematics. *Networks: An Online Journal for Teacher Research*, 21(1). <https://doi.org/10.4148/2470-6353.1259>

Autora de correspondencia:

MARÍA LUISA RODRÍGUEZ ARÉVALO

Dirección: Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, Av. Abraham Lincoln esq. Av. Simón Bolívar, Santo Domingo, República Dominicana
mariarodriguez@pucmm.edu.do

Una obra que transforma nuestra visión de las matemáticas.

Reseña de *El infinito placer de las matemáticas*

David Eduardo León¹



Las matemáticas han sido generalmente percibidas como una disciplina compleja, plagada de reglas estrictas y símbolos abstractos que parecen ajenos a la vida cotidiana. Sin embargo, en *El infinito placer de las matemáticas*, Alessandro Maccarrone desafía esta concepción y presenta una perspectiva diferente: las matemáticas como un lenguaje esencial para comprender el mundo, un arte que revela la estructura oculta del universo y una fuente inagotable de asombro y curiosidad.

Desde el inicio, el autor deja claro que su propósito no es impartir matemáticas de manera convencional, sino guiar al lector en un recorrido por algunas de las ideas más fascinantes de la disciplina. A lo largo de diecisiete capítulos, cada uno dedicado a un concepto fundamental, el libro ofrece una exploración accesible y visual de los números, patrones y formas geométricas, alejándose del enfoque memorístico con el que comúnmente se enseñan. En su lugar, promueve una experiencia de aprendizaje más intuitiva y significativa.

Fecha de recepción: 8 de marzo de 2025. **Fecha de aceptación:** 7 de mayo de 2025.

¹ Servicio Nacional de Aprendizaje SENA, eduardoleon9010@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-7339-0068>

La presente reseña se organiza en varios apartados que analizan diferentes aspectos de la obra: el vínculo entre las matemáticas y la vida cotidiana, su impacto educativo, su dimensión filosófica, así como el estilo del autor. Se cierra con un apartado de conclusiones que resume los aportes más significativos del libro y reflexiona sobre su relevancia en el contexto actual.

LAS MATEMÁTICAS EN LA VIDA COTIDIANA

Uno de los mayores aciertos de la obra es su capacidad para vincular las matemáticas con la realidad que nos rodea. A través de una prosa clara y amena, Maccarrone introduce conceptos que, a primera vista, pueden parecer abstractos, pero que se manifiestan en la naturaleza, el arte y la tecnología. Desde la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea, visibles en la disposición de los pétalos de una flor o en la arquitectura clásica, hasta los números primos, cuyo misterio ha intrigado a los matemáticos durante siglos, el libro demuestra que las matemáticas no solo trascienden los libros de texto, sino que están presentes en nuestro entorno de manera natural.

Además de resaltar su belleza intrínseca, el autor subraya la utilidad de las matemáticas como herramienta para la toma de decisiones. En situaciones cotidianas como evaluar probabilidades en una inversión financiera o interpretar estadísticas en los medios, la comprensión matemática permite analizar la información con mayor rigor y evitar sesgos cognitivos. Maccarrone aborda estos temas de forma accesible, sin tecnicismos innecesarios, demostrando la aplicabilidad de los conceptos matemáticos en la vida diaria.

PENSAMIENTO CRÍTICO Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Otro de los aspectos más relevantes del libro, es su énfasis en el pensamiento crítico. En una sociedad donde los datos y las estadísticas pueden ser manipulados con facilidad, el autor destaca la importancia de las matemáticas como herramienta para interpretar la información con precisión y evitar caer en la desinformación. A través de ejemplos concretos, se exploran errores comunes en la representación de gráficos y la manera en que las probabilidades pueden ser malinterpretadas en la toma de decisiones.

El libro también aborda uno de los mitos más extendidos sobre esta disciplina: la idea de que las matemáticas son internamente difíciles o inaccesibles. Maccarrone argumenta que el problema no radica en la materia en sí, sino en la forma en que ha sido enseñada históricamente. En muchos sistemas educativos, los estudiantes son obligados a memorizar fórmulas y algoritmos sin comprender su significado, lo que genera una desconexión entre el aprendizaje y su aplicación. En contraposición, el autor propone un enfoque basado en la intuición y la exploración, permitiendo que los conceptos matemáticos se asimilen de manera más natural y significativa.

Esta visión se ve reforzada por la estructura visual del libro. No se limita a la exposición escrita, sino que incorpora ilustraciones y diagramas que complementan la explicación de los conceptos. Esta combinación de texto e imagen resulta especialmente útil para quienes han encontrado dificultades con los métodos tradicionales de enseñanza, ya que facilita una comprensión más profunda y accesible.

UN FORMATO INNOVADOR Y FLEXIBLE

Otro aspecto destacable es su estructura no lineal. En lugar de seguir un orden secuencial rígido, cada capítulo funciona como una unidad independiente, permitiendo que el lector explore los temas según sus intereses. Esta flexibilidad hace que la lectura sea más dinámica y personalizada, alineándose con la idea central del libro: las matemáticas no deben ser un campo rígido y dogmático, sino una exploración abierta y enriquecedora.

Desde su publicación, *El infinito placer de las matemáticas* ha sido ampliamente elogiado tanto por la crítica como por el público. Su primera edición se agotó rápidamente y ha sido recomendada en diversos medios de comunicación de España. Programas como La Ventana de Cadena SER han señalado que la obra “da la vuelta a la imagen de las matemáticas como ásperas e incomprensibles y nos devuelve su belleza”. De igual manera, El Ojo Crítico de RNE ha destacado su enfoque innovador y su capacidad para hacer comprensibles conceptos matemáticos complejos incluso para quienes no tienen formación en el área.

IMPACTO EN LA EDUCACIÓN Y LA DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

Más allá de su éxito editorial, el libro tiene un impacto significativo en la educación matemática. Puede ser un recurso valioso para docentes que buscan nuevas estrategias para motivar a sus estudiantes y fomentar una actitud positiva hacia las matemáticas. En lugar de centrarse únicamente en la resolución de ejercicios mecánicos, la obra propone una manera diferente de abordar los números y sus aplicaciones, destacando su poder explicativo y su conexión con otras disciplinas.

Asimismo, plantea preguntas filosóficas fundamentales sobre la naturaleza de las matemáticas. A lo largo de la historia, se ha debatido si los números y estructuras matemáticas son invenciones humanas o si existen independientemente de nuestra percepción. Maccarrone no ofrece respuestas definitivas, pero invita a la reflexión con cuestiones como: ¿las matemáticas son un descubrimiento o una creación? ¿Por qué ciertos patrones aparecen repetidamente en la naturaleza? ¿Existe una estructura matemática subyacente en el universo o simplemente proyectamos orden en un mundo caótico? Estas preguntas enriquecen la experiencia del lector, llevándolo más allá de los conceptos numéricos y hacia una exploración más profunda del conocimiento.

UN ESTILO ACCESIBLE Y CAUTIVADOR

El estilo de (Maccarrone, 2023) es otro de los factores clave en la efectividad del libro. Su escritura es clara, entusiasta y, en ocasiones, acompañada de un sutil sentido del humor que hace que la lectura sea amena. A diferencia de otros textos de divulgación matemática que pueden volverse densos y técnicos, *El infinito placer de las matemáticas* logra un equilibrio entre profundidad y accesibilidad, manteniendo el rigor sin perder dinamismo.

CONCLUSIÓN

El infinito placer de las matemáticas es mucho más que un libro de divulgación: es una invitación a reconsiderar nuestra relación con una disciplina que, lejos de limitarse a una colección de reglas y fórmulas abstractas, constituye un lenguaje universal para interpretar el mundo. A través de una narrativa

accesible, una estructura flexible y un enfoque visual innovador, Alessandro Maccarrone demuestra que las matemáticas no representan un obstáculo impuesto, sino una forma de pensamiento que expande nuestra comprensión de la realidad.

Esta obra consigue acercar las matemáticas a un público amplio y diverso, al tiempo que pone en tela de juicio algunos de los paradigmas educativos más arraigados. Propone así una manera más intuitiva y significativa de aprender, en la que la exploración, la curiosidad y la conexión con el mundo cotidiano se convierten en elementos clave. Con ello, el autor transforma la percepción tradicional de las matemáticas como disciplina árida y las presenta como una herramienta de creatividad, belleza y pensamiento crítico.

Lejos de restringirse a fines pedagógicos o divulgativos, el libro se adentra, también, en cuestiones de carácter filosófico sobre la naturaleza del conocimiento matemático. ¿Son las matemáticas una invención humana o un descubrimiento inherente al universo? ¿Por qué ciertos patrones numéricos emergen en la naturaleza? Estas preguntas despiertan la curiosidad del lector y revelan la profundidad de una disciplina que ha moldeado, silenciosamente, nuestra comprensión del cosmos.

En un contexto global cada vez más mediado por los datos, la lógica y la tecnología, el pensamiento matemático se vuelve una competencia esencial. Maccarrone recuerda que comprender los números no es únicamente una destreza académica, sino una habilidad crítica para la vida moderna. Nos permite tomar mejores decisiones, interpretar información con mayor criterio e incluso maravillarnos ante la estructura oculta del universo.

En definitiva, *El infinito placer de las matemáticas* no es un libro sobre fórmulas: es una celebración del deseo humano de comprender. Su propuesta nos anima a mirar las matemáticas con otros ojos, no como un terreno exclusivo de expertos, sino como una experiencia intelectual al alcance de todas las personas.

Desde esta perspectiva, invito a las lectoras y los lectores de la *Revista Educación Matemática* a explorar esta obra, cuya lectura enriquecerá su visión de las matemáticas y les permitirá reencontrarse con el asombro, la belleza y el placer de pensar.

AGRADECIMIENTOS:

Un agradecimiento especial a mi hija Sara León por su curiosidad y motivación, que han sido una fuente de inspiración para este trabajo.

REFERENCIA

Maccarrone, A. (2023). *El infinito placer de las matemáticas*. Blackie Books.

Datos de la obra

Autor: Alessandro Maccarrone

Título: *El infinito placer de las matemáticas*

Editorial: Blackie Books

Número de páginas: 472

ISBN: 9788410025394

Autor de correspondencia:

DAVID EDUARDO LEÓN

Dirección: Calle 57 No. 8 - 69 Bogotá D.C., Cundinamarca, Colombia
eduardoleon9010@gmail.com

Libro SOMIDEM: *Tendencias en la Educación Matemática 2024*

Guadalupe Vera-Soria¹

La educación matemática es un campo disciplinar dinámico que evoluciona constantemente a través de experiencias colectivas, y de las perspectivas críticas de la comunidad académica. Desde la Editorial de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática (SOMIDEM), se atiende el compromiso por impulsar el intercambio de conocimientos acerca de esta disciplina, con la publicación de la obra *Tendencias en la Educación Matemática 2024*, la cual recopila el testimonio de las investigaciones presentadas en el X Taller Internacional Tendencias en Educación Matemática Basada en la Investigación (TEMBI 10).

El libro, editado por Estela Juárez Ruiz y Lidia Hernández Rebollar, consta de ocho capítulos en los que se ofrece un panorama en torno a cuatro tendencias en la investigación en educación matemática: la creatividad en educación matemática, la comprensión de conceptos matemáticos, la construcción de modelos mentales en las matemáticas y, el uso de herramientas tecnológicas para el aprendizaje de las matemáticas.

A continuación, presento una reseña de esta obra, que forma parte de la serie sobre “Innovaciones en investigación en matemática educativa” de la Editorial SOMIDEM, en la que expongo una visión de las propuestas que integran el libro, así como una reflexión crítica sobre su aporte para conectar la teoría y la práctica en la educación matemática.



¹ Universidad de Guadalajara, guadalupe.vera@academicos.udg.mx, <https://orcid.org/0000-0001-8294-6585>

Los capítulos uno y dos, conforman la primera tendencia sobre “creatividad en la educación matemática”. En ellos, se aborda el pensamiento creativo como una competencia esencial del siglo XXI. Primero, Josip Slisko explora el uso de acertijos geométricos con cerillos para fomentar la creatividad en 24 participantes de un taller de TEMBI 10 –profesores de matemáticas y estudiantes de licenciatura y posgrado.

La propuesta revisa modelos teóricos sobre creatividad y describe los atributos de las tareas que fomentan el pensamiento creativo. A través de la interacción en un grupo de Facebook, los participantes resolvieron en tiempo real dos acertijos y propusieron diversas soluciones que superaron en originalidad soluciones históricas y algunas popularmente difundidas en internet. Este trabajo evidenció la efectividad de las actividades propuestas para generar soluciones múltiples, y critica la tendencia en la literatura a presentar una única solución a los problemas matemáticos.

Ljerkka Jukić Matić, presenta enfoques didácticos que estimulan la creatividad en el aula mediante tareas matemáticas abiertas, tareas de soluciones múltiples, el planteamiento de problemas y el uso de trípticos o tareas estructuradas en tres fases, diseñadas para promover el pensamiento flexible y la originalidad en los estudiantes. La autora, reconoce también el impacto del ambiente escolar, la colaboración entre pares y el apoyo docente en el desarrollo del pensamiento creativo y, concluye reflexionando sobre la necesidad de una cultura escolar que integre estas estrategias didácticas que fomentan la creatividad, como una componente esencial para el aprendizaje de las matemáticas.

En la segunda tendencia de “comprensión de conceptos matemáticos”, se presentan dos investigaciones que aportan a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El estudio del capítulo tres, conducido por Verónica Vargas y Luis Montero, analiza cómo la modelación matemática en contextos de sostenibilidad ambiental puede fomentar el aprendizaje de conceptos matemáticos como razones, proporciones y funciones lineales. Nueve estudiantes de posgrado resolvieron una actividad contextualizada en la tala de árboles y la reforestación de un bosque. Con base en los principios de la perspectiva de modelos y modelación, se evaluaron los productos escritos (cartas, tablas fórmulas) y las reflexiones de los participantes en foros virtuales, evidenciando haber llegado a integrar los conocimientos matemáticos con valores ciudadanos como la conciencia ambiental.

En el capítulo cuatro, Eddie Aparicio-Landa, Landy Sosa-Moguel, Camila Magaña y Maleni Padilla exploran el aprendizaje de las propiedades de contracción y traslación de la integral definida en 19 profesores de matemáticas en

formación, mediante tareas diseñadas para promover la abstracción reflexiva. Se emplearon representaciones geométricas y analíticas para favorecer la comprensión de estas propiedades como relaciones invariantes en procesos de acumulación. Los resultados muestran que, mientras la propiedad de traslación pudo ser abstraída y generalizada por parte de los futuros profesores, la propiedad de contracción solo se comprendió en casos particulares, sin lograr su generalización. Se concluyó que aunque el enfoque basado en tareas con representaciones geométrico-analíticas favoreció la comprensión conceptual, se requiere un énfasis mayor en la relación geométrica entre el coeficiente del argumento de las funciones y sus transformaciones gráficas.

Los trabajos de la tercera tendencia de “construcción de modelos mentales en las matemáticas”, destacan la importancia de los objetos mentales en el aprendizaje de los números decimales y en la resolución de problemas. En la investigación del capítulo cinco titulada “objetos mentales sobre números decimales: Un estudio con alumnos de educación secundaria”, los autores Alejandro Esparza, Carlos Valenzuela, Adrián Gómez y Claudia Orozco plantean como objetivo identificar los objetos mentales que estudiantes de segundo de secundaria (13-14 años) construyen sobre los números decimales, en el marco de la teoría de los modelos teóricos locales, que abarca cuatro componentes: el modelo de competencia formal, el modelo de enseñanza, el modelo de comunicación y el modelo de cognición.

Centrado en esta última componente, los resultados evidenciaron dificultades persistentes en la clasificación, comparación, conversión y operación con números decimales. Se identificó la confusión entre número y su notación decimal, aplicar reglas propias de los números naturales a los números decimales, desconocer la propiedad de densidad de los números decimales. Asimismo, se documentó el síndrome MADA, que implica atribuir a la multiplicación un efecto de incrementar un valor y a la división uno que disminuye. El estudio aporta información valiosa para mejorar la enseñanza de los números decimales.

Luego, la relación entre representaciones gráficas situacionales y matemáticas, generadas por estudiantes de bachillerato y sus respuestas al resolver el problema del árbol caído, es analizada en el capítulo seis por Martha Patricia Velasco y Josip Slisko. Con la participación de 54 estudiantes que trabajaron de forma individual y grupal, se identificaron tres tipos principales de dibujos: situacionales (pictóricos), matemáticos (que modela matemáticamente la solución) y mixtos (un dibujo matemático sobre uno situacional), encontrando una fuerte correlación entre las respuestas correctas y el uso de dibujos matemáticos, dobles (dos

representaciones separadas, matemática y situacional) y mixtos. La investigación evidencia que la habilidad de representaciones matemáticas favorece la comprensión y planificación de la solución de problemas verbales.

Los dos estudios en el eje de “uso de herramientas tecnológicas para el aprendizaje de las matemáticas” ilustran la efectividad del uso reflexivo de las herramientas tecnológicas para dar significado a los objetos matemáticos. En el capítulo siete, las autoras Ingrid Quilantán y Flor Rodríguez realizaron un estudio descriptivo cuyo objetivo fue proponer una actividad basada en la modelación matemática para promover la comprensión de la función logística por parte de estudiantes de secundaria, mediante la solución de problemas reales y con apoyo del software GeoGebra.

La necesidad de aprendizaje de la función logística se identificó en el plan de estudios del nivel básico, específicamente en la asignatura de ciencias en primero de secundaria, donde se estudian las interacciones depredador–presa y el equilibrio de poblaciones en un ecosistema. Esta función modela matemáticamente el crecimiento poblacional, y su gráfica es una curva sigmoidea cuyas variables son población (p) y tiempo (t): $p(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$. En una etapa inicial, el crecimiento se modela de forma exponencial y posteriormente desacelera hasta una determinada cota.

Con sustento en la modelación matemática, que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje, se diseñó una actividad con dos problemas –uno, sobre la propagación de un rumor y, otro, sobre el crecimiento de bacterias–, en los que se incorporaron el llenado de tablas, la lectura de gráficas y la predicción de cantidades de población.

Posteriormente, se realizó la aplicación de la actividad en un grupo de 15 estudiantes de tercer grado de secundaria y se analizaron sus respuestas. Los principales hallazgos indican que los estudiantes lograron identificar las propiedades de la función logística, como su cota o constante de capacidad de carga, y relacionaron la función con una idea intuitiva de razón de cambio. Así mismo, se pudo verificar que la manipulación dinámica en las gráficas representadas en GeoGebra permitió la predicción e interpretación cualitativa de los fenómenos propuestos.

Finalmente, en la investigación del capítulo ocho, llevada a cabo por Verónica Vargas, Carlos Valenzuela y Martha Aguiar, se identifican las técnicas que emplean estudiantes de posgrado en enseñanza de las matemáticas, al resolver un problema verbal modelado por un sistema de ecuaciones lineales mediante el uso de la hoja de cálculo, además de analizar sus percepciones sobre el potencial pedagógico de esta herramienta.

Desde el enfoque de génesis instrumental y la triada Tarea–Técnica–Tarea, se identificó que los estudiantes usaron diversas técnicas, como el uso de celdas como variables, la síntesis de relaciones en hoja de cálculo, uso de determinantes, entre otras –algunas directamente en hoja de cálculo y otras combinando además lápiz y papel y GeoGebra–. Los participantes reconocieron el potencial de la hoja de cálculo como herramienta para la comprensión de conceptos como variable, ecuación o incógnita. Se concluye que el uso de la hoja de cálculo permite un tratamiento dinámico de los objetos algebraicos y favorece la transición hacia un pensamiento matemático significativo.

El libro *Tendencias en la Educación Matemática 2024* abre líneas de acción para llevar a cabo investigaciones y prácticas pedagógicas que fortalecen el diálogo entre teoría y práctica en la educación matemática: fomentar el pensamiento creativo como habilidad para resolver problemas con múltiples soluciones, la comprensión profunda de conceptos matemáticos mediante la modelación y la enseñanza interdisciplinaria, representar las relaciones matemáticas mediante modelos mentales significativos, y fortalecer la comprensión matemática mediante el uso didáctico y reflexivo de tecnologías educativas.

La obra desafía la concepción tradicional de la enseñanza, centrada en la transmisión de contenidos y propone, en su lugar, tratar la matemática como una forma de interpretar y describir los fenómenos. Se documentan tendencias que responden a demandas por una educación que forme a las nuevas generaciones como personas capaces de pensar y actuar de manera crítica y creativa, en espacios de exploración y colaboración. Futuras ediciones del taller podrían discutir el papel de la formación del docente de matemáticas como eje transversal para el desarrollo de estas tendencias.

DATOS DE LA OBRA

Juárez Ruiz, E. L., y Hernández Rebollar, L. A. (Ed.) (2024). *Tendencias en la Educación Matemática 2024*. Editorial SOMIDEM. <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/02>

Datos de correspondencia

GUADALUPE VERA-SORIA

Dirección postal: Marcelino García Barragán #1421, colonia Olímpica,
C.P. 44430, Guadalajara, Jalisco, México. Edificio V, tercer nivel Cubículo 6
guadalupe.vera@academicos.udg.mx

Teléfono: +52 (33) 1378 5900 ext. 27753